arXiv:2603.06109v1 [math.FA] 6 Mar 2026

准非递增序列的 Rubio de Francia 外推定理

Monika Singh Lady Shri Ram女子学院（德里大学）数学系，拉杰帕特·纳加尔，新德里-110 024，印度**电子邮箱：**monikasingh@lsr.du.ac.in

Amiran Gogatishvili*捷克科学院数学研究所，Zitna 25，110 00，布拉格1，捷克共和国**电子邮箱：**gogatish@math.cas.cz

Rahul Panchal
应用科学与人文系，工程与技术学院，维韦卡南达职业研究学院技术校区，皮坦普拉，新德里，110 034，印度**电子邮箱：**rahulpanchalmaths@gmail.com

Arun Pal Singh德里大学Dyal Singh学院数学系，洛迪路，新德里-110 003，印度**电子邮箱：**arunpalsingh@dsc.du.ac.in

摘要

我们证明了具有 $\mathcal{QB}_{\beta,p}$ 权重类的一对准非递增序列的离散Rubio de Francia外推定理。此外，我们证明了从 $l^p_w(\mathbb{Z}^+)$ 所定义的准非递增序列类上，广义离散Hardy平均算子的有界性的权刻画。

2020*AMS*学科分类。26D10, 26D15, 47B37关键词与短语。离散平均算子；幂法则；权重序列；准非递增序列；非负序列；Rubio de Francia外推。

1 引言

权序列 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，是指一个由实数组成的非负序列。若权序列 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 属于离散的 Ariˇno-Muckenhoupt 权重类 $\mathcal{B}_p$ （见 [1]），则

*通讯作者

存在一个常数 $c>0$，使得

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^{p}w(k)\leq c\sum_{k=1}^{n}w(k)\text{ for all }n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

离散 $\mathcal{B}_p$ 权类是重要的权重类之一，因为它刻画了离散Hardy平均算子的有界性

$$(\mathcal{A}y)(n):=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y(k), \tag{1.1}$$

在一类非负非递增序列 $\{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 上。具体而言，有如下结论：**定理 A.** [1] 设 $1\leq p<\infty$. 则存在常数 $C>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{A}y)^{p}(k)w(k)\leq C\sum_{k=1}^{\infty}y^{p}(k)w(k)$$

对所有非负非递增序列 $\{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 成立，当且仅当 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{B}_p$.

最近，在 [23], 中，Saker 和 Agarwal 利用离散权重类$\mathcal{B}_p$，为非负非递增序列类证明了离散*Rubio de Francia*外推定理。具体而言，他们证明了以下结论：

定理 B. [23] 设 φ 是定义在$(0,\infty)$ 上的递增函数，且 $0<p_0<\infty$. 假设对每个 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{B}_{p_0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}f^{p_0}(k)w(k)\leq\varphi(\mathcal{B}_{p_0}(w))\sum_{k=1}^{\infty}g^{p_0}(k)w(k)$$

对每个非负非递增序列 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\ and\ \{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 都成立。那么，对于每个 $0<p<\infty$ 和 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{B}_p$，以下结论成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}f^{p}(k)w(k)\leq\varphi^{*}(\mathcal{B}_p(w))\sum_{k=1}^{\infty}g^{p}(k)w(k),$$

其中，$\varphi^{*}(\mathcal{B}_p(w))$ 如 [23]所示，而 $\mathcal{B}_p(w)$ 是定义如下的常数

$$\mathcal{B}_p(w):=\inf\left\{c\geq1:\sum_{k=1}^{n}w(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^{p}w(k)\leq c\sum_{k=1}^{n}w(k),\text{ for all }n\in\mathbb{Z}^{+}\right\}.$$

定理 B 的连续版本由 Carro 和 Lorente 在 2010 [5] 中针对具有 B_p 权重类的非负非递增可测函数证明。B_p 权重类是离散的权序列 $\mathcal{B}_p$ 类的连续版本。若存在常数 $c>0$ 使得不等式成立，则称权 w 属于类 $B_p\,(p>0)$,

$$\int_{r}^{\infty}\left(\frac{r}{x}\right)^{p}w(x)dx\leq c\int_{0}^{r}w(x)dx$$

对每个 $r>0.$ 都成立。记

$$[w]_{B_p}:=\inf\left\{c\geq1:\int_{0}^{r}w(x)dx+\int_{r}^{\infty}\left(\frac{r}{x}\right)^{p}w(x)dx\leq c\int_{0}^{r}w(x)dx,\,r>0\right\}.$$

B_p类权的重要性质之一（见 [5, 6]）是一个开放端性质，其表述为：如果 $w \in B_p$ $(p > 0)$，那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $w \in B_{p-\varepsilon}$. 此外，

$$[w]_{B_{p-\varepsilon}} \leq \frac{c[w]_{B_p}}{1 - \varepsilon\alpha^p[w]_{B_p}} \tag{1.2}$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 是通用常数， ε 满足 $1 - \varepsilon\alpha^p[w]_{B_p} > 0$，这一点对于证明下文给出的 Carro 和 Lorente 外推结果至关重要。

定理 C。 [5] 设 φ 是定义在 $(0, \infty)$上的递增函数，(f, g) 是一对定义在 $(0, \infty)$ 上的正的非递增函数，并且 $0 < p_0 < \infty$. 。假设对每个 $w \in B_{p_0}$，不等式

$$\int_0^\infty f^{p_0}(x)w(x)dx \leq \varphi([w]_{B_{p_0}}) \int_0^\infty g^{p_0}(x)w(x)dx$$

成立。那么对所有 $0 < p < \infty$ 和 $w \in B_p$，以下结论成立：

$$\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx \leq \tilde{\varphi}([w]_{B_p}) \int_0^\infty g^p(x)w(x)dx,$$

其中

$$\tilde{\varphi}([w]_{B_p}) := \inf_{0<\varepsilon<\frac{p_0}{p\alpha^p[w]_{B_p}}} \varphi\left(\frac{p_0}{\varepsilon}\right)^{p/p_0} \frac{c[w]_{B_p}}{1 - \frac{\varepsilon p}{p_0}\alpha^p[w]_{B_p}}$$

其中 c 如(1.2)中所示。

建立定理 C 的一个重要中间步骤，是证明广义 Hardy 平均算子对非负非递增函数的有界性，见 [5, 7]。

[5] 中得到的结果，与 Rubio de Francia 针对非负可测函数、使用来自 A_p 权重类的权所建立的外推结果相对应（见 [17]）；该权重类通常称为 Muckenhoupt 权重类。它是一个重要的权重类，用于刻画 Hardy–Littlewood 极大算子 [17], 和 Riesz 势算子 [16]在 Lebesgue 空间及大勒贝格空间 [11, 13, 16]中的有界性。事实上，西班牙数学家 Jose L. Rubio de Francia 于 1982-85 [19, 20, 21], 年间在 Lebesgue 空间中创立并发展了外推理论，该理论如今以他的名字命名。关于这一理论的详细研究，参见 [8, 9, 10]。

1994年，Bergh、Burenkov 和 Persson [4] 研究了 Lebesgue 空间中带幂型权的准单调函数的 Hardy 不等式。对于 $\beta \in \mathbb{R}$， 若可测函数 f 属于 Q_β， 准非负非递增函数类，则称其满足 $x^{-\beta}f(x)$ 为非递增函数。显然，当 $\beta = 0$， 时，它就成为非负非递增函数类。在 [15], 中，作者专门研究了准单调函数的加权不等式。后来， [14]证明了带一般权的准非负非递增函数类的 Hardy 不等式。下述结果已得到证明：

定理 D。 [14] 对于 $1 \leq p < \infty$，$\beta > -1$，不等式

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right) \leq C\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx,$$

成立 对所有 $f \in Q_\beta$，当且仅当 $w \in QB_{\beta,\ p}$，即权重 w 满足该条件 ：

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^p w(x)dx \leq C\int_0^r \left(\frac{x}{r}\right)^{\beta p} w(x)dx,\ r > 0.$$

请注意，对于 $\beta = 0$，权重类 $QB_{\beta,\ p}$ 退化为类 B_p. 。2023 年，作者[26] 将 Carro 和 Lorente 的外推结果推广到了非负准非递增函数类。

受上述研究启发，本文的主要目标是证明适用于非负准非递增序列的 Rubio de Francia外推定理。首先，在第 2 节中，我们给出后文将用到的一些预备知识和已知结果，并为作用于非负准非递增序列的广义 Hardy 平均算子建立 Hardy 不等式。在第 3 节中，我们为权重类 $\mathcal{QB}_{\beta,\ p}$ 建立开端性质，最终据此为准非递增序列建立 Rubio de Francia 外推结果。

2 离散广义 Hardy 平均算子

本节将介绍全文中会用到的一些基本术语和引理。随后，我们将在 Lebesgue 序列空间框架下，针对准非递增序列类，刻画离散广义 Hardy 算子的有界性。我们从以下内容开始:

对于 $\beta \geq -1$ 和 $p > 0$，权序列 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 若满足以下条件，则称其属于类 $\mathcal{QB}_{\beta,\ p}$ 若存在$c > 0$，使得它满足以下不等式

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^p w(k) \leq c\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} w(k) \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^+ .$$

若 $\beta = 0$，我们将 $\mathcal{B}_{0,\ p} =: \mathcal{B}_p$，称为权的 Ari˜no-Muckenhoupt 类。注意,

$$\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p} \Leftrightarrow \{k^{\beta p}w(k)\} \in \mathcal{B}_{(\beta+1)p}.$$

对于权序列 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,\ p}$，我们定义其 $\mathcal{QB}_{\beta,\ p}$ 常数如下:

$$[w]_{\mathcal{QB}_{\beta,p}} := \inf\left\{d \geq 1 : \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} w(k) + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^p w(k) \leq d\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} w(k)\right\}.$$

对于 $\beta \geq -1$，若序列 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$属于类 $\mathcal{Q}_\beta$，且序列 $\{k^{-\beta}f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$是非递增的，则称此类序列为拟非递增序列。拟非递增序列最初是在 [22, 25] 中定义的。

对于给定的非负序列 $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，离散广义 *Hardy* 平均算子定义为

$$(\mathcal{A}_\psi f)(k) := \frac{1}{\Psi(k)}\sum_{\tau=1}^{k} f(\tau)\psi(\tau),$$

其中 $\Psi(k) := \sum_{\tau=1}^{k}\psi(\tau)$，且 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$是一个非负序列。

在本文中，我们将经常依赖以下引理。

引理 E. [2] **(幂法则 I)** 设 $0 \leq q < \infty$ 和 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是非负序列。则以下结论成立:

$$\min\{1,q\}\sum_{k=1}^{n} f(k)\left(\sum_{j=1}^{k} f(j)\right)^{q-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^q \leq \max\{1,q\}\sum_{k=1}^{n} f(k)\left(\sum_{j=1}^{k} f(j)\right)^{q-1}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}^+$.
特别地，在引理 E（幂法则）中取 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} = \{1\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，我们得到如下估计：

$$\min\{1,q\}\sum_{k=1}^{n} k^{q-1} \le n^q \le \max\{1,q\}\sum_{k=1}^{n} k^{q-1}.$$

引理 F. [3] **（幂法则 II）** 设 $0 \le q < \infty$ 与 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 为非负序列，且满足 $\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \infty$。则下列结论成立：

$$\min\left\{1,\frac{1}{q}\right\}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^{-q} \le \sum_{k=n}^{\infty} f(k+1)\left(\sum_{j=1}^{k} f(j)\right)^{-q}\left(\sum_{j=1}^{k+1} f(j)\right)^{-1} \le \max\left\{1,\frac{1}{q}\right\}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^{-q}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}^+$.
特别地，在引理 F 中取 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} = \{1\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，我们得到如下 ng:

$$\min\left\{1,\frac{1}{q}\right\} n^{-q} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^q(k+1)} \le \max\left\{1,\frac{1}{q}\right\} n^{-q}.$$

现在我们证明一个具有独立意义的引理。

引理 2.1. 对于 $n < k$、$m \ge 0$，下列结论成立：

$$\frac{1}{2(m+1)}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{m+1} \le \sum_{i=n+1}^{k} \frac{\left(\ln\left(\frac{i}{n}\right)\right)^m}{i} \le \frac{2^{m+2}}{(m+1)}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{m+1}.$$

证明. 左估计：

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{k} \frac{(\ln\left(\frac{i}{n}\right))^m}{i} &\ge \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{k} \frac{(\ln\left(\frac{i}{n}\right))^m}{i-1}\int_{i-1}^{i} dt \\ &\ge \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{k}\int_{i-1}^{i} \frac{(\ln\left(\frac{t}{n}\right))^m}{t} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{n}^{k} \frac{(\ln\left(\frac{t}{n}\right))^m}{t} dt = \frac{1}{2(m+1)}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{m+1}.\end{aligned}$$

右估计：
由于 $n+1 \le k$，我们有 $n(k+1) \le k(n+1) \le k^2$。因此，

$$\left(\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)^{m+1} \le 2^{m+1}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{m+1}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{k} \frac{(\ln\left(\frac{i}{n}\right))^m}{i} &= \sum_{i=n+1}^{k} \frac{\left(\ln\left(\frac{i}{n}\right)\right)^m}{i}\int_{i}^{i+1} dt \\ &\le 2\sum_{i=n+1}^{k}\int_{i}^{i+1} \frac{(\ln\left(\frac{t}{n}\right))^m}{t} dt\end{aligned}$$

$$\leq 2\int_n^{k+1} \frac{(\ln\left(\frac{t}{n}\right))^m}{t}dt = \frac{2}{(m+1)}\left(\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)^{m+1}$$
$$\leq \frac{2^{m+2}}{(m+1)}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{m+1}.$$

□

引理 G。 [2] **(部分和引理)** 设 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是两个非负实数序列，使得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}^+$，以下估计成立：

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\varphi(k) \leq \sum_{k=1}^{n} g(k)\varphi(k)$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 以及每个非负非递增序列 $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$.

引理 H. [24] (**富比尼定理**) 设 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是两个非负实数序列。那么

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\sum_{j=k}^{n} g(j) = \sum_{j=1}^{n} g(j)\sum_{k=1}^{j} f(k)$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}^+$.

引理 2.2. 设给定 $\beta \geq 0$ 。如果非负序列 $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(k) \leq c\sum_{k=n}^{2n} \psi(k), \tag{2.1}$$

则以下结论成立

$$n^\beta \sum_{k=1}^{n} \psi(k) \leq C\sum_{k=1}^{n} k^\beta \psi(k). \tag{2.2}$$

证明。 假设 (2.1) 成立。对于 $n = 1$，2，3，这是平凡的。对于 $n \geq 4$，利用该估计，

$$\frac{n}{4} \leq \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2} \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

我们得到

$$n^\beta \sum_{k=1}^{n} \psi(k) = n^\beta \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(k) + n^\beta \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \psi(k)$$
$$\leq cn^\beta \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{2\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(k) + 2^\beta \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} k^\beta \psi(k)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq cn^{\beta} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \psi(k) + 2^{\beta} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} k^{\beta}\psi(k) \\
&\leq c4^{\beta} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} k^{\beta}\psi(k) + 2^{\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta}\psi(k) \\
&\leq (4^{\beta}c + 2^{\beta}) \sum_{k=1}^{n} k^{\beta}\psi(k) = C \sum_{k=1}^{n} k^{\beta}\psi(k),
\end{aligned}
$$

其中 $C = (4^{\beta}c + 2^{\beta})$。

□

引理 2.3. 设给定 $\beta \geq 0$。若非负序列 $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足条件(2.2)，则存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$
\sum_{k=1}^{n} \psi(k) \leq c \sum_{k=n}^{mn} \psi(k). \tag{2.3}
$$

证明。假设 $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足条件 (2.2)。设 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $C < m^{\beta}$。考虑正整数 mn, 时的 (2.2)，我们有

$$
\begin{aligned}
(mn)^{\beta} \sum_{k=1}^{mn} \psi(k) &\leq C \sum_{k=1}^{mn} k^{\beta}\psi(k) \\
&= C \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\beta}\psi(k) + \sum_{k=n+1}^{mn} k^{\beta}\psi(k) \right) \\
&\leq C \left(n^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \psi(k) + (mn)^{\beta} \sum_{k=n+1}^{mn} \psi(k) \right).
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
m^{\beta} \sum_{k=1}^{mn} \psi(k) \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} \psi(k) + m^{\beta} \sum_{k=n+1}^{mn} \psi(k) \right). \tag{2.4}
$$

不等式 (2.4) 可写为

$$
\sum_{k=1}^{n} \psi(k) \leq m^{\beta} \left(\frac{C-1}{m^{\beta}-C} \right) \sum_{k=n}^{mn} \psi(k).
$$

因此，对于 $c = m^{\beta} \left(\frac{C-1}{m^{\beta}-C} \right)$.，我们得到

(2.3)

□

注 2.4. 关于引理 2.2 的逆命题，若 (2.2) 成立，则不能断言 (2.1) 成立。不过，我们可以保证存在正整数 m，使得 (2.3) 成立。

在 [18], 中，作者针对准非递增序列的子类，证明了广义 Hardy 平均算子有界性的若干不同充要条件，但假设更强。这里我们给出广义 Hardy 平均算子作用于准非递增序列时有界性的刻画。本节的主要结果如下。

定理 2.5. 设 $0 < p < \infty$、 $\beta \geq 0$ 和 $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为给定的非负序列，且满足 (2.1)。则不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{A}_\psi y)^p(n)v(n) \leq C\sum_{n=1}^{\infty}y^p(n)v(n) \tag{2.5}$$

对所有非负序列 $\{y（n）\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_\beta$ 成立，当且仅当权序列 $\{v（n）\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$满足

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^\beta\psi(k)\right)^p\sum_{k=n}^{\infty}\Psi^{-p}(k)v(k) \leq C\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}v(k). \tag{2.6}$$

证明。 假设 (2.5) 成立。对于给定的 $n \in \mathbb{Z}^+$，取

$$y(k) := \begin{cases} k^\beta, & k = 1, 2, 3, \cdots, n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

显然 ， $\{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_\beta$. 于是，对 $\{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，计算 (2.5)，即可得到 (2.6) .
反过来，假设条件 (2.1) 和 (2.6) 成立。显然，根据引理 2.2，估计式 (2.2) 成立。

我们首先考虑 $p > 1$ 的情形。令 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_\beta$ 为任意非负序列。于是，利用幂法则 I、富比尼定理、部分和引理、条件 (2.6)、(2.2) 以及 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{A}_\psi y)^p(n)v(n) &\leq p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}y(j)\psi(j)\right)^{p-1}y(k)\psi(k)\right)\Psi(n)^{-p}v(n) \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}y(j)\psi(j)\right)^{p-1}y(k)\psi(k)\sum_{n=k}^{\infty}\Psi(n)^{-p}v(n) \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}j^\beta\psi(j)}\sum_{j=1}^{k}y(j)j^{-\beta}j^\beta\psi(j)\right)^{p-1}k^{-\beta}y(k) \\
&\qquad \times\left(\sum_{j=1}^{k}j^\beta\psi(j)\right)^{p-1}k^\beta\psi(k)\sum_{n=k}^{\infty}\Psi(n)^{-p}v(n) \\
&\leq Cp\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}j^\beta\psi(j)}\sum_{j=1}^{k}y(j)j^\beta j^{-\beta}\psi(j)\right)^{p-1}k^{-\beta}y(k)k^{\beta p}v(k) \\
&= Cp\sum_{k=1}^{\infty}(A_\Psi y)^{p-1}(k)\left(\frac{k^\beta\sum_{j=1}^{k}\psi(j)}{\sum_{j=1}^{k}j^\beta\psi(j)}\right)^{p-1}y(k)v(k) \\
&\leq C(4^\beta c + 2^\beta)^{p-1}p\sum_{k=1}^{\infty}(A_\Psi y)^{p-1}(k)y(k)v(k) \\
&\leq C_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_\Psi y)^p(k)v(k)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}y(k)^pv(k)\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

其中 $C_1 = Cp(4^\beta c + 2^\beta)^{p-1}$.
现在我们考虑 $0 < p \le 1$ 的情形。令 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为 $\mathcal{Q}_\beta$ 中的任意非负序列。利用条件 (2.2)，序列 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 的第 n 项可写为

$$\begin{aligned} y(n) &= n^{-\beta} y(n) \frac{n^\beta \Psi(n) \sum_{k=1}^n k^\beta \psi(k)}{\Psi(n) \sum_{k=1}^n k^\beta \psi(k)} \\ &\le (4^\beta c + 2^\beta) \frac{1}{\Psi(n)} \sum_{k=1}^n k^{-\beta} y(k) k^\beta \psi(k) \\ &= \frac{(4^\beta c + 2^\beta)}{\Psi(n)} \sum_{k=1}^n y(k)\psi(k). \end{aligned}$$

因此，

$$\left(\sum_{k=1}^n y(k)\psi(k) \right)^{p-1} \le \left(\frac{1}{4^\beta c + 2^\beta} \right)^{p-1} y(n)^{p-1} \Psi(n)^{p-1}. \tag{2.7}$$

现在，由于 考虑 (2.5) 的左端，利用幂法则 I、(2.7) 和富比尼定理，我们得到 et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty (\mathcal{A}_\psi y)^p(n) v(n) &\le \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k y(j)\psi(j) \right)^{p-1} y(k)\psi(k) \right) \Psi(n)^{-p} v(n) \\ &\le \left(\frac{1}{4^\beta c + 2^\beta} \right)^{p-1} \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n y(k)^p \Psi(k)^{p-1} \psi(k) \right) \Psi(n)^{-p} v(n) \\ &= \left(\frac{1}{4^\beta c + 2^\beta} \right)^{p-1} \sum_{k=1}^\infty y(k)^p \Psi(k)^{p-1} \psi(k) \sum_{n=k}^\infty \Psi(n)^{-p} v(n) \\ &\le \left(\frac{1}{4^\beta c + 2^\beta} \right)^{p-1} \sum_{k=1}^\infty k^{-\beta p} y(k)^p \left(\sum_{j=1}^k j^\beta \psi(j) \right)^{p-1} \\ &\qquad \times k^\beta \psi(k) \sum_{n=k}^\infty \Psi(n)^{-p} v(n). \end{aligned} \tag{2.8}$$

由于 $\{k^{-\beta} y(k)\}$ 是一个非递增序列，将部分和引理和条件 (2.6) 应用于 (2.8)，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty (\mathcal{A}_\psi y)^p(n) v(n) &\le C \left(\frac{1}{4^\beta c + 2^\beta} \right)^{p-1} p \sum_{k=1}^\infty k^{-\beta p} y(k)^p k^{\beta p} v(k) \\ &= C_2 \sum_{k=1}^\infty y(k)^p v(k), \end{aligned}$$

其中 $C_2 = C\left(4^\beta c + 2^\beta\right)^{1-p}$. 因此断言得证。 □

注记 2.6. 注意，引理 2.2 中的假设 (2.1) 可以替换为 (2.3)。按照类似的步骤，可以证明这只会影响证明中出现的常数。定理 2.5 的表述也可以作类似修改。

注记 2.7. 注意，当情形为 $\beta = 0$时，条件 (2.6) 化简为 $\mathcal{B}_{\psi,\ p}$ 条件，见下文 (2.8)；准非递增序列类则化简为非递增序列类。在 [23] 和 [24], 中，作者刻画了离散广义 Hardy 平均算子在非递增序列类上的有界性。定理 2.5 推广了 [23, 24]中证明的结果。

具体而言，以下是定理 2.5 的一个特例:

推论 2.8。 设 $0 < p < \infty$ 和 $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 是给定的非负序列。那么不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{A}_{\psi}y)^p(n)v(n) \le C\sum_{n=1}^{\infty}y^p(n)v(n)$$

对所有非负非递增序列 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 成立，当且仅当权序列$\{v(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\Psi(n)}{\Psi(k)}\right)^p v(k) \le C\sum_{k=1}^{n}v(k), \quad for\ all\ \ n\in\mathbb{Z}^+.$$

注记 2.9。 在推论 2.8 中，对于 $\beta \ge 0$, 取 $\{\psi(k) = k^{\beta}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ $\{v(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ $=n\{v(n)$ $n^{\beta p}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \{y_n n^{-\beta}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$, 利用逼近 $\Psi(n) = \sum k^{\beta} \approx n^{\beta+1}$, $_{k=1}$我们得到离散 Hardy 算子（见 (1.1)）在准非递增序列类上的有界性刻画。

推论 2.10. 令 $0 < p < \infty$. 则不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{A}y)^p(n)v(n) \le C\sum_{n=1}^{\infty}y^p(n)v(n)$$

对所有 $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_{\beta}$ 均成立，当且仅当权序列 $\{v(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 满足

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^p v(k) \le C\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} v(k) \quad for\ all\ \ n\in\mathbb{Z}^+.$$

推论 2.10 也可由定理 2.5 得到，特别取 $\{\psi(n) = 1\}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}^+$. 均成立时即可。

3 关于 $\mathcal{Q}_{\beta}$ 的外推定理

本节将证明适用于准非递增序列类的 Rubio de Francia外推定理。在给出主定理之前，我们先陈述证明中需要用到的一些引理。

引理 I. [12] 若 x 和 y 为正且不相等，则对于 $r < 0$ 或 $r > 1$，以下结论成立:

$$ry^{r-1}(x-y) < x^r - y^r < rx^{r-1}(x-y).$$

当 $0 < r < 1$. 时，上述不等式反向成立

对于 $r \in \mathbb{R}$ 和 $\tau \in \mathbb{Z}^+$，前向差分算子定义为

$$\Delta\tau^r = (\tau+1)^r - \tau^r.$$

根据前向差分算子的定义，我们得到

$$\sum_{\tau=1}^{k} \Delta\tau^r = (k+1)^r - 1$$

对所有 $r \in \mathbb{R}$ 和 $\tau \in \mathbb{Z}^+$，以及

$$\sum_{\tau=k+1}^{\infty} \Delta\tau^r = -(k+1)^r$$

对所有 $r \in \mathbb{R}, \quad r < 0$ 和 $\tau \in \mathbb{Z}^+$.

引理 3.1. *1.* 对于 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\sum_{\tau=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\varepsilon+1} \leq \frac{1}{\varepsilon k^{\varepsilon}}.$$

2. 对于 $0 < \varepsilon < 1$，我们有

$$(k+1)^{\varepsilon} \leq \varepsilon \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{\varepsilon-1} + 1, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

证明。 1. 取 $r = -\varepsilon(< 0)$，则对于 $x = \tau, \quad y = \tau - 1, \quad \tau \in \mathbb{Z}^+$，引理 I 给出

$$-\varepsilon(\tau-1)^{-\varepsilon-1} \leq \tau^{-\varepsilon} - (\tau-1)^{-\varepsilon} \leq -\varepsilon\tau^{-\varepsilon-1},$$

即,

$$-\varepsilon(\tau-1)^{-(\varepsilon+1)} \leq \Delta(\tau-1)^{-\varepsilon} \leq -\varepsilon\tau^{-(\varepsilon+1)}.$$

由上述不等式的右端估计可得

$$\sum_{\tau=k+1}^{\infty} \Delta(\tau-1)^{-\varepsilon} \leq -\varepsilon \sum_{\tau=k+1}^{\infty} \tau^{-(\varepsilon+1)}, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

化简后，得到

$$\sum_{\tau=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\varepsilon+1} \leq \frac{1}{\varepsilon k^{\varepsilon}}.$$

2. 在引理 I 中，取 $r = \varepsilon, \ x = \tau + 1, \ y = \tau, \ \tau \in \mathbb{Z}^+$, 可得

$$\varepsilon(\tau+1)^{\varepsilon-1} \leq (\tau+1)^{\varepsilon} - \tau^{\varepsilon} \leq \varepsilon\tau^{\varepsilon-1},$$

即,

$$\varepsilon(\tau+1)^{\varepsilon-1} \leq \Delta\tau^{\varepsilon} \leq \varepsilon\tau^{\varepsilon-1}.$$

对于 $k \in \mathbb{Z}^+$, 上述不等式的右端估计给出

$$\sum_{\tau=1}^{k} \Delta\tau^{\varepsilon} \leq \varepsilon \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{\varepsilon-1}, \ k \in \mathbb{Z}^+,$$

即,

$$(k+1)^{\varepsilon} \le \varepsilon \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{\varepsilon-1} + 1.$$

□

引理 3.2. 设 $p>0$, $\beta>-1$ 和 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p}$，常数为 c。则存在ε, $0<\varepsilon<\frac{1}{2(c+1)\max\left\{\frac{1}{p+\beta p},1\right\}}$，使得 $\{w(k)\} \in \mathcal{QB}_{\beta,p-\varepsilon}$.

证明. 设 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p}$. 根据权重类 $\mathcal{QB}_{\beta,p}$, 的定义，我们有以下估计

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} w(k) + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p} w(k) \le (c+1) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\beta p} w(k). \tag{3.1}$$

此外，我们还有以下估计

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{k} &= \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{k} \le \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} n^{p+\beta p} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{p+\beta p+1}} dt \\
&\le \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{i} + n^{p+\beta p} \int_{i}^{\infty} \frac{1}{t^{p+\beta p+1}} dt = \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{i} + \frac{1}{p+\beta p} \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \\
&= \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p+\beta p}\right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

利用富比尼定理以及估计式 (3.1) 和 (3.2)，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) &\le \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) \\
&\quad + \sum_{i=n}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{p+\beta p} \frac{1}{k}\right) \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) \\
&\le \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p+\beta p}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) \\
&\quad + \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p+\beta p}\right) \left(\frac{n}{i}\right)^{p+\beta p} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) \\
&\le 2\max\left\{\frac{1}{p+\beta p}, 1\right\} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i) + \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{n}{i}\right)^{p} w(i)\right) \\
&\le 2(c+1)\max\left\{\frac{1}{p+\beta p}, 1\right\} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta p} w(i).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

估计式 (3.3) 也可以写成

$$n^{p+\beta p} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{p+\beta p+1}} \sum_{i=1}^{k} i^{\beta p} w(i) \le 2C \sum_{k=1}^{n} k^{\beta p} w(k), \tag{3.4}$$

其中 $C=(c+1)\max\left\{\frac{1}{p+\beta p},1\right\}$.令 $Tf(n)=n^{p+\beta p}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{p+\beta p+1}}f(k)$，其中 $f(k)=\sum_{i=1}^{k}i^{\beta p}w(i)$。

因此，不等式 (3.4) 给出

$$Tf(n)\le 2Cf(n),\quad \text{for all}\quad n.$$

将上述不等式迭代 m 次后，我们得到

$$\underbrace{T\circ\cdots\circ T}_{m}\left(\sum_{i=1}^{n}i^{\beta p}w(i)\right)\le(2C)^m\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}w(k)$$

$$n^{p+\beta p}\sum_{k=n}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{n}\right)^m(m!)^{-1}\frac{1}{k^{p+\beta p+1}}\sum_{i=1}^{k}i^{\beta p}w(i)\le(2C)^m\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}w(k). \tag{3.5}$$

选择 $\varepsilon>0$ 使得 $\varepsilon 2C<1$. 然后利用 (3.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
n^{p+\beta p}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{\varepsilon}\frac{1}{k^{p+\beta p+1}}\sum_{i=1}^{k}i^{\beta p}w(i)&=n^{p+\beta p}\sum_{k=n}^{\infty}\exp\left(\varepsilon\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)\frac{1}{k^{p+\beta p+1}}\sum_{i=1}^{k}i^{\beta p}w(i)\\
&=n^{p+\beta p}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^m\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)^m}{m!}\frac{1}{k^{p+\beta p+1}}\sum_{i=1}^{k}i^{\beta p}w(i)\\
&\le\sum_{m=0}^{\infty}(\varepsilon 2C)^m\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}w(k)\\
&=\frac{1}{1-\varepsilon 2C}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}w(k).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

现在，利用以下估计

$$k^{-p-\beta p+\varepsilon}\lesssim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^{p+\beta p-\varepsilon+1}},$$

由富比尼定理和 (3.6)，我们得到

$$\begin{aligned}
n^{p+\beta p-\varepsilon}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{p-\varepsilon}}w(k)&\lesssim n^{p+\beta p-\varepsilon}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^{p+\beta p-\varepsilon+1}}\right)k^{\beta p}w(k)\\
&\lesssim n^{p+\beta p-\varepsilon}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^{p+\beta p-\varepsilon+1}}\sum_{k=1}^{i}k^{\beta p}w(k)\\
&\lesssim\sum_{k=1}^{n}k^{\beta p}w(k)\\
&\lesssim n^{\beta\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta(p-\varepsilon)}w(k).
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^{p-\varepsilon}w(k)\lesssim n^{\beta(\varepsilon-p)}\sum_{k=1}^{n}k^{\beta(p-\varepsilon)}w(k)$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\beta(p-\varepsilon)} w(k).$$

由此我们证明了

$$\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p-\varepsilon}.$$

□

注记 3.3. 引理 3.2 是对定理 2.6 [23] 的改进。在引理 3.2 中，取 $\beta = 0$ 可得到 Ari˜no–Muckenhoupt 权类的一个重要性质 $\mathcal{B}_p$. 。在 [23], 中，作者在权序列非递增这一附加假设下证明了该情形的引理。这里我们证明了无需这一假设也成立。下面针对 $\beta = 0$ ，即 $\mathcal{B}_p$ 权类，明确陈述引理 3.2。

引理 3.4. 设给定 $p > 0$ ，且 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{B}_p$ 的常数为 c。那么存在 ε、 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\ c+1}$ $() \max\left\{\frac{1}{p},1\right\}$, 使得 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{B}_{p-\varepsilon}$.

引理 3.5. 设 $\beta \geq 0$, $p_0 > 0$ 和 $0 < \varepsilon < p_0(\beta + 1)$。则

$$n^{p_0(1+\beta)-\varepsilon} \leq \tilde{c} \sum_{k=1}^{n} k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon-1},$$

其中 $\tilde{c} :=$ 最大值$\{1,\ p_0(1+\beta)-\varepsilon\}$.

证明。 取 $q = p_0(\beta + 1) - \varepsilon$，由幂法则 I 可得证明。 □

下面我们 给出证明外推主要结果所需的一个重要中间结果 .

命题 3.6. 设 ϕ 是定义在 $(0,\infty)$ $\beta \geq 0$ 上的非递减函数，并给定 $p_0 > 0$ 。假设对于所有权序列 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 属于 $\mathcal{QB}_{\beta,\ p_0}$ ，以下条件成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)w(k) \leq \phi\left([w]_{\mathcal{QB}_{\beta,p_0}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} g(k)w(k),$$

对于非负序列 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$. , 则对于每个 $0 < \varepsilon < p_0(\beta + 1)$，我们都有如下结论

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)k^{p_0-1-\varepsilon} \leq \phi(c(\beta,p_0,\varepsilon)) \sum_{k=1}^{n} g(k)k^{p_0-1-\varepsilon},\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

其中 $c(\beta,p_0,\varepsilon) := \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 最大值$\{p_0(1+\beta)-\varepsilon,1\}$.

证明。 假设 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是非负序列。取一种特定类型的权序列 $w(k) = v(k)$ $k^{p_0-1-\varepsilon}$，其中 $\{v(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是非负非递增序列。我们将证明 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,\ p_0}$. 利用 $\{v(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是非递增序列这一事实，并应用引理 3.5，可得

$$n^{p_0(1+\beta)} \sum_{k=n}^{\infty} w(k) \left(\frac{1}{k}\right)^{p_0} = n^{p_0(1+\beta)} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{p_0} k^{p_0-1-\varepsilon} v(k)$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{p_0(1+\beta)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} v(k) \\
&\le n^{p_0(1+\beta)} v(n) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{1+\varepsilon} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon} \right) \\
&\le n^{p_0(1+\beta)} v(n) \left(\frac{1}{\varepsilon n^{\varepsilon}} + \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right) \\
&= n^{p_0(1+\beta)-\varepsilon} v(n) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{n} \right) \\
&\le n^{p_0(1+\beta)-\varepsilon} v(n) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \\
&\le \tilde{c} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) v(n) \sum_{k=1}^{n} k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon-1} \\
&\le \tilde{c} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \sum_{k=1}^{n} k^{p_0\beta} k^{p_0-1-\varepsilon} v(k) \\
&= c(\beta, p_0, \varepsilon) \sum_{k=1}^{n} k^{p_0\beta} w(k),
\end{aligned}
$$

其中 $c(\beta, p_0, \varepsilon) := \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \tilde{c} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \max\{p_0(1+\beta) - \varepsilon, 1\}$. 因此，对于每个非负非递增序列 $\{v(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，都有 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p_0}$，其中常数为 $c(\beta, p_0, \varepsilon)$。于是，特别地，取 $v(k) = \{\chi_n(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，对于 $\{w(k) := k^{p_0-\varepsilon-1}\chi_n(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$，它属于 $\mathcal{QB}_{\beta,p_0}$，如上所示，由 (3.6) 可得

$$
\sum_{k=1}^{\infty} f(k) k^{p_0-\varepsilon-1} \chi_n(k) \le \phi\left([w]_{\mathcal{QB}_{\beta,p_0}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} g(k) k^{p_0-\varepsilon-1} \chi_n(k).
$$

由于 $[w]_{\mathcal{QB}_{\beta,p_0}} \le c(\beta, p_0, \varepsilon)$ 且 ϕ 是非递减函数，因此可得

$$
\sum_{k=1}^{n} f(k) k^{p_0-\varepsilon-1} \le \phi(c(\beta, p_0, \varepsilon)) \sum_{k=1}^{n} g(k) k^{p_0-\varepsilon-1},\ n \in \mathbb{Z}^+.
$$

因此，证明完成。 □

定理 3.7. 设 ϕ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的非负非递减函数。给定 $p_0 \ge 2$ 和 $\beta \ge 0$。假设对每个 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p_0}$，都有以下关系

$$
\sum_{k=1}^{\infty} f^{p_0}(k) w(k) \le \phi\left([w]_{\mathcal{QB}_{\beta,p_0}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} g^{p_0}(k) w(k)
$$

对于非负序列 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}, \{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_{\beta}$.，那么，对每个 $p \ge p_0$ 以及每个$\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p}$，以下不等式成立:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} f^{p}(k) w(k) \le \tilde{\phi}(p_0, \beta, \phi) \sum_{k=1}^{\infty} g^{p}(k) w(k), \tag{3.7}
$$

其中 $\tilde{\phi}(p_0, \beta, \phi) := C \inf_{0<\varepsilon\le p_0-1} c(p_0, \beta, \varepsilon)$，且 C 是一个正常数。

证明。令 $p \geq p_0$ 和 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{QB}_{\beta,p}$. 假设 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 和 $\{g(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$是非负准非递增序列。由于 $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+} \in \mathcal{Q}_\beta$, 这意味着$\{h(k) = k^{-\beta}f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是一个非递增序列。

令 $0 < \varepsilon \leq p_0 - 1$, 利用 $h(k)$ 单调不增这一事实以及引理 3.5，我们可以估计 $h^{p_0}(k)$，得到

$$\begin{aligned} h^{p_0}(k) &= \frac{k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon}}{k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon}} h^{p_0}(k) \\ &\leq \frac{p_0(1+\beta)-\varepsilon}{k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon}} \left(\sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0(\beta+1)\varepsilon-1} \right) h^{p_0}(k) \\ &\leq \frac{p_0(1+\beta)-\varepsilon}{k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon}} \left(\sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0(\beta+1)\varepsilon-1} h^{p_0}(\tau) \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

现在，考虑 (3.7) 的左端，利用 (3.8)、命题 3.6 和幂法则 I，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f^p(k)w(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta p} h^p(k) w(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\beta p_0} h^{p_0}(k) \right)^{p/p_0} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p_0(1+\beta)-\varepsilon}{k^{p_0(1+\beta)-\varepsilon}} k^{\beta p_0} \left(\sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0(1+\beta)-\varepsilon-1} h^{p_0}(\tau) \right) \right)^{p/p_0} w(k) \\ &= (p_0(1+\beta)-\varepsilon)^{p/p_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{p_0-\varepsilon}} \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0-\varepsilon-1} h^{p_0}(\tau) \tau^{p_0\beta} \right)^{p/p_0} w(k) \\ &= (p_0(1+\beta)-\varepsilon)^{p/p_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{p_0-\varepsilon}} \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0-\varepsilon-1} f^{p_0}(\tau) \right)^{p/p_0} w(k) \\ &\leq (p_0(1+\beta)-\varepsilon)^{p/p_0} \left(\phi \left((p_0(\beta+1)-\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right)^{p/p_0} \times \\ &\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{p_0-\varepsilon}} \sum_{\tau=1}^{k} \tau^{p_0-\varepsilon-1} g^{p_0}(\tau) \right)^{p/p_0} w(k) \\ &\leq \left((p_0(1+\beta)-\varepsilon) \max\{p_0-\varepsilon, 1\} \phi \left((p_0(\beta+1)-\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right)^{p/p_0} \times \\ &\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Psi(k)} \sum_{\tau=1}^{k} g^{p_0}(\tau) \psi(\tau) \right)^{p/p_0} w(k) \\ &= c(p_0, p, \beta, \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{A}_\psi g^{p_0} \right)^{p/p_0}(k) w(k), \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 $\psi(\tau) = \tau^{p_0-\varepsilon-1}$和 $c(p_0, p, \beta, \varepsilon) = \left((p_0(1+\beta)-\varepsilon) \max\{p_0-\varepsilon, 1\} \phi \left((p_0(\beta+1)-\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right)^{p/p_0}$.

由于 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{QB}_{\beta,p}$, 由引理 3.2，存在 σ, $0<\sigma<\frac{1}{2\,[w]_{\mathcal{QB}_{\beta\,p}}\max\left\{\frac{1}{p+\beta p},1\right\}}$ 使得 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{QB}_{\beta,p-\sigma}$. 由于 (3.9) 对任意 ε, $0<\varepsilon\le p_0-1$, 成立，我们可以选取 $\varepsilon>0$使得 $\{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}\in\mathcal{QB}_{\beta,(p_0-\varepsilon)\frac{p}{p_0}}$. 即,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^{(p_0-\varepsilon)\frac{p}{p_0}}w(k)\le C\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta(p_0-\varepsilon)\frac{p}{p_0}}w(k).$$

Or,

$$n^{(p_0-\varepsilon+\beta)\frac{p}{p_0}}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{(p_0-\varepsilon)\frac{p}{p_0}}w(k)\le C\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{\beta p}{p_0}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta(p_0-\varepsilon-1)\frac{p}{p_0}}w(k).$$

由于 $p_0-\varepsilon-1>0$, 我们有

$$n^{(p_0-\varepsilon+\beta)\frac{p}{p_0}}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{(p_0-\varepsilon)\frac{p}{p_0}}w(k)\le C\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{\beta p}{p_0}}w(k)\tag{3.10}$$

现在，由幂法则 I 可得

$$k^{p_0-\varepsilon}\le(p_0-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}k^{p_0-\varepsilon-1}=(p_0-\varepsilon)\Psi(k)$$

and

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\beta}\psi(k)=\sum_{k=1}^{n}k^{p_0-\varepsilon+\beta-1}\le n^{p_0-\varepsilon+\beta}.$$

因此，(3.10) 可以写成

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^{\beta}\psi(k)\right)^{\frac{p}{p_0}}\sum_{k=n}^{\infty}\Psi^{-\frac{p}{p_0}}(k)w(k)\le C(p_0-\varepsilon)^{\frac{p}{p_0}}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{\beta p}{p_0}}w(k).$$

再次由幂法则 I 可得

$$n^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\le(\beta+p_0-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}k^{\beta}\psi(k).$$

因此，根据注记 2.6 和定理 2.5，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\mathcal{A}_{\psi}g^{p_0}\right)(k)\right)^{p/p_0}w(k)\le C\sum_{k=1}^{\infty}g^{p}(k)w(k).\tag{3.11}$$

结合 (3.9) 和 (3.11)，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}f^{p}(k)w(k)\le c(p_0,p,\beta,\varepsilon)C\sum_{k=1}^{\infty}g^{p}(k)w(k).$$

令 $\phi(p_0,p,\beta,\varepsilon)=C\inf_{0<\varepsilon\le p_0-1}c(p_0,p,\beta,\varepsilon)$，于是上述不等式变为

$$\sum_{k=1}^{\infty}f^{p}(k)w(k)\le\tilde{\phi}(p_0,\beta,\phi)\sum_{k=1}^{\infty}g^{p}(k)w(k),$$

至此，证明完成。 □

致谢。 Monika Singh 的研究得到印度国家高等数学委员会的资助，研究项目编号为 02011/14/2023 NBHM(R.P)/R&D II/5951，印度。Amiran Gogatishvili 的研究部分得到捷克科学基金会项目 23-04720S 的资助。中国科学院数学与系统科学研究院得到 RVO:67985840 的资助，此外还得到肖塔·鲁斯塔维利国家科学基金会（SRNSF）项目 FR22-17770 以及哈萨克斯坦共和国教育与科学部项目 AP14869887 的资助。

利益冲突声明。作者声明不存在利益冲突 .

参考文献

[1] G. Bennett and K.-G. Grosse-Erdmann, 递减数列与函数的加权哈代不等式, 《数学年刊》, 334(2006), 489-531.[2]G. Bennett and K.-G. Grosse-Erdmann, 关于正项级数 , 《休斯敦数学杂志》 31(2005), 541-586..[3]N. Bokayev, A. Gogatishvili, N. Bokayev, G. Karshygina, N. Kuzeubayeva*, T. Unver,单调数列锥上离散 *Hardy* 算子的约化定理, 《数学科学》, 纽约, 291 (2025), no.2, 217-223.[4] J. Bergh, V. Burenkov and L.E. Persson, 拟单调函数反向哈代不等式的最佳常数, 《塞格德数学科学学报》, 59 (1994), 221-239.[5] M.J. Carro and M. Lorente, 针对 B_p 权的Rubio de Francia外推定理, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010), 629-640.[6] M.J. Carro, J.A. Raposo and J. Soria, 洛伦兹空间理论与加权不等式的最新进展, 《美国数学会回忆录》, 187 (2007), no. 877.[7] M.J. Carro and J. Soria, 若干积分算子的有界性 , 《加拿大数学杂志》 45 (1993), 195-231.[8]D.V. Cruze-Uribe, 外推与因子, 收录于《函数空间、嵌入与外推》， J. Lukeˇs and L. Pick（编）， 讲义，帕塞基春季分析学校，帕塞基，2017，捷克共和国.[9]D.V. Cruze-Uribe, J.M. Martell and C. P´erez, 从A_∞ 权及其应用进行外推, 《泛函分析杂志》, 213 (2004), 412-439.[10] D.V. Cruze-Uribe, J.M. Martell and C. P´erez, 权、外推与*Rubio de Francia*理论, Birkh $\ddot{a}$user, 2011.[11] A. Fiorenza, B. Gupta and P. Jain, 加权大勒贝格空间的极大定理, 《数学研究》, 188 (2008), 123-133.[12] G. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, 《不等式》， 2^{nd} 版, 剑桥大学出版社, 伦敦, 1964.[13] T. Iwaniec and C. Sbordone, 在最小假设下雅可比行列式的可积性, 《理性力学与分析文献》119 (1992), 129-143.[14]P. Jain, M. Singh and A.P. Singh, 准单调函数的哈代型积分不等式, 《格鲁吉亚数学杂志》, 24 (2016), 523-533.

[15] L. Maligranda, 单调函数的加权不等式, Collect. Math. 48(2-4) (1997), 687-700.[16] A.Meskhi, 大勒贝格空间中势算子有界性的判据, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 169 (2015), 119-132.[17] B. Muckenhoupt, 关于*Hardy*极大函数的加权范数不等式, Trans. Amer. Math. Soc., 165 (1972), 207-226.[18]R. Panchal, M. Singh and A.P. Singh, 准非递增序列上广义离散*Hardy*平均算子的加权不等式, 已提交.[19] J.L. Rubio de Francia, 权的分解与外推, Bull. Amer. Math. Soc. (NS), 7(2):393-395, 1982.[20] J.L. Rubio de Francia, 权理论中的一种新技术 A_p 权, 收录于《Topics in Modern Harmonic Analysis》第I、II卷（都灵/米兰，1982），第571-579页，Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi，罗马，1983.[21] J.L. Rubio de Francia, 分解理论与 A_p 权, Amer. J. Math., 106 (1984), 533-547.[22] M. M.Robertson, 准单调数列的一种推广, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 16 (1968/69), 37-41.[23] S.H. Saker and R.P. Agarwal, 离散权理论中的离散*Rubio de Francia*外推定理 $\mathcal{B}_p-$离散权, Filomat 38:1 (2024), 147-169.[24] S.H. Saker, R.R. Mahmoud and M. Krni´c, 离散*Hardy*型算子的有界性及离散*Ariˇno*权与*Muckenhoupt*权的自改进性质, Periodica Mathematica Hungarica, 第90卷 (2025), 415-433.[25] S.M. Shah, 具有准单调系数的三角级数, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 266-273.[26] A.P. Singh, R. Panchal, P. Jain and M. Singh, 准单调函数在*Lebesgue*空间和大勒贝格空间中的外推定理, Trans. A. Razmadze Math. Inst. 177(2)(2023), 275-288.