arXiv:2603.06129v1 [math.FA] 6 Mar 2026

有界区域上广义 Morrey 光滑性空间的紧嵌入

Dorothee D. Haroske*、Susana D. Moura†和 Leszek Skrzypczak*

2026年3月9日

本文谨献给 Hans Triebel 教授，以庆祝他九十华诞。

摘要

我们研究定义在有界光滑区域上的不同广义光滑性 Morrey 空间尺度之间的嵌入，即 $\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega)$、$\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega)$、 $B^{s,\varphi}_{p\ q}(\Omega)$ 和 $F^{s,\varphi}_{p\ q}(\Omega)$ 空间。我们证明了这些嵌入具有连续性和紧性的充分条件。在某些情况下，这些条件也是必要的。我们推广并进一步改进了经典光滑性 Morrey 空间的一些已有结果。我们的方法基于函数空间的小波刻画。

2020年数学主题分类:46E35

关键词：广义 Morrey 空间、广义 Besov-Morrey 空间、广义 Besov 型空间、广义 Triebel-Lizorkin 型空间、广义 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间、紧嵌入

1 引言

众所周知，基于 Morrey空间构造的光滑性函数空间$\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d)$，$0 < p \le u < \infty$在过去几十年中重新受到关注。这种兴趣的复苏与深化，无疑源于 Kozono 和 Yamazaki 的重要论文 [26]，该文利用 Besov-Morrey 型光滑性空间$\mathcal{N}^{s}_{u,p,q}(\mathbb{R}^d)$，$s \in \mathbb{R}$, $0 < q \le \infty$研究纳维–斯托克斯方程。随后，Mazzucato 的研究成果 [28], 再次将相关研究拓展至偏微分方程。Tang 和 Xu [42]后来引入了 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间 $\mathcal{E}^{s}_{u,p,q}(\mathbb{R}^d)$。

另一条研究路线沿用了 Besov型空间 $B^{s,\tau}_{p\ q}(\mathbb{R}^d)$ 以及 Triebel-Lizorkin 型空间 $F^{s,\tau}_{p\ q}(\mathbb{R}^d)$，$0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\tau \ge 0$ 的构造，它们共享局部-整体方法的同一思想，但起源不同。这些空间在 [56] 中被系统地引入并研究， [2, 3, 4] 中已有一些先驱工作。与此同时，已有大量出色的结果以及对这类空间的详尽系统处理方法，例如可见于专著 [56, 37, 38, 49, 50] 以及扩展的综述论文 [40, 41]。这些结果的应用十分广泛，参见 [8, 51, 55]。

在本文中，我们回到泛函分析的视角，研究广义 Morrey 光滑性空间。这些空间部分建立在广义 Morrey 空间 $\mathcal{M}_{\varphi,\ p}(\mathbb{R}^d)$、 $0 < p < \infty$、 $\varphi : (0,\ \infty) \to [0, \infty)$ 之上。Morrey 空间的广义版本 $\mathcal{M}_{u,\ p}(\mathbb{R}^d)$、$0 < p \le u < \infty$ 由 Mizuhara[29]和 Nakai [31] 引入。然而，尽管这超出了本文的范围，研究这类推广的一个重要动机再次来自偏微分方程的研究，参见 [7, 25, 53, 57, 27], 另请参见 [36] 以获取更多信息和历史备注。采用与上述 Besov-Morrey 空间 $\mathcal{N}^{s}_{u,\ p,\ q}$ 和 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间 $\mathcal{E}^{s}_{u,\ p,\ q}$ 的光滑性空间尺度类似的方法，可得到 $\mathcal{N}^{s}_{\varphi,\ p,\ q}$ 型和 $\mathcal{E}^{s}_{\varphi,\ p,\ q}$ 型的空间。这些空间由 Nakamura、Noi 引入并进行了研究，

*两位作者均部分得到德国研究联合会（DFG）的资助，项目编号 Ha 2794/10-1。

†作者部分获得科英布拉大学数学中心的资助，该中心隶属于葡萄牙科学技术基金会（FCT），资助项目编号为 UID/00324/2025 和 UID/PRR/00324/2025。

并由 Sawano [32], 参见 [1]。需要指出的是，这类广义 Morrey 光滑性空间尤其包含 Triebel [49, 50] 所研究的局部光滑性 Morrey 空间。注意，当 $\varphi(t) \sim t^{d/u}$、$0 < p \le u < \infty$、$t > 0$ 时，我们恢复此前的情形，即 $\mathcal{N}^s_{u,p,q}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 以及 $\mathcal{E}^s_{u,p,q}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$（在等价范数的意义下）。在 [13, 14] 中，我们采用了第二种方法，将空间 $B^s_{p,q}$ 和 $F^s_{p,q}$ 推广为其对应的空间 $B^s_{p,q}$ 和 $F^s_{p,q}$。同样地，特殊情形 $\varphi(t) \sim t^{d(\frac{1}{p}-\tau)}$、$0 \le \tau < \frac{1}{p}$、$t > 0$ 导出原先的空间，即 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 以及 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) = F^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$（在等价范数的意义下）。在那篇论文及我们最近的论文 [16] 中，我们获得了嵌入结果，并准备了进一步的重要工具（扩展了 [32]），例如小波刻画。

在这种情况下，若没有权函数或对称性等其他附加假设，那么不能指望空间尺度内在 $\mathbb{R}^d$ 上的嵌入具有紧性（正如我们从特殊情形中已经了解到的）。然而，若假设底层区域有界且足够光滑，则可以证明紧性。Izuki 和 Noi 有一篇论文研究了 [24], 中区域上的空间，但广义 Morrey 光滑性尺度框架下区域上的空间似乎尚未得到全面研究。对于特殊情形 $\varphi(t) \sim t^{d/u}$，$t > 0$，我们已在 [18] 中较为详细地讨论了不同方法、各种内禀刻画、限制定义等。这里不再赘述，而只采用限制定义。我们主要关注光滑性参数与正则性之间相互作用的精确描述，其特征主要由 $s \in \mathbb{R}$、$0 < p < \infty$ 和函数 φ（在较小程度上也由细指标 q，其中 $0 < q \le \infty$）决定。考察 [9, 10, 18, 19, 20, 21, 22] 中讨论的特殊情形所得结果，我们面临的主要挑战是如何“转换”或推广那些技术上相当复杂的条件，例如下文推论 2.7 中给出的紧性条件。如何用函数 φ_i、$i = 1$、2 来表达诸如 (2.18) 和 (2.20) 这样的刻画? 我们认为，答案是肯定的，而且颇为有趣。我们的论证关键在于引入一些临界光滑度指标 σ、σ 和 σ_∞，见下文定义 3.16。粗略地说，这些数取决于参数 $p_i \in (0,\infty)$ 的行为以及函数 φ_i、$i = 1$、2 的行为，其中给定一个数 $s_1 \in \mathbb{R}$。对于 $\varphi_i(t) \sim t^{d(\frac{1}{p_i}-\tau_i}$ 的情形，$0 \le \tau_i < 1/p_i$、$i = 1$、2，以及例如 $p_1 \le p_2$，会得到 $\sigma = \sigma(s_1) = s_1 - \frac{d}{p_1} + \frac{d}{p_2} + d(\tau_1 - \frac{p_1}{p_2}\tau_1)$；而对于 $\tau_2 p_2 \ge \tau_1 p_1$，则得到 $\sigma = \sigma(s_1) = s_1 - d(\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2)$，这与 (2.20) 中关于 s_2 的条件密切相关。事实上，我们可以在下文定理 5.2 中证明：若 $p_1 < p_2$，则嵌入 $B^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(\Omega)$ 在 $s_2 \le \sigma(s_1)$ 的情况下是紧的；若 $\varphi_2^{p_2}(t) \le c\,\varphi_1^{p_1}(t)$，$0 < t \le 1$，同样如此。另一方面，对于 $\varphi_2^{p_2}(t) \ge c\,\varphi_1^{p_1}(t)$，$0 < t \le 1$ 以及任意的 p_1、p_2，则需要满足 $s_2 < \sigma(s_1)$ 才能保证紧性。对于该嵌入的连续性，我们在 $p_1 \ge p_2$ 的情况下于下文定理 5.1 中给出了完整刻画。回到区域上广义 Besov-Morrey 空间的框架，$\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\Omega)$，我们在定理 4.1 中得到如下最终结果。若记 $\varrho = \min(1, p_1/p_2)$，并记 $\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \varphi_2(2^{-\nu})\varphi_1(2^{-\nu})^{-\varrho}$, $j \in \mathbb{N}_0$，则

$$\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(\Omega),$$

当且仅当，

$$\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*},$$

其中，当 $q_1 \le q_2$ 时 $q^* = \infty$，当 $q_1 > q_2$ 时 $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}$。上述嵌入当且仅当在 $q_1 > q_2$ 的情况下连续时才是紧的，而在 $q_1 \le q_2$ 的情况下，我们需要假设 $2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} \to 0$，其中 $j \to \infty$。令人惊讶的是，这一广义情形下的新结果在某种程度上甚至改进了我们在[19]中的早期结果。对于区域上广义 Morrey 光滑性空间的嵌入，我们可以证明更多的连续性与紧性判据；据我们所知，这些结果在广义情形下都是全新的。从技术角度来看，我们所使用的主要工具，是将函数空间问题转化为相关序列空间上等价的问题。这是通过对定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑性空间进行小波分解来实现的。因此，本文集中讨论仅通过限制定义的区域上的空间，并为方便起见，假设该区域足够光滑。当然，研究区域上的小波刻画会非常有趣（但也颇具挑战性）——正如 [47] 中对 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间所做的详细研究一样。不过，这项工作或许可以留待以后在其他地方完成。

沿着上述为处理相关序列空间而简要勾勒的路径，我们获得了一些最终或近乎最终的结果，用于描述其嵌入的连续性或紧性。这不仅是我们随后研究广义 Morrey 光滑度函数空间所必需的准备工作，也具有独立的研究价值。

本文的组织如下。在第2节中，我们简要汇总关于 $\mathbb{R}^d$ 上广义 Morrey 光滑性空间的一般记号和一些基本事实。在第3节中，我们为预期刻画上述函数空间在区域上的嵌入的紧性或连续性奠定基础。在定理 3.5 和定理 3.10 中，我们研究嵌入 $n^{s_1}_{\varphi_1,\,p_1,\,q_1}(Q)\hookrightarrow n^{s_2}_{\varphi_2,\,p_2,\,q_2}(Q)$，其中$Q\subset\mathbb{R}^d$ 是一个任意的二进立方体，其足够大，可以包含 Ω，而 $n^{s}_{\varphi,\,p,\,q}(Q)$则是与 $\mathcal{N}^{s}_{\varphi,\,p,\,q}(\Omega)$ 相关的序列空间。我们汇集了一些例子和特殊情形，以说明所得结果。为了处理序列空间 $b^{s,\,p}{}^{\varphi}_{q,}(Q)$——它们表示空间 $B^{s,\,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$ 的相应离散化——我们需要定义上文提到的指标 σ、 σ_∞ 和 σ。这在定义 3.16 中给出，并辅以对这些数值的简短讨论和示例。核心的紧性结果见命题 3.29。

在第4节中，我们主要在定理 4.1 中介绍关于嵌入 $\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{N}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(\Omega)$ 的研究结果。我们再次通过若干典型情形举例说明这一一般性结果，以供后续使用。这些情形包括以（通常的）Besov 空间 $B^s_{p,\,q}(\Omega)$ 作为目标空间或源空间的嵌入，甚至包括类型为 $L_r(\Omega)$ 的空间。

最后，在总结性的第4节中，我们考察其余的广义 Morrey 光滑性空间$B^{s,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$、 $F^{s,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$ 和 $\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega)$，因此也包括空间 bmo(Ω)，最后还考察 $\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega)$。

此时，我们想特别致谢，首先感谢我们的前同事 Helena F. Gonçalves。她曾积极参与本文主题的初期讨论。我们从她那里获得了许多启发，也深感遗憾：出于个人原因，她不久前决定离开学术界。

此外，三位作者都非常感激 Hans Triebel 教授长期以来对我们的指导。我们每个人都从与他的密切学术交流中获益良多，尽管交流的时间长短和程度各不相同（例如，他是前两位作者的博士生导师）。与他共事并努力领会他独到的学术见解，总能给我们带来许多启发；请参阅几年前进行的精彩访谈 [5]。此外，我们也总是很欣赏他独特的幽默感和机智的谈吐。我们认为，除了作为杰出科学家所取得的毋庸置疑的成就之外，他也是一位出色的学术教师；同时，他为人和善、谦逊。我们总是很高兴与他见面，并和他探讨新的想法。祝 Hans Triebel 生日快乐！

2 预备知识

首先固定一些记号。我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{N}_0$ 表示集合 $\mathbb{N}\cup\{0\}$，用 $\mathbb{Z}^d$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有整数分量的格点组成的集合。设 $\mathbb{N}_0^d$，其中 $d\in\mathbb{N}$，为所有多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ 的集合，其中 $\alpha_j\in\mathbb{N}_0$且 $|\alpha|:=\sum_{j=1}^d\alpha_j$。若 $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$且$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d$，则记作 $x^\alpha:=x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$。对于 $a\in\mathbb{R}$，令 $\lfloor a\rfloor:=\max\{k\in\mathbb{Z}:\ k\le a\}$,$\lceil a\rceil=\min\{k\in\mathbb{Z}:\ k\ge a\}$，以及 $a_+:=\max(a,0)$。给定任意 $u\in(0,\infty]$，记 u'为由表达式 $\frac{1}{u'}=(1-\frac{1}{u})_+$定义的数，该数可能为 ∞；特别地，当 $1\le u\le\infty$时， u'与通过 $\frac{1}{u}+\frac{1}{u'}=1$定义的共轭指数相同。所有无关紧要的正实常数均记为 C；在同一串不等式中，偶尔用同一个字母 C 表示不同的常数。记号 $A\lesssim B$表示存在正实常数 c 使得 $A\le cB$，而符号 $A\sim B$ 表示 $A\lesssim B\lesssim A$。当应用于 $\mathbb{R}^d$的可测子集时，我们用 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度。对于每个立方体 $Q\subset\mathbb{R}^d$，用 $\ell(Q)$ 表示其边长；对于 $a\in(0,\infty)$，用 aQ 表示与 Q 同心、边长为 $a\ell(Q)$ 的立方体。对于 $x\in\mathbb{R}^d$和 $r\in(0,\infty)$，用 $Q(x,r)$ 表示以 x 为中心、边长为 r且各边平行于坐标轴的紧立方体。当 $x=0$时，我们简记 $Q(r)=Q(0,r)$。用 $\mathcal{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^d$中所有二进立方体的集合，即 $\mathcal{Q}:=\{Q_{j,k}:=2^{-j}([0,1)^d+k):\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^d\}$。对于所有$Q\in\mathcal{Q}$，令 $j_Q:=-\log_2\ell(Q)$，并令 $j_Q\vee0:=\max(j_Q,0)$。给定两个（拟）巴拿赫空间 X和 Y，若 $X\subset Y$且从 X到 Y的自然嵌入是连续的，则记为 $X\hookrightarrow Y$。

定义 2.1。设 $0<p<\infty$和 $\varphi:(0,\infty)\to[0,\infty)$是一个不满足 $\varphi\equiv0$的函数。那么，$\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\mathbb{R}^d)$是所有局部 p-可积函数 $f\in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$的集合，其中

$$\|f\mid\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\|_\star:=\sup_{x\in\mathbb{R}^d,r>0}\varphi(r)\biggl(\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|^p\mathrm{d}y\biggr)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

备注 2.2。上述定义可追溯至 [31]。当 $\varphi(t)=t^{\frac{d}{u}}$ 对于 $t>0$ 和 $0<p\le u<\infty$ 时，则 $\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\mathbb{R}^d)$ 与 $\mathcal{M}_{u,\,p}(\mathbb{R}^d)$ 重合，而后者在 $u=p$ 时又恢复为 Lebesgue 空间 $L_p(\mathbb{R}^d)$。注意，当 $\varphi_0\equiv 1$（这对应于 $u=\infty$）时，我们得到

$$\mathcal{M}_{\varphi_0,p}(\mathbb{R}^d)=L_\infty(\mathbb{R}^d),\quad 0<p<\infty,\quad \varphi_0\equiv 1, \tag{2.1}$$

根据Lebesgue微分定理。

当 $\varphi(t)=t^{-\sigma}\chi_{(0,1)}(t)$，其中 $-\frac{d}{p}\le\sigma<0$ 时，$\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\mathbb{R}^d)$ 与 Triebel 在 [48], 中引入的局部 Morrey空间$\mathcal{L}^\sigma_p(\mathbb{R}^d)$ 相一致（另见 [49, 第 1.3 节4]）。若 $\sigma=-\frac{d}{p}$，则该空间是一致Lebesgue空间 $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d)$。

对 $\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\mathbb{R}^d)$ 的一个自然假设是 φ 属于类 $\mathcal{G}_p$，其中 $\mathcal{G}_p$ 是所有非递减函数 $\varphi\colon(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$ 的集合，满足

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t)\ge s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s), \tag{2.2}$$

对所有 $0<t\le s<\infty$。

备注 2.3. 使用类 $\mathcal{G}_p$ 的依据来自 [32, 引理 2.2], 另见 [30]。更确切地说，对于定义 2.1 中的 p 和 φ，有 $\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\mathbb{R}^d)\ne\{0\}$ 当且仅当 $\sup_{t>0}\varphi(t)\min(t^{-\frac{d}{p}},\ 1)<\infty$。此外，若 $\sup_{t>0}\varphi(t)\min(t^{-\frac{d}{p}},1)<\infty$，则存在 $\varphi^*\in\mathcal{G}_p$ 使得 $\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{M}_{\varphi^*,p}(\mathbb{R}^d)$在等价（拟）范数的意义下成立。证明见 [38]。

容易验证，当 $0<p_2\le p_1<\infty$ 时有 $\mathcal{G}_{p_1}\subset\mathcal{G}_{p_2}$。关于类 $\mathcal{G}_p$的更多细节，请读者参见 [38, 第 12.1 节。2]

注意，$\varphi\in\mathcal{G}_p$具有倍增性质，即 $\varphi(r)\le\varphi(2r)\le 2^{\frac{d}{p}}\varphi(r)$，$0<r<\infty$，因此我们可以通过对所有二进立方体的集合 $\mathcal{Q}$ 取上确界，在 $\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)$ 中定义一个等价拟范数，即

$$\|f\mid\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\|:=\sup_{P\in\mathcal{Q}}\varphi(\ell(P))\left(\frac{1}{|P|}\int_P|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

在下文中，我们始终假设 $\varphi\in\mathcal{G}_p$，并考虑拟范数 (2.3)。这一选择是自然的，并涵盖了所有有意义的情形。此外，下文中我们通常还假设 $\varphi(1)=1$。

这里举出一些例子，其中部分例子摘自 [38]。

例 2.4. (i) 设 $u\in\mathbb{R}$, $0<p<\infty$，并设 $\varphi(t)=t^u$，其中 $t>0$。那么 φ 属于 $\mathcal{G}_p$ 当且仅当 $0\le u\le\frac{d}{p}$。

(ii) 设 $0<u,v<\infty$。那么

$$\varphi_{u,v}(t)=\begin{cases}t^{\frac{d}{u}}, & \text{if}\quad t\le 1\\ t^{\frac{d}{v}}, & \text{if}\quad t>1\end{cases} \tag{2.4}$$

在 $p=\min(u,v)$ 的条件下属于 $\mathcal{G}_p$。特别地，当 $0<p\le u<\infty$ 时，取 $u=v$，函数 $\varphi(t)=t^{\frac{d}{u}}$ 属于 $\mathcal{G}_p$。此外，函数 $\varphi(t)=\max(1,t^{d/v})$ 属于 $\mathcal{G}_v$（对应于 $u=\infty$），而 $\varphi(t)=\min(t^{d/u},1)$ 属于 $\mathcal{G}_u$（对应于 $v=\infty$）。

(iii) 设 $0<p<\infty$, $a\le 0$，并令 L 为充分大的常数。那么，对于 $t>0$，$\varphi(t)=t^{\frac{d}{p}}(\log(L+t))^a$ 属于 $\mathcal{G}_p$。

(iv) 设 $0<p<\infty$，令 u 为充分小的正数，且 $\varphi(t)=t^u(\log(e+t))^{-1}$ 对于 $t>0$ 成立。则 $\varphi\notin\mathcal{G}_p$。

(v) 设

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1}{\log 2}\log(1+t), & 0<t<1,\\ t, & t\ge 1.\end{cases} \tag{2.5}$$

则有 $\varphi\in\mathcal{G}_d$。

(vi) 设 $a \geq e$。则

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\ln a)\,(\ln t^{-1})^{-1} & \text{if } 0 < t < a^{-1}, \\ 1 & \text{if } t \geq a^{-1}, \end{cases} \tag{2.6}$$

属于 $\mathcal{G}_r$，其中 $r = d$ln a。

(vii) 令 $0 < p \leq d$。则

$$\psi(t) = \begin{cases} (e\,t)^{\frac{d}{p}} \ln(t^{-1}) & \text{if} \quad 0 < t < e^{-1}, \\ 1 & \text{if} \quad t \geq e^{-1}, \end{cases} \tag{2.7}$$

属于 $\mathcal{G}_p$。

其他例子可参见例如 [36,例 3.15]。

现在我们引入广义 Morrey 光滑性空间。令 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上所有施瓦茨函数的集合，并赋予通常的拓扑；记其拓扑对偶为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，即赋予弱* 拓扑的 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上所有有界线性泛函组成的空间。对于所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 或 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，我们用 $\mathcal{F}f$ 表示其傅里叶变换，并用 $\mathcal{F}^{-1}f$ 表示其逆变换。现在我们定义 [32] 中引入的广义 Besov-Morrey 空间。

令 $\eta_0, \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 为满足以下条件的非负紧支撑函数

$$\eta_0(x) > 0 \quad \text{if} \quad x \in Q(2),$$

$$0 \notin \operatorname{supp} \eta \quad \text{and} \quad \eta(x) > 0 \quad \text{if} \quad x \in Q(2) \setminus Q(1).$$

对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $\eta_j(x) := \eta(2^{-j}x)$，$x \in \mathbb{R}^d$。

定义 2.5。令 $0 < p < \infty$，$0 < q \leq \infty$，$s \in \mathbb{R}$，以及 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。

(i) 广义 Besov-Morrey 空间 $\mathcal{N}^s_{\varphi,\,p,\,q}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有满足下述条件的 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的集合:

$$\big\|f \mid \mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\big\| := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \big\|\mathcal{F}^{-1}(\eta_j \mathcal{F} f) \mid \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\big\|^q\right)^{1/q} < \infty,$$

若 $q = \infty$，则作通常的修改。

(ii) 假设存在 C，$\varepsilon > 0$ 使得

$$\frac{t^\varepsilon}{\varphi(t)} \leq \frac{C r^\varepsilon}{\varphi(r)} \quad \text{holds for} \quad t \geq r, \tag{2.8}$$

当 $0 < q < \infty$ 时。广义 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间 $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的集合，使得

$$\|f \mid \mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\| := \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |\mathcal{F}^{-1}(\eta_j \mathcal{F} f)(\cdot)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \mid \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d) \right\| < \infty$$

对 $q = \infty$ 作通常的修正。

(iii) 空间 $\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 或 $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$，假定当$q < \infty$ 时 φ 满足 (2.8)，且 $\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$。

(iv) 广义 Besov 型空间 $B^{s,\varphi}_{p\,q}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的集合，使得

$$\|f \mid B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\| := \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{p}}} \left[\sum_{j=j_P \vee 0}^{\infty} 2^{jsq} \left(\int_P |\mathcal{F}^{-1}(\eta_j \mathcal{F} f)(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty$$

并对 $q = \infty$ 作通常的修改。

(v) 假设 φ 在 $q<\infty$ 时满足 (2.8)。广义 Triebel-Lizorkin 型空间 $F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有满足下述条件的 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的集合:

$$\|f\mid F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\|:=\sup_{P\in\mathcal{Q}}\frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{p}}}\left[\int_P\left(\sum_{j=j_P\vee 0}^{\infty}2^{jsq}|\mathcal{F}^{-1}(\eta_j\mathcal{F}f)(x)|^q\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}<\infty$$

并对 $q=\infty$ 作通常的修改。

(vi) 空间 $A^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 或 $F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$，假设 φ 在 $q<\infty$ 时满足 (2.8)，且 $A^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)=F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$。

注 2.6。广义 Besov-Morrey 空间和广义 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间在 [32] 中引入，而广义 Besov 型空间和广义 Triebel-Lizorkin 型空间在 [13] 中引入。当 $\varphi(t)=t^{\frac{d}{p}}$ 对于 $t>0$ 时，两种尺度均可恢复经典 Besov 空间 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和经典 Triebel-Lizorkin 空间 $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$，其中 $0<p<\infty$、$0<q\le\infty$ 和 $s\in\mathbb{R}$ 可取任意值，因为

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\quad\text{and}\quad F^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d).$$

例如，参见 [43, 44, 46, 52] 以了解有关这些空间的更多详细信息。

当 $\varphi(t)=t^{\frac{d}{u}}$ 对于 $t>0$ 和 $0<p\le u<\infty$时，有

$$\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{N}^s_{u,p,q}(\mathbb{R}^d)\quad\text{and}\quad\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{E}^s_{u,p,q}(\mathbb{R}^d)$$

分别是通常的 Besov-Morrey 空间和通常的 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间，它们在 [56] 中有所研究，或见 Sickel [40, 41]撰写的综述论文。

当 $\varphi(t)=\min(t^{\frac{d}{u}},1)$ 时，我们得到 Triebel 引入的局部 Besov-Morrey 空间，

$$\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=B^s_q(\mathcal{L}^\sigma_p,\mathbb{R}^d),\quad\sigma=-\frac{d}{u},\quad p\le u,$$

参见 [49, 第 1.3 节4]。

空间 $B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 $F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 分别等价于 $B^{s,\tilde\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 $F^{s,\tilde\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 这些空间；若在上述定义中用函数 $\tilde\varphi(\ell(P))$ 替换 $\varphi(\ell(P))$，则可得到 [13], 中引入的空间，其中$\tilde\varphi\in\mathcal{G}_p$且满足 $t^{\varepsilon-\frac{d}{p}}\tilde\varphi(t)\le Cr^{\varepsilon-\frac{d}{p}}\tilde\varphi(r)$ 对于 $t\ge r$，当 $q<\infty$时适用于 F-空间。

若 $\varphi(t)=t^{d(\frac{1}{p}-\tau)}$对于 $t>0$和 $\tau\in[0,\frac{1}{p})$ 成立，则 $B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 $F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 分别与 [56] 中引入的 Besov 型空间 $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和 Triebel-Lizorkin 型空间 $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 相同。

我们简要回顾一下下文将用到的一些嵌入。我们始终假设，当 $q<\infty$ 和 $A^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)=F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 或 $\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 时，$s\in\mathbb{R}$、$0<p<\infty$、$0<q\le\infty$、$\varphi\in\mathcal{G}_p$ 和 φ 满足 (2.8)。那么，

$$\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q_1}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q_2}(\mathbb{R}^d),\qquad q_1\le q_2,$$

and

$$\mathcal{A}^{s+\varepsilon}_{\varphi,p,q_1}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q_2}(\mathbb{R}^d),\qquad\varepsilon>0,$$

更多细节另见 [32, 命题 3.3] 。在这两种情况下，我们在尺度 $A^{s,\varphi}_{q,}(\mathbb{R}^d)$ 中都有显然的对应结果。

如 [14, 定理 4.1], 所述，当 $q<\infty$时有 (2.8)，于是

$$F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\tag{2.9}$$

且范数等价。此外,

$$\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\quad\text{with}\quad\mathcal{N}^s_{\varphi,p,\infty}(\mathbb{R}^d)=B^{s,\varphi}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d).\tag{2.10}$$

注意，当 $q<\infty$ 和

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)t^{-\frac{d}{p}}=\infty \quad \text{or} \quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)t^{-\frac{d}{p}}=0, \tag{2.11}$$

那么，$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 是 $B^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 的真子空间。

与经典情形类似，有

$$B^{s,\varphi}_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow F^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow B^{s,\varphi}_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^d), \tag{2.12}$$

而对于空间 $\mathcal{A}^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$，我们可以在 [14, 定理 4.3] 中证明

$$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d). \tag{2.13}$$

此外，如果

$$\lim_{t\to 0}t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t)<\infty \quad \text{and} \quad \lim_{t\to+\infty}t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t)>0, \tag{2.14}$$

then

$$\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q_0}(\mathbb{R}^d) \tag{2.15}$$

当且仅当 $q_0\geq\max(p,q)$ 时成立。否则，如果不满足 (2.14)，那么 (2.15) 成立当且仅当$q_0=\infty$。关于先前结果，请参见 [35] 。

我们提及

$$\mathcal{E}^{0}_{\varphi,p,2}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d),\quad \varphi\in\mathcal{G}_p,\quad 1<p<\infty, \tag{2.16}$$

若 (2.8) 成立，参见 [32] 关于 [39, 命题 5.1], 另见 [54, 命题 3.18] ，其中讨论了更一般的情形。这推广了 Mazzucato 的结果 [28, 命题 4.1] ，该结果与情形 $\varphi(t)=t^{\frac{d}{u}}$ 对于 $t>0$ 有关，其表述为 $\mathcal{E}^{0}_{u,\,p,\,2}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d)$，$1<p\leq u<\infty$。

最后，我们来介绍定义在区域上的空间。我们始终用 Ω 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界 C^∞ 区域。所有空间 $\mathcal{A}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega)$ 和 $A^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega)$ 均通过限制定义。在某些特殊情形下，例如 $\varphi(t)=t^{d/u},0<p\leq u<\infty$，或 $\varphi(t)=t^{d(\frac{1}{p}-\tau)}$，$0<p<\infty,0\leq\tau<\frac{1}{p}$，我们在近期论文 [9, 10, 18, 19, 20, 21, 15, 22]中讨论了上述类型空间之间的连续嵌入和紧嵌入（甚至核嵌入）。在适当之处，我们将在下文详细引用这些结果。举例来说，我们回顾一下 $\mathcal{A}^{s}_{u,p,q}(\Omega)$ 类型空间的一个紧性结果，另见 [9, 定理 3.1]，；以及 $A^{s,\tau}_{p,q}(\Omega)$ 空间的相关结果，该结果由 [9, 定理 3.2]给出。鉴于本文研究的空间$\mathcal{A}^{s}_{\varphi,p,q}$ 与之比较，并回顾注 2.6，我们仅介绍此前关于 $u_i<\infty,\,p_i<\infty,\,0\leq\tau_i<\frac{1}{p_i},\,i=1,2$ 的结果。 —

推论 2.7 ([9])。设 $s_i\in\mathbb{R}$，$0<q_i\leq\infty$，$i=1,2$。

(i) 假设 $0<p_i\leq u_i<\infty,\,i=1,2$。则该嵌入

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}^{s_1}_{u_1,p_1,q_1}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{A}^{s_2}_{u_2,p_2,q_2}(\Omega) \tag{2.17}$$

是紧的，当且仅当满足以下条件：

$$\frac{s_1-s_2}{d}>\max\left\{0,\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2},\frac{1}{u_1}\Big(1-\frac{p_1}{p_2}\Big)\right\}. \tag{2.18}$$

(ii) 设 $0\leq\tau_i<\frac{1}{p_i},\,i=1,2$。该嵌入

$$\mathrm{id}_{\tau}:A^{s_1,\tau_1}_{p_1,q_1}(\Omega)\hookrightarrow A^{s_2,\tau_2}_{p_2,q_2}(\Omega) \tag{2.19}$$

当且仅当以下条件成立时，才是紧的：

$$\frac{s_1-s_2}{d}>\left(\frac{1}{p_1}-\tau_1-\frac{1}{p_2}+\max\{\tau_2,\frac{p_1}{p_2}\tau_1\}\right)_+. \tag{2.20}$$

注 2.8. 如前所述，这仅代表我们关于 $A^{s,p}{}_{q}^{\tau}(\Omega)$ 和$\mathcal{A}^{s}_{u,p,q}(\Omega)$ 型空间的部分紧性结果，只是为了与本文得到的新结果进行比较。请注意，我们对这些“经典”的 Morrey 光滑性空间也有连续性结果，相关内容见 [19, 20, 10]。此外，在 [21, 9] 中，我们还从熵数（及逼近数）的角度进一步刻画了这类函数空间的紧性；Hans Triebel 此前也研究过这一主题，参见专著 [6, 45]。在 [22] 中，我们将这些研究扩展到了相应嵌入的核性问题。最后，我们还请读者参见 [23]，其中详细讨论了由 Hans Triebel 提出的族概念（适用于 Morrey 光滑性空间，包括 $\mathcal{A}^{s}_{u,p,q}$ 和 $A^{s,p}{}_{q}^{\tau}$）。

注 2.9. 注意，在 $p_1 \geq p_2$ 的情况下，条件 (2.20) 可改写为

$$\frac{s_1 - s_2}{d} > \left(\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2\right)_+ \quad \text{if} \quad p_1 \geq p_2, \tag{2.21}$$

因为 $\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 = (\tau_1 - \frac{1}{p_1})(\frac{p_1}{p_2} - 1) \leq 0$。

3 序列空间的嵌入

我们的目标是研究函数空间 $\mathcal{A}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega)$ 和 $A^{s,p}{}_{q}^{\varphi}(\Omega)$ 中的紧嵌入。我们采用如今相当标准的方法，应用小波变换，从而将问题转化为序列空间问题。因此，本节将讨论相应的序列空间。

广义 Besov-Morrey 空间 $\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 和广义 Besov 型空间 $B^{s,p}{}_{q}^{\varphi}(\mathbb{R}^d)$ 均具有小波刻画，分别参见 [16] 和 [14]。下文将定义相应的序列空间。

定义 3.1. 设 $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$，且 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。

(i) 广义 Besov-Morrey 序列空间$n^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 是所有双指标序列$\lambda := \{\lambda_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C}$ 的集合，其拟范数

$$\|\lambda \mid n^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)\| := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{j,m}\chi_{Q_{j,m}} \,\Big|\, \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\Big\|^q\right)^{1/q} \tag{3.1}$$

是有限的（若 $q = \infty$，则作通常的修改）。

(ii) 广义 Besov 型序列空间 $b^{s,p}{}_{q}^{\varphi}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有双指标序列 $\lambda := \{\lambda_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C}$ 的集合，其拟范数

$$\|\lambda \mid b^{s,\varphi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\| := \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{p}}} \left\{ \sum_{j=j_P\vee 0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset P}} (2^{j(s-\frac{d}{p})}|\lambda_{jm}|)^p \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

是有限的（若 $q = \infty$，则作通常的修改）。

注 3.2。 当 $\varphi(t) = t^{\frac{d}{u}}$ 对 $t > 0$ 和 $0 < p \leq u < \infty$ 成立时，则

$$n^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d) = n^{s}_{u,p,q}(\mathbb{R}^d)$$

是通常的 Besov-Morrey 序列空间。此外，若 $u = p$，则空间 $n^{s}_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 与经典Besov序列空间 $b^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 重合，因为在此情况下 $\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d) = L_p(\mathbb{R}^d)$。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界区域。对于任意 $c > 0$，我们定义

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, \Omega) < c\}.$$

我们选取一个二进立方体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ 使得 $\Omega_{2c} \subset Q$。不妨设，对于某个 $\nu_0 \leq 0$，有 $Q = [0, 2^{\nu_0}]^d$。我们将序列空间 $n^{s}_{\varphi,\,p,\,q}(Q)$ 定义为所有满足 $j \in \mathbb{N}_0$，$m \in \mathbb{Z}^d$ 且 $Q_{j,\,m} \subset Q$ 的双指标序列 $\lambda := \{\lambda_{j,m}\} \subset \mathbb{C}$ 构成的集合，其拟范数

$$\|\lambda \mid n^{s}_{\varphi,p,q}(Q)\| := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^d: Q_{j,m}\subset Q} \lambda_{j,m}\chi_{Q_{j,m}} \,\Big|\, \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\Big\|^q\right)^{1/q} \tag{3.2}$$

是有限的。显然，$n^s_{\varphi,\ p,\ q}(Q)$ 可以视为 $n^s_{\varphi,\ p,\ q}(\mathbb{R}^d)$ 的一个子空间。

下一个引理的证明与 [16] 中引理 2.12 的证明类似，因此此处略去。

引理 3.3。 设 $0 < p < \infty$、 $0 < q \le \infty$、 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。则

$$n^s_{\varphi,p,q}(Q) = \left\{\lambda = \{\lambda_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^d} : \|\lambda \mid n^s_{\varphi,p,q}(Q)\|^* < \infty\right\},$$

其中

$$\|\lambda \mid n^s_{\varphi,p,q}(Q)\|^* := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi(2^{-\nu})^q\, 2^{(\nu-j)\frac{d}{p}q} \left(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}\subset Q}} |\lambda_{j,m}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{1/q}$$

在 $q = \infty$时作通常的相应修改。此外，$\|\cdot \mid n^s_{\varphi,\ p,\ q}(Q)\|^*$ 是$n^s_{\varphi,\ p,\ q}(Q)$上的一个等价拟范数。

备注 3.4。若 $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = c > 0$，则

$$\sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi(2^{-\nu})\, 2^{(\nu-j)\frac{d}{p}} \left(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}\subset Q}} |\lambda_{j,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sim \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q}} |\lambda_{j,m}|$$

在 j 上一致成立。因此，在这种情况下，我们有如下范数等价关系

$$\|\lambda \mid n^s_{\varphi,p,q}(Q)\|^* \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q}} |\lambda_{j,m}|^q\right)^{1/q} \tag{3.3}$$

并且对于任意 p，空间 $n^s_{\varphi,p,q}(Q)$ 与 $\ell_q(2^{js}\ell_\infty^{M_j})$ 重合，其中 $M_j = 2^{jd}|Q|$。

定理 3.5. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_i < \infty$、 $0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，对于 $i = 1,\ 2$。不失一般性，我们假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。设 $\varrho = \min(1,\ \frac{p_1}{p_2})$ 且 $\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1}(2^{-\nu})^\varrho$，$j \in \mathbb{N}_0$。

存在连续嵌入

$$n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) \tag{3.4}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^\varrho}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*} \qquad where \quad \frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+. \tag{3.5}$$

上述定理的证明类似于 [16]中定理 4.1 的证明。该定理给出了空间 $n^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 的连续嵌入的充分必要条件。该定理的假设由两部分组成：局部条件——涉及 φ_i 在零附近的取值——以及整体条件，取决于 φ_i 在无穷远处的行为。现在我们不需要整体条件，而局部条件与 (3.5) 一致。

推论 3.6。 在与定理 *3.5* 相同的假设下，如果嵌入 (3.4)成立，则$s_1 \ge s_2$。

证明。 序列 $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是正递增序列，因此如果 $\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_\infty$，那么 $s_1 \ge s_2$。这就证明了 $\varrho = 1$ 的情形。同样地，如果 $\varrho < 1$，那么

$$\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^\varrho}{\varphi_1(2^{-j})} \ge \alpha_j \tag{3.6}$$

对任意 $j \in \mathbb{N}_0$。因此，对于第二种情形，我们也有 $s_1 \ge s_2$。 □

推论 3.7. 除定理 *3.5* 的假设外，假设 $s_1 = s_2$ 且 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) = 0$。嵌入 (3.4) 成立当且仅当 $p_1 \geq p_2$、$q_1 \leq q_2$，并且存在一个常数 $C > 0$，使得$\varphi_2(2^{-j}) \leq C\varphi_1(2^{-j})$，对任意 $j \in \mathbb{N}_0$。

证明。 若 (3.4) 成立，则 $\left\{\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}$。若 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) = 0$ 且 $\varrho < 1$，则上述序列无界，因为 $\alpha_j \geq 1$。这意味着 $\varrho = 1$，即 $p_1 \geq p_2$，且 $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}$。但$\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 不是零序列，因此 $q^* = \infty$。最后

$$\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})} \leq \alpha_j \leq C.$$

若 $q^* = \infty$, $\varrho = 1$ 且 $\varphi_2(2^{-j}) \leq C\varphi_1(2^{-j})$，则立即得到 $\underline{\left\{\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0}} \in \ell_\infty$。 □

在接下来的两个推论中，我们考虑至少有一个函数 φ_i, $i = 1,2$ 满足恒等式 $\lim_{t\to 0}\varphi_i(t) = c > 0$ 的情形。

推论 3.8。 设 $0 < p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$ 和 $s_i \in \mathbb{R}$, $0 < q_i \leq \infty$，其中 $i = 1,2$。不失一般性，假设 $\varphi(1) = 1$。存在连续嵌入

$$n^{s_1}_{\varphi,p,q_1}(Q) \hookrightarrow \ell_{q_2}\left(2^{js_2}\ell_\infty^{2^{jd}|Q|}\right) \tag{3.7}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}. \tag{3.8}$$

证明。 该推论由定理 3.5 和注 3.4 得出。若 $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$ 满足 $\lim_{t\to 0}\varphi_2(t) = c > 0$，则

$$\alpha_j \sim \varphi(2^{-j})^{-\varrho} \qquad \text{and} \qquad n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) = \ell_{q_2}\left(2^{js_2}\ell_\infty^{2^{jd}|Q|}\right).$$

□

推论 3.9。 设 $0 < p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$ 和 $s_i \in \mathbb{R}$, $0 < q_i \leq \infty$，其中 $i = 1,2$。不失一般性，假设 $\varphi(1) = 1$。存在连续嵌入

$$\ell_{q_1}\left(2^{js_1}\ell_\infty^{2^{jd}|Q|}\right) \hookrightarrow n^{s_2}_{\varphi,p,q_2}(Q) \tag{3.9}$$

当且仅当 $s_1 > s_2$ 或 $s_1 = s_2$ 且 $q_1 \leq q_2$。

证明。 该推论可以用与上述推论类似的方法加以证明。现在 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) = c > 0$ 从而 $\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})} \sim c > 0$。 □

我们现在讨论嵌入 (3.4) 的紧性。

定理 3.10. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、$0 < p_i < \infty$、$0 < q_i \leq \infty$ 与 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，对于 $i = 1,\ 2$。不失一般性，我们假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。设 $\varrho = \min(1,\ \frac{p_1}{p_2})$ 且 $\alpha_j = \sup_{0\leq\nu\leq j}\frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1}(2^{-\nu})^{\varrho}$，$j \in \mathbb{N}_0$。

存在一个紧嵌入

$$n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) \tag{3.10}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*} \qquad \textit{where} \quad \frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+ \tag{3.11}$$

and

$$2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})} \to 0 \qquad \textit{if} \qquad q_1 \leq q_2. \tag{3.12}$$

证明。步骤 *1*（充分性）。若 $p_2 \le p_1$，即 $\varrho = 1$，则有以下不等式

$$\sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_2(2^{-\nu})2^{(\nu-j)\frac{d}{p_2}}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}}} |\lambda_{j,m}|^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \tag{3.13}$$

$$\le \alpha_j \sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_1(2^{-\nu})2^{(\nu-j)\frac{d}{p_1}}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}}} |\lambda_{j,m}|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

参见 [16] 中的 (4.4)。另一方面，若 $p_2 > p_1$，即 $\varrho < 1$，则

$$\sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_2(2^{-\nu})2^{(\nu-j)\frac{d}{p_2}}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}}} |\lambda_{j,m}|^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \tag{3.14}$$

$$\le \alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})} \sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_1(2^{-\nu})2^{(\nu-j)\frac{d}{p_1}}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}}} |\lambda_{j,m}|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

参见 [16] 中的 (4.5)。在这两种情况下，对于一个 $j_0 \in \mathbb{N}_0$，我们得到

$$\Big(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{js_2q_2} \sup_{\substack{\nu:\nu\le j\\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_2(2^{-\nu})^{q_2}\, 2^{(\nu-j)\frac{d}{p_2}q_2}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_{j,m}\subset Q_{\nu,k}\subset Q}} |\lambda_{j,m}|^{p}\Big)^{\frac{q_2}{p_2}}\Big)^{1/q_2} \le \tag{3.15}$$

$$\Big(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{j(s_2-s_1)q^*}\alpha_j^{q^*}\varphi_1(2^{-j})^{(\varrho-1)q^*}\Big)^{1/q^*} \|\lambda \mid n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)\|^* \tag{3.16}$$

并作通常的 m 修改（若 $q^* = \infty$）。若条件 (3.11)-(3.12) 成立，则对于任意 $\varepsilon > 0$，我们得到 j_0 使得

$$\Big(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{j(s_2-s_1)q^*}\alpha_j^{q^*}\varphi_1(2^{-j})^{(\varrho-1)q^*}\Big)^{1/q^*} < \varepsilon.$$

此外，空间

$$\widetilde{n}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) = \{\lambda = \{\lambda_{j,m}\}_{j,m} \in n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) : \lambda_{j,m} = 0 \quad \text{if} \quad j \ge j_0\}$$

是有限维的，因此 $n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)$ 的单位球在 $n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)$ 中是相对紧的。

步骤 *2*（必要性）。若 $q^* < \infty$，则条件 (3.11) 的必要性由定理 3.5 得出，否则该嵌入不连续。因此，若 $q^* = \infty$，尚需证明 (3.12) 的必要性。

若 $\big\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})}\big\} \in \ell_\infty \setminus c_0$，则存在正整数的子序列 j_k、$k \in \mathbb{N}$，使得

$$2^{j_k(s_2-s_1)}\alpha_{j_k}\frac{\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j_k})} \to \beta > 0 \quad \text{if} \quad k\to\infty. \tag{3.17}$$

我们考虑几种情形。由于序列 $\{\alpha_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是正数的递增序列，因此它收敛于正极限 α，或发散至 ∞。

子步骤 *2.1*。首先，我们假设 $\alpha_{j_k} \to \alpha$ 为 $k \to \infty$。则(3.17)等价于

$$2^{j_k(s_2-s_1)}\frac{\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j_k})} \to \beta_0 > 0 \quad \text{if} \quad k\to\infty. \tag{3.18}$$

注意，序列 $\{\varphi_1(2^{-j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\varphi_2(2^{-j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是递减的。首先假设 $\lim_{k\to\infty}\varphi_2(2^{-j_k}) = \beta_2 > 0$。我们如下定义序列 $\lambda^{(k)} = \{\lambda^{(k)}_{j,m}\}$

$$\lambda^{(k)}_{j,m} = \begin{cases} 2^{-j_k s_1}\varphi_1(2^{-j_k})^{-1} & j = j_k \quad \text{and} \quad m = 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.19}$$

则 $\|\lambda^{(k)} \mid n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)\|^* = 1$。此外，当 $k_1 \neq k_2$ 时，

$$\|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)\|^* \gtrsim 2^{j_{k_1}(s_2-s_1)}\varphi_1(2^{-j_{k_1}})^{\varrho-1}\beta_2 + 2^{j_{k_2}(s_2-s_1)}\varphi_1(2^{-j_{k_2}})^{\varrho-1}\beta_2.$$

利用 (3.18)，并且当 $k_1 \neq k_2$ 足够大时，

$$\|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)\|^* \gtrsim \beta_2\beta_0 > 0,$$

这使我们可以得出结论：该嵌入不是紧的。

现在考虑 $\lim_{k\to\infty} \varphi_2(2^{-j_k}) = 0$ 的情形。首先，我们假设对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\alpha_{j_k} < \alpha$。那么，对于某个子序列 k_ℓ，有 $\alpha_{j_{k_\ell}} = \varphi_2(2^{-j_{k_\ell}})\varphi_1(2^{-j_{k_\ell}})^{\varrho}$。为简便起见，我们假设最后一个等式对所有 j_k 都成立。现在由 (3.17) 得到

$$2^{j_k s_2}\varphi_2(2^{-j_k}) \sim 2^{j_k s_1}\varphi_1(2^{-j_k}) \tag{3.20}$$

当 k 足够大时。我们令

$$\lambda^{(k)}_{j,m} = \begin{cases} 2^{-j_k s_2}\varphi_2(2^{-j_k})^{-1} & j = j_k \quad \text{and} \quad m = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.21}$$

那么，当 k 足够大时，

$$\|\lambda^{(k)} \mid n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)\|^* = 2^{j_k(s_1-s_2)}\frac{\varphi_1(2^{-j_k})}{\varphi_2(2^{-j_k})} \le C < \infty.$$

此外，当 $k_1 \neq k_2$ 足够大时，

$$\|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)\|^* \ge 1.$$

上述结论同样适用。

接下来考虑情形 $\alpha = \varphi_2(2^{-j_0})\varphi_1(2^{-j_0})^{\varrho}$，其中 $j_0 \in \mathbb{N}$。于是，

$$\alpha = \frac{\varphi_2(2^{-j_0})}{\varphi_1(2^{-j_0})^{\varrho}} \ge \frac{\varphi_2(2^{-j_k})}{\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho}} \qquad \text{if} \qquad j_k \ge j_0. \tag{3.22}$$

为简单起见，我们假设最后一个等式对所有 j_k都成立。由 (3.18) 可得

$$2^{j_k s_2}\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho} \sim 2^{j_k s_1}\varphi_1(2^{-j_k}) \tag{3.23}$$

对于充分大 。令 $\varrho = 1$。由 (3.23) 可知 $s_1 = s_2$。考虑以下序列

$$\lambda^{(k)}_{j,m} = \begin{cases} 2^{-j_k s_2}\varphi_1(2^{-j_0})^{-1} & j = j_k \quad \text{and} \quad Q_{j_k,m} \subset Q_{j_0,0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$2^{j_k s_2} \sup_{\substack{\nu:\nu\le j_k \\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_2(2^{-\nu})\, 2^{(\nu-j_k)\frac{d}{p_2}} \Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d: \\ Q_{j_k,m}\subset Q_{\nu,k}\subset Q_{j_0,0}}} |\lambda^{(k)}_{j_k,m}|^{p_2} \Big)^{\frac{1}{p_2}} = \varphi_1(2^{-j_0})^{-1} \sup_{\substack{\nu:j_0\le\nu\le j_k \\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_2(2^{-\nu}) = \alpha$$

类似地，

$$2^{j_k s_1} \sup_{\substack{\nu:\nu\le j_k \\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_1(2^{-\nu})\, 2^{(\nu-j_k)\frac{d}{p_1}} \Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d: \\ Q_{j_k,m}\subset Q_{\nu,k}\subset Q_{j_0,0}}} |\lambda^{(k)}_{j_k,m}|^{p_1} \Big)^{\frac{1}{p_1}} \le \varphi_1(2^{-j_0})^{-1} \sup_{\substack{\nu:j_0\le\nu\le j_k \\ k\in\mathbb{Z}^d}} \varphi_1(2^{-\nu}) = 1.$$

因此，我们得到

$$\|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)\|^* \ge c > 0 \quad \text{if} \quad k_1 \neq k_2$$

and

$$\|\lambda^{(k)} \mid n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)\|^* = 1$$

如果 k 足够大。

现在考虑 $\varrho < 1$ 的情形，即 $p_1 < p_2$ 的情形。令 $\widetilde{\varphi}_2(t) = t^{d/p_2}$。于是，当 $0 < t \le 1$ 时，$\widetilde{\varphi}_2(t) \le \varphi_2(t)$，因为 $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$ 和 $\varphi_2(1) = 1$。由定理 3.5 可知，嵌入

$$n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q) \hookrightarrow n^{s_2}_{\widetilde{\varphi}_2,p_2,q_2}(Q)$$

是连续的。因此，若嵌入 (3.10) 是紧的，则嵌入

$$n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow n^{s_2}_{\widetilde{\varphi}_2,p_2,q_2}(Q) \tag{3.24}$$

也是紧的。我们证明，当 (3.18) 和 (3.22) 成立时，最后这个嵌入不是紧的。由 (3.23) 可知，序列 $\{\varphi_1(2^{-j_k})\}_k$ 呈多项式增长，更准确地说

$$\varphi_1(2^{-j_k}) \sim 2^{-j_k \frac{s_1-s_2}{1-\varrho}}. \tag{3.25}$$

因此，我们可以将此情形归结为区域上经典 Besov-Morrey 空间嵌入的紧性问题，参见 [19]。我们有

$$\frac{s_1-s_2}{d} \le \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \tag{3.26}$$

因为 $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$。令 $\frac{s_1-s_2}{1-\varrho} = \frac{d}{u_1}$。于是

$$\frac{p_1}{u_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) = \frac{s_1-s_2}{d} \ge \max\left(0, \frac{1}{u_1} - \frac{1}{p_2}\right)$$

现在，我们可以按照 [19] 中定理 4.1 的子步骤 2.3，以同样的方式处理。具体而言，我们可以构造一个序列 $\lambda^{(k)} = \{\lambda^{(k)}_{j_k,m}\} \in n^{s_1}_{\varphi_1,\,p_1,\,q_1}(Q)$，它在空间 $n^{s_1}_{\varphi_1,\,p_1,\,q_1}(Q)$ 中有界，使得

$$\|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\widetilde{\varphi}_2,p_2,q_2}(Q)\| \ge c > 0 \qquad \text{if} \qquad q_1 \ne q_2.$$

因此，嵌入 (3.24) 不是紧的，进而嵌入 (3.1 0).

子步骤 *2.2*。最后，我们考虑 $\alpha_{j_k} \to \infty$ 如 $k \to \infty$ 的情形。取一个子序列后，不妨设 $\alpha_{j_k} = \frac{\varphi_2(2^{-j_k})}{\varphi_1(2^{-j_k})^\varrho}$。再次由 (3.17) 可得 (3.20)，我们可以使用 (3.21) 中定义的序列来证明

$$\|\lambda^{(k)} \mid n^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(Q)\| \le C < \infty \quad \text{and} \quad \|\lambda^{(k_1)} - \lambda^{(k_2)} \mid n^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(Q)\| \ge c > 0$$

当 k，k_1，k_2，且 $k_1 \ne k_2$ 足够大时。 □

注 3.11。若 $\varphi_i(t) \sim t^{d/u_i}$, $0 < p_i \le u_i < \infty$，且 $\mathcal{A}^{s_i}_{\varphi_i,\,p_i,\,q_i} = \mathcal{N}^{s_i}_{\varphi_i,\,p_i,\,q_i}$, $i = 1,\ 2$，则定理 3.10 与推论 2.7(i) 的序列空间版本一致，因为 $\alpha_j \sim 2^{jd(\frac{\varrho}{u_1} - \frac{1}{u_2})_+}$, $j \in \mathbb{N}_0$。

推论 3.12。若 $s_1 = s_2$，则嵌入 (3.4) 从不紧。

证明。若 $s_1 = s_2$ 且嵌入 (3.4) 成立，则 $q^* = \infty$ 且 $\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j\varrho})}{\varphi_1(2^{-j})^\varrho} \sim \alpha_j$，参见推论 3.7 和推论 3.9。但是 α_j 不是零序列，因此不满足 (3.12)。 □

我们也有如下与推论 3.8 和推论 3.9 相对应的结论。

推论 3.13. 嵌入(3.7) 是紧的，当且仅当(3.8) 在$q_1 \le q_2$时以 c_0 代替 ℓ_∞ 成立。

嵌入(3.9) 是紧的，当且仅当 $s_1 > s_2$。

现在我们来讨论序列空间 $b^{s,\,\varphi}_{p,\,q}(Q)$。该空间仿照 (3.2)，基于 $b^{s,\,\varphi}_{p,\,q}(\mathbb{R}^d)$ 定义为所有双指标序列 $\lambda := \{\lambda_{j,m}\} \subset \mathbb{C}$ 的集合，其中 $j \in \mathbb{N}_0$，$m \in \mathbb{Z}^d$ 满足 $Q_{j,\,m} \subset Q$，且其拟范数

$$\|\lambda \mid b^{s,\varphi}_{p,q}(Q)\| := \sup_{P:|P|\le 1} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{1/p}} \left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s-\frac{d}{p})q} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d: Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^p \Big)^{\frac{q}{p}} \right)^{1/q} \tag{3.27}$$

是有限的，对于 $q = \infty$，作通常的相应修改。同样，$b^{s,\,\varphi}_{p,\,q}(Q)$ 可视为 $b^{s,\,\varphi}_{p,\,q}(\mathbb{R}^d)$ 的子空间。首先研究嵌入的连续性，并从 $p_1 \ge p_2$ 的情形开始。

命题 3.14. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、$0 < p_2 \le p_1 < \infty$、$0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$ 满足 $i = 12$。不失一般性，假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。

存在连续嵌入

$$b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q) \tag{3.28}$$

当且仅当，

$$\left\{ 2^{j(s_2-s_1)} \frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})} \right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty \tag{3.29}$$

and

$$s_1 > s_2 \qquad or \qquad s_1 = s_2 \quad and \quad q_1 \le q_2. \tag{3.30}$$

证明。我们借鉴了 [16, 定理 4.1]和 [10] 证明中的论证。

步骤 *1*。我们证明条件 (3.29) 和 (3.30) 的充分性。根据 $p_1 \ge p_2$，由 Hölder 不等式可得

$$\left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \le 2^{d(j-j_P)(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

由此可得

$$\left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s_2-\frac{d}{p_2})q_2} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \right)^{\frac{q_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \le$$

$$2^{j_P(s_2-s_1-\frac{d}{p_2}+\frac{d}{p_1})} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_2-s_1)q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s_1-\frac{d}{p_1})q_1} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

wh其中$\frac{1}{q^*} = (\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1})$+。这里我们应用了（3.30）。利用 $\mathcal{G}_p$-条件（2.2），我们注意到 t

$$\frac{\varphi_2(\ell(P))}{|P|^{1/p_2}} = 2^{j_P d(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})} \frac{\varphi_2(\ell(P))}{\varphi_1(\ell(P))} \frac{\varphi_1(\ell(P))}{|P|^{1/p_1}},$$

使得

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi_2(\ell(P))}{|P|^{1/p_2}} \left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s_2-\frac{d}{p_2})q_2} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \right)^{\frac{q_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\quad \le 2^{j_P(s_2-s_1)} \frac{\varphi_2(\ell(P))}{\varphi_1(\ell(P))} \frac{\varphi_1(\ell(P))}{|P|^{1/p_1}} \left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s_1-\frac{d}{p_1})q_1} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\quad \le \|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\| \sup_{P:|P|\le 1} 2^{j_P(s_2-s_1)} \frac{\varphi_2(\ell(P))}{\varphi_1(\ell(P))} \le c\, \|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\|
\end{aligned}$$

由（3.29）可知。这就证明了（3.28）。

步骤 *2*。我们证明条件 (3.29) 和 (3.30) 的必要性。假设嵌入 (3.28) 是连续的。对于任意 $j_0 \in \mathbb{N}$，我们可以定义一个序列

$$\lambda_{j,m} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j = j_0,\ m = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$2^{j_0 s_2}\varphi_2(2^{-j_0}) = \|\lambda|b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)\| \le C\|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\| = 2^{j_0 s_1}\varphi_1(2^{-j_0}).$$

这证明了条件 (3.29) 是必要的。

如果 $s_2 > s_1$，那么序列 $\lambda_{j,\,m} = 2^{-jt}$, $Q_{j,\,m} \subset Q$, $s_2 > t > s_1$ 是空间 $b^{s_1,\,p_1\,\varphi_1}_{\,q_1,}(Q)$ 的元素，但不属于 $b^{s_2,}_{\,p_2\,q_2,}(Q)$。因此 $s_2 \le s_1$。如果 $s_1 = s_2$ 且 $q_1 > q_2$，那么我们可以选取一个正序列 $\mu = \{\mu_j\}_j \in \ell_{q_1} \setminus \ell_{q_2}$ 并令

$$\lambda_{j,m} = 2^{-js_1}\mu_j \quad \text{if} \quad Q_{j,m} \subset Q.$$

Then

$$\|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\| = \big(\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j^{q_1}\big)^{\frac{1}{q_1}} < \infty, \quad \text{but} \quad \|\lambda|b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)\| = \big(\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j^{q_2}\big)^{\frac{1}{q_2}} = \infty,$$

因此，条件 (3.30) 也是必要的。 □

注 3.15。我们将上述结果与 $\varphi_i(t) \sim t^{d(\frac{1}{p_i}-\tau_i)}$、$0 \le \tau_i < \frac{1}{p_i}$, $i = 1,\ 2$, $p_1 \ge p_2$ 以及 $A^{s,\,p\,\tau,\,q} = B^{s,\,p\,\tau}_{\,q,}$ 时的经典情形进行比较。在这里，嵌入 $B^{s_1,\,p_1\,\tau_1}_{\,q_1,}(\Omega) \to B^{s_2,\,p_2\,\tau_2}_{\,q_2,}(\Omega)$ 的连续性可以由 (2.21) 刻画，包括极限情形，参见 [10, 定理 4.9]。然后，命题 3.14 与我们此前在这一设定的特殊情形下所得的结论一致。

现在我们关注 $p_1 < p_2$对应的命题 3.14。请注意，考虑到（2.10）中的嵌入的序列空间版本以及定理 3.5，可知即使当 $p_1 < p_2$ 时，条件（3.29）对于嵌入（3.28）也是必要的。同样地，当$\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$时，该条件

$$\Big\{2^{j(s_2-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$$

对于嵌入（3.28）也是必要的。这一观察为下面的定义提供了一定的动机。根据函数 φ_1 和 φ_2，我们引入一些临界光滑度指标，以供后面的若干命题使用。

定义 3.16。令 $0 < p_i < \infty$，其中 $i = 1,\ 2$ 且 $\varrho = \min(1,\ \frac{p_1}{p_2})$。假设 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，其中 $\varphi_i(1) = 1$, $i = 1\ 2$ $s_1 \in \mathbb{R}$ ，。令 给定。

(i) 我们定义

$$\sigma = \sigma(s_1) = \sup\{s \in \mathbb{R} : \sup_{j\ge 0} 2^{j(s-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} < \infty\} \tag{3.31}$$

and

$$\sigma_\infty = \sigma_\infty(s_1) = \sup\{s \in \mathbb{R} : \sup_{j\ge 0} 2^{j(s-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{-1} < \infty\}. \tag{3.32}$$

(ii) 假设存在某个 $c > 0$，使得

$$\varphi_2(t) \ge c\ \varphi_1^{\varrho}(t), \quad t \in (0,1). \tag{3.33}$$

接下来我们引入

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(s_1) = \sup\{s \in \mathbb{R} : \sup_{j\ge 0} 2^{j(s-\sigma(s_1))}\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1^{\varrho}(2^{-j})} < \infty\}. \tag{3.34}$$

备注 3.17. 我们简要讨论由 (3.31)、(3.32) 和 (3.34) 给出的数值 σ、 σ_∞ 和 σ。注意，(3.32) 中的记号可以理解为 (3.31) 的边界情形 $p_2=\infty$（该情形不被允许）。显然，数值 σ、 σ_∞ 和 σ 不仅取决于 s_1，还取决于 p_i 和 φ_i、 $i=1,\ 2$。不过，为方便起见，我们决定将这些数值主要视为相对于 s_1 的光滑性 s_2 的界，同时将所有其他参数视为固定。

(i) 如果 $\lim_{j\to\infty}\varphi_1(2^{-j})=c>0$ 或 $\varrho=1$，则 $\sigma(s_1)=s_1$。如果 $\lim_{j\to\infty}\varphi_1(2^{-j})=0$ 且 $\varrho<1$，则 $\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\to\infty$ 对 $j\to\infty$成立。此外， $\varphi_1\in\mathcal{G}_{p_1}$ 意味着 $\lim_{j\to\infty}2^{jd/p_1}\varphi_1(2^{-j})>0$，也就是说，

$$\lim_{j\to\infty}2^{j(\varrho-1)\frac{d}{p_1}}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}<\infty.$$

因此， $\sigma(s_1)$ 总是定义良好的，且 $s_1-\frac{d}{p_1}(1-\varrho)\le\sigma(s_1)\le s_1$。同样的论证也可用于 $\sigma_\infty(s_1)$，最终得到 $s_1-\frac{d}{p_1}\le\sigma_\infty(s_1)\le s_1$。

(ii) 现在假设 (3.33) 成立。这意味着 $\varphi_1(t)\le\varphi_1(t)^\varrho\le c\,\varphi_2(t)$， $0<t<1$，并且根据 (3.34)， $\sigma(s_1)\le\sigma(s_1)\le s_1$。对于下估计，我们断言 $\sigma(s_1)\ge s_1-\frac{d}{p_1}$。理由如下。回想 $\varphi_2(2^{-j})\le 1$, $j\in\mathbb{N}_0$，因为 $\varphi_2\in\mathcal{G}_{p_2}$ 且 $\varphi_2(1)=1$。设 $\varrho=1$。现在 $\sigma(s_1)=s_1$，而 $\varphi_1\in\mathcal{G}_{p_1}$ 意味着 $\varphi_1(2^{-j})\ge 2^{-jd/p_1}$, $j\in\mathbb{N}_0$，由此得到 $\sigma(s_1)\ge s_1-d/p_1$。如果 $\varrho<1$，则 $\varphi_1^\varrho\in\mathcal{G}_{p_2}$，因此 $\varphi_1^\varrho(2^{-j})\ge 2^{-jd/p_2}$, $j\in\mathbb{N}_0$，从而得到$\sigma(s_1)\ge\sigma(s_1)-\frac{d}{p_2}\ge s_1-\frac{d}{p_1}(1-\varrho)-\frac{d}{p_2}=s_1-\frac{d}{p_1}$。因此，在上述估计成立的所有情况下， $\sigma(s_1)$ 都是定义良好的。

例 3.18. 为了便于后续比较，我们以“经典”情形 $\varphi_i(t)\sim t^{d(\frac{1}{p_i}-\tau_i)}$, $0\le\tau_i<\frac{1}{p_i}$, $i=1,2$ 为例说明上述数值。那么

$$\sigma(s_1)=\begin{cases}s_1, & \varrho=1,\\ s_1-\frac{d}{p_1}+\frac{d}{p_2}+d\tau_1(1-\varrho), & \varrho<1.\end{cases}$$

在 σ_∞ 由 (3.32) 给出的情形下，我们在此设定中得到 $\sigma_\infty(s_1)=s_1-\frac{d}{p_1}+d\tau_1$，它对应于上述$\sigma(s_1)$，其中 $p_2\to\infty$，因此 $\tau_2\to 0$, $\varrho\to 0$。最后，条件 (3.33) 在此语境下意味着

$$\begin{cases}\frac{1}{p_1}-\tau_1-\frac{1}{p_2}+\tau_2\ge 0, & \varrho=1,\\ \tau_2-\tau_1\varrho\ge 0, & \varrho<1,\end{cases}\qquad\text{and thus}\quad\overline{\sigma}(s_1)=s_1-d\left(\frac{1}{p_1}-\tau_1-\frac{1}{p_2}+\tau_2\right)$$

根据 (3.34)。

回顾一下，我们在命题 3.14 中刻画了 $p_1\ge p_2$ 情形下嵌入 $b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)$ 的连续性。现在我们来处理 $p_1<p_2$ 的情形，并从极限情形 $q_2=\infty$ 和$\varphi_2\sim 1$开始。

命题 3.19. 设 $0<p<\infty$ 和 $\varphi\in\mathcal{G}_p$。不失一般性，假设 $\varphi(1)=1$。令$s_1\in\mathbb{R}$、 $0<q\le\infty$，并令

$$\sup_{j\ge 0}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}<\infty. \tag{3.35}$$

(i) 存在一个连续嵌入

$$b^{s_1,\varphi}_{p,q}(Q)\hookrightarrow b^{s_2}_{\infty,\infty}(Q) \tag{3.36}$$

当且仅当 $s_2\le\sigma_\infty(s_1)$。

(ii) 嵌入 (3.36) 是紧的，当且仅当，

$$s_2<\sigma_\infty(s_1)\quad or\quad s_2=\sigma_\infty(s_1)\quad and\quad\limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}=0. \tag{3.37}$$

证明。步骤 *1*。首先处理 (i)，并证明 $s_2\le\sigma_\infty(s_1)$ 蕴含 (3.36) 的连续性。只需证明嵌入对 $q=\infty$ 和 $s_2=\sigma_\infty(s_1)$ 成立。令 $P=Q_{j_0,\,m_0}$ 由

(3.35),

$$2^{j_0 s_2}|\lambda_{j_0,m_0}| = 2^{j_0\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j_0})2^{j_0(s_1-\frac{d}{p})}|\lambda_{j_0,m_0}|2^{j_0(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j_0})^{-1}$$
$$\le c\,2^{j_0\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j_0})\sup_{j\ge j_0}2^{j(s_1-\frac{d}{p})}\left(\sum_{Q_{j,m}\subset P}|\lambda_{j,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le c\,\|\lambda|b^{s_1,\varphi}_{p,\infty}(Q)\|,$$

这就证明了 (3.36)，因为只需对立方体 $Q_{j_0,\ m}$取上确界

现在我们讨论嵌入 (3.36) 对 $s_2 \le \sigma_\infty(s_1)$ 的必要性。更确切地说， $s_2 > \sigma_\infty(s_1)$ 表示

$$\sup_{j\ge 0}2^{j(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1} = \infty$$

根据 (3.32)，其中 $\varphi_1 = \varphi$。我们证明此时嵌入 (3.36) 不成立。我们选取一个正整数严格递增序列 $\{j_k\}_k$，使得

$$\lim_{k\to\infty}2^{j_k(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j_k})^{-1} = \infty. \tag{3.38}$$

序列 $\{2^{j\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是递增的，因为 $\varphi\in\mathcal{G}_p$。首先假设 $\lim_{j\to\infty}2^{j\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j}) = \infty$。在这种情况下，我们可以从序列 $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中找到一个子序列 $\{j_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$，使得

$$2^{j_{k_\ell}\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j_{k_\ell}}) \ge 2\cdot 2^{j_{k_{\ell-1}}\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j_{k_{\ell-1}}}). \tag{3.39}$$

Let

$$\lambda_{j,m} = \begin{cases} 2^{-js_1}\varphi(2^{-j})^{-1} & \text{if}\quad j = j_{k_\ell}\ \text{ and } m = 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么，同样根据 (3.39),

$$\|\lambda|b^{s_1,\varphi}_{p,q}(Q)\| = \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(2^{-j_{k_\ell}})}{2^{-j_{k_\ell}\frac{d}{p}}}\left(\sum_{\nu\ge\ell}2^{j_{k_\nu}(s_1-\frac{d}{p})q}|\lambda_{j_{k_\nu},0}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(2^{-j_{k_\ell}})}{2^{-j_{k_\ell}\frac{d}{p}}}\left(\sum_{\nu\ge\ell}2^{-j_{k_\nu}\frac{d}{p}q}\varphi(2^{-j_{k_\nu}})^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(2^{-j_{k_\ell}})}{2^{-j_{k_\ell}\frac{d}{p}}}\left(\sum_{\nu\ge\ell}2^{(\ell-\nu)q}2^{-j_{k_\ell}\frac{d}{p}q}\varphi(2^{-j_{k_\ell}})^{-q}\right)^{\frac{1}{q}} \le C < \infty.$$

另一方面，根据 (3.38),

$$\sup_{j,m}2^{js_2}|\lambda_{j,m}| = \sup_{\ell\in\mathbb{N}}2^{j_{k_\ell}(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j_{k_\ell}})^{-1} = \infty.$$

因此 (3.36) 不能成立。最后我们需要考虑 $\lim_{j\to\infty}2^{j\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j}) = c < \infty$ 的情形。但这意味着 $\varphi(2^{-j}) \sim 2^{-j\frac{d}{p}}$，并且空间 $b^{s_1,p\ q}{}^{\varphi},(Q)$ 与经典Besov序列空间 $b^{s_1}_{p,q}(Q)$ 重合。在这种情况下，该结论是众所周知的。

步骤 *2*。我们现在处理 (ii) 中的紧性。首先，假设 $s_2 < \sigma_\infty(s_1)$。令 $\|\lambda|b^{s_1,p\ q}{}^{\varphi},(Q)\| \le 1$。对任意 $\varepsilon > 0$，我们可以选取 $j_0\in\mathbb{N}$，使得对任意 $j\ge j_0$ 有 $2^{j(s_2-\sigma_\infty(s_1))} \le \varepsilon$。然后，以与上文类似的方式，

$$2^{js_2}|\lambda_{j,m}| \le c\,2^{j(s_2-\sigma_\infty(s_1))}\|\lambda|b^{s_1,\varphi}_{p,q}(Q)\| \le c\,\varepsilon, \qquad j\ge j_0.$$

子空间 $\{\lambda\in b^{s_1,\varphi}_{p,q}(Q) : \lambda_{j,m} = 0 \text{ 若 } \quad j > j_0\}$ 是有限维的，因此空间 $b^{s_1,p\ q}{}^{\varphi},(Q)$ 的单位球在 $b^{s_2}_{\infty,\infty}(Q)$ 中的像是相对紧的。若 $s_2 = \sigma_\infty(s_1)$ 且 $\limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1} = 0$，则

$$\lim_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1} = \limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1} = 0,$$

因为该序列为正。对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个数 j_0，使得对于任意 $j\ge j_0$，我们有

$$2^{j\sigma_\infty(s_1)}\le \varepsilon 2^{js_1}\varphi(2^{-j}). \tag{3.40}$$

令 $\|\lambda|b^{s_1,p\ q}{}^{\varphi,}(Q)\|\le 1$。我们将 λ 表示为和 $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$，其中

$$\lambda^{(1)}_{j,m}=\begin{cases}\lambda_{j,m} & \text{if } 0\le j\le j_0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由 (3.40) 可得

$$2^{j\sigma_\infty(s_1)}|\lambda_{j,m}|\le \varepsilon 2^{j\frac{d}{p}}\varphi(2^{-j})2^{j(s_1-\frac{d}{p})}|\lambda_{j,m}|\le \varepsilon\|\lambda|b^{s_1,\varphi}_{p,q}(Q)\|\le\varepsilon \quad \text{if} \quad j>j_0. \tag{3.41}$$

另一方面，由满足 $\lambda_{j,m}=0$ 的 $j>j_0$ 构成的序列子空间是有限维的。这意味着嵌入 (3.36) 是紧的。

现在我们证明条件 (3.37) 的必要性。鉴于 (i)，只需证明：若 $\limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}>0$，则 (3.36) 的紧性蕴含 $s_2<\sigma_\infty(s_1)$。证明如下。假设 $s_2=\sigma_\infty(s_1)$。令 $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为一个递增整数序列，使得

$$\lim_{k\to\infty}2^{j_k(s_2-s_1)}\varphi(2^{-j_k})^{-1}=c>0,\qquad s_2=\sigma_\infty(s_1).$$

我们按以下方式取由 $b^{s_1,p\ q}{}^{\varphi,}(Q)$ 中元素构成的序列 $\lambda^{(k)}$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\lambda^{(k)}_{j,m}=\begin{cases}2^{-js_1}\varphi(2^{-j})^{-1} & \text{if} \quad j=k \ \text{ and } m=0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么 $\|\lambda^{(k)}|b^{s_1,\ p\ q}{}^{\varphi,}(Q)\|=1$，但是

$$\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(\ell)}|b^{s_2}_{\infty,\infty}(Q)\|=\max\{2^{k(s_2-s_1)}\varphi(2^{-k})^{-1},2^{\ell(s_2-s_1)}\varphi(2^{-\ell})^{-1}\}\ge\frac{c}{2},$$

对于充分大的 $k,\ \ell$。这与假设 (3.36) 具有紧性相矛盾。 □

例 3.20. 考虑由 (2.6) 给出的函数 φ，它来自例2.4(vi)，并假设参数 a 选取得足够大，使得 $\varphi\in\mathcal{G}_p$。在此情形下，我们有 $\sigma_\infty(s_1)=s_1$，并且 $\limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}=0$。

对于 (2.7) 中的函数 ψ，它来自例 2.4(vii)，当 $p\le d$ 时属于 $\mathcal{G}_p$，有 $\sigma_\infty(s_1)=s_1-\frac{d}{p}$，并且

$$\sup_{j\ge0}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\psi(2^{-j})^{-1}<\infty,\quad \text{but}\quad \limsup_{j\to\infty}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\psi(2^{-j})^{-1}=0.$$

注 3.21. 如果 $\sup_{j\ge0}2^{j(\sigma_\infty(s_1)-s_1)}\varphi(2^{-j})^{-1}=\infty$，那么用类似的方法可以证明，当 $s_2<\sigma_\infty(s_1)$ 时，嵌入 (3.36) 是连续且紧的。

现在我们来讨论 $0<p_1<p_2<\infty$ 的情形。为方便起见，我们先陈述以下 Gagliardo-Nirenberg 型不等式。该不等式或许广为人知，但我们尚未找到直接的参考文献。该结果可由 Hölder 不等式推出。

引理 3.22。设 $0<q_1,\ q_2\le\infty,\ -\infty<s_2<s_1<\infty$ 且 $0<\theta<1$。

(i) 设 $0<p_1,p_2<\infty$。我们假设

$$s=s_1(1-\theta)+\theta s_2,\quad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2}.$$

设 $\varphi_1\in\mathcal{G}_{p_1}$, $\varphi_2\in\mathcal{G}_{p_2}$ 且

$$\varphi(t)=\varphi_1^{1-\theta}(t)\varphi_2^{\theta}(t),\qquad t>0.$$

那么 $\varphi\in\mathcal{G}_p$，并且存在一个正实常数 $C>0$，使得不等式

$$\|\lambda|b^{s,\varphi}_{p,q}(Q)\|\le C\|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\|^{1-\theta}\,\|\lambda|b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)\|^{\theta} \tag{3.42}$$

对所有序列$\lambda=\{\lambda_{j,m}\}_{j,m}\subset\mathbb{C}$成立。

(ii) 设 $0 < p_1 < \infty$。我们假设

$$s = s_1(1-\theta) + \theta s_2, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}.$$

令 $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ 和

$$\varphi(t) = \varphi_1^{1-\theta}(t), \qquad t > 0.$$

则 $\varphi \in \mathcal{G}_p$，且存在一个正实常数 $C > 0$，使得不等式

$$\|\lambda|b^{s,\varphi}_{p,q}(Q)| \le C\|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\|^{1-\theta}\,\|\lambda|b^{s_2}_{\infty,q_2}(Q)\|^{\theta} \tag{3.43}$$

对所有序列 $\lambda = \{\lambda_{j,m}\}_{j,\ m} \subset \mathbb{C}$均成立。

我们研究嵌入 $b^{s_1,\ p_1\ \varphi_1}_{q_1,}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\ p_2\ \varphi_2}_{q_2,}(Q)$，其中 $0 < p_1 < p_2 < \infty$，并首先处理与（3.33）相反的情形，即 $\varphi_2(t) \le C\ \varphi_1^{\varrho}(t)$，$t \in (0,\ 1)$。

命题 3.23。令 $0 < p_1 < p_2 < \infty$、$s_i \in \mathbb{R}$、$0 < q_i \le \infty$和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，其中 $i = 1,\ 2$。令 $\varrho = \frac{p_1}{p_2}$，— 并且不妨设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。进一步假设

$$\varphi_2(t) \le C\varphi_1^{\varrho}(t), \quad 0 < t \le 1, \tag{3.44}$$

and

$$\sup_{j\ge 0} 2^{j(\sigma(s_1)-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} < \infty. \tag{3.45}$$

于是存在一个连续嵌入

$$b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{\sigma(s_1),\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q) \tag{3.46}$$

若 $q_1 \le \varrho q_2$，则
成立。

证明。只需考虑 $\varphi_2(t) = \varphi_1^{\varrho}(t)$、$0 < t \le 1$和 $q_1 = \varrho q_2$ 的情形。由 (3.45) 可得

$$\sup_{j\ge 0} 2^{j\frac{\sigma(s_1)-s_1}{1-\varrho}}\varphi_1(2^{-j})^{-1} < \infty. \tag{3.47}$$

我们取 $s_3 \in \mathbb{R}$，使得 $s_3 - \sigma(\varrho\ s_1 = \sigma)(s_1) - s_1 / 1-\varrho$。于是

$$\sigma(s_1) = \varrho s_1 + (1-\varrho)s_3 \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{p_2} = \frac{\varrho}{p_1}.$$

根据引理 3.22 的第二部分，可得

$$\|\lambda|b^{\sigma(s_1),\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)\| \le C\|\lambda|b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\|^{\varrho}\,\|\lambda|b^{s_3}_{\infty,\infty}(Q)\|^{1-\varrho}, \tag{3.48}$$

其中 $q_1 = \varrho q_2$。此外，不等式 (3.47) 给出

$$\sup_{j\ge 0} 2^{j(s_3-\sigma(s_1))}\varphi_1(2^{-j})^{-\varrho} < \infty. \tag{3.49}$$

因此，命题 3.19(i) 蕴含

$$b^{\sigma(s_1),\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q) \hookrightarrow b^{s_3}_{\infty,\infty}(Q) \tag{3.50}$$

现在，将 (3.48) 与 (3.50) 结合即可得到 (3.46)。 □

注 3.24。如果 $0 < p_1 < p_2 < \infty$，(3.44) 应成立，并且 $s_1 - s_2 = \frac{d}{p_1} - \frac{d}{p_2}$，那么至少在 $q_1 \le \varrho q_2$ 的情况下，总存在一个连续嵌入 $b^{s_1,\ p_1\ \varphi_1}_{q_1,}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\ p_2\ \varphi_2}_{q_2,}(Q)$，因为

$$2^{j(s_2-s_1)}\varphi_1^{\varrho-1}(2^{-j}) \le 2^{j(s_2-s_1+\frac{d}{p_1}-\frac{d}{p_2})}$$

因此 $\sigma(s_1) \ge s_2$。但嵌入对 $q's$ 可以在无限制的情况下成立，并且若 $s_2 = s_1 - \frac{d}{p_1} + \frac{d}{p_2} < \sigma(s_1)$ 则为紧的。 — —

例3.25. 设 $p_1 < p_2$。再次考虑例2.4(vi)中由(2.6)给出的函数 φ，假定参数 a 选取得足够大，使得 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$。我们有

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(s-s_1)}\varphi(2^{-j})^{\varrho-1} = (\ln a)^{\varrho-1} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(s-s_1)} j^{1-\varrho} < \infty$$

对于任意 $s < s_1$，因此 $\sigma(s_1) = s_1$。但是，显然，条件 (3.45) 不满足。

最后，我们考虑 $0 < p_1 < p_2 < \infty$ 满足 (3.33) 的情形，即 $\varphi_2(t) \ge c\,\varphi_1^{\varrho}(t)$，$t \in (0,\ 1)$。

推论3.26。设 $0 < p_1 < p_2 < \infty$、$s_i \in \mathbb{R}$、$0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$ 对于 $i = 1$ 满足2。设 $\varrho = \frac{p_1}{p_2}$，不妨设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。设 $\varphi_2(t) \ge c\varphi_1^{\varrho}(t)$ 对于 $0 < t \le 1$。我们假设条件 (3.45) 和

$$\sup_{j\ge 0} 2^{j(\overline{\sigma}(s_1)-\sigma(s_1))} \frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1^{\varrho}(2^{-j})} < \infty \tag{3.51}$$

均得到满足。于是存在一个连续嵌入

$$b_{p_1,q_1}^{s_1,\varphi_1}(Q) \hookrightarrow b_{p_2,q_2}^{\overline{\sigma}(s_1),\varphi_2}(Q) \tag{3.52}$$

若 $q_1 \le \varrho q_2$。

证明。为证明该命题，我们使用以下因式分解

$$b_{p_1,q_1}^{s_1,\varphi_1}(Q) \hookrightarrow b_{p_2,q_2}^{\sigma(s_1),\varphi_1^{\varrho}}(Q) \hookrightarrow b_{p_2,q_2}^{\overline{\sigma}(s_1),\varphi_2}(Q). \tag{3.53}$$

第一个嵌入的连续性由命题 3.23 得出，而第二个嵌入则由 (3.51) 和命题 3.14 得出。

□

注3.27。注意，若 φ_1, φ_2 满足 (3.45) 和 (3.51)，则可得到 (3.29)，其中 $s_2 = \sigma(s_1)$。因此，人们或许会尝试将命题 3.14 推广到 $\varrho < 1$ 的情形（可能有 $q_1 \le \varrho q_2$）。然而，上述证明中的这一论证尚未涵盖在我们的分解技巧之内，因为我们需要 (3.45) 和 (3.51) 两个条件分别成立。

例3.28。我们回到例 3.18 中的情形。假设 $0 < p_1 < p_2 < \infty$, $0 \le \tau_i < \frac{1}{p_i}$,$\varphi_i(t) \sim t^{d(\frac{1}{p_i}-\tau_i)}$，$i = 1, 2$。那么 $\varphi_2(t) \ge c\varphi_1^{\varrho}(t)$，$t \in (0,\ 1)$，这意味着 $\tau_2 \ge \varrho\tau_1$，条件 (3.45) 和 (3.51) 总是成立，因此我们得到极限嵌入

$$b_{p_1,q_1}^{s_1,\tau_1}(Q) \hookrightarrow b_{p_2,q_1p_2/p_1}^{s_1-d(\frac{1}{p_1}-\tau_1-\frac{1}{p_2}+\tau_2),\tau_2}(Q).$$

这对应于 [10,定理 4.9] 的序列空间版本。

现在我们研究 (3.28) 的紧性，即

$$b_{p_1,q_1}^{s_1,\varphi_1}(Q) \hookrightarrow b_{p_2,q_2}^{s_2,\varphi_2}(Q)$$

并且为方便起见，可假设 Q 是单位立方体 $Q_{0,\ 0}$。

命题 3.29。设 $s_i \in \mathbb{R}$、$0 < p_i < \infty$、$0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，其中 $i = 12$，且 $\varrho = \min(1,\ \frac{p_1}{p_2})$。不失一般性，假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。

(i) 假设满足 (3.44)，即存在某个 $c > 0$ 使得

$$\varphi_2(t) \le c\,\varphi_1^{\varrho}(t), \quad t \in (0,1).$$

那么，嵌入 (3.28) 是紧的，其中 $s_2 < \sigma(s_1)$由 (3.31)给出。

(ii) 假设(3.33) 成立，即存在某个 $c > 0$ 使得

$$\varphi_2(t) \ge c\,\varphi_1^{\varrho}(t), \quad t \in (0,1).$$

那么嵌入 (3.28) 是紧的，如果 $s_2 < \sigma(s_1)$由 (3.34)给出。

证明。步骤 *1*。我们首先证明 (i)。
子步骤1.1 </style]如果 $\varrho = 1$，该结论显然成立，因为 $\varphi_2(t) \le C\varphi_1(t)$，因此条件 (3.29) 得到满足，且源空间与目标空间具有相同的光滑性。由命题 3.14 可知，

$$b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_1,\varphi_2}_{p_2,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q),$$

并且当本情形中假设 $s_2 < s_1$ 时，第二个嵌入是紧的。这可通过与定理 3.10 证明的步骤 1 中所述类似的论证得到。

子步骤*1.2*。现在假设 $\varrho < 1$，即 $p_1 < p_2$。那么通过某种提升论证，我们可以假设 $s_1 = 0$ 和 $s_2 < 0$，因为 $b^{s_1,\,p_1\,\varphi_1,}_{q_1,}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\,p_2\,\varphi_2,}_{q_2,}(Q)$ 当且仅当 $b^{0,\,p_1\,\varphi_1,}_{q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_2-s_1,\,p_2\,\varphi_2,}_{q_2}(Q)$，包括嵌入的紧性。因此，我们只需证明后一个嵌入的紧性。令 $\lambda \in b^{0,\,p_1\,\varphi_1,}_{q_1}(Q)$ 满足 $\|\lambda|b^{0,\,p_1\,\varphi_1,}_{q_1}(Q)\| = 1$，即

$$\sup_{P\subset Q} \frac{\varphi_1(2^{-j_P})}{|P|^{1/p_1}} \left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{-j\frac{d}{p_1}q_1} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{q_1}} = 1.$$

则对所有 $j \ge j_P$,

$$\varphi_1(2^{-j_P}) 2^{(j_P-j)\frac{d}{p_1}} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \le 1, \tag{3.54}$$

从而得到

$$\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1} \le \varphi_1(2^{-j_P})^{-p_1} 2^{-(j_P-j)d}. \tag{3.55}$$

取 $P = Q_{j,m}$ 则对所有满足 $Q_{j,m} \subset Q$ 的 $(j,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^d$，由 (3.54) 可得

$$\varphi_1(2^{-j})|\lambda_{j,m}| \le 1, \tag{3.56}$$

从而，由单调性及 $p_1 < p_2$,

$$\varphi_1(2^{-j})^{p_2} \sum_{m:Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \le \varphi_1(2^{-j})^{p_1} \sum_{m:Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_1}.$$

因此，由 (3.55),

$$\varphi_1(2^{-j})^{p_2} \sum_{m:Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \le \varphi_1(2^{-j})^{p_1} \varphi_1(2^{-j_P})^{-p_1} 2^{-(j_P-j)d},$$

thus

$$\left(\sum_{m:Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \le \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} \varphi_1(2^{-j_P})^{-\varrho} 2^{-(j_P-j)\frac{d}{p_2}}.$$

由假设，$s_2 < \sigma(s_1)$，且我们可以选取 s_3，使得 $s_2 < s_3 < \sigma < (s_1) \le s_1 = 0$，并由 (3.31)（其中取 $s_1 = 0$），

$$\sup_{j\ge 0} 2^{js_3} \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} < \infty.$$

我们得到

$$\begin{aligned} 2^{j(s_2-\frac{d}{p_2})} \left(\sum_{Q_{j,m}\subset P} |\lambda_{j,m}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &\le 2^{j(s_2-s_3)} 2^{j(s_3-\frac{d}{p_2})} \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} \varphi_1(2^{-j_P})^{-\varrho} 2^{(j-j_P)\frac{d}{p_2}} \\ &\le \varphi_1(2^{-j_P})^{-\varrho} 2^{-j_P\frac{d}{p_2}} 2^{js_3} \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} 2^{j(s_2-s_3)}, \end{aligned}$$

使得

$$\left(\sum_{j=j_P}^{\infty} 2^{j(s_2-\frac{d}{p_2})q_2}\left(\sum_{Q_{j,m}\subset P}|\lambda_{j,m}|^{p_2}\right)^{\frac{q_2}{p_2}}\right)^{\frac{1}{q_2}} \le \varphi_1(2^{-j_P})^{-\varrho}2^{-j_P\frac{d}{p_2}}\sup_{j\ge 0}2^{js_3}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\left(\sum_{j=j_P}^{\infty}2^{j(s_2-s_3)q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$
$$\le c\ \varphi_1(2^{-j_P})^{-\varrho}2^{-j_P\frac{d}{p_2}}$$
$$\le c'\ \varphi_2(2^{-j_P})^{-1}|P|^{\frac{1}{p_2}}$$

根据 (3.32)。 最后，在乘以 $\varphi_2(2^{-j_P})|P|^{-\frac{1}{p_2}}$ 后，对所有 $P\subset Q$ 取上确界，得到

$$\|\lambda|b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)\| \le\ c = c\|\lambda|b^{0,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q)\| < \infty$$

并确保对于任意 $s_2 < \sigma(0) \le 0$，$b^{0,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q)$ 的连续性。至于紧性，我们使用因式分解

$$b^{0,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_3,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q),$$

其中，根据上述观察，第一个嵌入是连续的，第二个嵌入是紧的；在这两种情况下，我们都得益于对 s_3（满足 $s_2 < s_3 < \sigma(0) \le 0$）的选择。

步骤 *2*。现在我们关注 (ii)。

子步骤 *2.1* 我们首先处理 $p_1 \ge p_2$ 的情形。根据命题 3.14，对于所有$s_2 < \sigma(s_1)$，连续性成立。至于紧性，我们因此可以选取某个 s_3，使得 $s_2 < s_3 < \sigma(s_1)$，并注意到

$$b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{s_3,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q),$$

其中，第一个嵌入是连续的，第二个嵌入是紧的，分别由命题 3.14 和 (i) 得出。

子步骤 *2.2*。现在假设 $p_1 < p_2$。我们有 $\varphi_1(t) \le \varphi_1(t)^{\varrho} \le c\varphi_2(t)$，$0 < t \le 1$。我们通过以下方式对该嵌入进行分解：

$$b^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(Q) \hookrightarrow b^{\tau,\varphi_1^{\varrho}}_{p_2,q_2}(Q) \hookrightarrow b^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(Q),$$

其中，$\tau \in (s_2, s_1)$ 需要适当选取。对于第一个嵌入，我们可以应用 (i)，并在 $\tau < \sigma(s_1)$ 时得到紧性。如果 $s_2 < \sigma(s_1)$，那么我们可以选取 τ，使得

$$\sigma(s_1) + s_2 - \overline{\sigma}(s_1) < \tau < \sigma(s_1),$$

由此得到

$$s_2 - \tau < \overline{\sigma}(s_1) - \sigma(s_1) < \overline{\sigma}(s_1) - \tau.$$

因此，对于满足 $s_2 - \tau < s - \sigma(s_1)$ 的任意 $s < \sigma(s_1)$，我们有

$$\sup_{j\ge 0}2^{j(s_2-\tau)}\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}} \le \sup_{j\ge 0}2^{j(s-\sigma(s_1))}\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}} < \infty.$$

根据命题 3.14，这意味着第二个嵌入具有连续性。 □

注记 3.30. 让我们简要回顾一下例 3.18，并将上述结果与推论 2.7(ii) 中的（函数空间）结果进行比较，其中 $A^{s,\ \tau,\ q} = B^{s,\ \tau}_{\ p,\ q}$。

在 (i) 和 $\varrho = 1$ 的情况下，条件 (3.44) 表示 $\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2 \le 0$，因此我们得到$s_2 < \sigma(s_1) = s_1$的紧性，这与条件 (2.21) 很吻合。已知这一结果（对于函数空间的结果）甚至是尖锐的。若 $\varrho < 1$，则条件 (3.44) 意味着 $\tau_2 \le \tau_1\varrho$，因此我们得到$s_1 - s_2 > d(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \tau_1 + \tau_1\varrho)$ 的紧性，这在该情形下又与 (2.20) 一致。

在情形 (ii) 中，通过例 3.18 我们得到 $\sigma(\overline{s_1}) = s_1 - d(\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2)$，因此当 $s_2 < s_1 - d(\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2)$ 时，(ii) 保证紧性。当 $\varrho = 1$ 时，这与 (2.21) 一致，因为条件 (3.33) 表示 $\frac{1}{p_1} - \tau_1 - \frac{1}{p_2} + \tau_2 \ge 0$。在 $\varrho < 1$ 的情形下，上述条件与 (2.20) 一致，因为我们的假设 (3.33) 写作 $\tau_2 \ge \frac{p_1}{p_2}\tau_1$。因此，这种情形也与 (2.20) 很好地吻合。

因此，命题 3.29 中的新结果非常适用于这个例子，不过目前我们只有充分性（在序列空间的情形下）。

4 广义 Besov–Morrey 空间在区域上的嵌入

请注意，我们始终用 Ω 表示 中的一个有界 C^∞ domain。所有空间 $\mathcal{A}^s_{\varphi,p,q}(\Omega)$ 和 $A^{s,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$ 都是通过限制定义的。

定理 4.1。 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_i < \infty$、 $0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，其中 $i = 12$。不失一般性，假设 φ_1 $(1) = \varphi_2(1) = 1$。令 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$，并令 $\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})\,(2^{-\nu})^{\varrho}}{\varphi_1}$、 $j \in \mathbb{N}_0$。

存在连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.1}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*} \qquad where \quad \frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+. \tag{4.2}$$

此外，(4.1)是 紧当且仅当(4.2) 成立，且将 ℓ_∞ 替换为 c_0，如果 $q^* = \infty$，这意味着 t

$$2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j \frac{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}}{\varphi_1(2^{-j})} \to 0 \qquad if \qquad q_1 \le q_2.$$

证明。 证明沿用 [19], 中定理 3.1 证明的子步骤1.1中的论证，此处改为基于定理 3.5 和定理 3.10，并考虑空间$\mathcal{N}^{s}_{\varphi、\ p、\ q}(\mathbb{R}^d)$ 的小波刻画，参见 [16, 定理 3.1], ，以及两个空间 $\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi_1、\ p_1、\ q_1}(\Omega)$ 和 $\mathcal{N}^{s_2}_{\varphi_2、\ p_2、\ q_2}(\Omega)$ 存在共同延拓算子这一事实，参见 [24, 定理 5.4]。 □

上述定理也给出了经典情形 $\mathcal{N}^{s_1}_{u_1、}$

$\mathcal{N}^{s_2}_{u_2\ p_2\ q_2}$ $\overset{p_1\ q_1}{3\ 1}$ $\hookrightarrow$、(Ω) 、、(Ω) 的精确表述。特别是, [19], 下述推论中的连续性部分改进了 中的定理 ., 而紧性判据与该处证明的定理 4.1 一致；为方便起见，该定理已在推论 2.7(i) 中重述。

推论 4.2。 设 $s_i \in \mathbb{R}$, $0 < p_i \le u_i < \infty$, $0 < q_i \le \infty$ 满足 $i = 1,2$ 且 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$。则存在连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s_1}_{u_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{u_2,p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.3}$$

当且仅当

(i) $\dfrac{u_1}{u_2} \ge \varrho \quad and$

$$\frac{s_1-s_2}{d} > \frac{p_1}{u_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ \qquad or \qquad \frac{s_1-s_2}{d} = \frac{p_1}{u_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ \quad and \quad q_1 \le q_2, \tag{4.4}$$

or

(ii) $\dfrac{u_1}{u_2} < \varrho \quad and$

$$\frac{s_1-s_2}{d} > \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \qquad or \qquad \frac{s_1-s_2}{d} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \quad and \quad q_1 \le q_2. \tag{4.5}$$

此外，若且唯若光滑性之差满足严格不等式，(4.3) 才是紧的。 ——

证明。 该推论可由定理 4.1 立即推出。若 $\frac{u_1}{u_2} \ge \varrho$，则 $\alpha_j = 1$。若 $\frac{u_1}{u_2} < \varrho$，则 $\alpha_j = 2^{jd(\frac{\varrho}{u_1} - \frac{1}{u_2})}$；另请回顾注 3.11。这涵盖了上述两种情况。 □

注 4.3。 与前一定理类似，推论 3.6 和 3.7 也可以用嵌入 (4.1) 来表述。最后一个定理中的紧性结论对 $\mathbb{R}^d$ 中任意有界区域 Ω 均成立，推理与定理 3.7 的证明（例如 [12] 中所述）类似。

在下一个推论中，我们将讨论一些特殊情形，此时嵌入连续性/紧性的条件形式会简化。

推论 4.4。设 $s_i \in \mathbb{R}$、$0 < p_i < \infty$、$0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$ 满足 $i = 1, 2$。不失一般性，假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。令 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$ 且 $\frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+$。

(i) 若

$$\sup\left\{\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}} : j \in \mathbb{N}_0\right\} < \infty, \tag{4.6}$$

则嵌入 (4.1) 成立，当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}. \tag{4.7}$$

(ii) 假设 $p_1 \ge p_2$，即 $\varrho = 1$，并且

$$\sup\left\{\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})} : j \in \mathbb{N}_0\right\} = \infty. \tag{4.8}$$

嵌入 (4.1) 成立，当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}. \tag{4.9}$$

(iii) 设 $p_1 < p_2$，即 $\varrho < 1$，并且

$$\sup\left\{\frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})^{\varrho}} : j \in \mathbb{N}_0\right\} = \infty. \tag{4.10}$$

若条件 (4.9) 成立且 $s_1 - s_2 > d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ 或 $s_1 - s_2 = d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ 和 $q_1 \le q_2$，则嵌入 (4.1) 成立。若有嵌入 (4.1)，则条件 (4.9) 成立。

(iv) 在情形 *(i)* 和 *(ii)* 中，(4.1) 是紧的，当且仅当条件 (4.7) 和 (4.9) 分别成立（当 $q^* = \infty$ 时，用 c_0 代替 ℓ_{q^*}）。在情形 *(iii)* 中，若条件(4.7) 和 (4.9) 成立，则 (4.1) 是紧的（当 $q_1 \le q_2$ 时，用 c_0 代替 ℓ_∞）。

证明。**(i)** 部分是定理 4.1 的直接推论，因为 (4.6) 蕴含

$$\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1(2^{-\nu})^{\varrho}} \sim 1, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

现在讨论 **(ii)**。假设 (4.8) 保证存在一个由自然数组成的严格递增序列 $(j_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，使得序列 $\left\{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}(2^{-j_k})\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 严格递增，趋于 ∞，并且

$$\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1(2^{-\nu})} = \frac{\varphi_2(2^{-j_k})}{\varphi_1(2^{-j_k})} \quad \text{if} \quad j_k \le j < j_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

首先，假设条件 (4.9) 成立。该条件与 (4.8) 可推出 $s_1 > s_2$。令 $q^* < \infty$。则

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_2-s_1)q^*}\alpha_j^{q^*} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} 2^{(j-j_k)(s_2-s_1)q^*}2^{j_k(s_2-s_1)q^*}\frac{\varphi_2(2^{-j_k})^{q^*}}{\varphi_1(2^{-j_k})^{q^*}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{j_k(s_2-s_1)q^*}\frac{\varphi_2(2^{-j_k})^{q^*}}{\varphi_1(2^{-j_k})^{q^*}}\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} 2^{(j-j_k)(s_2-s_1)q^*} < \infty\end{aligned}$$

因为 $s_1 > s_2$，参见 (4.9)。现在结论由定理 4.1 得出。$q^* = \infty$ 的情形证明类似。

现在假设嵌入 (4.1) 满足 $p_1 \geq p_2$ 和 (4.8)。我们证明 (4.9) 的必要性。我们总是有

$$\alpha_j = \sup_{0\leq\nu\leq j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1(2^{-\nu})} \geq \frac{\varphi_2(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j})}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

因此，条件 (4.2) 蕴含 (4.9)。

为证明 (iii)，我们采用与上文类似的方法。现在取序列 $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$，使序列 $\left\{ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(2^{-j_k})\ 2^{-j_k}) \right.$ $\left.{}^{\varrho} \right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 严格递增，并趋于 ∞，且

$$\alpha_j = \frac{\varphi_2(2^{-j_k})}{\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho}} \quad \text{if} \quad j_k \leq j < j_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.11}$$

此外，

$$\frac{\varphi_1(2^{-j_k})}{\varphi_1(2^{-j})} \leq 2^{(j-j_k)\frac{d}{p_1}} \qquad \text{if} \quad j_k \leq j < j_{k+1}, \tag{4.12}$$

因为 $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$。令 $q^* < \infty$。则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_2-s_1)q^*} \alpha_j^{q^*} \varphi_1(2^{-j})^{(\varrho-1)q^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} 2^{(j-j_k)(s_2-s_1)q^*} 2^{j_k(s_2-s_1)q^*} \frac{\varphi_2(2^{-j_k})^{q^*}}{\varphi_1(2^{-j_k})^{\varrho q^*}} \varphi_1(2^{-j})^{(\varrho-1)q^*} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{j_k(s_2-s_1)q^*} \frac{\varphi_2(2^{-j_k})^{q^*}}{\varphi_1(2^{-j_k})^{q^*}} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} 2^{(j-j_k)(s_2-s_1)q^*} \left(\frac{\varphi_1(2^{-j})}{\varphi_1(2^{-j_k})} \right)^{(\varrho-1)q^*} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{j_k(s_2-s_1)q^*} \frac{\varphi_2(2^{-j_k})^{q^*}}{\varphi_1(2^{-j_k})^{q^*}} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} 2^{(j-j_k)(s_2-s_1-\frac{d}{p_2}+\frac{d}{p_1})q^*} < \infty,
\end{aligned}$$

其中，倒数第二个不等式由 (4.12) 和 $\varrho < 1$ 得出，最后一个不等式则由 (4.9) 和 $s_1 - s_2 > d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ 得出。现在，结论由定理 4.1 得出。当 $q^* = \infty$ 时，证明类似。 □

在以下推论中，我们讨论定理 4.1 的若干特殊情形，其中源空间或目标空间属于 Besov、Lebesgue 或 Besov-Morrey 型。

推论 4.5. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、$0 < p_i < \infty$、$0 < q_i \leq \infty$，对于 $i = 1, 2$，并定义

$$\varrho = \min\left(1, \frac{p_1}{p_2}\right) \qquad and \qquad \frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+.$$

(i) 设 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$，并假设对某个 $u_2 \geq p_2$ 成立

$$\liminf_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u_2\varrho}} > 0. \tag{4.13}$$

则存在连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{u_2,p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.14}$$

当且仅当

$$\left\{ 2^{j(s_2-s_1)} \varphi(2^{-j})^{\varrho-1} \right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}. \tag{4.15}$$

*The*嵌入为紧当且仅当(4.15) 成立（若 $q_1 \leq q_2$，则以 c_0 代替 ℓ_∞）。

(ii) 设 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$、$p_1 \geq p_2$，并假设对某个 $u_2 \geq p_2$ 成立

$$\liminf_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u_2}} = 0. \tag{4.16}$$

则存在连续嵌入(4.14) 当且仅当，

$$\left\{ 2^{j(s_2-s_1-\frac{d}{u_2})} \varphi(2^{-j})^{-1} \right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}. \tag{4.17}$$

当且仅当（4.17）成立时，该嵌入是紧的（如果 $q_1 \leq q_2$，则用 c_0 代替 ℓ_∞）.

(iii) 设 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$、 $p_1 < p_2$，并假设对于某个 $u_2 \geq p_2$ 成立

$$\liminf_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u_2 \varrho}} = 0. \tag{4.18}$$

那么，如果(4.17) 成立且 $s_1 - s_2 > d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ 或 $s_1 - s_2 = d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$ 且 $q_1 \leq q_2$，则有连续嵌入(4.14) 。当(4.17) 成立时，该嵌入是紧的（若$q_1 \leq q_2$，则用 c_0 代替 ℓ_∞）。

(iv) 令 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_2}$，并假设对于某个 $u_1 \geq p_1 > 0$，有

$$\limsup_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d\varrho}{u_1}} < \infty. \tag{4.19}$$

那么存在连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s_1}_{u_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi,p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.20}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1+\frac{d}{u_1}(1-\varrho))}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}.$$

证明。 (i) 和 (iv) 都是推论 4.4 的直接结果。至于 (ii) 和 (iii)，它们直接由定理 4.1 得出，因为根据 (ii) 和 (iii) 中的假设，我们分别有，

$$\sup_{0\leq\nu\leq j} \frac{2^{-\nu\frac{d}{u_2}}}{\varphi(2^{-\nu})^\varrho} = \frac{2^{-j\frac{d}{u_2}}}{\varphi(2^{-j})^\varrho} \qquad \text{and} \qquad \sup_{0\leq\nu\leq j} \frac{\varphi(2^{-\nu})}{2^{-\nu\frac{d\varrho}{u_1}}} = \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d\varrho}{u_1}}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

□

注记 4.6. 假设 $0 < p < \infty$ 且 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。若存在某个 $u \geq p$ 使得

$$0 < \liminf_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u}} \leq \limsup_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u}} < \infty,$$

则由上一推论可得 $\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\Omega) = \mathcal{N}^s_{u,p,q}(\Omega)$，在等价拟范数的意义下。作为例子，$\mathcal{N}^s_{\varphi_{u,v},p,q}(\Omega) = \mathcal{N}^s_{u,p,q}(\Omega)$，其中 $\varphi_{u,v}$ 由下式定义

$$\varphi_{u,v}(t) = \begin{cases} t^{\frac{d}{u}} & \text{if} \quad 0 < t < \varepsilon, \\ c t^{\frac{d}{v}} & \text{if} \quad t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

其中 $u, v \geq p$、 $\varepsilon > 0$ 且 $c = \varepsilon^{\frac{d}{u} - \frac{d}{v}}$。

注记 4.7. 假设 $s \in \mathbb{R}$、 $0 < p < \infty$、 $0 < q \leq \infty$ 且 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。若对某个$u \geq p$有 $\liminf_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u}} > 0$，则 $\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^s_{u,p,q}(\Omega)$；但若 $\limsup_{j\to\infty} \varphi(2^{-j}) 2^{j\frac{d}{u}} = \infty$，则该包含是严格的。

推论 4.8。 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_1 < \infty$、 $0 < p_2 \leq \infty$、 $0 < q_i \leq \infty$，其中 $i = 1$、2 以及 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$。存在连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.21}$$

当且仅当，

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)} \varphi(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{q^*}, \tag{4.22}$$

其中 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$（特别地， $\varrho = 0$ 若 $p_2 = \infty$）以及 $\frac{1}{q^*} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)_+$。此外，(4.21) 是紧的，当且仅当 (4.22) 在 $q_1 \leq q_2$ 时将 ℓ_∞ 替换为 c_0 后成立。

证明。我们首先假设 $p_1 \geq p_2$。于是 $\varrho = 1$ 与 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1} \subset \mathcal{G}_{p_2}$。因此，我们有

$$\alpha_j = \sup_{0\leq\nu\leq j} \frac{2^{-\nu\frac{d}{p_2}}}{\varphi(2^{-\nu})} = 1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

因此，由定理 4.1 可得所需的等价关系。

现在考虑 $p_1 < p_2$ 的情形。于是 $\varrho = \frac{p_1}{p_2}$，并且由于 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_1}$，我们有

$$\alpha_j = \sup_{0\leq\nu\leq j} \frac{2^{-\nu\frac{d}{p_2}}}{\varphi(2^{-\nu})^{\frac{p_1}{p_2}}} = \sup_{0\leq\nu\leq j} \left[\frac{2^{-\nu\frac{d}{p_1}}}{\varphi(2^{-\nu})}\right]^{\frac{p_1}{p_2}} = 1, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

定理 4.1 再次推出所需的等价关系。若 $p_2 = \infty$，则该结论由推论 3.8 和推论 3.13 得出。

□

注 4.9. (i) 若 $p_1 \geq p_2$，则可知 $\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi,\ p_1,\ q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,\ q_2}(\Omega)$ 当且仅当 $s_1 > s_2$ 或$s_1 = s_2$ 且 $q_1 \leq q_2$。此外，该嵌入是紧的当且仅当 $s_1 > s_2$。特别地，对于任意 $s \in \mathbb{R}$、$0 < p < \infty$、$0 < q \leq \infty$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_p$，$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,\ p,\ q}(\Omega) \hookrightarrow B^{s}_{p,\ q}(\Omega)$。

(ii) 在 $\varphi(t) = t^{-d/u_1}$ 且 $0 < p_1 \leq u_1 < \infty$ 的特殊情形下，因此 $\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi,\ p_1,\ q_1}(\Omega) = \mathcal{N}^{s_1}_{u_1,\ p_1,\ q_1}(\Omega)$，我们得到 [19], 的推论 3.5，其中一个极限情形略有改进。

推论 4.10。设 $0 < p_1 \leq \infty$、$0 < p_2 < \infty$、$s_i \in \mathbb{R}$、$0 < q_i \leq \infty$，其中 $i = 1,\ 2$，且 $\varphi \in \mathcal{G}_{p_2}$。存在连续嵌入

$$B^{s_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi,p_2,q_2}(\Omega) \tag{4.23}$$

若 $s_1 - \frac{d}{p_1} > s_2$ 或 $s_1 - \frac{d}{p_1} = s_2$ 且 $q_1 \leq q_2$。

嵌入 (4.23) 在 $s_1 - \frac{d}{p_1} > s_2$ 时是紧的。 —

证明。该结论由以下因式分解得出

$$B^{s_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2}_{\infty,q_2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi,p_2,q_2}(\Omega),$$

推论 3.9、推论 3.13 以及经典 Besov 空间之间嵌入的性质。 □

推论 4.11. 设 $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$ 和 $1 \leq r \leq \infty$。令 $\varrho = \min(1, \frac{p}{r})$，并定义$t_1, t_2$ 为

$$\frac{1}{t_1} = \left(\frac{1}{\min(r,2)} - \frac{1}{q}\right)_+ \qquad and \qquad \frac{1}{t_2} = \left(\frac{1}{\max(r,2)} - \frac{1}{q}\right)_+,$$

其中，在后者 种情况下，我们假设 $r > 1$，或者在 $r = 1$ 时令 $t_2 = \infty$。那么存在一个连续嵌入

$$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega) \tag{4.24}$$

if

$$\left\{2^{-sj}\varphi(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{t_1}. \tag{4.25}$$

反之，(4.24)蕴含

$$\left\{2^{-sj}\varphi(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{t_2}.$$

证明。对于 $r \geq 1$,若条件 (4.25) 成立，利用推论 4.8，我们得到以下嵌入链

$$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow B^{0}_{r,\min(r,2)}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega).$$

另一方面，嵌入 (4.24) 的连续性导致

$$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega) \hookrightarrow B^{0}_{r,\max(r,2)}(\Omega) \quad \text{if} \quad r > 1,$$

并且，在 $r = 1$ 的情况下，得到

$$\mathcal{N}^{s}_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega) \hookrightarrow B^{0}_{1,\infty}(\Omega).$$

于是推论 4.8 意味着 $\left\{2^{-sj}\varphi(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{t_2}$。

□

推论 4.12。 设 $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $r = \max(1, p)$ 且 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。那么存在一个连续嵌入

$$\mathcal{N}^0_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega) \tag{4.26}$$

若 $q \le \min(r,2)$。反过来，(4.26) 在 $p > 1$ 时蕴含 $q \le \max(r, 2)$，而在 $q \mathit{if} p \le 1$ 时无需对 q 作进一步假设。

备注 4.13. 若 $\varphi \in \mathcal{G}_p$ 满足以下附加条件：存在某个 $\varepsilon > 0$，使得函数 $\varphi(t)t^{-\varepsilon}$ 递增，则广义 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间$\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{R}^d)$ 有定义。此外，对于 $1 < p < \infty$，有 $\mathcal{E}^0_{\varphi,p,2}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)$。考虑到对 Ω 的限制，当 $1 < p < \infty$ 且 $p \ge r$ 时，我们可以改进推论 4.11 中的充分条件。具体而言，在这种情况下，$\varrho = 1$，且必有 $s \ge 0$。于是，若 $0 < q \le \min(\max(p, r), 2) = \min(p, 2)$，则有如下嵌入链

$$\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^0_{\varphi,p,\min(p,2)}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^0_{\varphi,p,2}(\Omega) = \mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega).$$

这意味着，在关于嵌入 (4.24) 的充分条件的定义中，我们可以用 $\min(\max(p, r), 2)$ 替换 $\min(r, 2)$。

5 区域上进一步的广义 Morrey 光滑性空间的嵌入

现在我们考虑类型为 $A^{s,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$ 和 $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\Omega)$ 的空间，并首先基于先前关于序列空间的研究结果，给出类型为 $B^{s,p}{}^{\varphi}_{q,}(\Omega)$ 的空间的新嵌入结果。利用命题 3.14，我们推导出以下结论。

定理 5.1。 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_2 \le p_1 < \infty$、 $0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$ 满足 $i = 1,2$。不失一般性，我们假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。

存在一个连续嵌入

$$B^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(\Omega) \tag{5.1}$$

当且仅当满足(3.29) 和(3.30) 。

同样地，命题 3.23与推论3.26给出了关于连续嵌入的相应推论。命题3.29与命题3.19使我们能够导出以下两个关于紧嵌入的推论。

设 th e 数 $\sigma(s_1)$、 $\sigma_\infty(s_1)$和 $\sigma(s_1)$由(3.31)、(3.32)和(3.34)给出，分别 y.

定理 5.2. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_i < \infty$、 $0 < q_i \le \infty$和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，对于 $i = 1$，2，以及 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$。不失一般性，我们假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。

(i) 假设(3.44) 成立。则嵌入

$$B^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(\Omega) \tag{5.2}$$

是紧的，如果 $s_2 < \sigma(s_1)$。

(ii) 假设(3.33) 成立。那么，当 $s_2 < \sigma(s_1)$时，嵌入(5.2) 是紧的。 −

注记 5.3. 关于与推论 2.7 中回顾的经典情形的比较，请参阅注记 3.30。请注意，这尤其意味着，一般而言，保证嵌入 (5.2) 紧性的假设无法进一步改进。

请注意，定理 5.2 的假设中的临界点，即情形 $\varphi_2(t) \sim \varphi_1(t)^{\varrho}, 0 < t \le 1$，对应于所谓的函数空间族 这一概念。Triebel 和 Haroske 在 [23] 中引入并研究了这一概念（针对 Morrey 光滑性空间，包括 $\mathcal{A}^s_{u,p,q}$ 和 $A^{s,p}{}^{\tau}_{q,}$）。

定理 5.4. 设 $0 < p < \infty$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。不失一般性，假设 $\varphi(1) = 1$。令$s_1 \in \mathbb{R}$、 $0 < q \le \infty$，并假设(3.35) 成立。

存在连续嵌入

$$B^{s_1,\varphi}_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_2}_{\infty,\infty}(\Omega) \tag{5.3}$$

当且仅当， $s_2 \le \sigma_\infty(s_1)$。

此外，如果 $s_2 < \sigma_\infty$（s_1），那么嵌入 （5.3）是紧的。当且仅当满足 （3.37）时。

备注 5.5。 根据定义可直接推出，如果 $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = c > 0$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$，那么

$$B^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega) = B^{s,1/p}_{p,q}(\Omega) \qquad \text{(in the sense of equivalence of norms)}$$

对于任意可能的参数 s， p， q。另一方面，众所周知， $B^{0,\frac{1}{2}}_{2,2}(\Omega) = \mathrm{bmo}(\Omega)$，参见 [40]。因此

$$B^{0,\varphi}_{2,2}(\Omega) = \mathrm{bmo}(\Omega) \qquad \text{(in the sense of equivalence of norms)}$$

如果 $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = c > 0$。

推论 5.6。 设 $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$，且 $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$。那么

(i) 该嵌入

$$B^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{bmo}(\Omega)$$

is compact if $s > \frac{d}{p}$ *and* $p < 2$,

(ii) 该嵌入

$$\mathrm{bmo}(\Omega) \hookrightarrow B^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega)$$

当 $s < 0$ 时是紧的。

证明。 设 $p < 2$。取 $\varepsilon > 0$ 使得 $s - \varepsilon > \frac{d}{p}$。于是 $(s-\varepsilon-\frac{d}{2})(1-\varrho)^{-1} > \frac{d}{p}$，其中 $\varrho = \frac{p}{2}$。但 $\varphi \in \mathcal{G}_p$，因此

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(\frac{d}{2}-s+\varepsilon)}\varphi(2^{-j})^{\varrho-1} \le C < \infty.$$

这意味着 $\sigma(s) \ge \frac{d}{2} + \varepsilon$。此外， $\varphi^\varrho \in \mathcal{G}_2$，因此

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(\varepsilon-\sigma(s))}\varphi(2^{-j})^{-\varrho} \le C < \infty.$$

取 $\varphi_2 \in \mathcal{G}_2$ 使得 $\lim_{t\to 0}\varphi_2(t) = c > 0$。于是 $\sigma(s) \ge \varepsilon > 0$，因此推论 5.2(ii) 和注记 5.5 蕴含该嵌入的紧性

$$B^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow B^{0,\varphi_2}_{2,2}(\Omega) = \mathrm{bmo}(\Omega).$$

若 $p \ge 2$，则 $\varrho = 1$ 且

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(\varepsilon-s)}\varphi(2^{-j})^{-1} \le C < \infty$$

若 $s - \varepsilon > \frac{d}{p}$。这意味着 $\sigma(s) = s$， $\sigma(s) \ge \varepsilon > 0$，根据定理 5.2(ii) 再次可得所述结论。

类似地，第二点由定理 5.2(i) 得出。若取 $\varphi_1 \in \mathcal{G}_2$ 使得 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) = c > 0$，则对于任意 $s < 0$， $\sigma(0) = -s$。推论的证明至此完成。 □

我们关于广义 Besov-Morrey 尺度 $\mathcal{N}^s_{\varphi,p,q}(\Omega)$ 内嵌入的连续性与紧性，以及空间尺度 $B^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega)$ 内嵌入的连续性与紧性的结果，再加上连接这些 Besov 型空间与其 Triebel-Lizorkin 型对应空间的嵌入的存在性，使我们能够推导出后一类空间的类似结果。回顾一下，由于 (2.9),

$$F^{s,\varphi}_{p,q}(\Omega) = \mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\Omega). \tag{5.4}$$

关于紧性，我们得到定理 4.1 的以下推论。

推论 5.7. 设 $s_i \in \mathbb{R}$、 $0 < p_i < \infty$、 $0 < q_i \le \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，其中 $i = 1,2$，并假设 φ_i 在 $q_i < \infty$ 时满足 (2.8) 。不失一般性，假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。令 $\varrho = \min(1, \frac{p_1}{p_2})$，并令 $\alpha_j = \sup_{0\le\nu\le j} \frac{\varphi_2(2^{-\nu})}{\varphi_1}(2^{-\nu})^\varrho$，$j \in \mathbb{N}_0$。则该嵌入

$$\mathcal{E}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(\Omega) \tag{5.5}$$

是紧的，如果

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_{\min(p_2,q_2)}. \tag{5.6}$$

同样， $F^{s_1,\varphi_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow F^{s_2,\varphi_2}_{p_2,q_2}(\Omega)$ 是紧的，若(5.6)成立。

注 5.8。 由于定理 5.2 的条件不依赖于 q，并且考虑到嵌入 (2.12)，该定理可以完全相同的方式改写为适用于空间 $F^{s,\ p}_{q,}{}^{\varphi}$ (Ω)。然而，其中给出的紧性条件比推论 5.7 中得到的条件弱。事实上，若 (3.44) 成立，则 $\alpha_j \sim 1$，因此 $s_2 < \sigma(s_1)$ 蕴含 (5.6)。另一方面，若 (3.33) 成立，通过选择 $\varepsilon > 0$ 和 s_3 使得 $s_2 < s_3 - \varepsilon < \sigma(s_1)$，我们得到 $\alpha_j \le c\, 2^{j(\sigma(s_1)+\varepsilon-s_3)}$。因此

$$2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} \le c2^{j(s_2+\sigma(s_1)-s_3+\varepsilon-s_1)}\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1} \le c',$$

因为 $s_2 + \sigma(s_1) - s_3 + \varepsilon < \sigma(s_1)$ 且 (3.31)。这再次推出 (5.6)。注

释 t hat th e con dition

$$\left\{2^{j(s_2-s_1)}\alpha_j\varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_\infty$$

是嵌入 (5.5) 的必要条件。这可由嵌入链得出

$$\mathcal{N}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,\min(p_1,q_1)}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^{s_1}_{\varphi_1,p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,q_2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_2}_{\varphi_2,p_2,\infty}(\Omega).$$

注 5.9. 与注 3.11 中的观察类似，若 $\varphi_i(t) \sim t^{d/u_i}$, $0 < p_i \le u_i < \infty$，且 $\mathcal{A}^{s_i}_{\varphi_i,\ p_i,\ q_i} = \mathcal{E}^{s_i}_{\varphi_i,\ p_i,\ q_i}$, $i = 1$, 2，则推论 5.7 可化为推论 2.7(i)，因为 $\alpha_j \sim 2^{jd(\ \frac{\varrho}{u_1} - \frac{1}{u_2})^+}$, $j \in \mathbb{N}_0$。此外，利用 (5.4) 并令 $\frac{1}{u_i} = \frac{1}{p_i} - \tau_i$, $i = 1$, 2，可得推论 2.7(ii)。

最后，我们讨论广义 Morrey 空间$\mathcal{M}_{\varphi,\ p}$(Ω)。这里我们结合 [18]中的思路与 (2.16)。首先回顾 $\mathbb{R}^d$ 上的情形。在 [38, 第 12.1.2 节、推论 30、第32] 页中证明了，对于$0 < p_i < \infty$, $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$, $i = 1$, 2，若 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) = 0$,

$$\mathcal{M}_{\varphi_1,p_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,p_2}(\mathbb{R}^d) \tag{5.7}$$

当且仅当,

$$p_2 \le p_1 \quad \text{and there exists some } C > 0 \text{ such that for all } t > 0,\ \varphi_1(t) \ge C\varphi_2(t). \tag{5.8}$$

在 [11, 定理 3.3]中已有先例，其适用于参数 $1 \le p_2 \le p_1 < \infty$，且无需对 φ_1作额外假设。

注 5.10。 对于 $\varphi_i(t) = t^{d/u_i}$, $0 < p_i \le u_i < \infty$, $i = 1$, 2，众所周知 t

$$\mathcal{M}_{u_1,p_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{M}_{u_2,p_2}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{if, and only if,} \qquad p_2 \le p_1 \le u_1 = u_2, \tag{5.9}$$

参见 [33, 34]。由 (5.7)、(5.8) 可知

$$\varphi_1(t) \ge C\varphi_2(t) \quad \text{means} \quad t^{\frac{d}{u_1}} \ge Ct^{\frac{d}{u_2}}, \quad t > 0,$$

由此得到 $u_1 = u_2$。

设 Ω $\subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界的 C^∞ 域，即特别地，它是 [18] 中讨论的 A 型域。令 $\mathcal{M}_{\varphi,\ p}$(Ω) 由限制定义，即对于 $0 < p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$,

$$\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) = \{f \in L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega) : \exists\ g \in \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d) : g\big|_\Omega = f\}$$

其拟范数定义为

$$\|f|\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega)\| = \inf\{\|g|\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)\| : g \in \mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d) : g\big|_\Omega = f\}.$$

于是，可以仿照 [18, 定理 2.3] 证明以下结果。

引理 5。 **11.** 设 $0 < p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$, Ω $\subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界的 C^∞ 域。那么，对于所有 $f \in \mathcal{M}_{\varphi,\ p}($ Ω$)$,

$$\|f|\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega)\| \sim \sup_{x\in\Omega, j\in\mathbb{N}_0} \frac{\varphi(2^{-j})}{|B(x,2^{-j})|^{1/p}} \left(\int_{\Omega\cap B(x,2^{-j})} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}. \tag{5.10}$$

注 5.12。 注意到，因此我们始终有 L_∞(Ω) $\hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi,\ p}$(Ω) $\hookrightarrow L_p$(Ω)。此外，由于 Lebesgue微分定理, $\lim_{t\to 0}\varphi(t) > 0$意味着 $\mathcal{M}_{\varphi,\ p}$(Ω) $= L_\infty$(Ω)。因此，如果 $\lim_{t\to 0}\varphi_1(t) > 0$，那么

$$\mathcal{M}_{\varphi_1,p_1}(\Omega) = L_\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,p_2}(\Omega)$$

对于任意 $0 < p_i < \infty$, $i = 1$, 2。

推论 5.13. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界的 C^∞ 区域。设 $0 < p_i < \infty$ 和 $\varphi_i \in \mathcal{G}_{p_i}$，对于 $i = 1, 2$。不失一般性，我们假设 $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 1$。设 $\lim_{t\to 0} \varphi_1(t) = 0$。

(i) 假设 $p_2 \le p_1$，并且存在某个 $C > 0$ 使得 $\varphi_1(t) \ge C\varphi_2(t)$，$0 < t \le 1$。那么

$$\mathcal{M}_{\varphi_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,p_2}(\Omega). \tag{5.11}$$

(ii) 若 $1 < p_i < \infty$、$i = 1$、2，且 $\mathcal{M}_{\varphi_1,\,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,\,p_2}(\Omega)$，则 $p_2 \le p_1$ 且 $\varphi_1(t) \ge C\varphi_2(t)$，$0 < t \le 1$。

(iii) 嵌入 $\mathcal{M}_{\varphi_1,\,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,\,p_2}(\Omega)$ 从不具有紧性。

证明。充分性部分 (i) 直接由 $\mathbb{R}^d$ 上相应的结果 (5.7)、(5.8) 得出（或由引理 5.11 得出，此处只需使用 Hölder 不等式以及关于 φ_i、$i = 1, 2$ 的假设）。

对于 (ii)，我们可以利用区域 Ω 上空间的 (2.16) 的对应结果（通过限制定义）。于是，如注 5.8 所示，

$$\left\{\alpha_j \varphi_1(2^{-j})^{\varrho-1}\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_\infty.$$

由于 $\alpha_j \ge 1$、$j \in \mathbb{N}_0$ 和 $\varphi_1(t) \to 0$ for $t \to 0$，这意味着 $\varrho = 1$，即 $p_1 \ge p_2$。因此 $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell_\infty$，从而得到 $\varphi_1(t) \ge C\,\varphi_2(t)$，$0 < t \le 1$。最后，关于 (iii)，注意到 (5.11) 的紧性将意味着 $L_\infty(\Omega) \hookrightarrow L_{p_2}(\Omega)$ 的紧性，而这并不成立。 □

注 5.14。 如果我们将范围限制在 $p_i > 1, i = 1, 2$，那么推论 5.13 可以写成

$$\mathcal{M}_{\varphi_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_2,p_2}(\Omega) \quad \text{if, and only if,} \quad p_1 \ge p_2 \quad \text{and } \varphi_1(t) \ge c\,\varphi_2(t),\ 0 < t \le 1,$$

也就是说，这是 [38, 第 12.1.2 节、推论 30、第 32]，页中相应结论的完整对应形式，如 (5.7)、(5.8) 中所回顾的那样。我们认为这一刻画对于 $p_i \in (0, 1], i = 1, 2$ 也成立，但此时我们上述的论证（见 (ii)）不再适用。

若 $\varphi_i(t) \sim t^{d/u_i}, 0 < p_i \le u_i < \infty, i = 1, 2$，那么我们在论文 [18] 中详细讨论了上述这类嵌入，特别关注底层区域的性质与参数 $u_i, i = 1, 2$ 之间的关系。

推论 5.15. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界 C^∞ 区域。设 $1 < p, r < \infty$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_p$，其中 $\varphi(1) = 1$。假设 $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$。

(i) 则

$$\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega) \quad \textit{if, and only if,} \quad p \ge r. \tag{5.12}$$

(ii) 则

$$L_r(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) \quad \textit{if, and only if,} \quad p \le r \quad \textit{and} \quad \varphi(t) \le c\,t^{\frac{d}{r}},\ 0 < t \le 1. \tag{5.13}$$

(iii) 两者均非 嵌入 $\mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega)$ 和 $L_r(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varphi,\,p}(\Omega)$ 在这种情形下都不是紧的 .

这可由推论 5.13 和注 5.14 立即推出，再结合 $\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) = L_r(\Omega)$ 对于 $p = r$ 和 $\varphi(t) \sim t^{d/r}$，$0 < t \le 1$。注意，在 (i) 部分中，第一个条件 $p \ge r$ 已经蕴含第二个条件 $\varphi(t) \ge c\,t^{\frac{d}{r}}, 0 < t \le 1$，因为 $\varphi \in \mathcal{G}_p$。因此，上述结果也可以看作是比上文注 5.12 中提到的嵌入稍强一些的结果。在 [18]中，我们仅讨论了空间$\mathcal{M}_{\varphi,p}(\Omega) = \mathcal{M}_{u,p}(\Omega)$，$\varphi(t) \sim t^{d/u}, 0 < p \le u < \infty$；对应的结论是最优嵌入链 $L_u(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_{u,p}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$。关于 $\mathbb{R}^d$ 上的相应情形，参见 [17, 备注 2.5]以及 [14, 备注 5.16 和 5.21]。

例 5.16. 回忆一下，取 $\varphi(t) = t^{-\sigma}\chi_{(0,1)}(t)$，其中 $-\frac{d}{p} \le \sigma < 0$，可得$\mathcal{M}_{\varphi,p}(\mathbb{R}^d)$ 与 Triebel 引入的局部 Morrey空间 $\mathcal{L}^\sigma_p(\mathbb{R}^d)$ 重合，参见 [49, 第 1.3 节4]。为方便起见，假设 $1 < p_i < \infty, -\frac{d}{p_i} < \sigma_i < 0, i = 1, 2, |\Omega| = 1$，并且空间 $\mathcal{L}^\sigma_p(\Omega)$ 由限制定义。于是推论 5.13 得到

$$\mathcal{L}^{\sigma_1}_{p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{\sigma_2}_{p_2}(\Omega) \quad \text{if, and only if,} \quad p_1 \ge p_2 \quad \text{and} \quad \sigma_1 \ge \sigma_2.$$

参考文献

[1] A. Akbulut、V.S. Guliyev、T. Noi 和 Y. Sawano，《广义Morrey空间：再探》，Z. Anal. Anwend. 36 (2017), 17–35。 [2][2] A. El Baraka，《Campanato 空间的嵌入定理》，Electron. J. Differential Equations，第 66 号，17 页（电子版），2002。 [1][3] A. El Baraka，《BMO 型与 Campanato 型函数空间》。载于《2002 年非斯偏微分方程会议论文集》，Electron. J. Differ. Equ. Conf. 第 9 卷，第 109–115 页（电子版）。西南德克萨斯州立大学，圣马科斯，德克萨斯州，2002。 [1][4] A. El Baraka，《Campanato 空间的 Littlewood-Paley 刻画》，J. Funct. Spaces Appl.，4(2):193–220，2006。 [1][5] A.M. Caetano 和 D.D. Haroske，《与 Hans Triebel 的访谈》，CIM Bulletin，第 23 期，第 13–17 页，2007 年 12 月。葡萄牙科英布拉大学。转载于：EMS Newsletter，2008 年 12 月，第 37–40 页，苏黎世 EMS 出版社；中文译文见：《数学译林》，2010 年，第 29 卷，第 1 期，第 45–49 页。 [3][6] D.E. Edmunds 和 H. Triebel，《函数空间、熵数、微分算子》，剑桥数学专著丛书 120，剑桥大学出版社，剑桥，1996。 [8][7] G. Di Fazio、D.I. Hakim 和 Y. Sawano，《广义Morrey空间中具有不连续系数的椭圆方程》，Eur. J. Math. 3 (2017), 728–762。 [1][8] L.C.F. Ferreira 和 M. Postigo，《趋化-纳维-斯托克斯流体在 Besov-Morrey 空间中的整体适定性与渐近行为》，J. Math. Phys. 60 (2019), 第 6 期，061502，19 页。 [1][9] H.F. Gonçalves、D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak，《有界区域上的 Besov 型空间与 Triebel-Lizorkin 型空间的紧嵌入》，Rev. Mat. Complut.，34:761–795，2021。 [2,7, 8][10] H.F. Gonçalves、D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak，《有界区域上 Besov 型空间与 Triebel-Lizorkin 型空间的极限嵌入及延拓算子》，Ann. Mat. Pura Appl. (4), 202:2481–2516, 2023。 [2, 7, 8, 14, 15, 20][11] H. Gunawan、D.I. Hakim、K.M. Limanta 和 A.A. Masta，《广义Morrey空间的包含性质》，Math. Nachr. 290 (2017), 第 2–3 期，332–340。 [30][12] D.D. Haroske、H.-G. Leopold、S.D. Moura 和 L. Skrzypczak，《广义光滑性函数空间中的核嵌入与紧嵌入》，Anal. Math. 49 (2023), 1007–1039。 [23][13] D.D. Haroske 和 Z. Liu，《广义 Besov 型空间与 Triebel-Lizorkin 型空间》，Studia Math. 273 (2023), 第 2 期，161–199。 [2, 6] [14] D.D. Haroske、Z. Liu、S.D. Moura 和 L. Skrzypczak，《广义 Morrey 光滑性空间的嵌入》，《数学学报（英文版）》41 (2025), 413–456。 [2, 6, 7, 8, 31][15] D.D. Haroske、S.D. Moura、C. Schneider 和 L. Skrzypczak，《区域上正则分布的光滑性 Morrey 空间的无界性》，Sci. China Math., 60 (2017), 2349–2376。 [7][16] D.D. Haroske、S. Moura 和 L. Skrzypczak，《广义 Besov-Morrey 空间的小波分解与嵌入》，Nonlinear Anal. 214 (2022), 112590。 [2, 8, 9, 11, 14, 23][17] D.D. Haroske、S. Moura 和 L. Skrzypczak，《从增长性质看连接 Lebesgue 空间与 Morrey 空间的桥梁》，Anal. Appl. 22 (2024), 第 4 期，751–790。 [31][18] D.D. Haroske、C. Schneider 和 L. Skrzypczak，《区域上的 Morrey 空间：不同方法与增长包络》，J. Geom. Anal. 28 (2018), 817–841。 [2, 7, 30, 31][19] D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak，《有界区域上的 Besov-Morrey 空间的嵌入》，Studia Math. 218 (2013), 119–144。 [2, 7, 8, 13, 23, 27]

[20] D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak, 《光滑性 Morrey 空间的 Sobolev 嵌入与 Franke-Jawerth嵌入》, Rev. Mat. Complut. 27 (2014), 第 2 期, 541–573。 [2, 7, 8][21] D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak。《有界区域上光滑性 Morrey 空间紧嵌入的熵数》。J. Approx. Theory, 256:105424, 2020。 [2, 7, 8][22] D.D. Haroske 和 L. Skrzypczak。《Morrey序列空间与光滑性 Morrey 空间的核嵌入》。Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 47:111, 2024。 [2, 7, 8] [23] D.D. Haroske 和 H. Triebel, 《Morrey-光滑度空间：一种新方法》, Sci. China Math. 66 (2023), 1301–1358。 [8, 28][24] M. Izuki 和 T. Noi, 《区域上的广义Besov-Morrey空间与广义 Triebel-Lizorkin-Morrey空间》, Math. Nachr. 292 (2019), 2212–2251。 [2, 23][25] V. Kokilashvili、A. Meskhi 和 H. Rafeiro, 《广义grand Morrey空间中具有VMO系数的非散度型椭圆方程的估计》, Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014), 第 8 期, 1169–1184。 [1][26] H. Kozono 和 M. Yamazaki, 《以广义函数作为初始数据的新函数空间中的半线性热方程与 Navier-Stokes方程》, Comm. Partial Differential Equations 19 (1994), 959–1014。 [1][27] K. Kurata、S. Nishigaki 和 S. Sugano, 《广义Morrey空间上积分算子的有界性及其在薛定谔算子中的应用》, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 1125–1134。 [1][28] A.L. Mazzucato, 《Besov-Morrey 空间：函数空间理论及其在非线性偏微分方程中的应用》, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 1297–1364。 [1, 7][29] T. Mizuhara, 《广义Morrey空间上若干经典算子的有界性》, 《调和分析》（仙台, 1990）, 183-189, ICM-90 Satell. Conf. Proc., pringer, 东京, 1991。 [1][30] E. Nakai, 《Morrey空间上逐点乘子的刻画》, Sci. Math. 3 (2000), 第 3 期, 445–454。 [4][31] E. Nakai, 《广义Morrey空间上的Hardy-Littlewood极大算子、奇异积分算子与Riesz势》, Math. Nachr. 166 (1994), 95–103。 [1, 4][32] S. Nakamura、T. Noi 和 Y. Sawano, 《广义Morrey空间与迹算子》, Sci. China Math. 59 (2016), 第 2 期, 281–336。 [2, 4, 5, 6, 7][33] L.C. Piccinini, 《Morrey空间之间的包含》, Boll. Un. Mat. It. (4), 2 (1969), 95–99。 [30][34]M. Rosenthal, 《从调和分析视角看Morrey空间》, 硕士论文, 耶拿弗里德里希·席勒大学, 德国, 2009。 [30][35] Y. Sawano, 《Besov-Morrey 与 Triebel-Lizorkin-Morrey 空间的小波刻画》, Funct. Approx. Comment. Math. 38 (2008), 93–107。 [7][36] Y. Sawano, 《关于广义Morrey空间的一点思考》, J. Indones. Math. Soc. 25 (2019), 第 3 期, 210–281。 [1, 5][37] Y. Sawano、G. Di Fazio 和 D.I. Hakim, 《Morrey空间：积分算子与偏微分方程导论及应用。第一卷》。数学专著与研究札记。Chapman & Hall CRC Press, 博卡拉顿, FL, 2020。 [1] [38] Y. Sawano、G. Di Fazio 和 D.I. Hakim, 《Morrey空间：积分算子与偏微分方程导论及应用。第二卷》。数学专著与研究札记。Chapman & Hall CRC Press, 博卡拉顿, FL, 2020。 [1, 4, 30, 31][39] Y. Sawano、D.I. Hakim 和 H. Gunawan, 《广义Orlicz-Morrey空间的非光滑原子分解》, Math. Nachr. 288, 第 14-15 期, 1741–1775（2015） [7]

[40] W. Sickel, 《与Morrey空间相关的光滑性空间综述 I》, 《欧亚数学杂志》3 (2012), 110–149。 [1, 6, 29][41] W. Sickel, 《与Morrey空间相关的光滑性空间综述 II》, 《欧亚数学杂志》4 (2013), 82–124。 [1, 6][42] L. Tang 和 J. Xu。《Morrey型Besov-Triebel空间的一些性质》。Math. Nachr., 278(7-8):904–917, 2005。 [1][43] H. Triebel, 《函数空间理论》, Birkhäuser, 巴塞尔, 1983。 [6][44] H. Triebel, 《函数空间理论 II》, Birkhäuser, 巴塞尔, 1992。 [6][45] H. Triebel, 《分形与谱：与傅里叶分析和函数空间相关》, Birkhäuser, 巴塞尔, 1997。 [8][46] H. Triebel, 《函数空间理论 III》, Birkhäuser, 巴塞尔, 2006。 [6][47] H. Triebel, 《区域上的函数空间与小波》, EMS数学专著 7, 欧洲数学学会, 2008。 [2][48] H. Triebel, 《Morrey-Campanato空间及其光滑相关空间》, 未发表的笔记, 2011。 [4][49] H. Triebel, 《局部函数空间、热方程与Navier-Stokes方程》, EMS数学专著 20, 欧洲数学学会, 2013。 [1, 2, 4, 6, 31][50] H. Triebel, 《混合函数空间、热方程与Navier-Stokes方程》, EMS数学专著 24, 欧洲数学学会, 2014。 [1, 2][51] H. Triebel, 《超临界函数空间中的趋化与流体动力学偏微分方程模型》, EMS数学讲义系列, EMS 出版社, 苏黎世, 2017。 [1][52] H. Triebel, 《函数空间理论 IV》, Birkhäuser, 巴塞尔, 2020。 [6][53] N. Wei、P.C. Niu、S. Tang、M. Zhu, 《具有不连续系数的非散度型退化椭圆算子在广义Morrey空间中的估计》, 《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院数学辑》106 (2012), 1–33。 [1][54] D. Yang、C. Zhuo 和 W. Yuan, 《变指数Triebel-Lizorkin型空间》, 《Banach数学分析杂志》9, 第 4 期, 146–202（2015）。 [7][55] M. Yang、Z. Fu 和 J. Sun, 《Besov-Morrey空间中耦合趋化-流体方程解的存在性与大时间行为》, 《微分方程杂志》266 (2019), 第 9 期, 5867–5894。 [1][56] W. Yuan、W. Sickel 和 D. Yang, 《Morrey 与 Campanato 遇上 Besov、Lizorkin 和 Triebel》, 数学讲义 2005, Springer出版社, 柏林, 2010。 [1, 6][57] L. Zhang、Y. Jiang、Y. Sheng、J. Zhou, 《广义Morrey空间中具有VMO系数的抛物型方程》, 《数学学报》26 (2010), 第 1 期, 117–130。 [1]

DorotheeD. Haroske 耶拿弗里德里希·席勒大学数学研究所, 07737
耶拿, 德国
dorothee.haroske@uni-jena.de

Susana D.Moura 科英布拉大学
CMUC, 数学系, 圣克鲁斯 EC

3001-501 科英布拉
葡萄牙
smpsd@mat.uc.pt

Leszek Skrzypczak 数学与计算机科学学院
亚当·密茨凯维奇大学 波兹南大学街4号
61-614 波兹南 波兰 lskrzyp@amu.edu.pl