arXiv:2603.06133v1 [math.DG] 6 Mar 2026

关于 p-双调和映射和双-p-调和映射的推广

Fethi Latti [*]和 Ahmed Mohammed Cherif[†]

摘要

本文扩展了两个黎曼流形之间 p-双调和映射和双-p-调和映射的定义，并探讨了它们的一些性质。

关键词： p-双调和映射、双-p-调和映射、刘维尔型定理。

*2020*年数学主题分类： 53A45, 53C20,58E20.

1 引言

p-调和映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$，其定义在黎曼流形之间，是 p-能量泛函的临界点

$$E_p(\varphi; D) = \frac{1}{p} \int_D |d\varphi|^p v_g, \tag{1.1}$$

对于任意紧支撑区域 $D \subset M$，其中某个常数为 $p \geq 2$。式 (1.1) 对应的欧拉-拉格朗日方程由 p-张力场的消失给出

$$\tau_p(\varphi) = \operatorname{div}(|d\varphi|^{p-2} d\varphi). \tag{1.2}$$

光滑映射 φ 是 p-调和的，当且仅当 $\tau_p(\varphi) = 0$ （有关 p-调和映射概念的更多详情，请参见 [3, 4, 8]）。 p-调和映射是

[*]SalhiAhmed NaamaUniversityCenter，数学系，Naama45000，阿尔及利亚。电子邮箱：etafati@hotmail.fr

[†]University Mustapha StambouliMascara，精确科学学院，Mascara 29000，阿尔及利亚。电子邮箱：med_cherif_ahmed@yahoo.fr

调和映射的一种自然推广（参见 [2, 7]）。
对 p-双调和映射的研究扩展了调和映射和双调和映射的经典理论（见 [10, 15]）。黎曼流形之间的 p-双调和映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$是 p-双调和能量泛函（见 [5, 9]）的一个临界点，该泛函定义为

$$E_{2,p}(\varphi; D) = \frac{1}{p} \int_D |\tau(\varphi)|^p \, v_g, \tag{1.3}$$

其中，$\tau(\varphi)$是 φ的张力场，由 $\tau(\varphi) =$迹 $\nabla d\varphi$给出。在 [11], 中，作者如下引入了双-p-调和映射的概念。考虑一个光滑映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$，$\varphi$的双-$p$-能量定义为

$$E_{p,2}(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_p(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{1.4}$$

如果映射 φ 是任意紧支撑区域 $D \subset M$上的双-p-能量泛函(1.4)的临界点，则称其为双-p-调和映射。
本文通过引入(p, q)-调和映射，进一步扩展了 p-双调和映射和双-p-调和映射的定义。若黎曼流形之间的映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$是$(p, q)$-能量泛函的一个临界点，则称其为$(p, q)$-调和映射。

$$E_{p,q}(\varphi; D) = \frac{1}{q} \int_D |\tau_p(\varphi)|^q v_g, \tag{1.5}$$

对于任意紧支撑区域 $D \subset M$，其中某些常数为 p，$q \geq 2$。注意，(2, 2)-调和映射是双调和映射。在 [12, 13], 中，作者研究广义 p-调和映射的刘维尔型定理。在 [1], 中，作者研究 F-调和映射的几何，其中 $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个正函数。这项研究通过考虑受函数 F 影响的高阶能量泛函，拓展了 p-调和映射的框架。我们计算了 (p, q)-能量泛函的一阶变分，并建立了 (p, q)-调和映射的刘维尔型定理。此外，我们构造了新的真 (p, q)-调和映射实例，即非 p 调和的 (p, q)-调和映射。这些概念推广了几何分析中的各种能量泛函，并应用于非线性微分方程的研究。

2 (p,q)能量泛函的一阶变分

以下定理给出了 $E_{p,\ q}$ 的一阶变分的显式表达式，并引入了相应的 $(p,\ q)$-张力场 $\tau_{p,\ q}(\varphi)$，其消失刻画了临界点。

定理1. 设 φ 是从黎曼流形 (M,g) 到黎曼流形 (N,h)的光滑映射，且 $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 是 φ 的一个光滑变分，其支撑包含于紧支撑区域 $D\subset M$。则

$$\frac{d}{dt}E_{p,q}(\varphi_t;D)\Big|_{t=0}=-\int_D h\big(v,\tau_{p,q}(\varphi)\big)v_g, \tag{2.1}$$

其中 $\tau_{p,q}(\varphi)$ 是 φ 的 (p,q)-张力场，定义为

$$\begin{aligned}\tau_{p,q}(\varphi) &= -|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\operatorname{trace}R^N\big(\tau_p(\varphi),d\varphi\big)d\varphi\\ &\quad-\operatorname{trace}\nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\\ &\quad-(p-2)\operatorname{trace}\nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle d\varphi,\end{aligned}$$

并且 $v=\frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ 表示 $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 的变分向量场。

证明. 设 ϕ 是由下式定义的光滑映射

$$\begin{aligned}\phi:(-\epsilon,\epsilon)\times M &\to N.\\ (t,x) &\mapsto \phi(t,x)=\varphi_t(x)\end{aligned}$$

设 $\{e_i\}$ 是 M 上关于 g 的正交标架，使得对于所有 $i,j=1,...,m$，在 $x\in M$ 处有 $\nabla^M_{e_j}e_j=0$。

注意，$\phi(x,0)=\varphi(x)$，且与变分 $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 相关联的变分向量场 v 由 $v=d\phi(\frac{\partial}{\partial t})|_{t=0}$ 给出。我们有

$$\frac{d}{dt}E_{p,q}(\varphi_t;D)=\frac{1}{q}\int_D\frac{\partial}{\partial t}|\tau_p(\varphi)|^q v^g. \tag{2.2}$$

我们计算以下项

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\tau_p(\varphi_t)|^q &= \frac{\partial}{\partial t}\left[|\tau_p(\varphi_t)|^2\right]^{\frac{q}{2}}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[h(\tau_p(\varphi_t),\tau_p(\varphi_t))\right]^{\frac{q}{2}}\\ &= \frac{q}{2}h(\tau_p(\varphi_t),\tau_p(\varphi_t))^{\frac{q}{2}-1}\frac{\partial}{\partial t}h(\tau_p(\varphi_t),\tau_p(\varphi_t))\\ &= qh(\tau_p(\varphi_t),\tau_p(\varphi_t))^{\frac{q-2}{2}}h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_p(\varphi_t),\tau_p(\varphi_t)).\end{aligned} \tag{2.3}$$

对所有 $i=1,...,m$，取 $E_i=(0,e_i)$。由于 $\nabla_{E_i}E_i=0$ 在 x处，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_p(\varphi_t) &= \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\Big[\nabla^{\phi}_{E_i}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i)-|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(\nabla_{E_i}E_i)\Big]\\ &= \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\phi}_{E_i}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i).\end{aligned}$$

由（N,h）的曲率张量的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_p(\varphi_t) &= R^N\big(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),d\phi(E_i)\big)|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i)+\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i)\\ &\quad+\nabla^{\phi}_{[\frac{\partial}{\partial t},E_i]}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i) \qquad (2.4)\\ &= |d\varphi_t|^{p-2}R^N\big(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),d\phi(E_i)\big)d\phi(E_i)+\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i).\end{aligned}$$

将（2.4）代入（2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}|\tau_p(\varphi_t)|^q &= |d\varphi_t|^{p-2}|\tau_p(\varphi_t)|^{q-2}h\big(R^N\big(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),d\phi(E_i)\big)d\phi(E_i),\tau_p(\varphi_t)\big)\\ &\quad+E_i\Big[|\tau_p(\varphi_t)|^{q-2}h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i),\tau_p(\varphi_t))\Big]\\ &\quad-h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i),\nabla^{\phi}_{E_i}|\tau_p(\varphi_t)|^{q-2}\tau_p(\varphi_t)). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

利用性质 $\nabla^{\phi}_X d\phi(Y)=\nabla^{\phi}_Y d\phi(X)+d\phi([X,Y])$，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p-2}d\phi(E_i)\Big|_{t=0} &= \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(|d\varphi_t|^{p-2}E_i)\Big|_{t=0} \qquad (2.6)\\ &= |d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v+\frac{\partial}{\partial t}|d\varphi_t|^{p-2}\Big|_{t=0}d\varphi(e_i)\\ &= |d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v+(p-2)|d\varphi|^{p-4}h(\nabla^{\varphi}_{e_j}v,d\varphi(e_j))d\varphi(e_i).\end{aligned}$$

将 (2.6) 代入 (2.5)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}|\tau_p(\varphi_t)|^q\Big|_{t=0} &= |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(R^N\big(v,d\varphi(e_i)\big)d\varphi(e_i),\tau_p(\varphi)\big)\\ &\quad+e_i\Big[|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau_p(\varphi))\Big]\\ &\quad+(p-2)e_i\Big[|d\varphi|^{p-4}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h(\nabla^{\varphi}_{e_j}v,d\varphi(e_j))h(d\varphi(e_i),\tau_p(\varphi))\Big]\\ &\quad-|d\varphi|^{p-2}h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi_t))\\ &\quad-(p-2)|d\varphi|^{p-4}h(\nabla^{\varphi}_{e_j}v,d\varphi(e_j))h(d\varphi(e_i),\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)).\end{aligned}$$

设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \Gamma(T^*M)$ 定义为

$$\begin{aligned}
\eta_1(X) &= |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(\nabla^\varphi_X v, \tau_p(\varphi)\big),\\
\eta_2(X) &= |d\varphi|^{p-4}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\,\langle\nabla^\varphi v, d\varphi\rangle\, h\big(d\varphi(X), \tau_p(\varphi)\big),\\
\eta_3(X) &= |d\varphi|^{p-2}h\big(v, \nabla^\varphi_X|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big),\\
\eta_4(X) &= |d\varphi|^{p-4}\,\big\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\big\rangle\, h\big(v, d\varphi(X)\big).
\end{aligned}$$

因此，(2.7) 变为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}|\tau_p(\varphi_t)|^q\Big|_{t=0} &= |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(R^N\big(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i)\big)d\varphi(e_i), v\big)\\
&\quad + \operatorname{div}\eta_1 + (p-2)\operatorname{div}\eta_2 - \operatorname{div}\eta_3 - (p-2)\operatorname{div}\eta_4\\
&\quad + h\big(v, \nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big)\\
&\quad + (p-2)h\big(v, \nabla^\varphi_{e_j}|d\varphi|^{p-4}\,\big\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\big\rangle\, d\varphi(e_j)\big).
\end{aligned}$$

定理1由散度定理得出。 □

根据定理1，我们推导出以下推论。

推论2. 两个黎曼流形之间的光滑映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ 是(p, q)-调和的，当且仅当

$$\begin{aligned}
\tau_{p,q}(\varphi) &= -|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\operatorname{trace} R^N\big(\tau_p(\varphi), d\varphi\big)d\varphi\\
&\quad - \operatorname{trace}\nabla^\varphi|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\\
&\quad - (p-2)\operatorname{trace}\nabla^\varphi|d\varphi|^{p-4}\,\big\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\big\rangle\, d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

推论3. *[11]* 两个黎曼流形之间的光滑映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ 是 ***bi-p***-调和的，当且仅当

$$\begin{aligned}
\tau_{p,2}(\varphi) &= -|d\varphi|^{p-2}\operatorname{trace} R^N\big(\tau_p(\varphi), d\varphi\big)d\varphi\\
&\quad - \operatorname{trace}\nabla^\varphi|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi\tau_p(\varphi)\\
&\quad - (p-2)\operatorname{trace}\nabla^\varphi|d\varphi|^{p-4}\,\langle\nabla^\varphi\tau_p(\varphi), d\varphi\rangle\, d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

推论4. *[5, 9]* 两个黎曼流形 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ 之间的 p-双调和光滑映射，当且仅当

$$\begin{aligned}
\tau_{2,p}(\varphi) &= -|\tau(\varphi)|^{p-2}\operatorname{trace} R^N\big(\tau(\varphi), d\varphi\big)d\varphi\\
&\quad - \operatorname{trace}(\nabla^\varphi)^2|\tau(\varphi)|^{p-2}\tau(\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

备注5. (1) 任意 p-调和映射都是(p,q)-调和映射，即 $\tau_p(\varphi) = 0$意味着$\tau_{p,q}(\varphi) = 0$。

(2) 设 $\varphi: (M, g) \to (N, h)$ 是一个光滑映射。若拉回向量场$|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)$ 沿 φ 平行（在 $N = \mathbb{R}^n$ 的情形下，我们假设 $|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)$ 的分量为常数），则映射 φ 是 (p, q)-调和的。注意，我们构造了许多本质的 (p, q)-调和映射示例，即非 p-调和的 (p, q)-调和映射。

(3) 每个具有平行 p-张力场 $\tau_p(\varphi)$ 的双-p-调和映射 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ 都是(p, q)-调和的。

为了加深对 (p, q)-调和映射的理解，考察满足相应欧拉–拉格朗日方程的具体示例尤其值得关注。在某些情况下，双-p-调和映射也可能满足 (p, q)-调和条件。以下示例展示了这种情况，并突显了这两个概念之间的相互作用。

例 *6.* 设流形 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ 配备黎曼度量 $g = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{p}}(dx^2+dy^2+dz^2)$, 并设 $N = \mathbb{R}^2$ 配备黎曼度量 $h = du^2 + dv^2$。由 $\varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ 定义的双-p-调和映射 $\varphi : (M, g) \to \mathbb{R}^2$（见 *[11, 14]*）对所有 $p, q \geq 2$ 也都是 (p, q)-调和的，因为 $|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)$ 的分量都是常数。直接计算可得

$$|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi) = 2^{\frac{(p-2)(q-1)}{2}} \left(2 - \frac{3}{p}\right)^{q-1} \frac{\partial}{\partial u}.$$

以下推论在一个假设条件下确立了一个有用的等价关系。该条件自然出现在若干几何背景中，并简化了 (p, q)-能量泛函的临界点刻画。

推论 7. 设 $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ 是两个黎曼流形之间的光滑映射。假设对于某些 $p, q \geq 2$, $|\tau_p(\varphi)|^{q-2}$ 为常数。那么，当且仅当 φ 是双-p-调和映射时，它是(p, q)-调和映射。

在下一个例子中，我们展示了来自双曲空间的适当的（p, q）-调和映射的存在性。

例 8. 以下映射从4维双曲空间到4维欧几里得空间

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{H}^4, x_4^{-2/p}(dx_1^2 + ... + dx_4^2)) & \to & (\mathbb{R}^4, dy_1^2 + ... + dy_4^2), \\ (x_1, ..., x_4) & \longmapsto & (x_1, ..., x_4) \end{array}$$

是(p,q)-调和且双-p-调和的，其中 $p>4$ 和 $q\geq 2$。经过简单计算，我们得到

$$\begin{aligned}|\tau_p(\varphi)|^{q-2} &= 2^{(p-2)(q-2)}p^{2-q}(p-4)^{q-2},\\ |\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi) &= 2^{(p-2)(q-1)}p^{1-q}(p-4)^{q-1}\frac{\partial}{\partial y_4}.\end{aligned}$$

注 9. 存在非双p-调和且非 p-双调和的(p,q)-调和映射 φ，使得 $|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)$ 沿 φ 非平行。

例 10. 设 $s\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$。对所有 $p,q\geq 2$，光滑映射

$$\begin{aligned}\varphi:(\mathbb{R}^2,dx^2+dy^2) &\to (\mathbb{R}^2,du^2+dv^2),\\ (x,y) &\mapsto (x^s,0)\end{aligned}$$

当且仅当 $s=\frac{p}{p-1}$ 或 $s=\frac{pq-1}{pq-q-1}$时是(p,q)-调和的。事实上，直接计算可得

$$\begin{aligned}|d\varphi| &= sx^{s-1},\\ \tau_p(\varphi) &= s^{p-1}(ps-p-s+1)x^{ps-p-s}\frac{\partial}{\partial u},\\ |\tau_p(\varphi)|^{q-2} &= \left[s^{p-1}(ps-p-s+1)x^{ps-p-s}\right]^{q-2},\\ \left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle &= (q-1)(ps-p-s)(ps-p-s+1)^{q-1}\\ &\quad s^{(p-1)(q-1)+1}x^{(q-1)(ps-p-s)+s-2}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由于 $R^{\mathbb{R}^2}=0$ 和 $d\varphi(\frac{\partial}{\partial y})=0$，$\varphi$ 的(p,q)-张力场为

$$\begin{aligned}\tau_{p,q}(\varphi) &= -\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x}}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x}}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\\ &\quad -\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial y}}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial y}}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\\ &\quad -(p-2)\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x}}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle d\varphi(\frac{\partial}{\partial x}).\end{aligned}\tag{2.8}$$

将公式 *(2.7)* 代入 *(2.8)*，我们得到

$$\begin{aligned}\tau_{p,q}(\varphi) &= -(p-1)(q-1)(ps-p-s)(pqs-pq-qs-s+1)\\ &\quad (ps-p-s+1)^{q-1}s^{p-2+(p-1)(q-1)}x^{pqs-pq-qs-s}\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}$$

3 (p,q)-调和映射的刘维尔型定理

刘维尔型定理在调和映射和 p-调和映射的研究中发挥着核心作用，通常在几何假设下确立刚性结果。一个经典例子是：从紧黎曼流形映射到具有非正截面曲率的黎曼流形的任意调和映射都是常值映射。下面的定理针对定义域紧致且目标流形具有非正截面曲率的情形给出了肯定的回答。它表明，在这些经典几何假设下，$(p,\ q)$-调和性条件可化为p-调和性。

定理 11. 设(M, g) 是一个紧致、可定向且无边界的黎曼流形，且(N, h) 是一个截面曲率非正的黎曼流形。那么，从(M, g) 到(N, h) 的每个(p, q)-调和映射都是p-调和的。

证明。 设 $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ 是一个光滑的 (p,q)-调和映射。我们有

$$\begin{aligned} 0 &= -|\tau_p(\varphi)|^{q-2}|d\varphi|^{p-2}\operatorname{trace} R^N\big(\tau_p(\varphi), d\varphi\big)d\varphi \\ &\quad -\operatorname{trace}\nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi) \\ &\quad -(p-2)\operatorname{trace}\nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle d\varphi. \end{aligned}$$

固定一点 $x \in M$，并设 $\{e_i\}$ 是关于 g的 M上的正交标架，使得对所有 i, $j = 1,\ldots, m$，在 $x \in M$处有 $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$。在 x处，我们得到

$$\begin{aligned} &|\tau_p(\varphi)|^{2(q-2)}|d\varphi|^{p-2}h\big(R^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau_p(\varphi)\big) \\ = \ & -h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), |\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big) \qquad (3.1) \\ & -(p-2)h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle d\varphi(e_i), |\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big). \end{aligned}$$

设 $\theta_1, \theta_2 \in \Gamma(T^*M)$ 定义如下

$$\begin{aligned} \theta_1(X) &= |d\varphi|^{p-2}h\big(\nabla^{\varphi}_X|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), |\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big), \\ \theta_2(X) &= (p-2)|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(X), |\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big), \end{aligned}$$

对所有 $X \in \Gamma(TM)$，方程 (3.1) 变为

$$
\begin{aligned}
&|\tau_p(\varphi)|^{2(q-2)}|d\varphi|^{p-2}h\big(R^N(\tau_p(\varphi)\ d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\ \tau_p(\varphi)\big)\\
=\ & -\operatorname{div}\theta_1+|d\varphi|^{p-2}h\big(\nabla^\varphi_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),\nabla^\varphi_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big)-\operatorname{div}\theta_2\\
&+(p-2)|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

由 (3.2) 和假设 $\mathrm{Sect}^N\le 0$，我们得出

$$
\begin{aligned}
0\ \ \geq\ \ & -\operatorname{div}\theta_1+|d\varphi|^{p-2}\left|\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\right|^2-\operatorname{div}\theta_2\\
&+(p-2)|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle^2.
\end{aligned}
$$

利用格林定理（见 [2]）和不等式 (3.3)，我们推出

$$
\nabla^\varphi_X|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)=0,\quad \forall X\in\Gamma(TM).
\tag{3.3}
$$

设 $\theta_3(X)=h(|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\ |d\varphi|^{p-2}d\varphi(X))$。利用 (3.3) 以及 $\tau_p(\varphi)$ 的定义，我们得到

$$
\operatorname{div}\theta_3=|\tau_p(\varphi)|^q.
\tag{3.4}
$$

定理 11 由 (3.4) 和格林定理得出。 □

对于非紧黎曼流形的情形，我们得到如下结果。

定理 12. 设 (M,g) 为完备非紧黎曼流形，且 (N,h) 为具有非正截面曲率的黎曼流形。我们假设

$$
\int_M|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}v^g<\infty,\quad \int_M|d\varphi|^{p-2}v^g=\infty.
$$

那么，从(p,q)到(M,g)的每个(N,h)-调和映射都是 p-调和的。

证明。设 $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ 是一个光滑的 (p,q)-双调和映射，$\{e_i\}$ 是关于 g 的正交标架，定义在 M 上，使得对于所有 $i,j=1,\dots,m$，在 $x\in M$ 处有 $\nabla^M_{e_i}e_j$；并且 ρ 是定义在 M 上的一个紧支撑光滑函数。由于 (N,h) 的截面曲率非正，由 (3.1) 可得在 x 处

$$
\begin{aligned}
0\ \ \geq\ \ & -h\big(\nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),\rho^2|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big)\\
&-(p-2)h\big(\nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^\varphi|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi),d\varphi\right\rangle d\varphi(e_i),\rho^2|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

设 $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ 由 T^*M 定义为

$$\begin{aligned}\beta_1(X) &= \rho^2|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(\nabla^{\varphi}_X|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), \tau_p(\varphi)\big),\\ \beta_2(X) &= \rho^2|\tau_p(\varphi)|^{q-2}|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(X), \tau_p(\varphi)\big),\end{aligned}$$

对所有 $X \in \Gamma(TM)$。最后一个不等式等价于以下

$$\begin{aligned}0 \;\geq\; & -\mathrm{div}\beta_1 - (p-2)\mathrm{div}\beta_2 \\ & +\rho^2|d\varphi|^{p-2}h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), \nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big)\\ & +2\rho e_i(\rho)|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), \tau_p(\varphi)\big)\\ & +(p-2)\rho^2|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big)\\ & +2(p-2)\rho e_i(\rho)|d\varphi|^{p-4}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(e_i), \tau_p(\varphi)\big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

利用杨氏不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&-2\rho e_i(\rho)|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), \tau_p(\varphi)\big)\\ \leq\;& \frac{1}{2}\rho^2|d\varphi|^{p-2}\big|\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big|^2 + 2|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}|\mathrm{grad}\lambda|^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

以及以下

$$\begin{aligned}&-2\rho e_i(\rho)|d\varphi|^{p-4}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle h\big(d\varphi(e_i), \tau_p(\varphi)\big)\\ \leq\;& \rho^2|d\varphi|^{p-4}\left\langle\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi), d\varphi\right\rangle^2 + |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}|\mathrm{grad}\lambda|^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

将 (3.7) 和 (3.8) 代入 (3.6)，可得

$$\begin{aligned}p|d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}|\mathrm{grad}\lambda|^2 \;\geq\; & -\mathrm{div}\beta_1 - (p-2)\mathrm{div}\beta_2\\ & +\frac{1}{2}\rho^2|d\varphi|^{p-2}\big|\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big|^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

由不等式 (3.9) 和散度定理（见 [2]），可得

$$p\int_M |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}|\mathrm{grad}\lambda|^2 v^g \;\geq\; \frac{1}{2}\int_M \rho^2|d\varphi|^{p-2}\big|\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big|^2 v^g. \tag{3.10}$$

令 $\rho = \rho_R$： $M \to [0,1]$ 为一个光滑截断函数，在 $B_R(x)$ 上 $\rho = 1$，在 $B_{2R}(x)$ 外 $\rho = 0$，且 |梯度ρ| $\leq \frac{2}{R}$。利用（3.10），我们得到

$$\frac{4p}{R^2}\int_{B_{2R}(x)} |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)} v^g \;\geq\; \frac{1}{2}\int_{B_R(x)} |d\varphi|^{p-2}\big|\nabla^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi)\big|^2 v^g. \tag{3.11}$$

由于当 $R \to \infty$ 时， $\int_M |d\varphi|^{p-2}|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}v^g < \infty$ ，由（3.11）可得

$$\nabla_X^{\varphi}|\tau_p(\varphi)|^{q-2}\tau_p(\varphi) = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{3.12}$$

方程 (3.12) 表明，函数 $|\tau_p(\varphi)|^{2(q-1)}$ 在 M 上为常数。由假设 $\int_M |d\varphi|^{p-2}v^g = \infty$，我们得出 $\tau_p(\varphi) = 0$，即映射φ是 p-调和的。

□

参考文献

[1] Ara, M：《调和映射的几何》 F-调和映射。《小平数学杂志》**22**，243–263（1999）。[2] Baird, P., Wood, J. C.：《黎曼流形之间的调和态射》。克拉伦登出版社，牛津（2003）。[3] Baird, P., Gudmundsson, S.： p-调和映射与极小子流形。《数学年刊》**294**, 611-624（1992）。[4] Bojarski, B., Iwaniec, T.： p-调和方程与拟正则映射。巴拿赫中心出版物**19(1)**，25-38（1987）。[5] Cao, X., Luo, Y：《关于非正曲率流形中的 p-双调和子流形》。《小平数学杂志》**39**, 567-578（2016）。[6] Cheung, L-F., Leung, P-F.：《关于稳定 p-调和映射的一些结果》。《格拉斯哥数学杂志》**36**，77-80（1994）。[7] Eells, J., Sampson, J. H.：《黎曼流形的调和映射》。《美国数学杂志》**86**, 109-160（1964）。[8]Fardoun, A.：《关于等变 p-调和映射》。《亨利·庞加莱研究所年刊》**15**，25-72（1998）。[9] Han, Y., Luo, Y.：《关于适当 p-双调和映射不存在性及*Liouville*型定理的若干结果》, *arXiv:1801.05181v1Jiang, G. Y.*： *2*-调和映射及其一阶和二阶变分公式。《中国数学年刊》A辑**7 (4)**，389-402（1986）。

[11] Mohammed Cherif, A.: 《关于 p-调和映射与 p-双调和映射》。《几何学杂志》**109(41)**, （2018）。[12] Mohammed Cherif, A.: 《广义 P-调和映射的*Liouville*型定理》。《阿拉伯数学杂志》**13**，255–262（2024）。[13] Mohammed Cherif, A.: 《广义 P-调和映射的稳定性》。《喀尔巴阡数学杂志》**41**，299–311（2025）。[14] Mohammed Cherif, A., Mouffoki, K.: p爱因斯坦空间和共形平坦空间中的双调和超曲面。《韩国数学会会刊》**60**，705-715（2023）。[15] Xin Y.: 《调和映射的几何》。复旦大学（1996年）。