arXiv:2603.06155v1 [math.AC] 6 Mar 2026

H无限序理想上的齐次边界基 S

Cristina Bertone 与 Sofia Bovero

摘要。由于底层序理想的有限性，边界基传统上仅限于零维理想。本文通过引入相对于无限序理想定义的齐次边界基，将该理论推广到正克鲁尔维数的齐次理想。此外，我们给出这些基的两种刻画：一种借助边界约化子，而最值得注意的是一种用形式乘法矩阵来表述。尽管后一条件先验地需要在无穷多个次数上加以验证，我们证明只需检验其中有限多个次数即可，从而得到一个有效判据。

1. 引言

自它们首次出现于 [19, 20, 22], 以来，有限序理想上的边界基因其若干特性而引起数学家的兴趣。事实上，由于边界基对系数扰动具有稳定性，人们从数值角度对其进行研究[21, 27, 1]。此外，若干研究者从代数角度考察边界基，强调其适于符号计算的结构；例如见 [14], [15, 第6节。4], [23]。边界基的代数与计算特性为研究希尔伯特概形提供了有用框架。由于给定有限序理想上的边界基族参数化了零维概形的希尔伯特概形的一个开子集，许多作者利用边界基揭示希尔伯特概形的性质。在此背景下运用边界基的工作包括（非穷尽列表）： [16], [17], [18], [10], [11], [12]。在代数几何或交换代数中的符号计算之外的领域也存在一些应用；近期例子见 [26]。

遗憾的是，边界基的应用局限于多项式环 $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ 中 Krull维数为 0 的理想，因为边界基是相对于基数有限的序理想定义的。从几何上看，这类理想的零点集是仿射空间 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ 中的有限点集。

本文旨在将边界基的概念推广到齐次情形，同时保留其代数结构所支持的显式计算，并以一个无限序理想为起点。这些齐次边界基生成 $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ 中具有正克鲁尔维数的齐次理想，其零点集是 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ 中的代数集。我们的框架与 [24] 和 [3, 第 6] 节的框架相近。

据我们所知， [24]是首篇通过去除序理想必须有限这一假设，给出了非齐次理想的边界基概念的论文。 [6] 中的作者也考虑了无限阶理想，但他们使用单项式序，因此研究的是格罗布纳基。 [24] 的主要结果是算法 4.1：该算法以多项式环中的一个（非齐次）理想为输入，输出一个序理想及其上的一个边界基，用以生成给定理想。本文除了在齐次情形下开展研究外，还采取了相反的方向。我们从一个无限序理想出发，定义齐次边界预基和基的概念（定义 3.6 和 4.2），并刻画边界预基何时为基（定理 4.8 和 5.5）。在我们的设定中，边界预基这一概念与一个

2020 数学主题分类。 13P10, 14Q20。关键词与短语。 边界基，齐次理想，正克鲁尔维数。

边界约化结构至关重要，必须谨慎选择该结构，才能使多项式约化关系满足诺特性和合流性（参见定义 3.7 和第 3.1 节）

最近，在 [3, 第 6], 节中，作者研究齐次阿廷理想时，利用拟稳定理想上的标记基，构造了属于给定理想且首项恰好构成某个无限序理想边界的多项式。借助这些新多项式，作者考察了由标记基参数化的概形中各点的一些性质，即确定哪些理想是完全交。人们原本就期待，从标记基出发定义首项位于边界上的多项式会是有效策略，因为对于仿射空间中的零维理想，拟稳定理想上的标记基与边界基密切相关 [2]。

受 [3, 第 6]节中齐次多项式构造的启发，我们希望为非阿廷齐次理想找到齐次边界基的概念。

本文内容安排如下。第 2 节介绍记号，并回顾序理想及其边界的一些性质。第 3 节定义边界约化结构和边界预基（定义 3.1 和 3.6）；二者共同使我们能够建立一种使用边界约化子（定义 3.9）的多项式约化关系（定义 3.7）。对序理想中各项的标记作出合理假设后，我们证明该约化是诺特的且合流（第 3.1 节）。第 4 节在序理想上定义齐次边界基的概念，并证明其存在性和唯一性（定义 4.2 以及命题 4.5 和 4.6）。在定理 4.8 中，我们还给出第一个判据，用来判断边界预基是否是关于边界约化子的基。第 5 节给出另一个关于边界基的判据，该判据使用形式乘法矩阵，并推广了经典边界基中广为人知的类似判据；例如参见 [13, 命题 16]。由于我们研究的是无限序理想上的齐次边界基，定理 4.8 和 5.5 中的两种刻画都不是有效的，因为需要对每个 $d \geq 0$ 检查条件。第 6 节中，我们以类似于 [24] 的方式，利用戈茨曼定理弥补这一缺陷。全文给出了若干例子；特别是在最后的例 6.7 中，我们明确给出了一组关于边界预基系数的多项式条件，这些条件可保证它是一个基。最后，我们简要展望了若干后续发展和应用。

2. 记号与背景

设 $\mathbb{K}$ 为一个域。我们考虑多项式环 $P = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$。$P$ 中的一个项 是幂积 $x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$，其中 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$。我们用 $\mathbb{T}$ 表示 P 中项的集合；对每个$L \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$，我们用 $\mathbb{T}(L)$ 表示满足对所有 $x_j \notin L$ 均有 $\alpha_j = 0$ 的那些项的集合。我们在 P 上使用标准分次，即对所有 $j \in \{0, \ldots, n\}$，$\deg(x_j) = 1$。因此，$\deg(x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum \alpha_i$。

若 S 是 P 的一个子集，我们用 $\langle S \rangle$ 表示由 S 生成的 $\mathbb{K}$-向量空间，并用 (S) 表示由 S 在 P 中生成的理想。此外，对每个 $t \in \mathbb{Z}$，我们用 S_t 表示 S 中由次数为 t 的齐次元素组成的子集。类似地，我们用 $S_{\geqslant m}$ 和 $S_{\leqslant m}$ 表示直和 $S = \bigoplus_{t \geqslant m} S_t$ 与 $S = \bigoplus_{t \leqslant m} S_t$。在本文中，我们考虑 P 的齐次理想 J，从而 $J = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} J_t$。

对于每个元素 $f \in P$，我们用 $\mathrm{Supp}(f)$ 表示在 f 中系数非零的项所组成的集合。

现在我们回顾序理想、序理想的边界以及后者的性质的定义。

定义 2.1。 [15, 定义 6.4.3 和 6.4.4] 非空的项集合 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$ 称为**序理想**，如果它在取因子运算下封闭，即

$$\forall \tau \in \mathcal{O}, \forall \tau' \in \mathbb{T},\ \tau' \mid \tau \Rightarrow \tau' \in \mathcal{O}.$$

$\mathcal{O}$ 的边界 是由以下项组成的集合

$$\partial\mathcal{O} \coloneqq \mathbb{T}_1 \cdot \mathcal{O} \setminus \mathcal{O} = (x_0\mathcal{O} \cup \cdots \cup x_n\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}$$

以及的第一边界闭包是集合 $\partial\mathcal{O} \coloneqq \mathcal{O} \cup \overline{\partial\mathcal{O}}$。
由于 $\overline{\partial\mathcal{O}}$ 也是一个序理想，对于每个整数 $k \geq 0$，我们可以通过以下规则归纳定义$\mathcal{O}$ 的阶边界

$$\partial^0\mathcal{O} \coloneqq \mathcal{O} \text{ and } \partial^k\mathcal{O} \coloneqq \partial(\overline{\partial^{k-1}\mathcal{O}})$$

以及 k阶边界闭包的 $\mathcal{O}$ 按

$$\overline{\partial^0\mathcal{O}} \coloneqq \partial^0\mathcal{O} = \mathcal{O} \text{ and } \overline{\partial^k\mathcal{O}} = \overline{\partial^{k-1}\mathcal{O}} \cup \partial^k\mathcal{O}.$$

以下命题包含定义 2.1 的一些推论。

命题 2.2。 [15, 命题 6.4。6] 设 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$ 是一个序理想。

(i) 对于每个 $k \geq 0$，我们都有一个不相交并 $\overline{\partial^k\mathcal{O}} = \bigcup_{i=0}^{k} \partial^i\mathcal{O}$。因此，我们有一个不相交并 $\mathbb{T} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \partial^i\mathcal{O}$。*(ii)* 对于每个 $k \geq 1$，我们都有 $\partial^k\mathcal{O} = \mathbb{T}_k \cdot \mathcal{O} \setminus \mathbb{T}_{<k} \cdot \mathcal{O}$。*(iii)* 项 $\tau \in \mathbb{T}$ 可被 $\partial\mathcal{O}$ 中的某个项整除，当且仅当 $\tau \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{O}$。

上述对 $\mathbb{T}$的划分使我们能够定义一个项与序理想之间的“距离”。

定义 2.3。 [15, 定义 6.4。7] 设 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$ 是一个序理想。

a) 对于每个 $\tau \in \mathbb{T}$，满足 $\tau \in \partial^k\mathcal{O}$ 的唯一数 $k \in \mathbb{N}$ 称为 τ 相对于 $\mathcal{O}$ 的指标，记作 $\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau)$。

b) 对于多项式 $f \in P \setminus \{0\}$，我们将 f 相对于 $\mathcal{O}$ 的指标 定义为 $\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(f) = \max\{\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau) \mid \tau \in \operatorname{Supp}(f)\}$。

请注意，指标和次数这两个概念相互补充。

命题 2.4. [15, 命题 6.4.8] 设 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$ 是一个序理想。

(i) 对于一项 $\tau \in \mathbb{T}$，数值 $k = \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau)$ 是满足 $\tau = \tau'\tau''$、$\tau' \in \mathbb{T}_k$ 和 $\tau'' \in \mathcal{O}$ 的最小自然数。*(ii)* 给定两项 τ、$\tau' \in \mathbb{T}$，有 $\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau\tau') \leq \deg(\tau) + \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau')$。*(iii)* 对于满足 $f + g \neq 0$ 的非零多项式 f、$g \in P$，有

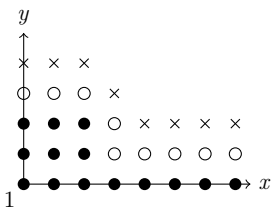
$$\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(f+g) \leq \max\{\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(f), \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(g)\}.$$

(iv) 对于非零多项式 f、$g \in P$，有

$$\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(fg) \leq \min\{\deg(f) + \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(g), \deg(g) + \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(f)\}.$$

虽然由指标在 $\mathbb{T}$ 上定义的偏序看起来类似于项序，但它有一个严重的缺点：此偏序与乘法不相容，也就是说，$\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau) \leq \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau')$ 通常并不意味着 $\operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau\tau'') \leq \operatorname{ind}_{\mathcal{O}}(\tau'\tau'')$。

例 2.5. 考虑序理想 $\mathcal{O} = \mathbb{T}(x) \cup \{y, xy, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2\} \subseteq \mathbb{K}[x, y]$，其边界为 $\partial\mathcal{O} = \{x^k y \mid k \geq 3\} \cup \{y^3, xy^3, x^2y^3, x^3y^2\}$。下图说明了这一情况。图中的点 (r, s) 对应于项 $x^r y^s$。我们用该符号表示 $\mathcal{O}$ 中的项、$\partial\mathcal{O}$ 中的项以及 $\partial^2\mathcal{O}$ 中的项。 • ○ ×



将 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x^2y^2) < \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(y^3)$ 两边的项乘以 x^2，得到 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x^2 \cdot x^2y^2) > \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x^2 \cdot y^3)$。类似地，将 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(y^3) = \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x^2y^3)$ 两边的项乘以 x，得到 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x \cdot y^3) < \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(x \cdot x^2y^3)$。

3. 多项式边界约化

定义 3.1。给定一个序理想 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$，将边界 $\partial\mathcal{O}$ 的各项以任意方式排序，并保持相容的标记，即对于每个 σ_i，$\sigma_j \in \partial\mathcal{O}$，若 $i < j$，则 σ_i 先于 σ_j。{style id='12'>边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 是这个三元组

$$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}} \coloneqq (\partial\mathcal{O}, \mathcal{L} \coloneqq \{\mathcal{L}_\sigma \mid \sigma \in \partial\mathcal{O}\}, \mathcal{T} \coloneqq \{\mathcal{T}_\sigma \mid \sigma \in \partial\mathcal{O}\})$$

其中：

- 对于每个 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$, $\mathcal{L}_\sigma := \mathcal{O}_{\deg(\sigma)}$ 是 σ的尾集；
- 对于每个 $\sigma_i \in \partial\mathcal{O}$, $\mathcal{T}_{\sigma_i} := \{\eta \in \mathbb{T} : \ \forall j > i, \ \ \sigma_j \nmid \eta\sigma_i\}$ 是 σ_i的乘法集。

$\mathcal{T}_{\sigma_i}$ 中的元素称为 σ_i的乘法项。

给定一个项 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$，我们将相对于边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$的 σ 的锥 定义为集合 $\mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(\sigma) \coloneqq \{\eta\sigma \mid \eta \in \mathcal{T}_\sigma\}$。

注 3.2. 我们注意到，同一集合 $\partial\mathcal{O}$ 上的两个约化结构不同，当且仅当 $\partial\mathcal{O}$ 中至少有一个项在这两个约化结构中具有不同的乘法项集合（因此在两个约化结构中也具有不同的锥）。当且仅当这两个约化结构由 $\partial\mathcal{O}$中各项的两种不同排序给出时，也就是由两种不同的标记方式给出时，才会出现后一种情况。以下示例将说明这一事实。

例 3.3. 考虑序理想 $\mathcal{O} = \mathbb{T}(x) \cup y \cdot \mathbb{T}(x) \cup \{y^2, xy^2, x^2y^2, y^3\} \subseteq \mathbb{K}[x, y]$，其边界为 $\partial\mathcal{O} = \{y^4, xy^3, x^2y^3\} \cup \{x^ky^2 \mid k \geq 3\}$。我们考虑两种不同的边界约化结构，它们都按次数递增排列边界中的各项，但排列方式不同。

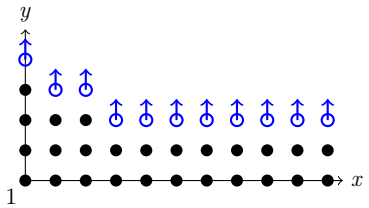
对于第一个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}} = (\partial\mathcal{O}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$，我们按以下方式排列边界：

$$\sigma_1 = y^4, \ \sigma_2 = xy^3, \ \sigma_3 = x^2y^3, \ \sigma_4 = x^3y^2, \ \sigma_\ell = x^{\ell-1}y^2 \quad \ell \geq 5.$$

我们得到，对于每个 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$，乘法集合为 $\mathcal{T}_\sigma = \mathbb{T}(y)$。在这种情况下，锥为：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(y^4) = \{y^k \mid k \geq 4\}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(xy^3) = \{xy^k \mid k \geq 3\}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(x^2y^3) = \{x^2y^k \mid k \geq 3\},$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(x^\ell y^2) = \{x^\ell y^k \mid k \geq 2\} \ \text{ for } \ell \geq 3.$$

下图展示了这一情况。蓝色箭头表示其起始项的锥。



现在考虑边界约化结构 $\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}} = (\partial\mathcal{O}, \mathcal{L}', \mathcal{T}')$，其中边界项按以下方式排列：

$$\sigma_1 = y^4, \ \sigma_2 = xy^3, \ \sigma_3 = x^3y^2, \ \sigma_4 = x^2y^3, \ \sigma_\ell = x^{\ell-1}y^2 \quad \ell \geq 5,$$

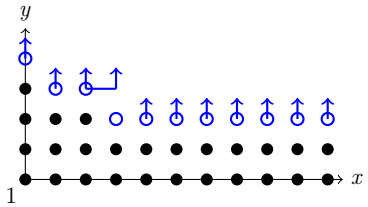
由此可得，这些乘法集合为

$$\mathcal{T}'_{x^3y^2} = \{1\}, \quad \mathcal{T}'_{x^2y^3} = \mathbb{T}(y) \cup x \cdot \mathbb{T}(y), \quad \mathcal{T}'_\sigma = \mathbb{T}(y) \ \text{ for every } \sigma \neq x^3y^2, x^2y^3.$$

在第二种情况下，这些锥为：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}(y^4)=\{y^k \mid k\geq 4\},\quad \mathcal{C}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}(xy^3)=\{xy^k \mid k\geq 3\},\quad \mathcal{C}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}(x^3y^2)=\{x^3y^2\},$$
$$\mathcal{C}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}(x^2y^3)=\{x^2y^k \mid k\geq 3\}\cup\{x^3y^k \mid k\geq 3\},\quad \mathcal{C}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}(x^\ell y^2)=\{x^\ell y^k \mid k\geq 2\}\ \text{ for } \ell\geq 4.$$

下图说明了这种情形。



当上下文已明确边界约化结构时，我们简单地写作 $\mathcal{C}(\sigma)$，而不写作$\mathcal{C}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}(\sigma)$。

注 3.4. 注意，如果放宽对集合 M 基数的假设，即允许该集合为无限集，那么边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 便是 [5,定义 3.1] 中所定义的约化结构。事实上，$\bigcup_{\sigma\in\partial\mathcal{O}}\mathcal{C}(\sigma)=(\partial\mathcal{O})$（如 [5, 引理 13.2.ii], 所示，其证明对无限阶理想同样成立）。此外，对于所有 $\sigma\in\partial\mathcal{O}$，我们都有 $\mathcal{T}_\sigma$ 是一个序理想（如 [5, 引理 13.2.i], 所示，其证明对无限阶理想也同样成立）。最后，$\mathcal{L}_\sigma$ 是 $\mathbb{T}\setminus\mathcal{C}(\sigma)$的有限子集。

此外，这里的 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 与 [2, 定义 11], 中给出的有限序理想的经典边界约化结构不同，不仅因为它具有无限边界，还因为 $\mathcal{L}_\sigma$的定义不同，它仅由次数为 $\deg(\sigma)$ 的项组成。

下面的引理作为 [2, 命题 2], 的一部分得到证明；该命题对无限序理想以及边界的任意排序仍然成立。

引理 3.5。 设 $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{T}$ 为一个序理想，并按照定义 *3.1* 对 $\partial\mathcal{O}$ 中的项进行标记。边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 具有互不相交的锥，即 $\mathcal{C}(\sigma_i)\cap\mathcal{C}(\sigma_j)=\emptyset$ 对每一对不同元素σ_i、$\sigma_j\in\partial\mathcal{O}$均成立。

定义 3.6。 设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想。若一组多项式 $G=\{g_\sigma\}_{\sigma\in\partial\mathcal{O}}$ 具有如下形式，则称其为齐次$\partial\mathcal{O}$-预基，或称为在 $\mathcal{O}$上的齐次边界预基：

$$g_\sigma=\sigma-\sum_{\tau\in\mathcal{O}_{\deg(\sigma)}}c_{\sigma\tau}\tau$$

对每个 $\sigma\in\partial\mathcal{O}$，使用 $c_{\sigma\tau}\in\mathbb{K}$。

一旦固定了边界约化结构，我们就可以为一个 $\partial\mathcal{O}$-预基 G关联一个约化过程 $\to_G^+$。

定义 3.7。 设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想，设 $\partial\mathcal{O}$ 中的项按定义 3.1 排序，并设$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 为一个边界约化结构。考虑一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G。与 G 和 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 相关联的边界约化关系 是关系$\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}$ 在 P 上的传递闭包$\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}^+$，该关系定义如下：

对于 $f,h\in P$，当存在项 $\beta\in\mathrm{Supp}(f)$ 和 $\sigma\in\partial\mathcal{O}$，使得 $\beta=\eta\sigma\in\mathcal{C}(\sigma)$ 并且.....时，f 与 h 具有关系（记作 $f\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}h$）。

$$h=f-c\eta g_\sigma,$$

其中，$c\in\mathbb{K}$ 是 f中 β 的系数。当$f\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}^+h$时，我们称 f 关于 G约化为 h。

在没有歧义时，我们用 $\to_G$ 和$\to_G^+$ 代替$\to_{G,\ \mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}$ 和$\to_G^+$，$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$。

注 3.8. 齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基由 [25], 意义下的标记多项式构成，并且也是 [5, 定义 4.2] 中所定义的边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 上的标记集。事实上，对每一个 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$，都存在唯一的 $g_\sigma \in G$，其支集中属于 $(\partial\mathcal{O})$ 的项是唯一的，即为 σ。我们定义 $\mathrm{Ht}(g_\sigma) = \sigma$，并称其为 g_σ 的首项（或标记项）。注意 $\mathrm{Supp}(g_\sigma - \sigma) \subseteq \mathcal{O}_{\deg(\sigma)} = \mathcal{L}_\sigma$。多项式 $g_\sigma - \sigma$ 是 g_σ 的尾项。

然而，定义 3.7 的约化关系并非 [25] 中的约化关系。事实上，我们如 [5, 第 105] 页所述，借助边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$来定义当前的约化关系。

项 $\beta \in (\partial\mathcal{O})$ 使用项 $\sigma_i \in \partial\mathcal{O}$ 约化，其中 $i = \max\{\ell \mid \sigma_\ell \in \partial\mathcal{O}$ 整除 $\beta\}$，也就是说 σ_i 使得 $\beta \in \mathcal{C}(\sigma_i)$。根据引理 3.5，这样的 σ_i 是唯一的。

定义 3.9. [5, 定义 4.2] 设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想，$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 为一个边界约化结构，且G 为一个 $\partial\mathcal{O}$-预基。我们将关于边界约化过程 $\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}^+$ 的所有边界约化子 构成的集合定义为 $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G := \{\eta g_\sigma \mid g_\sigma \in G, \eta \in \mathcal{T}_\sigma\}$。对于每个 $d \in \mathbb{N}$，我们还定义其次数-d部分：$\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G_d := \mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G \cap P_d = \{\eta g_\sigma \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G : \deg(\eta) + \deg(\sigma) = d\}$。

对于同一序理想和边界预基，不同的边界约化结构会产生不同的边界约化子。

例 3.10. 考虑序理想 $\mathcal{O}$ 以及例 3.3 中的两个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$、$\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}$。设 G为由下列多项式给出的齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基

$$g_{y^4} = y^4 \quad g_{xy^3} = xy^3 \quad g_{x^2y^3} = x^2y^3 - xy^4, \quad g_{x^3y^2} = x^3y^2 - xy^4, \quad g_{x^ky^2} = x^ky^2 \text{ 对应 } k \geq 4. \tag{3.1}$$

于是 $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G \neq \mathcal{T}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}G$。事实上：

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G_6 = \left\{y^2g_{y^4},\ y^2g_{xy^3},\ yg_{x^2y^3},\ yg_{x^3y^2},\ g_{x^4y^2}\right\}$$

and

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}}G_6 = \left\{y^2g_{y^4},\ y^2g_{xy^3},\ yg_{x^2y^3},\ xg_{x^2y^3},\ g_{x^4y^2}\right\}.$$

在不会引起歧义时，我们将 $\mathcal{T}G$和 $\mathcal{T}G_d$分别记作 $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G$和 $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}G_d$。
我们注意到，$\langle\mathcal{T}G\rangle \subseteq (G)$ 和 $\langle\mathcal{T}G_d\rangle \subseteq (G)_d$。
现在陈述边界约化过程的一些有用性质。

引理 3.11。设 $\mathcal{O}$ 是一个序理想，$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 是一个边界约化结构，且 G 是一个齐次$\partial\mathcal{O}$-预基。考虑一个次数为 d的多项式 $f \in P$，并设 $h \in P$满足 $f \to_G^+ h$。多项式 $f - h$ 属于 $\langle\mathcal{T}G\rangle$，更确切地说，$f = \sum_{j=1}^s c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}} + h$，其中

$$f \to_G f - c_1\eta_1 g_{\sigma_{i_1}} \to_G f - c_1\eta_1 g_{\sigma_{i_1}} - c_2\eta_2 g_{\sigma_{i_2}} \to_G \cdots \to_G f - \Big(\sum_{j=1}^s c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}\Big), \tag{3.2}$$

其中 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}} \in \mathcal{T}G$、$c_j$ 是 $\mathbb{K}$ 和 $h = f - (\sum_{j=1}^s c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}})$ 的适当元素。此外，$\deg(h) \leq \deg(f)$。

此外，若 f 是齐次的，则 $f - h \in \langle\mathcal{T}G_d\rangle$，式 (3.2) 中的多项式 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$ 均属于 $\mathcal{T}G_d$，且 h 是次数为 d 的齐次多项式。

证明。 $f - h \in \langle\mathcal{T}G\rangle$ 这一事实以及式 (3.2) 的存在性，都直接来自边界约化过程的定义。

由于每个项 $\beta \in \mathrm{Supp}(f)$ 都满足 $\deg(\beta) \leq \deg(f) = d$，因此对$f$ 进行的边界约化过程只涉及次数至多为 d 的元素 $\eta g_\sigma \in \mathcal{T}G$。因此，由于 G 由齐次多项式组成，h 的支集中不可能包含任何次数大于 d 的项。

现在假设 f 是齐次的。那么，式 (3.2) 中出现的多项式 ηg_σ 的次数为 d，因此它们属于 $\mathcal{T}G_d$。因此， h 的支集只能包含次数为 d 的项。□

定义 3.12。 [5, 定义 6.1] 设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想， $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 为一个边界约化结构，且G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。设 $f=\sum_{j=1}^{r} c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$，其中 $c_j\in\mathbb{K}$，且每个 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$ 都是 $\mathcal{T}G$的一个不同元素。更准确地说，我们要求：若 $g_{\sigma_{i_j}}=g_{\sigma_{i_k}}$，则 $\eta_j\neq\eta_k$。在这种情况下，我们称写法 $\sum_{j=1}^{r} c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$ 是对 f 的表示。此外，若存在 $n\in\mathbb{N}$，使得对每个 $j=1,\ldots\ldots,\ r$ 都有 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta_j\sigma_{i_j})\leq n$，则称 f的表示为n-下表示（简称 n-$LRep$ ）。

最后，如果表示中出现的所有元素 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$ 都属于某个固定次数 d的 $\mathcal{T}G_d$ ，我们就称这是一个由 $\mathcal{T}G_d$ 给出的表示。

定义 3.13。 [2, 页码 185] 设 $\mathcal{O}$ 是一个序理想， G是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基， $f\in P$ 是一个多项式。 f 关于（G）的（$\partial\mathcal{O}$）约化形式是一个多项式 $h\in P$，满足$f-h\in$（G）且 $\mathrm{Supp}(h)\subseteq\mathcal{O}$。如果 f关于（G）的（$\partial\mathcal{O}$）约化形式唯一，则称其为 f 关于（G）的（$\partial\mathcal{O}$）标准形式，记作 $\mathrm{Nf}(f)$。

我们指出，若 $f\in\langle\mathcal{O}\rangle$，则 f 关于（G）的（$\partial\mathcal{O}$）约化形式就是 f 本身。在这种情况下，我们称 f 关于（$\partial\mathcal{O}$）是约化的，或称其为（$\partial\mathcal{O}$）余式。

3.1. **诺特性与合流性**。 令 $\mathcal{O}$ 为一个序理想， $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 为一个边界约化结构， G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。若约化关系 $\to_G^+$ 不存在无限约化链 $f_1\to_G f_2\to_G f_3\to_G\cdots$，则称其为 诺特 。若对于每个多项式 $f\in P$，模 (G) 存在唯一的 $(\partial\mathcal{O})$-约化形式 h，使得 $f\to_G^+ h$，则称关系 $\to_G^+$ 为合流 。

仅有互不相交的锥并不足以保证诺特性，以下示例对此作了说明。

示例 3.14。 考虑序理想 $\mathcal{O}=\mathbb{T}(x)\cup\{y,xy,x^2y,y^2,y^3\}\subseteq\mathbb{K}[x,y]$，其边界为 $\partial\mathcal{O}=\{x^ky\mid k\geq 3\}\cup\{xy^2,x^2y^2,xy^3,y^4\}$。我们考虑边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$，其中边界的项按以下方式排序：

$$x^4y,\ x^5y,\ x^6y,\ \ldots,\ x^3y,\ x^2y^2,\ xy^3,\ y^4,\ xy^2$$

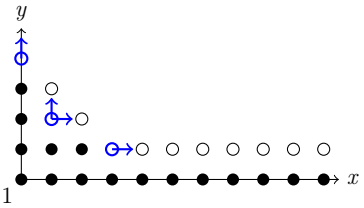
以及由以下多项式给出的齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G

$$g_{x^ky}=x^ky\ \text{ for } k\geq 3,\quad g_{x^2y^2}=x^2y^2,\quad g_{xy^3}=xy^3,\quad g_{y^4}=y^4,\quad g_{xy^2}=xy^2-x^2y-y^3.$$

我们得到以下乘法集合：

$$\mathcal{T}_{x^ky}=\emptyset\ \text{ for } k\geq 4,\quad \mathcal{T}_{x^3y}=\mathbb{T}(x),\quad \mathcal{T}_{x^2y^2}=\emptyset,\quad \mathcal{T}_{xy^3}=\emptyset,\quad \mathcal{T}_{y^4}=\mathbb{T}(y),\quad \mathcal{T}_{xy^2}=\mathbb{T}.$$

下图展示了这种情况。边界中空锥对应的元素没有标成蓝色。



约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 具有互不相交的锥，但这并不意味着具有诺特性。事实上，考虑项 xy^3：以下约化链可以无限重复

$$xy^3\ \to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}\ xy^3-yg_{xy^2}=x^2y^2+y^4\ \to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}\ x^2y^2+y^4-g_{y^4}=x^2y^2\ \to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}$$
$$\to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}\ x^2y^2-xg_{xy^2}=x^3y+xy^3\ \to_{G,\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}}\ x^3y+xy^3-g_{x^3y}=xy^3.$$

将 $\partial\mathcal{O}$ 中的项按次数递增排序（次数相同的项任意排序），即可得到诺特性和合流性。

注记 3.15. 我们指出，将边界中的项按次数递增排列后，项 $\beta \in(\partial\mathcal{O})$ 使用一个整除 β 的最大次数项 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$ 进行约化。
此外，在这种情况下，对于每个 i，我们总有 $\{1\} \subseteq \mathcal{T}_{\sigma_i}$。事实上，若 $1 \notin \mathcal{T}_{\sigma_i}$，则存在 $j > i$ 使得 $\sigma_j \mid 1 \cdot \sigma_i$，这意味着 $\sigma_j \mid \sigma_i$ 且 $\deg(\sigma_j) \geq \deg(\sigma_i)$。因此 $\sigma_j = \sigma_i$，这就产生了矛盾。

下面的命题是对 [2,命题 2]的自然推广。

命题 3.16. 给定一个序理想 $\mathcal{O}$，考虑一个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$，其边界中的项 $\partial\mathcal{O}$ 按次数递增排列，并配有一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G。

(i) 对所有 $\sigma \in \partial\mathcal{O}$、$\tau \in \mathcal{O}_{\deg(\sigma)}$、$\eta \in \mathcal{T}_\sigma$，均有 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta\sigma) > \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta\tau)$。
(ii) 边界约化关系 $\to_G^+$ 是诺特的。*(iii)* 有 $P = \langle \mathcal{T}G\rangle \oplus \langle \mathcal{O}\rangle$，且对每个 $d \geq 0$，都有 $P_d = \langle \mathcal{T}G_d\rangle \oplus \langle \mathcal{O}_d\rangle$。*(iv)* 边界约化关系 $\to_G^+$ 是合流的。

证明。(i) 这由 [2, 命题 2] 结合 [2, 引理 1], 得证；该引理对于无限序理想仍然成立。

(ii) 考虑满足 $f \to_G h$的 f、$h \in P$。更具体地说，$h = f - c\eta g_\sigma$ 满足 $\gamma = \eta\sigma \in \mathrm{Supp}(f) \cap \mathcal{C}(\sigma)$，其中 $c \in \mathbb{K}$ 是 γ 在 f中的系数，而 g_σ 是满足 $\mathrm{Ht}(g_\sigma) = \sigma$的 $G_{\leq \deg(f)}$ 的多项式。考虑一个项 $\delta \in \mathrm{Supp}(h) \setminus \mathrm{Supp}(f) \subseteq \mathrm{Supp}(\eta g_\sigma - \eta\sigma)$，则由 (i) 可得 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\delta) < \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\gamma)$。因此，在一次约化步骤中，指标为 $k = \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\gamma)$ 的项会从 f中移除，并由指标严格小于 k的项 δ 替代。此外，$\deg(h) \leq \deg(f)$。因此，从 f 出发，经过有限次约化步骤后，我们会得到一个 $(\partial\mathcal{O})$- 约化多项式：这是因为，次数为 $d \leq \deg(f)$ 且指标小于或等于 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)$ 的项只有有限多个。因此，$\to_G^+$ 是诺特的。

(iii) 第一种表达式以更一般的形式出现在 [5, 推论 6.3] 中。为清晰起见，我们在此框架下重述其证明。

> 由 (ii) 中证明的 $\to_G^+$ 的诺特性，我们有 $P = \langle \mathcal{T}G\rangle + \langle \mathcal{O}\rangle$。此外，$\langle \mathcal{T}G\rangle \cap \langle \mathcal{O}\rangle = \{0\}$；事实上，假设 $h \in \langle \mathcal{T}G\rangle \cap \langle \mathcal{O}\rangle$, $h \neq 0$，并令 $h = \sum_{j=1}^r c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$ 为 h 的一个由 $\mathcal{T}G$ 给出的表示。我们从非空集合 $\{\eta_j\sigma_{i_j} \mid j = 1, \ldots, r,\ c_j \neq 0\}$ 中选取指标最大的元素。不失一般性，可以假设这个指标最大的元素是 $\eta_1\sigma_{i_1}$。于是 $\eta_1\sigma_{i_1}$ 出现在 h 的支集中：实际上，对于 $j = 2, \ldots, r$，该项不同于 $\eta_j\sigma_{i_j}$，因为根据假设，$\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 具有互不相交的锥；并且对于某个 $j = 1, \ldots, r$，它不会出现在 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}} - \eta_j\sigma_{i_j}$ 的支集中，这是由 $\eta_1\sigma_{i_1}$ 的指标最大性和 (i) 得出的。于是我们得到矛盾，因为 h 的支集包含于 $\mathcal{O}$ 中。于是 $h = 0$。
> 此外，如果 $f \in P_d$ 是次数为 d 的齐次多项式，且 $f \to_G^+ h$，由引理 3.11 可知 $f - h \in \langle \mathcal{T}G_d\rangle$ 和 $h \in P_d$；此外，如果 h 是约化的，那么 $h \in \langle \mathcal{O}_d\rangle$。因此，我们得出 $P_d = \langle \mathcal{T}G_d\rangle \oplus \langle \mathcal{O}_d\rangle$。

(iv) 设 $f \in P$、h_1, $h_2 \in \langle \mathcal{O}\rangle$，满足 $f \to_G^+ h_1$和 $f \to_G^+ h_2$。那么，$h_2 - h_1 \in \langle \mathcal{O}\rangle$ 和 $h_2 - h_1 = (f - h_1) - (f - h_2) \in \langle \mathcal{T}G\rangle$。由 (iii) 可得 $h_2 - h_1 = 0$，即 $h_1 = h_2$。□

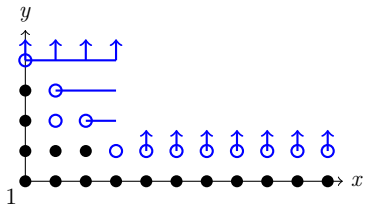
例 3.17. 考虑例 3.14 中的序理想 $\mathcal{O}$ 和边界预基 G。我们取一个边界约化结构 $\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}$，其中边界项按次数递增排序

$$xy^2,\ x^3y,\ x^2y^2,\ xy^3,\ y^4,\ x^4y,\ x^5y,\ x^6y,\ \ldots.$$

我们得到以下乘法集合：

$$\mathcal{T}'_{xy^2} = \{1\}, \quad \mathcal{T}'_{x^3y} = \{1\}, \quad \mathcal{T}'_{x^2y^2} = \{1, x\}, \quad \mathcal{T}'_{xy^3} = \{1, x, x^2\},$$
$$\mathcal{T}'_{y^4} = \mathbb{T}(y) \cup x \cdot \mathbb{T}(y) \cup x^2 \cdot \mathbb{T}(y) \cup x^3 \cdot \mathbb{T}(y), \quad \mathcal{T}'_{x^ky} = \mathbb{T}(y) \ \text{ for } k \geq 4.$$

下图说明了这一情况。



现在，始于 xy^3 的约化链到此结束：$xy^3 \to_{G,\ \mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}} xy^3 - g_{xy^3} = 0$。

诺特性与合流性会引出一些值得注意的结果。

下列推论以更一般的形式出现在 [5, 推论 6.3] 中。为使表述更清晰，我们在此给出针对我们具体设定改写后的证明。

推论 3.18. 给定一个序理想 $\mathcal{O}$，考虑一个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$，其中边界 $\partial\mathcal{O}$ 的项按次数递增排序，以及一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G。设 $f \in P$、$h \in \langle\mathcal{O}\rangle$。则下列陈述等价：

(i) $f - h \in \langle \mathcal{T}G\rangle$; *(ii)* $f \to^+_G h$; *(iii)* $f - h$ 具有由 $\mathcal{T}G$ 给出的 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)$-*LRep*。

此外，如果 f 是次数为 d 的齐次 $h \in \langle\mathcal{O}_d\rangle$，那么：

$$f - h \in \langle \mathcal{T}G_d\rangle \iff f \to^+_G h \iff f - h \text{ has an } \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)\text{-LRep by } \mathcal{T}G_d.$$

证明。 (i)⇒(ii)：假设 $f - h \in \langle \mathcal{T}G\rangle$。根据命题 3.16，令 f' 为 $\langle\mathcal{O}\rangle$ 中满足 $f \to^+_G f'$的唯一多项式。于是我们有 $f-h-(f-f') \in \langle \mathcal{T}G\rangle \cap \langle\mathcal{O}\rangle$。由命题 3.16.(iii)，可得 $h = f'$。

(ii)⇒(i)：这是显然的，因为通过 $\mathcal{T}G$ 的表示由约化的步骤给出。

(i)⇒(iii)：由 $\mathcal{T}G$ 和 $h \in \langle\mathcal{O}\rangle$，得到 $f - h$ 有唯一表示 $\sum_{j=1}^r c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$，其中 $\{\eta_j\sigma_{i_j} \mid j = 1,\dots,r\}$ 是集合 $\{\eta_j\sigma_{i_j} \mid j = 1,\dots,r\}$中指标最大的元素，其中 $s \in \{1,\dots,r\}$，并令 $n := \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta_s\sigma_{i_s})$。于是显然可得，$f - h$ 有一个由 $\mathcal{T}G$给出的 n-LRep。此外，与命题 3.16.(iii) 的证明一样，由于 $\mathrm{Supp}(h) \subseteq \mathcal{O}$，$\eta_s\sigma_{i_s}$ 出现在 f的支集中，且其指标在 $\sum_{j=1}^r c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$支集中的各项之间最大。因此，由于$f = \sum_{j=1}^r c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}} + h$ 且 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h) = 0$，我们有 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) = n$。

(iii)⇒(i)：这由定义 3.12 直接可得。

现假设 $f \in P_d$ 与 $h \in \langle\mathcal{O}_d\rangle$。由上述等价关系以及引理 3.11 的最后陈述，结论成立。□

结合命题 3.16.(iii)，下一个结果将边界除法算法 [15, 命题 6.4.11]所给出的多项式表示推广到我们的情形。

推论 3.19. 给定一个序理想 $\mathcal{O}$，考虑一个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$，其中边界 $\partial\mathcal{O}$ 的项按次数递增排列，以及一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G。

(i) 考虑 $f \in \langle \mathcal{T}G\rangle$。则存在多项式$g_{\sigma_{i_1}}$，……，$g_{\sigma_{i_r}} \in G_{\le \deg(f)}$ 以及 q_1，……，$q_r \in P$，使得

$$f = q_1 g_{\sigma_{i_1}} + \cdots + q_r g_{\sigma_{i_r}} \quad \text{and} \quad \deg(q_j) \le \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) - 1 \text{ whenever } q_j \neq 0. \tag{3.3}$$

(ii) 考虑 $f \in \langle \mathcal{T}G_d\rangle$。则在写法(3.3)中，我们有$g_{\sigma_{i_1}}$，……，$g_{\sigma_{i_r}} \in G_{\le d}$ 以及 q_1，……，$q_r \in P$ 为次数$\deg(q_j) = d - \deg(g_{\sigma_{i_j}})$的齐次多项式。

证明。 (i) 根据推论 3.18.(iii)，f 有一个由 $\mathcal{T}G$给出的 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)$-LRep。这意味着我们可以写成 $f = \sum_{j=1}^r c_j\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$，其中 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta_i\sigma_{i_j}) \le \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)$，且 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}} \in \mathcal{T}G$。

由于每个$\eta_j g_{\sigma_{i_j}}$都是齐次的，我们有 $\eta_j g_{\sigma_{i_j}} \in P_{\leq \deg(f)}$。因此，$\deg(g_{\sigma_{i_j}}) \leq \deg(f)$。此外，由于 $\eta_j \in \mathcal{T}_{\sigma_{i_j}}$，且 $\partial\mathcal{O}$ 按次数递增排列，根据[2, 引理 1]，$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\eta_j \sigma_{i_j}) = \deg(\eta_j) + 1$，因此 $\deg(\eta_j) \leq \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) - 1$。

（ii）根据推论 3.18 的最后陈述，f具有一个由 $\mathcal{T}G_d$给出的 $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)$-LRep，其中 $d = \deg(f)$。该表示中出现的 G 的多项式次数为 $\leq d$，结论得证。□

推论 3.20。设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想，G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。那么，对于每个$d \geq 0$，$\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类生成 $\mathbb{K}$-向量空间 $P_d/(G)_d$。

证明。取一个边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$，使边界 $\partial\mathcal{O}$ 中的项按次数递增排列。根据命题 3.16.(iii)，我们得到

$$P_d/\langle \mathcal{T}G_d \rangle \cong \langle \mathcal{O}_d \rangle \quad \forall d \geq 0,$$

并且，由于 $\langle \mathcal{T}G_d \rangle \subseteq (G)_d$，可知 $\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类生成$\mathbb{K}$-向量空间 $P_d/(G)_d$。□

4. 齐次边界基

从现在起，我们始终考虑一个无限序理想 $\mathcal{O}$，以及一种边界约化结构，其中 $\partial\mathcal{O}$ 的项按次数递增排列。

在推论 3.20 中，我们证明了如果 G 是一个 $\partial\mathcal{O}$-预基，那么 $P_d/(G)_d$ 作为一个 $\mathbb{K}$-向量空间，由 $\mathcal{O}_d$ 中各项的剩余类生成。然而，我们注意到，一般而言，这个生成元系未必是一个基，以下例子便说明了这一点。

例 4.1。令 $f = x^3y^3 \in P = \mathbb{K}[x, y]$。考虑例 3.10 中的序理想 $\mathcal{O}$、边界约化结构 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$、$\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}$ 以及齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G。我们观察到$\langle \mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}} G \rangle \neq \langle \mathcal{T}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}} G \rangle$。我们分别对 $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}$ 约化 f：第一种情况下，我们发现 f 可以写成 $f = y g_{x^3y^2} - x^5 y \in \langle \mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}} G_6 \rangle \oplus \langle \mathcal{O}_6 \rangle$；第二种情况下，我们发现$f = x g_{x^2y^3} - x^6 \in \langle \mathcal{T}_{\mathcal{J}'_{\partial\mathcal{O}}} \mathcal{G}_6 \rangle \oplus \langle \mathcal{O}_6 \rangle$。于是有 $x^6 - x^5 y = x g_{x^2y^3} - y g_{x^3y^2} \in (G)_6$，，即 $\underline{x^6} - \underline{x^5 y} = 0$ 属于 $P_6/(G)_6$。这意味着 $\mathcal{O}_6 = \{x^6, x^5 y\}$ 中元素的剩余类并非 $\mathbb{K}$-线性无关。

以下定义是对 [5, 定义 4.3] 和 [15, 定义 6.4.13 的显然推广].

定义 4.2. 设 G 是一个齐次的 $\partial\mathcal{O}$-预基，且 $J \subseteq P$ 是一个包含 G的齐次理想。若满足以下等价条件之一，则称集合 G为 J 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基：

(1) 对每个 $d \geq 0$，$\mathcal{O}_d$ 中各项的剩余类构成 P_d/J_d的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基；(2) 对每个 $d \geq 0$，$P_d = J_d \oplus \langle \mathcal{O}_d \rangle$；(3) 对每个 $d \geq 0$，$J_d \cap \langle \mathcal{O}_d \rangle = \{0\}$。

显然可以证明，J 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基 G 实际上生成 J。以下是 [14, 命题 4.3.2], [15,命题 6.4.15]的直接类比。

命题 4.3。设 G 是齐次理想 $J \subseteq P$ 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。那么，对于每个 $d \geq 0$，我们有 $J_d = (G)_d$，以及 $J = (G)$。

证明。根据定义，$(G) \subseteq J$，因此对于每个 $d \geq 0$，都有 $(G)_d \subseteq J_d$。为证明反向包含关系，取 $f \in J_d$。根据命题 3.16 和推论 3.19，多项式 f 可写为

$$f = \sum_{g_\sigma \in G_{\leq d}} q_\sigma g_\sigma + \sum_{\tau \in \mathcal{O}_d} c_\tau \tau, \tag{4.1}$$

其中 $c_\tau \in \mathbb{K}$，且 $q_\sigma \in P$ 是 $\mathcal{T}_\sigma$ 中元素的线性组合，并且对于每个 σ，都有 $\deg(q_\sigma g_\sigma) = d$。这意味着

$$\overline{0} = \overline{f} = \sum_{\tau \in \mathcal{O}_d} c_\tau \overline{\tau} \quad \text{in } P_d/J_d.$$

根据假设，$\mathcal{O}_d$ 的剩余类是 $\mathbb{K}$-线性无关的；因此，对每个 τ，都有 $c_\tau = 0$，于是 (4.1) 化为

$$f = \sum_{g_\sigma \in G_{\le d}} q_\sigma g_\sigma \in (G)_d.$$

因此，$J_d \subseteq (G)_d$，且 $J = (G)$是一个齐次理想。 □

4.1. **存在性与唯一性**。齐次理想 $J \subseteq P$ 存在齐次 $\partial\mathcal{O}$-基的一个必要条件显然是

$$|\mathcal{O}_d| = \dim_{\mathbb{K}}(P/J)_d, \text{ for every } d \ge 0,$$

即，对每个 d，P/J 的希尔伯特函数等于 $\mathcal{O}_d$ 的基数。然而，下一个例子表明，这个条件并不充分。

例 4.4。设 $P = \mathbb{K}[x, y]$，且 $J = (xy)$。因此，对每个 $\ell \ge 1$，$\dim_{\mathbb{K}}(P/J)_0 = 1$ 且 $\dim_{\mathbb{K}}(P/J)_\ell = 2$。令 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$ 为序理想 $\mathcal{O} = \mathbb{T}(x) \cup y \cdot \mathbb{T}(x)$。那么 $|\mathcal{O}_d| = \dim_{\mathbb{K}}(P/J)_d$，$\forall d \ge 0$。尽管如此，$J$中不存在齐次 $\partial\mathcal{O}$-基；事实上，对于 $d \ge 2$，$\mathcal{O}_d = \{x^d, x^{d-1}y\}$ 中元素的剩余类不是 $(P/J)_d$的 $\mathbb{K}$-向量空间基，因为 $x^{d-1}y \in J_d$。

以下是对 [14, 定理 4.3.4], [15, 命题 6.4.17] 的直接推广。

命题 4.5 (**存在性与唯一性**)。设 $\mathcal{O}$ 是一个无限序理想，$J \subseteq P$ 是一个齐次理想，并假设对于每个 $d \ge 0$，$\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类构成 P_d/J_d 的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基。

(i) 存在唯一的 J 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。*(ii)* 设 G 是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基，其元素属于 J。那么 G 就是 J 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。

证明。(i) 对于 $d \ge 0$，考虑 $\sigma \in \partial\mathcal{O}_d$；根据假设，$P_d/J_d$ 中 σ 的剩余类线性依赖于 $\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类，即

$$\overline{\sigma} = \sum_{\tau \in \mathcal{O}_d} c_{\sigma\tau} \overline{\tau}$$

其中 $c_{\sigma\tau} \in \mathbb{K}$。因此 J_d 包含多项式

$$g_\sigma = \sigma - \sum_{\tau \in \mathcal{O}_d} c_{\sigma\tau} \tau.$$

注意到 $\mathrm{Supp}(g_\sigma) \cap \partial\mathcal{O} = \{\sigma\}$，并令 $\mathrm{Ht}(g_\sigma) = \sigma$。于是

$$G = \{g_\sigma \mid \sigma \in \partial\mathcal{O}_d,\, d \ge 0\} \subseteq J$$

齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基，因此根据定义 4.2，它是 J 的一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。

现在，设 $G' = \{g'_\sigma \mid \sigma \in \partial\mathcal{O}\}$ 是 J的另一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。注意，对于每个$\sigma \in \partial\mathcal{O}$，$g_\sigma - g'_\sigma$ 属于 $\langle\mathcal{O}\rangle$，因为 $\mathrm{Supp}(g_\sigma) \cap \partial\mathcal{O} = \mathrm{Supp}(g'_\sigma) \cap \partial\mathcal{O} = \{\sigma\}$。因此，$g_\sigma - g'_\sigma \in J_{\deg(\sigma)} \cap \langle\mathcal{O}_{\deg(\sigma)}\rangle$，由定义 4.2.(3) 可得 $g_\sigma = g'_\sigma$，因为 G 是 J的一个齐次$\partial\mathcal{O}$-边界基。

(ii) 根据定义 4.2，只需注意到集合 G 是 J 的齐次 $\partial\mathcal{O}$-基，并应用 (i)。□

人们或许会想知道，给定的齐次正维理想 J 是否一定存在齐次边界基。根据命题 4.5.(i)，我们可以将这个问题改述如下：给定一个齐次非零维理想 J，是否存在一些阶理想，使得对于每个 $d \geq 0$，其中次数为 d 的元素的剩余类构成 $(P/J)_d$ 的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基？答案是肯定的，利用格罗布纳基可以直接得到证明。

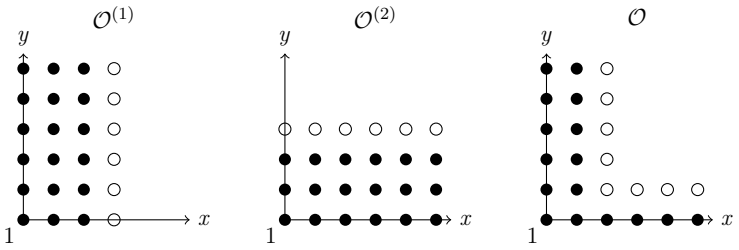
我们回顾，给定 $\mathbb{T}$上的项序 $\preceq$， J 的初始理想$\mathrm{in}_\preceq(J)$是由 J中多项式的所有首项生成的单项式理想：$\mathrm{in}_\preceq(J) = (\mathrm{lt}_\preceq(f) : f \in J \setminus \{0\})$。

下列命题在 [14, 命题 4.3.6], 中给出，其证明对正维理想同样成立。

命题 4.6. 设 $J \subseteq P$ 为齐次正维理想，设 $\preceq$ 为 $\mathbb{T}$上的项序，并设$\mathcal{O}_{\preceq,J}$为序理想 $\mathbb{T}\backslash\mathrm{in}_\preceq(J)$。则存在 J 的唯一齐次$\mathcal{O}_{\preceq,J}$-边界基。

然而，下一个例子表明，并非 J 的每一个齐次边界基都来自某个项序。在此意义上，正维理想的齐次边界基理论推广了其格罗布纳基理论。

例 4.7. 在多项式环 $P = \mathbb{K}[x, y]$ 中，其中 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$，考虑理想 $J = (x^3 + x^2y + y^3)$。由于 J 的一个格罗布纳基为 $\{x^3+x^2y+y^3\}$，且多项式 $x^3+x^2y+y^3$ 的首项为 x^3 或 y^3，理想 J 有两个可能的初始理想，即理想 $I^{(1)} = (x^3)$ 与 $I^{(2)} = (y^3)$。它们分别导出阶理想 $\mathcal{O}^{(1)} = \mathbb{T} \setminus I^{(1)} = \mathbb{T}(y) \cup x \cdot \mathbb{T}(y) \cup x^2 \cdot \mathbb{T}(y)$ 与 $\mathcal{O}^{(2)} = \mathbb{T} \setminus I^{(2)} = \mathbb{T}(x) \cup y \cdot \mathbb{T}(x) \cup y^2 \cdot \mathbb{T}(x)$。现在我们考虑另一个序理想 $\mathcal{O}$，使得 $|\mathcal{O}_d| = \dim_{\mathbb{K}}(P/J)_d, \forall d \geq 0$，即 $\mathcal{O} = \mathbb{T} \setminus (x^2y) = \mathbb{T}(x) \cup \mathbb{T}(y) \cup x \cdot \mathbb{T}(y)$。下列各图说明这三个阶理想。



由于 $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}^{(1)}$ 和 $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}^{(2)}$，这个序理想不对应于任何项序所产生的初始理想。然而，我们有， $\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类构成了 $P_d/J_d, \forall d \geq 0$上的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基。事实上，对于 $d \leq 3$，显然有 $P_d/J_d \cong \langle \mathcal{O}_d \rangle$，而我们旨在证明

$$P_d/J_d \cong \langle x^d, xy^{d-1}, y^d \rangle = \langle \mathcal{O}_d \rangle \quad \forall d \geq 4.$$

为此，我们在 $\mathbb{K}$ 中定义序列： $k_0 = k_1 = k_2 \coloneqq 1$, $k_i \coloneqq k_{i-1} + k_{i-3}$，其中 $i \geq 3$。首先，我们用归纳法对 $d \geq 4$ 证明：

$$\begin{aligned} x^d = &\left(\sum_{i=0}^{d-3} (-1)^i k_i x^{d-3-i} y^i\right) \cdot \left(x^3 + x^2y + y^3\right) + \\ &+ (-1)^{d-3} k_{d-4} xy^{d-1} + (-1)^{d-2} k_{d-2} x^2 y^{d-2} + (-1)^{d-2} k_{d-3} y^d. \end{aligned} \tag{4.2}$$

若 $d = 4$，则通过直接计算可验证该恒等式。根据归纳假设，假设该结论成立，下面证明它对 $d+1$ 也成立。将 (4.2) 两边乘以 x，得到

$$\begin{aligned} x^{d+1} = &\left(\sum_{i=0}^{d-3} (-1)^i k_i x^{d-2-i} y^i\right) \cdot \left(x^3 + x^2y + y^3\right) + \\ &+ (-1)^{d-3} k_{d-4} x^2 y^{d-1} + (-1)^{d-2} k_{d-2} x^3 y^{d-2} + (-1)^{d-2} k_{d-3} xy^d \end{aligned}$$

在此等式右边加上并减去 $\left((-1)^{d-2}k_{d-2}x^0y^{d-2}\right)\cdot\left(x^3+x^2y+y^3\right)$，即可得到对 x^{d+1} 也成立的所需表达式。现在，固定 $d\geq 4$。(4.2) 式推出 P_d/J_d 中的等式

$$\overline{x^2y^{d-2}}=k_{d-2}^{-1}\left((-1)^{d-2}\overline{x^d}+k_{d-4}\overline{xy^{d-1}}-k_{d-3}\overline{y^d}\right). \tag{4.3}$$

此外，对于 $4\leq i\leq d-1$,

$$\begin{aligned}\overline{x^3y^{d-3}}&=\left(-\overline{x^2y}-\overline{y^3}\right)\overline{y^{d-3}}=-\overline{x^2y^{d-2}}-\overline{y^d},\\ \overline{x^iy^{d-i}}&=(-1)^{i-3}k_{i-4}\overline{xy^{d-1}}+(-1)^{i-2}k_{i-2}\overline{x^2y^{d-2}}+(-1)^{i-2}k_{i-3}\overline{y^d}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

于是，$\left\{\underline{x^d},\ \underline{xy^{d-1}},\ \underline{y^d}\right\}$ 生成 P_d/J_d，因为我们可以将表达式 (4.3) 代入方程 (4.4)；它们也是线性无关的，因为 $\dim_{\mathbb{K}}(P/J)_d=3=|\mathcal{O}_d|$。

由于齐次正维理想 J 总是存在一个齐次边界基 G（命题 4.5），从现在起我们将 J 与 (G)等同。

现在，我们通过改写过程中使用的边界约化子，给出边界预基 G 成为边界基的第一个刻画。这个刻画将 [13, 命题 14]与[15,命题 6.4.28] 调整到我们的语境中，同时也考虑了 [5, 定理 7.7]。

定理 4.8 (**由边界约化子刻画**)。 设 G 是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基， $\mathcal{J}_{\partial\mathcal{O}}$ 是一个边界约化结构。以下陈述等价:

(i) G 是齐次的 $\partial\mathcal{O}$-基; *(ii)* 对每个 $d\geq 0$,
都有 $\langle\mathcal{T}G_d\rangle=(G)_d$; *(iii)* 有 $\langle\mathcal{T}G\rangle=(G)$。

证明。 (i)⇒(ii): 固定 $d\geq 0$。只需证明 $(G)_d\subseteq\langle\mathcal{T}G_d\rangle$。令 $f\in(G)_d\subseteq P_d$。根据命题 3.16，我们可以唯一地写成 $f=g+h$，其中 $q\in\langle\mathcal{T}G_d\rangle$ 且 $h\in\langle\mathcal{O}_d\rangle$。于是，在 $P_d/(G)_d$中，我们得到 $0=f=h$，这意味着 $h\in(G)_d$。因此 $h=0$，因为根据假设， G 是一个基，所以 $f=q\in\langle\mathcal{T}G_d\rangle$。

(ii)⇒(i): 根据命题 3.16，对于每个 $d\geq 0$，我们都有 $P_d=\langle\mathcal{T}G_d\rangle\oplus\langle\mathcal{O}_d\rangle$。根据假设，对于每个 $d\geq 0$， $\langle\mathcal{T}G_d\rangle=(G)_d$。综合这两个事实，我们得到 G 满足定义 4.2.(2)。(ii)⇔(iii): 这是显然的，因为 (G) 是一个齐次理想。

□

5. 形式乘法矩阵

本节通过形式乘法矩阵的交换性，给出判定边界预基是否为边界基的准则。这一刻画仿照了边界基的相应刻画 [14, 定理 4.3。17], 以及 [24] 中的刻画。然而，在我们的齐次情形下，需要施加两个连续次数中的映射具有交换性的条件。

我们考虑按次数递增排列的序理想 $\mathcal{O}=\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$。对于 $d\in\mathbb{N}$，令 $L(d)$ 表示 $\mathcal{O}_{\leq d}$ 的基数。于是 $\mathcal{O}_{\leq d}=\left\{\tau_1,\ldots,\tau_{L(d)}\right\}$ 且 $\mathcal{O}_d=\left\{\tau_{L(d-1)+1},\ldots,\tau_{L(d)}\right\}$（假设 $L(-1)=0$）。采用这些记号，考虑一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G， G_d 中的多项式可以写成

$$g_\sigma=\sigma-\sum_{\ell=1}^{|\mathcal{O}_d|}c_{\sigma\tau_{L(d-1)+\ell}}\tau_{L(d-1)+\ell}. \tag{5.1}$$

由于 $\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类生成了 $P_d/(G)_d$ 作为 $\mathbb{K}$-向量空间（推论 3.20），我们可以通过描述这些生成元与一个不定元相乘的作用来描述这个代数的结构，从而推广 [13, 定义 15]。

定义 5.1。设 G 是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。给定 $r \in \{0,\dots,n\}$ 和 $d \geq 0$，我们定义 G 的 r 阶 d-分次形式乘法矩阵 $\mathcal{X}_r^{(d)} = (\xi_{k\,\ell}^{(r,d)}) \in \mathcal{M}_{|\mathcal{O}_{d+1}|,\ |\mathcal{O}_d|}(\mathbb{K})$ 为

$$\xi_{k\,\ell}^{(r,d)} = \begin{cases} \delta_{i\,k} & \text{if } x_r\tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d)+i} \in \mathcal{O} \\ c_{\sigma_j\tau_{L(d)+k}} & \text{if } x_r\tau_{L(d-1)+\ell} = \sigma_j \in \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{5.2}$$

其中，若 $i = k$，则 $\delta_{i\,k} = 1$；否则 $\delta_{i\,k} = 0$，而 $c_{\sigma_j\tau_{L(d)+k}}$ 是多项式 g_{σ_j} 中 $\tau_{L(d)+k}$ 的系数，对应于式 (5.1)。

注意，所有 e ntries $\xi_{k\,\ell}^{(r,d)}$ of $\mathcal{X}_r^{(d)}$均由 G_{d+1}中的多项式系数确定 .

注 5.2. 与 [13, 页中对边界预基的形式乘法矩阵的解释类似，齐次边界预基 G 的乘法矩阵可通过以下步骤构造。注意到 $\mathcal{O}_d$中各项的剩余类生成 $P_d/(G)_d$，我们将 $\langle\mathcal{O}_d\rangle$ 中的一个元素与不定元 x_r 相乘。每当 $x_r\tau_{L(d-1)+\ell} = \sigma_j$ 是一个边界项时，就用相应的边界多项式g_{σ_j} 对其进行约化，从而在 $P_{d+1}/(G)_{d+1}$ 中用生成它的 $\mathcal{O}_{d+1}$的剩余类表示它。因此，每个元素 $v = c_1\tau_{L(d-1)+1} + \cdots + c_{|\mathcal{O}_d|}\tau_{L(d)} \in \langle\mathcal{O}_d\rangle$ 都视为列向量 $(c_1,\dots,c_{|\mathcal{O}_d|})^{\mathrm{tr}} \in \mathbb{K}^{|\mathcal{O}_d|}$，而$x_r v$ 对应于 $\mathcal{X}_r^{(d)}(c_1,\dots,c_{|\mathcal{O}_d|})^{\mathrm{tr}}$。

例 5.3. 考虑例 4.1 中的序理想，按次数递增以下列方式排序：

$$\mathcal{O}_0 = \{\tau_1 = 1\},\quad \mathcal{O}_1 = \{\tau_2 = x,\, \tau_3 = y\},\quad \mathcal{O}_2 = \{\tau_4 = x^2,\, \tau_5 = xy,\, \tau_6 = y^2\},$$
$$\mathcal{O}_3 = \{\tau_7 = x^3,\, \tau_8 = x^2y,\, \tau_9 = xy^2,\, \tau_{10} = y^3\},\quad \mathcal{O}_4 = \{\tau_{11} = x^4,\, \tau_{12} = x^3y,\, \tau_{13} = x^2y^2\},$$
$$\mathcal{O}_d = \{\tau_{2d+4} = x^d,\, \tau_{2d+5} = x^{d-1}y\} \text{ for all } d \geq 5.$$

设 G 为(3.1)的 $\partial\mathcal{O}$-预基。在此情形下，对于 $d = 3,4$，G的形式乘法矩阵为：

$$\mathcal{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K}),$$
$$\mathcal{X}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{Y}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}),$$

其中 $\mathcal{X}^{(d)}$（相应地，$\mathcal{Y}^{(d)}$）是关于变量 x（相应地，y）的形式乘法矩阵。

引理 5.4. 设 G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基，且 $d_0 \geq 2$。下列陈述等价：

(i) 对每个 $0 \leq d \leq d_0$，$\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类构成$P_d/(G)_d$的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基；*(ii)* 对每个 $0 \leq d \leq d_0 - 2$，G 的分次形式乘法矩阵满足等式

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)} \quad \textit{for all } r,s \in \{0,\dots,n\}.$$

在此情形下，对于 $0 \leq d \leq d_0 - 1$，d-分次形式乘法矩阵表示乘法同态 $P_d/(G)_d \to P_{d+1}/(G)_{d+1}$（关于基 $\{\tau \mid \tau \in \mathcal{O}_d\}$与$\{\tau \mid \tau \in \mathcal{O}_{d+1}\}$）。

证明。(i)⇒(ii)：固定 $0 \leq d \leq d_0 - 2$。令 $\mathcal{X}_{(d)\,0},\dots,\mathcal{X}_n^{(d)}$为 G的 d分次形式乘法矩阵，并令 $\mathcal{X}_{(d+1)\,0},\dots,\mathcal{X}_n^{(d+1)}$为$(d+1)$分次的相应矩阵。根据假设，集合$\{\tau \mid \tau \in \mathcal{O}_d\} = \{\tau_{L(d-1)+1},\dots,\tau_{L(d)}\}$是 $P_d/(G)_d$的 $\mathbb{K}$-向量空间基，集合 $\{\tau \mid \tau \in$

$\mathcal{O}_{d+1}\} = \{\overline{\tau_{L(d)+1}}, \dots, \overline{\tau_{L(d+1)}}\}$是 $P_{d+1}/(G)_{d+1}$的 $\mathbb{K}$-向量空间基，而集合 $\{\tau \mid \tau \in \quad -$
$\mathcal{O}_{d+2}\} = \{\overline{\tau_{L(d+1)+1}}, \dots, \overline{\tau_{L(d+2)}}\}$是 $P_{d+2}/(G)_{d+2}$的 $\mathbb{K}$-向量空间基。因此，每个矩阵$\mathcal{X}_r^{(d)}$都定义了一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $\chi_r^{(d)}$: $P_d/(G)_d \to P_{d+1}/(G)_{d+1}$，即

$$\chi_r^{(d)}(\tau_{L(d-1)+1}) = \xi_{1\,1}^{(r,d)}\,\overline{\tau_{L(d)+1}} + \cdots + \xi_{|\mathcal{O}_{d+1}|\,1}^{(r,d)}\,\overline{\tau_{L(d+1)}}$$

$$\vdots$$

$$\chi_r^{(d)}(\tau_{L(d)}) = \xi_{1\,|\mathcal{O}_d|}^{(r,d)}\overline{\tau_{L(d)+1}} + \cdots + \xi_{|\mathcal{O}_{d+1}|\,|\mathcal{O}_d|}^{(r,d)}\,\overline{\tau_{L(d+1)}},$$

类似地，每个矩阵 $\mathcal{X}_r^{(d+1)}$定义了一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $\chi_r^{(d+1)}$: $P_{d+1}/(G)_{d+1} \to P_{d+2}/(G)_{d+2}$。根据（5.2）中条目 $\xi_{k\,\ell}^{(r,d)}$ 的定义，只会出现两种情况：乘积 $x_r\tau_{L(d-1)+\ell} \in \mathbb{T}_{d+1}$ 要么等于序理想 $\mathcal{O}$ 中的某个项 $\tau_{L(d)+i}$，要么等于边界 $\partial\mathcal{O}$中的某个项σ_j。在前一种情况下，我们有

$$\chi_r^{(d)}(\overline{\tau_{L(d-1)+\ell}}) = 0\,\overline{\tau_{L(d)+1}} + \cdots + 0\,\overline{\tau_{L(d)+i-1}} + 1\,\overline{\tau_{L(d)+i}} + 0\,\overline{\tau_{L(d)+i+1}} + \cdots + 0\,\overline{\tau_{L(d+1)}} =$$
$$= \overline{\tau_{L(d)+i}} = \overline{x_r\tau_{L(d-1)+\ell}},$$

而在后一种情况下，我们有

$$\chi_r^{(d)}(\overline{\tau_{L(d-1)+\ell}}) = c_{\sigma_j\tau_{L(d)+1}}\overline{\tau_{L(d)+1}} + \cdots + c_{\sigma_j\tau_{L(d+1)}}\overline{\tau_{L(d+1)}} = \overline{\sigma_j} = \overline{x_r\tau_{L(d-1)+\ell}}.$$

由此可知，同态 $\chi_r^{(d)}$: $P_d/(G)_d \to P_{d+1}/(G)_{d+1}$ 是乘以 x_r，同理，同态 $\chi_r^{(d+1)}$: $P_{d+1}/(G)_{d+1} \to P_{d+2}/(G)_{d+2}$ 是乘以 x_r。

现在，令 r，$s \in \{0, \dots, n\}$。矩阵 $\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_{(d)s}$ 和 $\mathcal{X}_{(d+1)s}\quad\mathcal{X}_{(d)r}$ 分别表示映射复合 $\chi_r^{(d+1)} \circ \chi_s^{(d)}$ 和 $\chi_s^{(d+1)} \circ \chi_r^{(d)}$。对于任意基元素 $\tau_{L(d-1)+\ell} \in P_d/(G)_d$，我们有——

$$\chi_r^{(d+1)}\big(\chi_s^{(d)}(\overline{\tau_{L(d-1)+\ell}})\big) = \chi_r^{(d+1)}(\overline{x_s\tau_{L(d-1)+\ell}}) = \chi_r^{(d+1)}\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{O}_{d+1}|}\xi_{k\,\ell}^{(s,d)}\overline{\tau_{L(d)+k}}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{|\mathcal{O}_{d+1}|}\xi_{k\,\ell}^{(s,d)}\chi_r^{(d+1)}(\overline{\tau_{L(d)+k}}) = \sum_{k=1}^{|\mathcal{O}_{d+1}|}\xi_{k\,\ell}^{(s,d)}\overline{x_r\tau_{L(d)+k}} =$$
$$= \overline{x_rx_s\tau_{L(d-1)+\ell}},$$

类似地

$$\chi_s^{(d+1)}\big(\chi_r^{(d)}(\overline{\tau_{L(d-1)+\ell}})\big) = \overline{x_sx_r\tau_{L(d-1)+\ell}}.$$

由于不定元可交换，即 $x_rx_s = x_sx_r$，两个结果相同。因此，由 $\mathbb{K}$-线性性可得 ，$\chi_r^{(d+1)} \circ \chi_s^{(d)} = \chi_s^{(d+1)} \circ \chi_r^{(d)}$ 因此，对所有 r，$s \in \{0, \dots, n\}$，都有 $\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_{(d)s} = \mathcal{X}_{(d+1)s}\quad\mathcal{X}_{(d)r}$。

(ii)⇒(i)：对于任意 $0 \le d \le d_0$，我们定义一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $\tilde{\Theta}^{(d)}$: $P_d \to \langle\mathcal{O}_d\rangle$: $f \mapsto \tilde{\Theta}^{(d)}(f)$，其定义为

$$\tilde{\Theta}^{(d)}(x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n}) = (\tau_{L(d-1)+1}, \dots, \tau_{L(d)})\prod_{k=0}^{n}\mathcal{X}_k^{(d-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-1)}\cdots\mathcal{X}_k^{(d-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-\alpha_k)}$$

对于每个 $x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}_d$，当 $d \ge 1$时，且 $\tilde{\Theta}^{(0)}(f) = f$。

映射 $\tilde{\Theta}^{(d)}$ 是良定义的。事实上，矩阵乘积 $\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}_k^{(d-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)}$ 属于$\mathcal{M}_{|\mathcal{O}_d|,|\mathcal{O}_0|}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{|\mathcal{O}_d|,1}(\mathbb{K})$，因此可以与行向量 $(\tau_{L(d-1)+1}, \dots, \tau_{L(d)})$ 相乘。此外，结果不依赖于乘积 $x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n}$中因子的排列顺序，因为根据假设，对于所有 $r, s \in \{0, \dots, n\}$ 和所有 $0 \le d \le d_0 - 2$，都有 $\mathcal{X}_{(d+1)r}\quad\mathcal{X}_{s}^{(d} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}^{)(d)r}$。此外，$\tilde{\Theta}^{(d)}$ 是满射：只需证明基元素 $\tau_{L(d-1)+1}, \dots, \tau_{L(d)}$

属于其像。为此，我们对次数 d 使用归纳法，并证明对于每个$\tau \in \mathcal{O}_d$，都有 $\tilde{\Theta}^{(d)}(\tau) = \tau$。令 $\mathcal{E}_\ell^{(d)}$表示一个大小为 $|\mathcal{O}_d| \times 1$的矩阵，其中第 ℓ个元素为 1，其余元素均为 0。在基础情形中，有 $\tilde{\Theta}^{(0)}(\tau_1) = \tilde{\Theta}^{(0)}(1) = 1 = \tau_1$。在归纳步骤中，取 $\tau_{L(d-1)+i} = x_r\tau_{L(d-2)+\ell} \in \mathcal{O}_d$ ，并假设根据归纳假设，$\tilde{\Theta}^{(d-1)}(\tau_{L(d-2)+\ell}) = \tau_{L(d-2)+\ell}$。那么，如果 $\tau_{L(d-2)+\ell} = x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n}$，根据 $\tilde{\Theta}^{(d-1)}$ 的定义，有$\prod_{k=0}^n\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}^{(d-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)\,k} = \mathcal{E}_\ell^{(d-1)}$。因此我们得到

$$\mathcal{X}_r^{(d-1)}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}_k^{(d-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)} = \mathcal{X}_r^{(d-1)}\mathcal{E}_\ell^{(d-1)} = (\xi_{1\,\ell}^{(r,d-1)},\dots,\xi_{|\mathcal{O}_d|\,\ell}^{(r,d-1)})^{\mathrm{tr}} = \mathcal{E}_i^{(d)}$$

由 $\mathcal{X}_r^{(d-1)}$ 与 $\tau_{L(d-1)+i}$ 的定义，从而

$$\tilde{\Theta}^{(d)}(\tau_{L(d-1)+i}) = (\tau_{L(d-1)+1},\dots,\tau_{L(d)})\,\mathcal{X}_r^{(d-1)}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}_k^{(d-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)} = \tau_{L(d-1)+i}.$$

由此我们得到 $\mathbb{K}$-向量空间的诱导同构 $\Theta^{(d)}$: $P_d/\ker\tilde{\Theta}^{(d)} \to \langle\mathcal{O}_d\rangle$。特别地，剩余类 $\tau_{L(d-1)+1}+\ker\tilde{\Theta}^{(d)},\dots,\tau_{L(d)}+\ker\tilde{\Theta}^{(d)}$ 是 $\mathbb{K}$-线性无关的。接下来我们证明 $(G)_d \subseteq \ker\tilde{\Theta}^{(d)}$。设 $\sigma = x_r\tau_{L(d'-2)+s} \in \partial\mathcal{O}_{d'}$，其中 $\tau_{L(d'-2)+s} = x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{O}_{d'-1}$，且 $f = \sum_{m=1}^u c_m x_0^{\alpha'_{m0}}\cdots x_n^{\alpha'_{mn}} \in P_{d-d'}$ 满足 $\deg(fg_\sigma) = d$。对每个 $\ell = 1,\dots,|\mathcal{O}_{d'}|$，定义 $\tau_{L(d'-1)+\ell} = x_0^{\alpha_{\ell 0}}\cdots x_n^{\alpha_{\ell n}}$。于是我们有

$$\tilde{\Theta}^{(d)}(fg_\sigma) = (\tau_{L(d-1)+1},\dots,\tau_{L(d)})\sum_{m=1}^{u}c_m\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha'_{mk}}\mathcal{X}_k^{(d-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha'_{mi}-j)}. \tag{5.3}$$

$$\cdot\left(\mathcal{X}_r^{(d'-1)}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}_k^{(d'-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)} - \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{O}_{d'}|}c_{\sigma\tau_{L(d'-1)+\ell}}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_{\ell k}}\mathcal{X}_k^{(d'-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{ik}-j)}\right)$$

因此，只需证明括号中的部分等于零。如上所示，我们有 $\tilde{\Theta}^{(d'-1)}(\tau_{L(d'-2)+s}) = \tau_{L(d'-2)+s}$，因此 $\prod_{k=0}^n\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}^{(d'-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)}{}_k = \mathcal{E}_s^{(d'-1)}$，且$\tilde{\Theta}^{(d')}(\tau_{L(d'-1)+\ell}) = \tau_{L(d'-1)+\ell}$，因此 $\prod_{k=0}^n\prod_{j=0}^{\alpha_{\ell k}}\mathcal{X}^{(d'-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{ik}-j)}{}_k = \mathcal{E}_\ell^{(d')}$。由此可得

$$\mathcal{X}_r^{(d'-1)}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\mathcal{X}_k^{(d'-1-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-j)} = \mathcal{X}_r^{(d'-1)}\mathcal{E}_s^{(d'-1)} = (c_{\sigma\tau_{L(d'-1)+1}},\dots,c_{\sigma\tau_{L(d')}})^{\mathrm{tr}}$$

and

$$\sum_{\ell=1}^{|\mathcal{O}_{d'}|}c_{\sigma\tau_{L(d'-1)+\ell}}\prod_{k=0}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha_{\ell k}}\mathcal{X}_k^{(d'-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{ik}-j)} = \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{O}_{d'}|}c_{\sigma\tau_{L(d'-1)+\ell}}\mathcal{E}_\ell^{(d')} = (c_{\sigma\tau_{L(d'-1)+1}},\dots,c_{\sigma\tau_{L(d')}})^{\mathrm{tr}}.$$

由于这两个表达式相同，(5.3) 中括号内的部分为零。因此，对于满足 $\deg(fg_\sigma) = d$ 的每个 $g_\sigma \in G, f \in P$，我们得到 $fg_\sigma \in \ker\tilde{\Theta}^{(d)}$，从而$(G)_d \subseteq \ker\tilde{\Theta}^{(d)}$，如所求。

因此，存在一个自然的 $\mathbb{K}$ 向量空间满同态 Ψ: $P_d/(G)_d \twoheadrightarrow P_d/\ker\tilde{\Theta}^{(d)}$。由于集合 $\{\tau_{L(d-1)+1}+(G)_d,\dots,\tau_{L(d)}+(G)_d\}$ 生成了 $\mathbb{K}$-向量空间 $P_d/(G)_d$，且集合 $\{\tau_{L(d-1)+1}+\ker\tilde{\Theta}^{(d)},\dots,\tau_{L(d)}+\ker\tilde{\Theta}^{(d)}\}$ 是 $\mathbb{K}$-线性无关的，因此这两个集合都是基，并且 $(G)_d = \ker\tilde{\Theta}^{(d)}$。这表明， $\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类构成了 $P_d/(G)_d$的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基。□

根据引理 5.4，我们得到以下结果，它推广了关于经典边界基的著名刻画 [13, 命题 16]。

定理 5.5 (**用形式乘法矩阵刻画**). 设 G为齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。下列陈述等价：

(i) G 是齐次 $\partial\mathcal{O}$-基；*(ii)* 对于
每个 $d \geq 0$， G 的分次形式乘法矩阵满足等式

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)}$$

对所有 r、 $s \in \{0, \ldots, n\}$。

证明。 由定理 4.8，只需证明第(ii)项等价于定理 4.8 的第(ii)项。由引理 5.4，此结论立即可得。□

例 5.6。 回顾例 5.3。 G的 3 次与 4 次分次形式乘法矩阵之间的条件 $\mathcal{X}_{(4)}\mathcal{Y}^{(3)} = \mathcal{Y}^{(4)}\mathcal{X}^{(3)}$ 不成立：

$$\mathcal{X}^{(4)}\mathcal{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{Y}^{(4)}\mathcal{X}^{(3)}.$$

因此， G 不是边界基，这一点已在例 4.1 中证实。

为了验证 G是否为边界基，只需从充分大的次数 d开始检查定理 5.5 中的条件。事实上，对于较小的次数，分次乘法矩阵由序理想 $\mathcal{O}$ 唯一确定，并且不依赖于 G 的选择。

如果 S 是一组齐次多项式，我们用 mindeg(S) 表示 S 中多项式次数的最小值。

推论 5.7。 设 G 是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。以下陈述等价：

(i) G是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基；*(ii)* 对于任意 $d < \text{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1$， G 的分次形式乘法矩阵满足

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)} \quad \textit{for all } 0 \leq r < s \leq n.$$

证明。只需证明，对于次数 $d < \text{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1$，条件 $\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)}$对每个 $\ell = 1, \ldots, |\mathcal{O}_d|$ 都自动成立。
设定 $0 \leq d < \text{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1$，并固定 $\tau_{L(d-1)+\ell} \in \mathcal{O}_d$。可能出现两种情况：

情况 1：

$\tau_{L(d)+j}$	$\tau_{L(d+1)+k}$
$\tau_{L(d-1)+\ell}$	$\tau_{L(d)+i}$

$x_r x_s \tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d+1)+k} \in \mathcal{O}$ 且 , $x_s\tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d)+j} \in \mathcal{O}$。 Th
$x_r\tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d)+i} \in \mathcal{O}$

have

我们

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)} = \mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{E}_j^{(d+1)} = \mathcal{E}_k^{(d+2)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{E}_i^{(d+1)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)},$$

即 根据形式乘法矩阵的定义，所需条件成立。

情况 2：

$\tau_{L(d)+j}$	σ_k
$\tau_{L(d-1)+\ell}$	$\tau_{L(d)+i}$

$x_r x_s \tau_{L(d-1)+\ell} = \sigma_k \in \partial\mathcal{O}$
$x_r\tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d)+i} \in \mathcal{O}$且， $x_s\tau_{L(d-1)+\ell} = \tau_{L(d)+j} \in \mathcal{O}$。

注意，在此情况下 $d = \text{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 2$。我们有

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)} = \mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{E}_j^{(d+1)} = (c_{\sigma_k\tau_{L(d+1)+1}}, \ldots, c_{\sigma_k\tau_{L(d+2)}})^{\text{tr}} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{E}_i^{(d+1)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)}\mathcal{E}_\ell^{(d)}.$$

同样，所需条件可由形式乘法矩阵的定义立即得出。

由此我们得出，对于任意 $d < \text{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1$，条件 $\mathcal{X}_{(d+1)\,r}\mathcal{X}_{s}^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_{(d)\,r}$始终成立。□

现在我们给出一个例子，其中一个预基确实是边界基。

例5.8. 考虑按例 5.3 中的顺序排列的例 4.1 的序理想 $\mathcal{O}$，并考虑另一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基 G':

$$g'_{y^4} = y^4 + x^3y, \quad g'_{xy^3} = xy^3 + x^4, \quad g'_{x^2y^3} = x^2y^3 + x^5,$$
$$g'_{x^3y^2} = x^3y^2 + x^5 - x^4y, \quad g'_{x^ky^2} = x^ky^2 - x^{k+1}y + x^{k+2} \text{ for } k \geq 4.$$

于是，利用上述多项式，对于 $d \geq \mathsf{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1 = 3$，我们得到以下 d-分次形式乘法矩阵:

$$\mathcal{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K});$$
$$\mathcal{X}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{Y}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K});$$
$$\mathcal{X}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{Y}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K}) \quad \text{for } \ell \geq 5.$$

在这种情况下，我们有

$$\mathcal{X}^{(4)}\mathcal{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathcal{Y}^{(4)}\mathcal{X}^{(3)},$$
$$\mathcal{X}^{(5)}\mathcal{Y}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{Y}^{(5)}\mathcal{X}^{(4)},$$

并且，对于每个 $\ell \geq 5$，关系 $\mathcal{X}^{(\ell+1)}\mathcal{Y}^{(\ell)} = \mathcal{Y}^{(\ell+1)}\mathcal{X}_{(\ell)}$ 始终成立。因此，根据推论 5.7，G' 是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基。

6. 边界基的有限个条件

定理 5.5 给出的边界基刻画缺乏有效性，因为必须对所有 $d \geq 0$ 检验条件 (ii)。

在例5.8 中，对于 $d > 4$，形式矩阵总是可交换的，因为其中一个是单位矩阵。一般来说，情况并非如此。事实上，如果我们考虑 Krull维数为 > 1 的理想，对于$d \gg 0$，我们构造的形式矩阵不是方阵。

例6.1。 在特征为 $= 0$ 的多项式环 $P = \mathbb{K}[x, y, z]$ 中，考虑序理想$\mathcal{O} = \mathbb{T}(x) \cup \mathbb{T}(y, z)$，其边界为 $\partial\mathcal{O} = (y \cdot \mathbb{T}(x) \setminus \{y\}) \cup (z \cdot \mathbb{T}(x) \setminus \{z\}) \cup (x \cdot \mathbb{T}(y, z) \setminus \{x\})$。对于每个 $d \geq 1$，形式乘法矩阵有 $|\mathcal{O}_{d+1}| = d + 3$ 行和 $|\mathcal{O}_d| = d + 2$ 列，因此它们绝不是方阵。

实际上，由于我们处理的是诺特多项式环 P 中的齐次理想，因此证明只需对有限个值 d检验定理 5.5 的条件 (ii) 就相当简单。

我们回顾一下，对于每个齐次理想 $J \subseteq P$，希尔伯特函数 的 P/J 为 $H_{P/J}\colon \ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得 $H_{P/J}(t)$ 是 P_t/J_t 作为 $\mathbb{K}$-向量空间的维数。

定义6.2. [7, 第4章，第 55] 页齐次理想 $J \subseteq P$的（*Castelnuovo-Mumford*）正则性，记为$\mathsf{reg}(J)$，是最小的 m，使得 J在次数 $\leq m$生成，并且 J的第k个子午模对 $k = 1, \ldots\ldots, \ n + 1$在次数 $\leq m + k$ 生成。我们称 J是d-正则，如果$\mathsf{reg}(J) \leq d$。

定义6.3. [9, 定义3.2] 给定 a, $d \in \mathbb{N}$, a 的第 d个*Macaulay* 表示是唯一的表达式

$$a = \binom{k_d}{d} + \binom{k_{d-1}}{d-1} + \cdots + \binom{k_\delta}{\delta},$$

其中 $\delta \in \mathbb{Z}$, 满足 $k_d > \cdots > k_\delta \geq \delta > 0$（约定：当 $a < b$ 时 $\binom{a}{b} = 0$）。给定这一表示, d阶 *Macaulay* 变换的 a 为

$$a^{\langle d \rangle} = \binom{k_d + 1}{d+1} + \binom{k_{d-1} + 1}{d} + \cdots + \binom{k_\delta + 1}{\delta + 1}.$$

理想 J 的正则性概念，以及$H_{P/J}(t)$的 Macaulay 表示和变换（对某个适当的 t），通过以下定理相关联。我们按照 [24,定理 3.10] 和 [4, 推论 4.2.14、定理 4.3.3], 给出其表述，但另请参见 [8], [9, 定理 3.8 和 3.11], 其中给出了关于饱和理想的经典表述。

定理 6.4。设 J 是 P 中的齐次理想。令 $h_i = H_{P/J}(i)$，其中 $i \geq 0$。令 t 满足$h_{t+1} = h_t^{\langle t \rangle}$，并假设 J 由次数 $\leq t+1$ 中的元素生成。则：

(i)（*Gotzmann* 持续性定理） $h_{i+1} = h_i^{\langle i \rangle}$ 对每个 $i \geq t$都成立；*(ii)*（*Gotzmann* 正则性定理）$\operatorname{reg}(J) \leq t$。

现在我们可以给出一个有效判据，用来检验边界预基是否为基。我们提醒， $H_{P/(\partial\mathcal{O})}(d) = |\mathcal{O}_d|, \forall d \geq 0$。

定理 6.5。设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想，且 G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。对 $i \geq 0$，令 $h_i = H_{P/(\partial\mathcal{O})}(i)$。设 t 满足 $h_{t+1} = h_t^{\langle t \rangle}$，并假设 $(\partial\mathcal{O})$ 和 (G) 均由次数$\leq t+1$生成。以下陈述等价：

(i) G是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基；

(ii) 对每个 $0 \leq d \leq t-1$, G 的分次形式乘法矩阵满足等式

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)} \quad \textit{for all } r, s \in \{0, \ldots, n\}.$$

证明。(i)⇒(ii)：由于 G 是齐次 $\partial\mathcal{O}$-基，定理 5.5.(ii) 对每一个 $d \geq$成立 $0.$
(ii)⇒(i)：根据假设，对每一个 $0 \leq d \leq t+1$，$\mathcal{O}_d$ 中元素的剩余类依引理 5.4 构成 $P_d/(G)_d$ 的 $\mathbb{K}$-向量空间基。

因此，对每一个 $0 \leq d \leq t+1$，我们有 $H_{P/(G)}(d) = H_{P/(\partial\mathcal{O})}(d) = |\mathcal{O}_d|$。特别地，由定理 6.4.(ii)，reg((∂O)) 与 reg((G)) 均为 $\leq t$；此外，这些理想都在次数 $\leq t$上生成。由定理 6.4.(i), 对每一个 $d \geq t$，我们有 $H_{P/(G)}(d) = |\mathcal{O}_d|$。由于 G 是齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基（推论 3.20），故对每一个 $d \geq 0$, $\mathcal{O}_d$ 的剩余类是 $P_d/(G)_d$ 的生成元系，从而对每一个 $d \geq 0$, $\mathcal{O}_d$ 的剩余类是$P_d/(G)_d$ 的基。

□

利用推论 5.7 和引理 5.4，我们可以按如下方式改进定理 6.5。

推论 6.6. 设 $\mathcal{O}$ 为一个序理想，且 G 为一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-预基。对 $i \geq 0$ 令 $h_i = H_{P/(\partial\mathcal{O})}(i)$。设 t 满足 $h_{t+1} = h_t^{\langle t \rangle}$，并假设 $(\partial\mathcal{O})$ 与 (G) 均在次数$\leq t+1$中生成。下列陈述等价：

(i) G是一个齐次 $\partial\mathcal{O}$-基；*(ii)* 对每个$\operatorname{mindeg}(\partial\mathcal{O}) - 1 \leq d \leq t-1$, G 的分次形式乘法矩阵满足等式

$$\mathcal{X}_r^{(d+1)}\mathcal{X}_s^{(d)} = \mathcal{X}_s^{(d+1)}\mathcal{X}_r^{(d)} \quad \textit{for all } 0 \leq r < s \leq n;$$

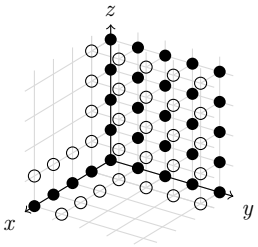
(iii) 对每个$\mathrm{mindeg}(\partial\mathcal{O})+1 \le d \le t+1$，$\mathcal{O}_d$ 的剩余类构成 $P_d/(G)_d$的一个 $\mathbb{K}$-向量空间基。

我们用最后一个例子来说明定理 6.5 的应用。

例 6.7。 在多项式环 $K[x,y,z]$ 中，考虑序理想 $\mathcal{O} = \mathbb{T}(x) \cup \mathbb{T}(y,\ z)$。 $\mathcal{O}$ 的边界为

$$\partial\mathcal{O}_0 = \partial\mathcal{O}_1 = \emptyset, \quad \partial\mathcal{O}_\ell = \{x^{\ell-1}y, x^{\ell-1}z\} \cup x\cdot\mathbb{T}(y,z)_{\ell-1}\ \forall \ell \ge 2.$$

下图展示了这一情形。图中的点 $(r,\ s,\ t)$ 对应于项 $x^r y^s z^t$。



我们有 $(\partial\mathcal{O}) = (xy,\ xz)$。令 G 为一个 $\partial\mathcal{O}$-预基。我们将 G 中多项式的系数视为参数，并通过施加一些多项式方程来要求 G 是一个 $\partial\mathcal{O}$-基。根据定理 6.4 和 5.5，我们只需构造 $d=1,\ 2$ 的形式乘法矩阵（同时使用推论 5.7）。这些乘法矩阵涉及 G_2 和 G_3 中多项式的系数，即

$$\begin{aligned}
G_2 = \{&xy + c_{2,1,1}x^2 + c_{2,1,2}y^2 + c_{2,1,3}yz + c_{2,1,4}z^2,\ xz + c_{2,2,1}x^2 + c_{2,2,2}y^2 + c_{2,2,3}yz + c_{2,2,4}z^2\}\\
G_3 = \{&x^2y + c_{3,1,1}x^3 + c_{3,1,2}y^3 + c_{3,1,3}y^2z + c_{3,1,4}yz^2 + c_{3,1,5}z^3,\\
&x^2z + c_{3,2,1}x^3 + c_{3,2,2}y^3 + c_{3,2,3}y^2z + c_{3,2,4}yz^2 + c_{3,2,5}z^3,\\
&xy^2 + c_{3,3,1}x^3 + c_{3,3,2}y^3 + c_{3,3,3}y^2z + c_{3,3,4}yz^2 + c_{3,3,5}z^3,\\
&xz^2 + c_{3,4,1}x^3 + c_{3,4,2}y^3 + c_{3,4,3}y^2z + c_{3,4,4}yz^2 + c_{3,4,5}z^3,\\
&xyz + c_{3,5,1}x^3 + c_{3,5,2}y^3 + c_{3,5,3}y^2z + c_{3,5,4}yz^2 + c_{3,5,5}z^3\}
\end{aligned}$$

其中 $c_{i,\ j,\ k} \in \mathbb{K}$。我们将关于变量 x、 y、 z 的形式乘法矩阵记为 $\mathcal{X}^{(d)}$、 $\mathcal{Y}^{(d)}$、 $\mathcal{Z}^{(d)}$ 。对于 $d=1,\ 2$，我们有:

$$\mathcal{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -c_{2,1,1} & -c_{2,2,1}\\ 0 & -c_{2,1,2} & -c_{2,2,2}\\ 0 & -c_{2,1,3} & -c_{2,2,3}\\ 0 & -c_{2,1,4} & -c_{2,2,4}\end{bmatrix},\ \mathcal{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -c_{3,3,1} & -c_{3,5,1} & -c_{3,4,1}\\ 0 & -c_{3,3,2} & -c_{3,5,2} & -c_{3,4,2}\\ 0 & -c_{3,3,3} & -c_{3,5,3} & -c_{3,4,3}\\ 0 & -c_{3,3,4} & -c_{3,5,4} & -c_{3,4,4}\\ 0 & -c_{3,3,5} & -c_{3,5,5} & -c_{3,4,5}\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} -c_{2,1,1} & 0 & 0\\ -c_{2,1,2} & 1 & 0\\ -c_{2,1,3} & 0 & 1\\ -c_{2,1,4} & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathcal{Y}^{(2)} = \begin{bmatrix} -c_{3,1,1} & 0 & 0 & 0\\ -c_{3,1,2} & 1 & 0 & 0\\ -c_{3,1,3} & 0 & 1 & 0\\ -c_{3,1,4} & 0 & 0 & 1\\ -c_{3,1,5} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \begin{bmatrix} -c_{2,2,1} & 0 & 0\\ -c_{2,2,2} & 0 & 0\\ -c_{2,2,3} & 1 & 0\\ -c_{2,2,4} & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathcal{Z}^{(2)} = \begin{bmatrix} -c_{3,2,1} & 0 & 0 & 0\\ -c_{3,2,2} & 0 & 0 & 0\\ -c_{3,2,3} & 1 & 0 & 0\\ -c_{3,2,4} & 0 & 1 & 0\\ -c_{3,2,5} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

其中矩阵按照 $\mathcal{O}_d$ 的项来书写，对于 $d=1,\ 2,\ 3$，按以下方式排序:

$$\mathcal{O}_0=\{\tau_1=1\},\quad \mathcal{O}_1=\{\tau_2=x,\tau_3=y,\tau_4=z\},\quad \mathcal{O}_2=\{\tau_5=x^2,\tau_6=y^2,\tau_7=yz,\tau_8=z^2\},$$
$$\mathcal{O}_3=\{\tau_9=x^3,\tau_{10}=y^3,\tau_{11}=y^2z,\tau_{12}=yz^2,\tau_{13}=z^3\}.$$

通过对定理 6.5 的形式乘法矩阵之积施加交换性条件，并要求 (G) 在次数 ≤ 3 生成，我们得到: 预基 G 是 $\partial\mathcal{O}$-基，仅当 G_2 与 G_3 的系数满足下列方程:

$$c_{2,1,1}c_{3,1,1}+c_{3,3,1}=0,\quad c_{2,1,1}c_{3,1,5}+c_{3,3,5}=0,\quad c_{2,1,1}c_{3,2,1}+c_{3,5,1}=0,c_{2,1,1}c_{3,2,2}+c_{3,5,2}=0,$$
$$c_{2,2,1}c_{3,1,1}+c_{3,5,1}=0,\quad c_{2,2,1}c_{3,1,5}+c_{3,5,5}=0,c_{2,2,1}c_{3,2,1}+c_{3,4,1}=0,\quad c_{2,2,1}c_{3,2,2}+c_{3,4,2}=0,$$
$$-c_{2,1,1}c_{3,2,1}+c_{2,2,1}c_{3,1,1}=0,c_{2,1,1}c_{3,1,2}-c_{2,1,2}+c_{3,3,2}=0,\quad c_{2,1,1}c_{3,2,3}-c_{2,1,2}+c_{3,5,3}=0,$$
$$c_{2,1,1}c_{3,1,3}-c_{2,1,3}+c_{3,3,3}=0,c_{2,1,1}c_{3,2,4}-c_{2,1,3}+c_{3,5,4}=0,\quad c_{2,1,1}c_{3,1,4}-c_{2,1,4}+c_{3,3,4}=0,$$
$$c_{2,1,1}c_{3,2,5}-c_{2,1,4}+c_{3,5,5}=0,c_{2,2,1}c_{3,1,2}-c_{2,2,2}+c_{3,5,2}=0,\quad c_{2,2,1}c_{3,2,3}-c_{2,2,2}+c_{3,4,3}=0,$$
$$c_{2,2,1}c_{3,1,3}-c_{2,2,3}+c_{3,5,3}=0,c_{2,2,1}c_{3,2,4}-c_{2,2,3}+c_{3,4,4}=0,\quad c_{2,2,1}c_{3,1,4}-c_{2,2,4}+c_{3,5,4}=0,$$
$$c_{2,2,1}c_{3,2,5}-c_{2,2,4}+c_{3,4,5}=0,-c_{2,1,1}c_{3,2,5}+c_{2,2,1}c_{3,1,5}+c_{2,1,4}=0,\quad -c_{2,1,1}c_{3,2,2}+c_{2,2,1}c_{3,1,2}-c_{2,2,2}=0,-c_{2,1,1}c_{3,2,3}+c_{2,2,1}c_{3,1,3}+c_{2,1,2}-c_{2,2,3}=0,\quad -c_{2,1,1}c_{3,2,4}+c_{2,2,1}c_{3,1,4}+c_{2,1,3}-c_{2,2,4}=0,$$

$$\begin{aligned}
-c_{2,1,2}c_{3,3,2}-c_{2,1,3}c_{3,5,2}-c_{2,1,4}c_{3,4,2}-c_{3,1,2}&=0,\\
-c_{2,1,2}c_{3,3,3}-c_{2,1,3}c_{3,5,3}-c_{2,1,4}c_{3,4,3}-c_{3,1,3}&=0,\\
-c_{2,1,2}c_{3,3,4}-c_{2,1,3}c_{3,5,4}-c_{2,1,4}c_{3,4,4}-c_{3,1,4}&=0,\\
-c_{2,1,2}c_{3,3,5}-c_{2,1,3}c_{3,5,5}-c_{2,1,4}c_{3,4,5}-c_{3,1,5}&=0,\\
-c_{2,2,2}c_{3,3,2}-c_{2,2,3}c_{3,5,2}-c_{2,2,4}c_{3,4,2}-c_{3,2,2}&=0,\\
-c_{2,2,2}c_{3,3,3}-c_{2,2,3}c_{3,5,3}-c_{2,2,4}c_{3,4,3}-c_{3,2,3}&=0,\\
-c_{2,2,2}c_{3,3,4}-c_{2,2,3}c_{3,5,4}-c_{2,2,4}c_{3,4,4}-c_{3,2,4}&=0,\\
-c_{2,2,2}c_{3,3,5}-c_{2,2,3}c_{3,5,5}-c_{2,2,4}c_{3,4,5}-c_{3,2,5}&=0,\\
-c_{2,1,2}c_{3,3,1}-c_{2,1,3}c_{3,5,1}-c_{2,1,4}c_{3,4,1}+c_{2,1,1}-c_{3,1,1}&=0,\\
-c_{2,2,2}c_{3,3,1}-c_{2,2,3}c_{3,5,1}-c_{2,2,4}c_{3,4,1}+c_{2,2,1}-c_{3,2,1}&=0.
\end{aligned}\tag{6.1}$$

具有 $\partial\mathcal{O}$-基的理想族在此情形下由(6.1)中给出的方程所参数化。事实上，我们观察到，一般而言，一旦考虑 $G_{\mathrm{mindeg}(\partial\mathcal{O})},\cdots,G_{t+1}$的系数取值，使其满足定理6.5,(ii)的方程（在当前情形下即为方程(6.1)），则由$\bigcup_{i=\ \mathrm{mindeg}(\partial\mathcal{O})}^{t+1}G_i$ 生成的理想 J 具有边界基 G，这是通过对 $d\geq t+1$施加条件 $G_d\subseteq J$而得到的。由命题4.5可知，J 的这一边界基是唯一的。我们可以显式计算 G_d中多项式的系数，例如采用迭代方法，通过求解由形式乘法矩阵在次数从 $t+1$ 到 d上的交换性所产生的线性方程组。

例如，对于以下 G_2中多项式系数的取值

$$c_{2,1,1}=c_{2,1,4}=c_{2,2,1}=c_{2,2,2}=0,\ c_{2,1,2}=c_{2,2,3},\ c_{2,1,3}=c_{2,2,4},\tag{6.2}$$

将 (6.2) 代入后，通过求解 (6.1) 中的线性方程组，我们得到 G_3 的系数取值：

$$
\begin{gathered}
c_{3,1,1}=0,\quad c_{3,1,2}=-c_{2,2,3}^2,\quad c_{3,1,3}=-2c_{2,2,3}c_{2,2,4},\quad c_{3,1,4}=-c_{2,2,4}^2,\quad c_{3,1,5}=0,\\
c_{3,2,1}=0,\quad c_{3,2,2}=0,\quad c_{3,2,3}=-c_{2,2,3}^2,\quad c_{3,2,4}=-2c_{2,2,3}c_{2,2,4},\quad c_{3,2,5}=-c_{2,2,4}^2,\\
c_{3,3,1}=0,\quad c_{3,3,2}=c_{2,2,3},\quad c_{3,3,3}=c_{2,2,4},\quad c_{3,3,4}=0,\quad c_{3,3,5}=0,\\
c_{3,4,1}=0,\quad c_{3,4,2}=0,\quad c_{3,4,3}=0,\quad c_{3,4,4}=c_{2,2,3},\quad c_{3,4,5}=c_{2,2,4},\\
c_{3,5,1}=0,\quad c_{3,5,2}=0,\quad c_{3,5,3}=c_{2,2,3},\quad c_{3,5,4}=c_{2,2,4},\quad c_{3,5,5}=0.
\end{gathered}
$$

7. 未来发展

尽管有限序理想上的边界基具有众所周知的优势，但在非齐次框架下，它们仅适用于 Krull 维数为 0 的理想。本文提出了无限序理想上的齐次边界基的概念，并将文献中关于经典边界基的若干刻画（定理 4.8 和 5.5）调整并推广到了这一新框架。

未来研究的一个自然方向是，进一步考察经典边界基的其他一些刻画（例如 S-多项式的约化、合冲的提升），并将其推广到齐次边界基。此外，研究数值稳定性及其在希尔伯特概形研究中的潜在应用也颇有价值，正如零维情形中所做的那样。事实上，我们认为，已经证明的齐次边界基刻画将有助于参数化具有同一序理想上的边界基的理想族；并且我们预期，在一些适当的假设下，这些理想族会嵌入希尔伯特概形的一个开子集中，从而为探索这一神秘几何对象的特征提供一种新工具。

致谢

第一作者是 INdAM 研究组 GNSAGA 的成员。

参考文献

1. John Abbott、Claudia Fassino 和 Maria-Laura Torrente，《点理想的稳定边界基》，J. Symbolic Co mput. **43** (2008)，第 12 期，883–894。2. Cristina Bertone 和 Francesca Cioffi，《边界基与 *Pommaret* 标记基之间的密切关系》，《数学集刊》**73** (2022)，第 2 期，181–201。3. Cristina Bertone、Francesca Cioffi、Matthias Orth 和 Werner M. Seiler，《标记基给出的 *Cohen-Macaulay*、*Gorenstein* 和完全交条件》，Journal of Algebra **692** (2026)，550–581。4. Winfried Bruns 和 Jürgen Herzog，《*Cohen-Macaulay*环》，《剑桥高等数学研究丛书》第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。5. Michela Ceria、Teo Mora 和 Margherita Roggero，《诺特良序多项式约化的一般框架》，Journal of Symbolic Computation **95** (2019)，100–133。6. Yufu Chen 和 Xiaohui Meng，《正维多项式理想的边界基》，2007 年符号-数值计算国际研讨会论文集（美国纽约州纽约市），SNC '07，美国计算机协会，2007 年，第 65–71 页。7. David Eisenbud，《合冲几何》，《数学研究生教材》第 229 卷，施普林格出版社，纽约，2005，交换代数与代数几何进阶课程。8. Gerd Gotzmann，《关于分次环的平坦性与希尔伯特多项式的一个条件》，Math. Z. **158** (1978)，第 1 期，61–70。9. Mark L. Green，《一般初理想》，《交换代数六讲》（Bellaterra，1996），Progr. Math.，第 166 卷，Birkhäuser，巴塞尔，1998 年，第 119–186 页。10. Mark E. Huibregtse，《边界基概形理想生成元的一些合冲》，《数学集刊》**62** (2011)，第 3 期，341–366。11.，《点的希尔伯特概形的一些初等分支》，Rocky Mountain J. Math. **47** 4, 1169 2017 1225 ( ), no. – 。

12., 《点的希尔伯特概形的更多初等分支》，Rocky Mountain J. Math. **53** 6, 1865 2023 1888 4682747 ( ), no. – 。MR 13. Achim Kehrein 和 Martin Kreuzer，《边界基的刻画》，纯粹与应用代数杂志**196** (2005)，第 2 期，251–270。14. Achim Kehrein、Martin Kreuzer 和 Lorenzo Robbiano，《代数学家视角下的边界基》，《多项式方程求解》，《数学中的算法与计算》第 14 卷，施普林格，柏林，2005 年，第 169–202 页。15. Martin Kreuzer 和 Lorenzo Robbiano，《计算交换代数 *2*》，施普林格，柏林/海德堡，2005。16.，《边界基的变形》，《数学集刊》**59** (2008)，第 3 期，275–297。17 2776440 18**215** 2011 8, 2005 2018**3** 2011 .，《边界基的几何》，J. Pure Appl. Algebra (), 第 – 期。MR . Mathias Lederer，《点的希尔伯特概形中的格罗布纳分层》，《交换代数杂志》( )，第 3 期，349–404。19. Maria Grazia Marinari、H. Michael Möller 和 Teo Mora，《由对偶基给出的理想的格罗布纳基》，1991 年国际符号与代数计算研讨会论文集，1991 年，第 55–63 页。20.，《由泛函定义的理想的格罗布纳基及其在射影点理想中的应用》，《工程、通信与计算中的应用代数》**4** (1993)，第 2 期，103–145。21. H. Michael Möller 和 Hans J. Stetter，《通过矩阵特征值问题求解具有重零点的多元多项式方程》，Numer. Math. **70** (1995)，第 3 期，311–329。22. Bernard Mourrain，《标准形算法的新判据》，应用代数、代数算法与纠错码国际研讨会（柏林/海德堡），施普林格，1999 年，第 430–442 页。23. Bernard Mourrain 和 Philippe Trébuchet，《广义标准形与多项式系统求解》，ISSAC'05，美国计算机协会，纽约，2005，2280555 24 253 260页。MR 。，《一般商代数的边界基表示》，ISSAC 2012——第 37 届国际符号与代数计算研讨会论文集，美国计算机协会，纽约，2012 年，第 265–272 页。25. Alyson Reeves 和 Bernd Sturmfels，《关于多项式约化的注记》，J. Symbolic Comput. **16** 3, 273 1993 277 ( )，第 – 期。26. Carlos Rodriguez 和 Anna-Laura Sattelberger，《有理韦尔代数中的边界基》，2025。27. Hans J. Stetter，《数值多项式代数》，工业与应用数学学会，费城，2004。

都灵大学"G. Peano"数学系电子邮件地址: cristina.bertone@unito.it网址: https://sites.google.com/view/cristinabertone/

都灵大学分子生物技术与健康科学系电子邮件地址: sofia.bovero@edu.unito.it