arXiv:2603.06156v1 [math.NT] 6 Mar 2026

由数域上的酉群构造拉马努金复形

RAHUL DALAL、ALBERTO M´INGUEZ 和 JIAND I ZOU

Abstract. 本文构造了新的拉马努金复形族，其局部结构不同于所有已知的例子。我们的方法基于数域上的酉群，更具体地说，是基于我们称为 *super-definite unitary groups* 的群——它们是在某个有限处模其中心各向异性的定酉群。这些群自然地作为带有第二类对合的中心可除代数的单位群出现。

我们的第一个主要结果给出了一个一般性构造：对全实数域上的超定酉群 G 及一个有限处 v_0，构造与之相关的无穷拉马努金复形族。所得复形的结构由 v_0 处 Bruhat–Tits 建筑的类型决定。在分裂情形 v_0 下，该构造包含类型为 A_n 的新例子；在非分裂情形下，则得到类型为 ${}^2A'_n$、${}^2A''_n$（其中 n 为偶数）、B-C_n、${}^2B$-C_n 和 C-BC_n 的新颖复形族。这一构造对所有秩均适用。

由于构造扩张复形的大部分动机来自计算机科学，我们在本文后半部分研究该构造的算法显式性，并给出一个秩 5 的例子，其中该构造变得完全显式。特别地，这个例子为实李群 PU(5) 给出了 *golden gates*。

Contents

1. 引言 2
1.1. 背景与动机 1.2. 我们的贡献 1.3. 致谢 1.4. 记号 2 3 6 6

第一部分. 一般理论 8 2. 背景材料 8 2.1. 复形与建筑 8 2.2. 拉马努金复形 11 3. 复形的抽象构造 12 3.1. 与自守谱的关系 12 3.2. 超定酉群 13 3.3. 由酉群构造复形 13 3.4. 结构 15 4. 复形的显式构造 15 4.1. 类数为一 15 4.2 构造概述 16

Date：2026年3月9日。

4.3. 寻找门 18

第 2 部分. 一个具体例子 21 5. 一个类数为一的群 G 22 5.1. 构造 D 225.2. 构造 G 235.3. 初始数据的一个具体选择 24 5.4. 一些技术引理 25 6. 构造一个极大 ι-稳定序 25 6.1. 构造极大序 $\Lambda_D^{\max}$ 266.2.ι-稳定性 28 6.3. $\Lambda_D^{\max}$和($\Lambda_D^{\max}$) ι 29的描述 7. 构造黄金子群 K_0^∞ 317.1. 构造 K_0^∞ 317.2.Λ_0、 p 33的单可迁作用 8. G 35的门集 8.1. 显式平凡化 35 8.2. 显式门 38 8.3. 门的约化 38 8.4. 建筑中的门到顶点 39 9. 寻找门 42 9.1. 基本约化 42 9.2. 二次型、特征多项式与最小向量 43 9.3. 寻找子域 $L' \subset D$ 459.4. 策略 45 9.5. 初始数据 46 9.6. 寻找显式门元素 47 10. 算法概要 48 10.1. 输出复形的结构 48 10.2. 算法 49 参考文献 52

1. Introduction

1.1. 背景与动机。 拉马努金复形是特殊类型的扩张复形。这些组合对象近年来在计算机科学和数学中变得十分重要。

扩展复形最简单的情形是扩张图：粗略地说，它是一种稀疏图，但顶点之间仍有非常短的路径。在计算机科学中，这类图是理解和利用伪随机性的重要工具，因此应用广泛，从复杂性理论到纠错码，再到网络设计；参见 [V+12] ，其中综述了伪随机性，以及扩张图所发挥的核心作用。一些深刻的数学理论，如 Kazhdan性质（T）和拉马努金猜想，已被用于显式构造扩张图 [Mar73、Mar84、Mar88、LPS88]，由此在纯数学与计算机科学之间建立了令人振奋的联系。

扩展复形 X 是一种高维推广：除了顶点和边，我们还记录“高维”的连接关系，例如由 3 个顶点构成的三角形、由 4 个顶点构成的 3-单形，等等。这些元素共同赋予 X它一种具有类似“扩展性质”的单纯复形结构。参见 [GK22] ，了解高维扩展图应用的部分综述。举几个例子，与扩展复形相关的思想是计算机科学和组合学近期重大突破的关键：例如，在拟阵理论中， [ALGV19], 构造局部可测试的经典纠错码和高码率量子纠错码 [DEL$^+$22、DEL$^+$25、PK22、EKZ22], 构造无损顶点扩展图 [HLM$^+$25a、HLM$^+$25b], ，并为 PCP 定理提供另一种证明 [Din07、DK17]。它们甚至可能具有产业应用价值，因为由此产生的纠错码，在构造高效零知识证明系统和简洁证明系统所需的参数方面，可能优于目前使用的里德–所罗门码——例如参见 [GLS$^+$23、RZR24] ，了解近期使用“奇异”编码开展的一些初步探索。

目前，对于刻画扩展图的扩展性质，还没有公认的最佳一般化方案； [Lub18] 对各种可能性进行了综述。其中，余边界扩展和拓扑扩展似乎在应用中最为相关。不过，这两种变体往往难以确立，因此人们转而考虑数学上更便于处理的最优谱扩展条件——这实质上是对广义邻接算子所构成的“赫克代数”中各算子的特征值间隙施加约束（见 [CSZ03]）。拉马努金复形是满足这一最优谱扩展条件的单纯复形，详见下文定义2.2.1 。与图的情形不同，谱扩展与其他类型扩展之间的完整关系目前仍未解决。尽管如此，人们仍预期二者有紧密联系：例如， [KKL14、EK24] 从某些谱扩展子图构造出了拓扑扩张子。

1.2. 我们的贡献。本文旨在构造新颖的拉马努金复形族。我们的方法以如下理念为基础：Lubotzky–Phillips–Sarnak [LPS88] 构造拉马努金图，并由 Lubotzky–Samuels–Vishne [LSV05a, LSV05b], 、W. Li [Li04] 和 A. Sarveniazi [Sar07]将其推广到更高维的类型 A。在这些工作中，拉马努金复形是作为与$G = \mathrm{GL}_N(F)$相关的 Bruhat–Tits 建筑的商空间得到的，其中 F是一个局部域；同样，拉马努金图在 [LPS88] 中是作为 $G = \mathrm{GL}_2(F)$的 Bruhat–Tits 树的商空间得到的。这些商空间源自某些算术格，这些格是通过将 G 整体化为一般线性群的某个内形式而得到的，而最优谱扩展条件则来自拉马努金猜想。对于 GL(2), Deligne 在数域上证明了该猜想 [Del80]，Drinfeld 则在函数域上证明了该猜想 [Dri88]。然而，在更高秩的情形下，该猜想在数域上仍未解决，因此上述所有构造都假设 F 具有正特征，此时 L. Lafforgue 关于函数域上 GL(N) 的工作适用 [Laf02]。

我们工作的核心思路，并非将 G 整体化为一般线性群的一个内形式，而是将 G 整体化为酉群的一个内形式，更确切地说，是整体化为我们所称的超定酉群——也就是说，一种定酉群，且在某个有限处模其中心各向异性（即除代数的单位元）。这类酉群可以利用第二类对合构造。不幸的是，正特征下的朗兰兹对应

尚未发展到足以将 [LSV05b]中的论证推广到这些酉群。

这项工作的关键洞见在于，令人惊讶的是，由于数域上有函数域所不具备的强大迹公式技术，数域上的情况要好得多。具体而言，拉马努金性质可以从非拟分裂酉群表示的（几乎完整的）端oscopic 分类中推导出来 [KMSW14]再结合 A. Caraiani 的工作 [Car12]。此外，我们也可以在超定酉群的其他有限处构造拉马努金复形，从而得到局部结构与以往例子显著不同的复形。

对于扩张图而言，拥有丰富的局部结构“库”以供选择，对应用至关重要。例如，Sipser–Spielman 线性时间可编码和可解码扩张码的构造 [SS96，Spi95] 特别要求使用双正则图，其双次数受到限制，而非纯正则图。对于高维复形，近期一项关于一致性测试的工作 [DDL24] 需要采用来自辛型-C_n 复形的构造。

更确切地说，我们的第一个主要结果——定理 3.3.1——表明：给定定义在全实数域 F 上的超定酉群 G，以及 F 的一个赋值 v_0，便可得到规模不断增大的拉马努金复形无限族。关于所得复形结构的信息，可以根据 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 的类型，从 [Tit79], 的表格中查得；这些表格确定了 G 的各种整模型的特殊纤维的约化商，详见 §10.1。特别地，在分裂情形下，这给出了新的一类类型为 A_n 的拉马努金复形；而在非分裂情形下，我们得到若干新颖类型的族：${}^2A'_n$、${}^2A''_n$（其中 n 为偶数）、B-C_n、${}^2B$-C_n 和 C-BC_n。这一抽象构造适用于所有秩 n。

1.2.1. 显式性。 由于我们的研究动机源自计算机科学应用，本文有相当重要的一部分聚焦于一个特定例子，在其中我们可以将复形显式地构造出来。所谓“显式构造”，是指构造扩展子复形，使其有望成为更大型实用算法的一部分。

目前，除了A_n 情形（该情形也由 [LSV05a、LSV05b]涵盖）之外，关于构造良好的高维拉马努金复形的工作寥寥无几；据我们所知，唯一的例子是 [EGGG24], 通过 SO(5) 得到的构造。在此仅实现了较弱的“拉马努金密度”性质，而且该构造并非完全显式。在拉马努金图方面，则有许多源自秩 3 超定酉群的例子：Ballantine 等人 [BFG+15] 和 Ballantine–Ciubotaru[BC11] 给出了一些部分显式的例子，而 Evra–Parzanchevski 和 Evra– Feigon–Maurischat–Parzanchevski [EP22、EFMP23] 则给出了在这一强意义下完全显式的例子。

论文第 2 部分着重于使我们的构造完全显式化。为此，我们需要附加一个假设：G 的类数为一，即$G(\mathbb{A}^\infty) = K^\infty G(F)$（关于阿代尔群的标准记号，参见第 1.4 段），并且 $K^\infty \cap G(F) = \{1\}$。在这些假设下，对于所有有限位 v_0，群 $\Lambda_{v_0} := G(F) \cap K^{\infty,v_0}$ 在 G_{v_0}/K_{v_0}上单传递地作用，从而能够显式地构造该复形。在第4节中，我们说明这一额外的“类数为一”性质如何助力将我们的抽象构造显式化。更确切地说，我们描述了相关拉马努金复形在分裂情形（类型 A_n）和非分歧惰性情形（类型 ${}^2A'_n$）下的显式构造。

再多花一些功夫，类似的构造应该也适用于我们之前提到的其他类型；不过，为求简洁，我们将注意力限制在这两个最重要的情形上，它们几乎出现在所有非阿基米德局部位置。

需要注意的是，这些假设根据 [MSG12], 意味着酉群的秩必须小于或等于 5。同一篇论文给出了一个五变量超定酉群的例子，以及一个满足这些条件的紧子群 K^∞ 。我们在论文后半部分利用这个例子实现显式构造。更具体地说，在第5—6节，我们显式构造所需的除代数 D ，它是 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$上的 5 次代数；还构造了其上的第二类对合 ι ，以及一个 D 连同 ι稳定的极大序 $\Lambda_D^{\max}$，属于 D。在第7节，我们利用这个极大序构造上述群 $\Lambda_{0,p} = \Lambda_{v_0}$，其中 v_0 是一个固定素数 p。在第8节，我们阐释相关拉马努金复形的显式构造，其中关键在于完整描述由所谓“黄金门”$S_{\bar{\Lambda}_0,p}$组成的有限集合。有趣的是，这个经过预计算的有限元素集被称为“黄金门”，因为它们能够以可计算且高效的方式，在 $\mathbb{R}$上的 PU(5) 中逼近任意群元素。酉群上的黄金门在量子计算中颇受关注，此前已有研究 [PS18, EP22, DEP25]；参见定义 4.2.1。预计算这样一个集合需要在 $\Lambda_D^{\max}$中求解一个显式范数方程，详细步骤见第9节。最后，我们在第10节总结算法。

虽然第一部分中用于证明我们的扩展子图达到最优的理论工具依赖于自守形式理论的最新进展，但第二部分中的显式构造采用的是经典代数数论——我们主要参考的是 Ralph Hull 于 1935 年发表的一篇论文！

最后，我们总结关于显式构造的主要论断，其中一个是形式化的，另一个是非形式化的：

定理 1.2.1。 设 $p \neq 27$ 为素数，且令 $\mathcal{B}_p$ 为以下对象的 *Bruhat-Tits*建筑：

- $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q}_p)$ 若 $p \equiv 1,\ 2、4 \pmod 7$,
- U_5（$\mathbb{Q}_p$） （关于 $\mathbb{Q}_p$ 的非分歧二次扩张的准分裂酉群），若 $p \equiv 3、5、6$（模 7）。

然后，我们给出一个显式算法：给定任意与 $2 \cdot 7 \cdot p$互素的 n，该算法生成一个拉马努金复形 $\mathcal{X}_n$，其万有覆盖为 $\mathcal{B}_p$。该算法的运行时间关于 n 呈多项式增长，而 $\mathcal{X}_n$ 的规模关于 n呈多项式增长。

该算法以及 $\mathcal{X}_n$ 的确切规模见§10.2。由于 $\mathcal{X}_n$ 的万有覆盖是 $\mathcal{B}_p$，其局部结构完全确定：特别是，单形的类型及其关联关系都是固定的（见§10.1）。此外，还有一种高效的方法可以明确描述这种局部结构（参见§8.4）。

命题 1.2.2 (非正式表述)。 固定 p。给定一个预先计算好的有限数据列表，该列表只依赖于 p，定理*1.2.1* 中的算法在现代计算机上对 $p = 3,\ 11$而言。

我们强调，我们并未实现该算法——由于其复杂性，实现它将构成一个规模庞大的软件工程项目。此外，由于 $\mathcal{X}_n$ 的顶点数大致由 n 的25次多项式给出，当 n 较大时，想要完整计算并存储整个复形是不可能的。因此，我们所说的“实际可执行”，是指对于复形中的任意顶点，我们都能确定其所有相邻顶点及相关单形，这需要进行

数百万次小型矩阵乘法（参见§8.2.2），在 $\mathbb{Q}$ 的10次扩张上进行，因此在实践中是可行的。

我们的算法具有实用性，但还需附加一个重要限定：声明 1.2.2 中的预计算数据列表。尽管我们在此处并未计算这些列表，但一种可能的策略是：将问题归约为在某个 25 维整数格中寻找给定小范数的所有向量，并检查它们的“特征多项式”是否等于给定的特征多项式，见问题 9.4.1。这与格范数问题有关；由于其在密码学中的应用，这类问题已得到深入研究，但相应地，人们也普遍知道它们在一般情况下具有计算挑战性。

解决这一特定情形下的问题，甚至确定该问题在现代硬件上是否具有计算可行性，都远远超出了作者目前的专业能力范围。尽管如此，我们仍能找到至少一个显式门（参见§9.6），这使我们希望，凭借更多的计算专业知识，或许能够彻底解决该问题。

1.2.2. 可能的推广。 我们预期也存在秩 4 的类数为一超定酉群的例子（超出已研究的秩 2 与秩 3 情形——见注记 4.1.4）。此外， [EP24] 的技巧表明，这一构造可作（复杂得多的）推广，以适用于非平凡但较小的类数。

此处的结果也应推广到函数域情形。目前，正特征中的端oscopic 分类尚无良好替代，因此定理3.3.1 的论证无法推广。然而，用于研究正特征情形的几何方法正在迅速进展，因此有理由预期不久将有变通办法可用——见注记 3.3.3。因此，值得探讨类数为一的 GL_N （来自 [CS98] ）的内形式构造能否推广到酉群，从而可能给出任意高秩的例子。

1.2.3. 条件性。 定理 3.3.1 的证明 ´很大程度上依赖于 Mok 和 Kaletha–M´ınguez–Shin–White 关于酉群的端oscopic 分类 [Mok15]以及 [KMSW14]。两者都依赖于尚未发表的加权扭曲基本引理。此外，后者还将许多技术细节留给某个特定参考文献“[KMSb]”，而该文献目前尚未公开。

我们注意到 [AGI+24] 最近解决了 [Mok15] 和 [KMSW14]对尚未发表的参考文献“[A25][A26][A27]”中酉群对应版本的依赖问题，该参考文献见 [Art13]。

1.3. **致谢**。 我们感谢 Alexander Bertoloni-Meli 和 Daniel Li-Huerta 向我们解释函数域朗兰兹对应的诸多方面及其对本项目可能具有的意义。我们还感谢 Goulnara Arzhantseva、Shai Evra、Mathilde Gerbelli-Gauthier、David Schwein 和 Hongjie Yu 与我们进行了有益的交流。

在开展本项目期间，所有作者均得到奥地利科学基金（FWF）首席研究员项目 PAT4832423 的资助。第二作者还得到由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 ATR2024-154613 的支持。

1.4. **记号**。

1.4.1. 约定。 设 E 为数域， v 为 E的一个赋值。我们用 E_v 表示 E 在 v处的完备化。若 v 为有限赋值，则用 $\mathcal{O}_{E_v}$ 表示 E_v的整数环。

`的阿代尔环是

$$\mathbb{A}_E := \prod_v{}' E_v,$$

相对于有限位处的子环 $\mathcal{O}_{E_v}$ 的限制积。

对于一个 E-代数 B，我们定义

$$B_v := B \otimes_E E_v.$$

类似地，若 $\mathcal{O}_B$ 是一个 $\mathcal{O}_E$-代数，我们定义

$$\mathcal{O}_{B,v} := \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_v}.$$

若 $F \subseteq E$ 是一个子域，且 p 是 F 的一个赋值，我们定义

$$B_p := B \otimes_F F_p = B \otimes_E \left(E \otimes_F F_p\right) = \prod_{v|p} B_v$$

and

$$\mathcal{O}_{B,p} := \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F_p} = \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_E} \left(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F_p}\right) = \prod_{v|p} \mathcal{O}_{B,v},$$

w这里我们使用 , 例如 , [Ser13 , 命题 II .§3.4] 计算 $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}}$ $_F$ $\mathcal{O}_F$ $_p$。 设 S 是 E 或 F的有限处的一个子集。我们定义

$$B_S := \prod_{v\in S} B_v, \qquad B^S := \prod_{v\notin S} B_v, \qquad \mathcal{O}_{B,S} := \prod_{v\in S} \mathcal{O}_{B,v}, \qquad \mathcal{O}_B^S := \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_{B,v}.$$

若 $\gamma \in \mathcal{O}_E$，我们定义

$$\mathcal{O}_{B,(\gamma)} := B \cap \mathcal{O}_{B,S},$$

其中 S 是整除 γ 的赋值集合 v 。

对于定义在 E 上的代数簇 X，我们定义 $X_S := X(E_S)$ 和 $X^S := X(E^S)$。视上下文而定，这些对象可通过其自然的坐标嵌入视为嵌入到$X(\mathbb{A}_E)$中。

1.4.2. 记号参考。 我们在多个小节中使用以下非标准记号：

抽象构造

- $\mathcal{B}(G)$ 是群 G的约化 Bruhat–Tits 建筑，见 §2.1.3。
- $X\left(K^{\infty,\ v_0}\right) := X_G\left(K^{\infty,\ v_0}\right)$ 是由群 G、有限处 v_0和开紧 K^{∞}构造的^{v_0} 拉马努金复形，见定义3.1.1。
- $\Lambda_{0,\ v_0}$、 Λ_{v_0} 是 G_{v_0} 中的格，被赋予满足假设4.1.3的拉马努金复形。它们分别与开紧群 K_0^{∞}和$K^{\infty} = K$（n）相关，后者属于 G^{∞} 。_
- $\Lambda_{0,\ v_0}$ 是Λ_{0}的中心商，v_0 见（4.2.1）。_
- $S_{\bar{\Lambda}}$ 是适当格 Λ 的“门”生成集，如定义4.2.1所述。

显式例子

- E 是数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$。
- D 是一个特定的除代数，定义于 E ，构造于§5.1。
- L， M 是用于构造 D 中的数域§5.1.1。

- p_0 是一个特定的素数，而 ρ_2，$\bar{\rho}_2$，ρ_{p_0}，$\bar{\rho}_{p_0}$，δ，α_i，a_i，b 是§§5.1.1和5.1.2中的特定代数数。
- u 是 D的一个特定循环生成元。
- η 是 D 作为（5.1.1）中矩阵的子代数的一种实现。
- ι 是定义在 D 上的第二类对合，见§5.2.1。
- G 是在§5.2中定义的酉群。
- $\Lambda_{\max D}$ 是 D 的极大序，u_+和 u_-、y_+、y_- 是定义 D所需的 $\Lambda_{\max D}$ 中的特定元素§6.1。
- $A_{\max}$ $B_{\max}$ 是定义于 §6.3 的转移矩阵。
- K_0^∞是定义于§7.1的$(\mathbb{A}^\infty)$ 的开紧子群。
- “匕首”$(\cdot)^\dagger$ 表示矩阵的共轭转置。
- $\mathbf{U}_q$、$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}_n$ 是定义于§8.1的矩阵。
- $Q_{\max}$ 是 $\mathbb{Z}^{25}$ 上的正定二次型，并且 $P_\gamma(t)$ 是某个 $\gamma \in (\Lambda_{\max D})^\iota$ 的特征多项式，其系数为多项式$P_1(\vec{x})$ $P_2(\vec{x})$ $P_3(\vec{x})$ $P_4(\vec{x})$ $P_5(\vec{x})$，定义于 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^{25}$ 上，见 §9.2。

第1 部分： 一般理论

2. Background Material

本节回顾单纯复形及其商空间。随后，我们介绍 Bruhat–Tits 建筑及其被离散子群作用所得的商空间，进而引出拉马努金复形的概念，它是拉曼努金图在更高维度上的类比。

2.1. **复形与建筑**。

2.1.1. 单纯复形。 单纯复形是图的一种推广，还能表示由三个或更多顶点组成的集合之间的“高维”关系。我们不再将这些关系视为连接顶点的线段，而是根据顶点的数量，将它们看作三角形、四面体、4-单纯形等。形式上，

定义 2.1.1. 单纯复形 X 是由一组顶点 X^0 和一组单形 组成的集合，仍记作 X；其中，每个单形 $F \in X$ 都是 X^0的有限子集，并且 F 的所有子集也都属于 X（称为 F的面 ）。我们令 X^i 表示 i-单形的集合（即有 $i+1$ 个顶点的单形），并称当 X^0 为有限集时， X 是有限的 。我们将 X 视为所有单形的并集，并记作 $X = \bigsqcup_{i=0}^{+\infty} X^i = \bigsqcup_{i=0}^{+\infty} \bigsqcup_{F \in X^i} F$。特别地，如果 $X^d \neq \emptyset$ 且 $X^{d+1} = X^{d+2} \cdots = \emptyset$, 我们称 X 的维数为 d；此时，我们将大小为 d 的单形称为 X的室 。

特别地， $X^0 \sqcup X^1$ 被称为 X的1-骨架，它构成一个图。

将每个 i-单形实现为 $\mathbb{R}^i$ 中赋予相应拓扑的开子集后，我们也将 X 实现为一个拓扑空间。于是，当且仅当 F' 包含于 F的闭包中时，单形 F' 才是另一个单形 F的面。

从现在起，我们进一步假设 X 是一个维数为 d的局部有限连通单纯复形。

2.1.2. 复形的商空间。 现在考虑一个 ℓ-群 G ，它在 X 上忠实地单纯地 作用。从拓扑角度看，每个元素 $\gamma \in G$ 都相对于上述单纯拓扑诱导一个同胚。从组合角度看，对任意 $F \in X^i$ 以及 F 的一个面 F'，有 $\gamma(F) \in X^i$，其中 $\gamma(F')$ 是 F 的一个面。进一步

假设每个 $v \in X$ 在 G 中的稳定子都是开紧子群。那么X 称为 G-复形，按照 [Fir16, §3C]。

设 Γ 是 G的一个闭子群。我们希望将 $\Gamma\backslash X$ 实现为 X的一个商单纯复形，即商拓扑空间 $\Gamma\backslash X$ 应当是一个单纯复形，且投影 $X \to \Gamma\backslash X$ 是一个覆盖映射。一般而言，即便可以在 $\Gamma\backslash X$ 上定义商拓扑结构，要使其与 X 的单纯结构相容，还需要满足更多条件。

例。设 X 是 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$的 Bruhat–Tits 建筑（见下文第2.1.3段），它是次数为 $p+1$ 的无限正则树；设 Γ 是一个格，在 X 的顶点集 X^0 上单传递地作用（参见 [Lub94，引理7.4.1]，，其中$\Gamma = \Gamma(2)$）。令线段 $[0,1]$ 表示 X中一个室的闭包，则商 $\Gamma\backslash X$ 同胚于线段 $[0,1/2]$。因此， $\Gamma\backslash X^0$ 缩并为点0，而 $\Gamma\backslash X^1$ 变为线段 $(0,1/2]$，它不是开集。无法为 $\Gamma\backslash X$ 赋予与 X的单纯结构相容的“商”单纯复形结构。这个反例表明，不存在一个元素 γ能稳定一个室却不逐点固定它。

我们有如下命题，用以判定 $\Gamma\backslash X$ 是否为 X的商单纯复形。

命题 2.1.2. [Fir16，命题 3.7，3。9] 商空间 $\Gamma\backslash X$ 是单纯复形当且仅当

对所有单形对 $\{u_0,u_1,\dots,u_s\}$、$\{v_0,v_1\dots,v_t\} \in X$.,

- $\{\Gamma u_0,\dots,\Gamma u_s\} = \{\Gamma v_0,\dots,\Gamma v_t\}$ 蕴含 $\Gamma\{u_0,\dots,u_s\} = \Gamma\{v_0,\dots,v_t\}$。此外，投影 $X \to \Gamma\backslash X$ 是覆盖映射当且仅当
  - Γ 的作用是自由的，即对每个 $v \in X^0$， v 在 Γ 中的稳定子是平凡的。

如下命题判定商单纯复形是否有限。

命题2.1.3。 [Fir16，命题3。13] 商单纯复形 $\Gamma\backslash X$有限，当且仅当 $G\backslash X^0$ 有限且 Γ 在 G中余紧。

我们以下述定义作结。

定义2.1.4。 [AB08，附录A] 设 X 是一个维数为d 的 Δ_d 单纯复形，而 d是一个固定的维数为 X 的单形。如果存在一个单纯映射，使得 f_X： $X \to \Delta_d$ 将 X 中的单形映射到 Δ_d 中维数相同的单形，则称是可着色的。

将 Δ_d与 0、1、.....、d对应起来，映射 f_X将 X的每个 i-单形 F映射到 $\{0,1,\dots,d\}$的一个基数为 $i+1$的子集，这个子集称为 F的类型。

2.1.3. *Bruhat–Tits* 建筑。 Bruhat–Tits 理论为非阿基米德局部域 G上的约化群 $\mathbb{F}$ 赋予一个带有 G-作用的无限单纯复形。我们仅概述一些结果，更多细节请参见 [Tit79], [AB08], [KP23] 。

假设 G 在 $\mathbb{F}$ 上是单群，简记为 $G = G(\mathbb{F})$。设 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$为 G的约化 Bruhat–Tits 建筑，它是一个维数为 d的单纯复形，其中 d 是 G的 $\mathbb{F}$-半单秩。此外，存在一个相关的 G作用于$\mathcal{B}$ ，该作用是单纯的，并在房间集合上传递地作用。若进一步假设 G 的中心有限，则 $\mathcal{B}$ 中任意点的稳定子都是一个开

紧子群 G，因此 $\mathcal{B}$ 是一个 G-复形[1]。此外， $\mathcal{B}$ 是可着色的，因此我们可以讨论其各个面的类型。

给定 F in $\mathcal{B}$ 中的一个面，有一个与之对应的 $G(\mathbb{F})$ 的开紧子群 P_F，称为仿抛物子群，它逐点固定 F。更一般地，还可以构造一个定义在 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ 上、泛纤维为 G 的相关群概形 $\mathcal{G}_F$，其$\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-点构成 P_F。文献中对仿抛物群的定义存在差异。对我们而言，我们要求群概形 $\mathcal{G}_F$，或等价地，其特殊纤维是连通的。更确切地说，我们的群 P_F 正是 [KP23，定义 7.4.5.(3)] 中的群 $G(\mathbb{F})^0_F$。当 F 是一个室时，相应的仿抛物子群称为伊wahori子群。另一方面，若 F 是一个顶点，则相应的仿抛物子群在所有这类子群中是极大的。我们可以仿照 [KP23，定义 1.3.39、7.11.1]，引入“特殊、超特殊和超特殊”顶点的术语。特别地，一个顶点是超特殊的，当且仅当其对应的群概形是约化的（[KP23，定理 9.9.3]）。最后，我们将仿抛物子群的类型定义为相应面的类型。那么，两个类型相同的仿抛物子群彼此共轭（但一般而言，反过来并不总是成立）。

现在考虑闭离散子群 Γ，它属于 G。我们将相关的商 $\Gamma\backslash\mathcal{B}$ 视为拓扑空间。在命题2.1.2的两个条件下，商 $[X]\colon=\Gamma\backslash\mathcal{B}$ 继承了单纯复形结构。

此外，商 $G\backslash\mathcal{B}^0$ 总是有限的。若进一步假设 Γ 在 G中余紧，则相关的单纯复形 $[X]$ 是有限的。

在余紧情形下，我们给出一个更实用的假设，以确保 $[X]$ 是商单纯复形。此类假设之一是：

假设 2.1.5。对于任意非平凡的 $\gamma\in\Gamma$ 以及任意顶点 v，在 $\mathcal{B}(G)$的1-骨架中，γv 与 v 之间的距离大于2。

特别地，对于任意面 F，有 $\gamma\bar{F}\cap\bar{F}=\emptyset$，且命题2.1.2 的假设均得到满足。

注记 2.1.6。假设 Γ自由作用且保持顶点的类型——这是自然且温和的假设。假设存在顶点 v 和 $1\neq\gamma\in\Gamma$，使得 γv 和 v 之间的距离小于 3。首先注意，距离只能是 2；否则 γv 和 v 要么相同，要么类型相同。在距离为 2 的情形下，我们可以找到另一个顶点 v_0，它同时与 v 和 γv相邻。如果我们有$\{\Gamma v_0,\Gamma v\}=\{\Gamma v_0,\Gamma\gamma v\}$，从而得到 $\Gamma\{v_0,v\}=\Gamma\{v_0,\gamma v\}$，那么要么存在某个 $\gamma'\in\Gamma$，使得 v和 $\gamma' v$相邻；要么 v_0 被 Γ 中的某个元素固定，这不可能。因此，从某种意义上说，这个假设是必要的。

注记 2.1.7。使用单纯集合而非单纯复形的形式体系，可以让我们更容易地定义商，并且适用于所有情形。为了与此前关于拉马努金复形的文献保持一致，我们没有这样做。

从理论上讲，这样的 Γ 总是可以找到的。由于在余紧情形下，顶点只有有限多个 Γ-轨道，对于每个代表元 v_i，我们只需找到一个相关的正规子格 Γ_i，使得 Γ 中的顶点与 $\Gamma_i v_i$ 的距离大于 2。于是该子格 $\cap_i\Gamma_i$ 满足这一假设。在实践中，对于由以下对象定义的一类给定余紧格，可以直接验证上述假设：

[1]一般而言，我们可以用 G^{sc} 或 G_{ad}替换 G。

同余子群（例如， Λ_{v_0} 在假设 4.1.3中）当层级足够大时。

2.2. **拉马努金复形**。 拉马努金复形是一类特殊的有限单纯复形，它将广为人知的拉曼努金图概念推广到更高维数（参见[Lub94，定义 4.5。6]）。

继 [Lub18], 之后，我们考虑作为 Bruhat–Tits 建筑商空间而得到的拉马努金复形。设 $\Gamma \subset G$ 和 $\mathcal{B}$ 如上。特别地，商空间$[X]\colon = \Gamma\backslash\mathcal{B}$ 是一个有限单纯复形。设 I 是 G的一个伊wahori子群，特别地，它固定 $\mathcal{B}$中的一个室。

与 Γ 相关联的是函数空间 $L^2(\Gamma\backslash G)^I = \mathcal{C}^\infty(\Gamma\backslash G)^I$ ，其中 I 是一个伊wahori子群。这是岩堀-赫克代数的一个模

$$\mathscr{H} := \mathscr{H}(G, I) := \mathcal{C}_c^\infty(I\backslash G/I).$$

$\mathscr{H}$在该函数空间上的作用，编码了定义在 $\mathcal{B}$的单形上的各种函数空间中许多有趣的组合邻接算子和边界算子的相关信息。例如，如果 G 是半单且单纯连通的，那么$\mathcal{C}^\infty(\Gamma\backslash G)^I$ 就是定义在 $\Gamma\backslash\mathcal{B}$的各个室上的函数集合。

带有 I-不变向量的 G 的表示通过 $\pi \mapsto \pi^I$与不可约$\mathscr{H}$-模一一对应。令 $\check{}_{G^{I,\,\mathrm{temp}}}$ 表示与温和的 π相对应的这类模的集合。不可约 $\mathscr{H}$-模 π^I 弱包含于 $L^2(G)^I$ 当且仅当 $\pi \in \check{}_{G^{I,\,\mathrm{temp}}}$，这促使我们作出如下定义：

定义 2.2.1 ([Lub18，定义 2.7])**：** 对于上述 $\Gamma \subseteq G$，如果对所有不可约 $\mathscr{H}$-模 $\pi^I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Gamma\backslash G)^I$，都有 $\pi^I \in \check{}_{G^{I,\,\mathrm{temp}}}$ ，或者 π^I 来自 G的一个一维表示π ，则称 $[X] = \Gamma\backslash\mathcal{B}$ 为一个拉马努金复形 。

换言之，这些不同组合算子在 $\Gamma\backslash\mathcal{B}$上的谱，除了来自常值函数的例外情况外，都包含于这些算子在 $\mathcal{B}$ 自身上的谱中。这应当被视为 d-正则拉马努金图概念的高维推广：除常值函数外，邻接算子的谱包含于无限正则树上的邻接算子的谱中。

注记2.2.2。在 [Fir16], 中，Uriya First提出了拉马努金复形的另一种定义 $\Gamma\backslash X$（其中 X 为一个一般的 G-复形），该定义利用一组相关算子的谱。我们参阅同上，尤其是 [Fir16，定理6。22]以了解该定义与定义2.2.1之间的关系。

注 2.2.3. 在 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$ 和 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的经典情形下，有限（$p+1$）正则图 $[X] = \Gamma\backslash\mathcal{B}$ 的顶点集 $[X]^0$ 和边集 $[X]^1$ 分别由 $\Gamma\backslash G/K$ 和 $\Gamma\backslash G/I$ 给出，其中 K 是 G 的极大紧子群。在 [Lub94, 定理 5.5.1], 中证明了，特征值 λ 是邻接矩阵 δ 作为作用于 $L^2(\Gamma\backslash G/K) = L^2(\Gamma\backslash G)^K$ 上的算子的特征值，当且仅当相关的非分歧表示 ρ^λ 出现在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。证明 $\Gamma\backslash\mathcal{B}$ 是拉马努金图，等价于证明出现在 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 中的所有非分歧表示都是主系列或一维表示（[Lub94, 定理 5.4.3]）。等价地，我们需要证明出现在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中的那些球表示都是温和的或一维表示。这为定义 2.2.1 提供了依据。

3. Abstract Construction of Complexes

3.1. 与自守谱的关系。 设 F 是一个数域，并令 ∞ 表示 F 的阿基米德位集合。设 G 是定义在 F 上的连通约化群，且对所有 $v \in \infty$， G_v 都是紧的。固定一个有限处 v_0。

令 K 为 $G(\mathbb{A}_F)$ 的一个紧开子群。对于相关的紧开子群 $K^{\infty,\,v_0} \subseteq G^{\infty,\,v_0}$，定义

$$\Gamma_{v_0} := G(F) \cap K^{\infty,v_0}.$$

这给出了一个嵌入

$$\Gamma_{v_0}\backslash G_{v_0}/I_{v_0} \hookrightarrow G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)/K^{\infty,v_0} I_{v_0} G_\infty, \tag{3.1.1}$$

其中 I_{v_0} 是 G_{v_0} 的一个固定伊wahori子群。根据 [GH24，定理 2.6。1], 阿代尔商

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)/K^{\infty,v_0} I_{v_0} G_\infty$$

是有限的，因此$\Gamma_{v_0}\backslash G_{v_0}/I_{v_0}$也是有限的。

设 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 为 G_{v_0} 的约化 Bruhat–Tits 建筑，将其视为多重单纯复形。如下定义商复形 $\Gamma_{v_0}\backslash\mathcal{B}(G_{v_0})$:

- 其 0-单形是 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 的 0-单形的 Γ_{v_0}-轨道;
- 其 k-单形是 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 的 k-单形的 Γ_{v_0}-轨道，即由 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 中 k-单形$\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ 的等价类所表示的互异单形 $\{[x_0], [x_1], \ldots, [x_k]\}$。（其中一些可能是退化的。）

该复形是有限的。事实上，设 C 为 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 中的一个固定室。则映射

$$\Gamma_{v_0}\backslash G_{v_0}/I_{v_0} \longrightarrow \Gamma_{v_0}\backslash\{\text{chambers of } \mathcal{B}(G_{v_0})\}, \qquad g \longmapsto g \cdot C,$$

是满射。因此该商具有有限多个房间，从而对所有 k 都具有有限多个 k-单形。

如上一小节所述，一般而言，商复形未必能从 $\mathcal{B}(G_{v_0})$继承单纯结构。若命题 2.1.2 中的假设成立，则它确实能继承单纯结构；特别是，若满足假设2.1.5 ，则也是如此。

定义 3.1.1。 将上文定义的单纯复形记为

$$X(K^{\infty,v_0}) := X_G(K^{\infty,v_0}),$$

并令

$$\mathcal{C}^\infty(X_G(K^{\infty,v_0})) := \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{v_0}\backslash G_{v_0})^{I_{v_0}}.$$

粗略地说，这可以看作是定义在 $X(K^{\infty,\,v_0})$ 的最高维单形上的函数空间，不过当 G 中包含作用于某个最高维单形、且其作用为非平凡自同构的元素时，描述会稍微复杂一些。

我们将用到的关键性质是，(3.1.1) 中的嵌入诱导出

$$\mathcal{C}^\infty(X_G(K^{\infty,v_0})) \hookrightarrow L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))^{K^{\infty,v_0} I_{v_0} G_\infty}.$$

作为 $\mathscr{H}(G_{v_0},\ I_{v_0})$-模，这可以表示为一个单射

$$\mathcal{C}^\infty(X_G(K^{\infty,v_0})) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathcal{AR}_{\mathrm{disc}}(G) \\ \pi_\infty \text{ trivial}}} (\pi_{v_0})^{I_{v_0}} \otimes (\pi^{\infty,v_0})^{K^{\infty,v_0}},$$

其中 $\mathcal{AR}_{\mathrm{disc}}(G)$ 表示 G离散谱中的自守表示多重集，Hecke 作用施加在第一个张量因子上。将定义 2.2.1 应用于此分解，可得:

命题 3.1.2。 复形 $X_G(K^{\infty,v_0})$ 是拉马努金的，当且仅当对于每个$\pi \in \mathcal{AR}_{\mathrm{disc}}(G)$，若 π_∞ 是平凡的且 $(\pi^{\infty,v_0})^{K^{\infty,v_0}} \neq 0$，则表示 π_{v_0}要么是温和的，要么是一维表示（即一个特征）。

3.2. **超定酉群**。 在 [Clo93], Clozel 研究了酉群的特殊内形式，其相关的算术局部对称空间的上同调基本集中于中间次数。在函数域上 $\mathbf{GL}_n$ 的内形式情形中，也运用了类似现象来构造拉马努金复形，见 [LSV05a]。

[LSV05a] 中的构造依赖以下两个性质：

假设 3.2.1。 群 G满足：

(1) G_v 对所有 $v \mid \infty$均为紧；**(2)** 存在一个有限处 v_a，使得 G_{v_a} 模其中心各向异性。这样的赋值称为 G 的各向异性处 。

第二个条件比看起来更加严格：

定理 3.2.2 ([KP23，定理 10.3。1])。 唯一的绝对几乎单群 G_{v_a} 在非阿基米德局部域上各向异性的群属于类型 A。更准确地说， $G_{v_a}/Z_{G_{v_a}}$ 与 $D_{v_a}^\times/F_{v_a}^\times$ 某个除代数 D_{v_a}上的 F_{v_a}同源。

我们将使用以下事实：各向异性处拥有一个较大的开紧子群：

引理 3.2.3。 设 G_{v_a} 模其中心各向异性。则存在一个开紧子群 $K_0 \subseteq G_{v_a}$，使得 G_{v_a}/K_0 为阿贝尔群。

证明。 令 $G_{v_a}^1$ 为 $g \mapsto |\chi(g)|_{v_a}$ 的核的交，其中 χ 遍历所有 F_{v_a}-有理特征的 G。则 $G_{v_a}^1$ 包含 $G_{v_a}^{\mathrm{der}}$，因此 $G_{v_a}/G_{v_a}^1$ 为阿贝尔群。此外， $G_{v_a}^1$ 与某个除代数的范数一子群同源，因而是紧的。因此， $K_0 := G_{v_a}^1$ 满足要求。□

定义在数域上并满足假设3.2.1 中确实存在的群：

命题 3.2.4 ([KMSW14，§0.3。3])。 设 F 是一个全实数域，且E/F 是一个全复二次扩张。设 $G^* := U_N^{E/F}$ 是相应的准分裂酉群。那么 G^* 具有一个扩张纯内形式 G，满足假设 *3.2.1*。

定义 3.2.5。 我们将命题 3.2.4中构造的群称为超定酉群。

3.3. **由幺正群构造的复形**。 现在我们可以用抽象方法构造拉马努金复形，采用的方法与 [LSV05b] 中为函数域上的一般线性群所用的方法相同。

定理 3.3.1。 设 E/F 是数域的一个 *CM* 扩张，且设 G是一个超定酉群，它是准分裂酉群$G^* = U^{E/F}(N)$的扩张内形式。固定一个有限处 v_0和一个紧开子群 $K^{\infty,v_0} \subseteq G^{\infty,v_0}$。假设以下条件之一成立：

(*1*) N 是素数；

(2) 存在 G的各向异性处 v_a ，使得 G_{v_a}/K_{v_a} 是阿贝尔的。那么 X_G（$K^{\infty,\ v_0}$）是一个拉马努金复形。

注记 3.3.2. 例如，若满足条件 (2) K_{v_a} 是 $G_{v_a} \cong D_{v_a}^{\times}$ 中范数为 1 的元素构成的子群，如引理 3.2.3 中所述。

证明。 我们验证命题3.1.2。

令 $\pi \in \mathcal{AR}_{\mathrm{disc}}(G)$ 满足 π_∞ 是平凡的，且（$\pi^{\infty,\ v_0}$）$^{K^{\infty,\ v_0}} \neq 0$。令 ψ 为 π 的阿瑟参数，如 [KMSW14定理 1.7 所述。1]记

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{k} \tau_i[d_i],$$

其中 τ_i 是简单参数。令 v_a 为 G 的各向异性赋值。由于 ψ_{v_a} 是相关的，且 G_{v_a} 是各向异性的（因此其对偶群不存在真相关抛物子群），我们必有 $k = 1$。

情形 1： N 素数。

在这种情形下，要么 dim $\tau_1 = 1$ 和 $d_1 = N$，要么 dim $\tau_1 = N$和 $d_1 = 1$。

在第一种情形下，设 v_s 是 E/F 的一个分裂处，使得 G_{v_s} 是分裂的。根据 A-packets 对 GL_N 的描述（它们与相应的单元素L-packets 一致，见 [KMSW14, §1.2。2]），局部表示 π_{v_s} 是一个特征。根据[KST20，引理 6，2], 这意味着整体表示 π 是一个特征，因此 π_{v_0} 也是一个特征。

在第二种情形下，由于 π_∞ 是紧群的一个不可约表示，因此它是有限维的，故为上同调的。根据 [NP21，推论4], 整体参数 τ_1 是上同调的；由 [Car12]的主要结果可知，（τ_1）$_{v_0}$ 是温和的。根据酉群的局部朗兰兹对应 [KMSW14，定理 1.6.1(6)，],可知 π_{v_0} 是温和的。情形 2： G_{v_a}/K_{v_a} 阿贝尔。

若 G_{v_a}/K_{v_a} 是阿贝尔的，则 π_{v_a} 是一个特征。由 [Bad08，命题 3.7],局部阿瑟参数 ψ_{v_a} 必具形式 $\chi_0[1][N]$ 或 $\chi_0[N][1]$，对某个自对偶特征 χ_0 ，它属于 $\mathrm{GL}_1(E \otimes_F F_{v_a})$。事实上，在 Badulescu 的记号中， ψ_{v_a}对应于 GL_N 的一个表示，该表示迁移到 G_{v_a}的一个特征。更精确地说：

- 在 [Bad08 命题 3.7] 的情形 (a) 中， $C(\sigma)$ 是一个特征，且 $k = 1$，故 $\psi_{v_a} = \chi_0[N][1]$。
- 在 [Bad08 命题 3.7] 的情形 (b) 中， $C(\tau)$ 是一个特征，且 $l = 1$，故 $\psi_{v_a} = \chi_0[1][N]$。

无论哪种情形，整体阿瑟参数 ψ 都限于情形 1 中出现的两种可能性，且同样的论证适用。□

注记 3.3.3。 目前，我们只能在数域上进行构造。尽管函数域上的理论正在迅速发展，最终应能将结果推广到正特征情形，但要扩展上述论证仍面临两个主要障碍：

首先，只有当 π 从 G 到 $\mathrm{Res}_F^E \mathrm{GL}_n$ 的参数 π推前为尖点表示时，我们才有迁移，因为 [Laf18] 的整体朗兰兹对应仅适用于尖点表示。其次，我们不知道非分裂处温和参数所对应的 L-包是否完全由温和表示构成

因为 [GL17]的整体–局部相容性仅提供到半单化为止的局部朗兰兹对应。

克服这些困难后，论证便可推广到函数域情形。

3.4. **结构**。 局部结构可 $X_G(K^{\infty,v_0})$ 从 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 在 [Tit79]的表格中的标签读出。对于我们的酉群情形，得到以下标签（见[DEP25，表 3。1]）：

- A_n 当 v_0 分裂时，
- ${}^2A'_n$ 当 v_0 惰性且 G_{v_0} 准分裂时，
- B-$C_{n/2}$ 若 n 为偶数、 G_{v_0} 准分裂且 v_0 分歧，
- ${}^2A''_n$ 若 n 为偶数， G_{v_0} 为非准分裂，且 v_0 为惰性，
- ${}^2B$-$C_{n/2}$ 若 n 为偶数， G_{v_0} 为非准分裂，且 v_0 为分歧，
- C-$BC_{(n-1)/2}$ 若 n 为奇数且 v_0 为分歧。

为简单起见，本文重点讨论 A_n 与 ${}^2A'_n$ 情形。将构造推广到更一般的情形并无本质困难——只是组合复杂性略有增加。

标签所依据的仿射根系决定了公寓的结构，单形的类型以包含关系反转的方式对应于相应图中顶点的子集。一种类型的单形在另一种类型中的度数，可计算为对应于单形稳定子的约化模型的特殊纤维的约化商中旗簇的大小。一般而言，计算这些度数需要 Bruhat–Tits 理论的输入以及有限李型群的点计数公式（例如 [CCN+85，§2]）。这对于室的最高维面更为容易：每一个都对应于在仿射 Dynkin 图中去掉一个顶点，而包含它的房间数为 $q_{v_0}^d+1$，其中 d 是附于被排除顶点的整数，见于[Tit79]。

最后，虽然在分裂处，这些复形的类型A_n 局部结构与 [LSV05a], 中的构造相同，但它们的万有覆盖是一个定义在 p-进域上而非函数域上的群的建筑。由于分裂群的建筑，其半单秩 ≥ 4 蕴含了其基域的信息（概述见 [AB08，§11。9] ），当 G 具有满秩 ≥ 5时，这些万有覆盖必然不同。

我们在 A_n 和 ${}^2A'_n$ 秩 5 情形下，分别于§§10.1.1、10.1.2 中精确推导了所有这些细节。

4. Explicit Construction of Complexes

设 F 是一个全实数域，并设 E/F 是一个二次 CM 扩张。现在我们说明如何将 $X_G(K^{\infty,v_0})$ 的抽象构造具体化。我们的方法改编自函数域情形中的思路 [LSV05a]。

4.1. **类数为一**。 我们对 G再作一项假设：

定义 4.1.1. 设 G/F 是一个约化群，且 G_∞ 是紧的。若开紧子群 $K^\infty \subseteq G(\mathbb{A}^\infty)$满足 $G(\mathbb{A}^\infty) = K^\infty G(F)$，则称其类数为 1。

若另外 $K^\infty \cap G(F) = \{1\}$，则称其为 K^∞ 黄金。

关键性质是：

引理 4.1.2（例如 [DEP25，引理 4.1.3(1)]）。设 G/F 是一个连通约化群，使得 G_∞ 是紧的，并设 $K^\infty \subseteq G(\mathbb{A}^\infty)$ 的类数为 1。那么对于每个有限处 v_0，群 $\Lambda_{v_0} := G(F) \cap K^{\infty,v_0}$ 在 G_{v_0}/K_{v_0}上传递地作用。

如果 K^∞ 还是黄金的，那么 Λ_{v_0} 也单纯地作用。

现在我们可以列出显式构造 $X_G(K^{\infty,v_0})$所需的具体输入和假设：

假设 4.1.3。假设 G 和 K^{∞,v_0}满足以下条件：

- G 是相对于 E/F的秩为 N 的超定酉群，使得存在类数为 1 的 $K_0^\infty \subseteq G(\mathbb{A}^\infty)$。
- 要么 N 是素数，要么存在一个各向异性处 v_a，使得$G_{v_a}/K_{0,v_a}$是阿贝尔的。
- K_0^∞是黄金的。
- v_0 是一个有限分裂或惰性赋值，属于 F，使得 G_{v_0} 是准分裂的，并且K_{0,v_0}是超特殊的[2]。
- $K^{\infty,v_0} \subseteq K^{\infty,0^{v_0}}$是一个正规子群。例如，选取$\mathcal{O}_F$ 的一个与 v_0 以及所有使 G 或 K_0^∞分歧的素位互素的理想 $\mathfrak{n}$，并令$K^\infty := K(\mathfrak{n}) \subseteq K_0^\infty$为相应的主合同子群。

作为方便的记号，每当这些假设成立时，我们定义这些格：

- $\Lambda_{0,v_0} := G(F) \cap K^{\infty,0^{v_0}}$。
- $\Lambda_{v_0} := G(F) \cap K^{\infty,v_0}$。

注 4.1.4。已有许多满足假设 G 和 K^{∞,v_0} 的已知例子 4.1.3：参见 [PS18]，关于秩 2 情形；以及 [EFMP23]，关于秩 3。然而，这些较小的秩只能产生拉曼努金图，而非高维复形。论文 [MSG12]构造了一个秩 5 的例子，它将是本文第 2 部分的主要研究对象。不幸的是，该文还证明，在秩 ≥ 5 的数域上不存在其他例子。

最后，我们预计秩 4 中会有许多例子——例如，对于 $E/F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})/\mathbb{Q}$，基于 [MSG12] 的质量公式进行的数值计算表明，一个在无穷处紧、等价于有理数域 2 上某个除代数的单位元群的秩 4 酉群，若在 3 或 7 之一处非准分裂，并且其 K_0^∞在 2 处为特殊、在非准分裂素数处为超特殊、在其他所有地方均为特殊，那么应该可行。

注记 4.1.5。假设 K_0^∞为黄金环的条件可放宽为类数为一，但代价是构造 4.2.1 和 4.2.2 在组合上会更繁琐——它们将基于施莱尔陪集图而非凯莱图来构造。为求简洁，这里不予呈现。

4.2. **构造概述**。现在我们描述在假设 $X_G(K^{\infty,v_0})$ 的条件下，显式构造复形 4.1.3。为统一 v_0不同分裂类型下的记号，定义

$$\bar{\Lambda}_{0,v_0} := \Lambda_{0,v_0}/(\Lambda_{0,v_0} \cap Z^{\mathrm{spl}}_{G_{v_0}}), \tag{4.2.1}$$

其中 $Z^{\mathrm{spl}}_{G_{v_0}}$ 表示 G_{v_0}中心的极大分裂环面。

该构造依赖于寻找某些称为“门”的特殊元素：

[2]为简单起见，我们排除分歧和非准分裂情形。

定义 4.2.1. 设 v_0 是 F的一个非分歧有限位，且 Λ 是一个在某个超特殊点 $x_0 \in \mathcal{B}_{v_0}$处传递地作用于 $G_{v_0}x_0$ 的群。那么将 Λ的门 定义为

$$S_{\bar{\Lambda}} := \{s \in \bar{\Lambda} : sx_0 \text{ is at graph distance } d_{v_0} \text{ from } x_0\},$$

其中， $d_{v_0} = 1$ 若 v_0 是分裂的，且 $d_{v_0} = 2$ 若 v_0 是惰性的。

若 Λ 另外在 $G_{v_0}x_0$上单传递地作用，那么对于每个与 x_0的图距离为 d_{v_0} 的 x ，令 $s_x \in S_{\bar{\Lambda}}$ 表示满足 $s_x x_0 = x$的唯一元素。

注 4.2.2。 根据 [DEP25], 的工作，$\Lambda_{0,\ v_0}$ 的门构成了 G_∞ 的“黄金门”集合，正如 [DEP25定义 1.2 中所述。1]。注意，这与 [DEP25的工作无关，§6] ，特别是与 [DEP25猜想 6.3 所需的秩 4 或 8 条件无关。4] 这是因为拉马努金猜想对超定 G成立（见定理 3.3.1）。

定理 3.3.1 使我们得以显式构造拉马努金复形。我们分别将分裂情形和惰性情形表示为凯莱图类型的构造：

4.2.1. 分裂情形。 若 v_0 是分裂的，则 $G_{v_0}/K_{0,v_0}$ 是与 G_{v_0}相关联的扩张布吕阿-蒂茨厦 $\mathcal{B}_{v_0}$ 的顶点集，而根据引理 4.1.2，Λ_{0,v_0} 在这些顶点上单纯传递地作用。模去中心后，Λ_{0,v_0}在约化建筑 $\mathcal{B}_{v_0}$的顶点上单纯传递地作用。

取一个由 K_{0,v_0}稳定的点 $x_0 \in \mathcal{B}_{v_0}$ ，并定义与 Λ_{0,v_0}类似的 Λ_{v_0} 。由于该作用是单传递的， s_x 中的元素在$S_{\bar{\Lambda}_{0,v_0}}$ 中生成 Λ_{0,v_0}，而 $\mathcal{B}_{v_0}$ 的 1-骨架就是相应的凯莱图。

这使我们能够构造：

构造 4.2.3. 令 $\mathcal{X}$ 为所有包含 x_0的单形之并所构成的单纯复形，令 Q 为 $\mathcal{X}$ 中不同于 x_0的顶点，并考虑门集

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,v_0}} = \{s_x \ : \ x \in Q\}$$

Λ_0的$_{v_0,}$ 。于是我们有如下单纯结构：

- *0* 型单形是 $\Lambda_{v_0}\backslash\Lambda_{0,\ v_0}$的元素。
- 对于 $r > 0$， r-单形是形如 $x_1 \cup \{s_x x_1, x \in \Delta\}$ 的子集，其中 $x_1 \in \Lambda_{v_0}\backslash\Lambda_{0,\ v_0}$ 且 $x_0 \cup \Delta$ 是 $\mathcal{X}$的一个 r-单形。

4.2.2. 惰性情形。 令 x_0 为由 $K_{0,\ v_0}$稳定的超特殊顶点，按照我们的约定，其类型为 0。一个关键性质是， $G_{v_0}x_0$ 与 $\mathcal{B}_{v_0}$的 0 型顶点集合重合。这些恰好是与 x_0 的图距离为偶数的顶点（例如参见 [DEP25，例 3.3。5]）。由引理 4.1.2， $\Lambda_{0,\ v_0} = \Lambda_{0,\ v_0}$在 $G_{v_0}/K_{0,\ v_0}$上单传递，因此也在偶数距离顶点集合上传递。

此外，公寓中由顶点构成的格恰好是余特征格的一半。因此，与 x_0 相距 2 的每个顶点 x 都唯一确定一个与 x_0 相距 1 的顶点 x' ，该顶点是线段 $[x, x_0]$的中点。反过来，在任意公寓中，将经过 x_0 和这样的 x' 的直线延长至其长度的两倍，即可得到每个距离 1 的顶点。

因此，我们可以进行与构造4.2.3中类似的构造，并增加一步，即“填入”其他类型的顶点。

构造 4.2.4. 设 $Q = \{x_1, \dots, x_l\}$ 为类型 0、与 x_0 的距离恰好为 2 的顶点集合，并设 $\mathcal{X}$ 为它们的凸包所构成的单纯复形。对每个 $x_i \in Q$，在 x_0 与 x_i 的凸包中存在唯一一个距离为 1 的顶点。所得映射的纤维定义了一个划分 $Q = \bigsqcup T_j$。我们根据该划分的相应部分，将与 x_0 距离为 1 的顶点标记为 y_{T_j}。注意，y_{T_j} 取遍与 x_0 距离为 1 的所有顶点。

考虑门集

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,v_0}} = \{s_x : x \in Q\}.$$

于是我们有如下单纯结构：

- 每个元素对应一个0-单形$\Lambda_{v_0}\backslash\Lambda_{0,\ v_0}$。
- 对于形如 $x \cup \{s_t x : \ t \in T_j\}$ 的每个子集，其中 $x \in \Lambda_{v_0}\backslash\Lambda_{0,\ v_0}$以及其中一个 T_j，都有一个0-单形。我们将这个0-单形记为 $y_{T_j}(x)$，但这种标记并不唯一。
- 对于每一组形如0-单形的集合，一个最高维单形（即维数为 $\lfloor N/2 \rfloor$的单形）

$$x \cup \{y_{T_j}(x) : y_{T_j} \in \Delta\}$$

其中，$x \in \Lambda_{v_0}\backslash\Lambda_{0,\ v_0}$ 且 Δ 是包含x_0的 $\mathcal{X}$ 的一个最高维单形。

- 上述最高维单形的所有子单形。

注记 4.2.5。 除去刻画可能的 y_{T_i} 的简化结果外，构造 4.2.4 在以下情形下均适用：$G_{v_0}x_0$ 包含与 x_0 同类型的所有顶点。在 v_0 非分裂的酉情形中，除以下情况外，该条件在所有情形下均成立：为偶数， v_0 分歧，且 G_{v_0} 准分裂；例如参见 [DEP25，表 3。1]。

命题 4.2.6。 设 G、 v_0、 K_0^∞和 $K^{\infty,\ v_0}$ 满足假设 *4.1.3*，其中v_0 分裂或惰性，且相关的 Λ_{v_0} 或 Λ_{v_0} 满足假设 *2.1.5*。那么构造 *4.2.3* 和*4.2.4* 给出了 *Ramanujan* 单纯复形 $X_G(K^{\infty,\ v_0})$ 的显式描述。

注4.2.7。我们强调，假设2.1.5在确保构造4.2.3 和4.2.4 中构造的复形确实分别是商复形 $\Lambda_{v_0}\backslash\mathcal{B}_{v_0}$ 和 $\Lambda_{v_0}\backslash\mathcal{B}_{v_0}$ 方面起着至关重要的作用。另一方面，当 K^{∞}足够小时，v_0 相关的 Λ_{v_0} 和 Λ_{v_0} 确实满足这一假设，因此，在构造拉马努金复形无限族的过程中，这一假设不会造成任何问题。

4.3. **寻找门。** 命题 4.2.6中的构造需要寻找门集 $S_{\Lambda_{0,\ v_0}}$。这可以仿照 [DEP25、§§3.3.1, 4.3.1]。

4.3.1. 设定。 设 B 是 E上的一个中心单代数。 B 上的第二类对合是一个映射 ι，满足 $\iota(ab) = \iota(b)\iota(a)$，并且 ι 在 $E \subseteq B$上对 F 起伽罗瓦共轭的作用。

根据酉群内形式的分类（例如参见 [KMSW14，§0.8]），存在一个中心单代数 B 其维数为 $N \times N$，定义在 E 上，并带有第二类对合 ι，使得

$$G = \{x \in \mathrm{Res}_F^E B : \iota(x)x = 1\},$$

其中 $\mathrm{Res}_F^E B$ 由 $\mathrm{Res}_F^E B(R) = B \otimes_F R$给出。定义 θ 为ι 与取逆映射复合后在 $\mathrm{Res}_F^E B^\times$ 上的对合。

从现在起，假设 v_0 是一个不位于 2 之上的赋值，且在该处 B 是分裂的。因此，$B_{v_0} \cong \mathrm{Mat}_{N\times N}(E_{v_0})$ 以及 $G_{v_0} \cong \mathrm{GL}_N(E_{v_0})$，其中我们简记 $E_{v_0} = E \otimes_F F_{v_0}$。特别地，对合 θ 诱导约化楼的一个仿射嵌入（参见[KP23，定理 12.7.1，第 14 小节，第 490–491]）

$$\mathcal{B}(G_{v_0}) \hookrightarrow \mathcal{B}(B_{v_0}^\times), \tag{4.3.1}$$

其像恰好是 $\mathcal{B}(B_{v_0}^\times)$ 中的 θ-不动点集。注意，条件$Z(G_{v_0}) \subset Z(B_{v_0}^\times) \cap G_{v_0}$ 总是成立。

我们现在对 K_0^∞作一个额外假设。它相当次要：我们相信它在实践中总是可以显式实现（参见 小节§7 例如）。

假设 4.3.1. 存在 B 的一个 $\mathcal{O}_E$-阶 Λ_B，使得：

$$K_0^\infty = G^\infty \cap (\Lambda_B \otimes_{\mathcal{O}_E} \widehat{\mathcal{O}}_E)$$

且 $(\Lambda_B)_{v_0} := \Lambda_B \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_{v_0}}$ 是 B_{v_0}的一个极大 ι-稳定阶。

特别地

$$\Lambda_{0,v_0} = G(F) \cap \prod_{v\nmid v_0} (\Lambda_B)_v = B \cap K_0^{\infty,v_0}$$

且 $K_{B,v_0} := (\Lambda_B)_{v_0} \cap B_{v_0}^\times$ 是 $B_{v_0}^\times$ 的一个 θ-稳定超特殊子群，且包含K_{0,v_0}。此外，$\mathcal{B}(G_{v_0})$中与K_{0,v_0} 相关的顶点 x_0，经由 (4.3.1) 对应于 $\mathcal{B}(B_{v_0}^\times)$中与$K_{B,v_0}$ 相关的顶点x_0'。

4.3.2. 固定坐标。设 A 是 G_{v_0}的一个极大分裂环面，使得 x_0 位于由 A定义的 G_{v_0} 的公寓 $\mathcal{A}(G_{v_0}, A)$ 中。设 A_B 是 $B_{v_0}^\times$ 的一个 θ-稳定极大分裂环面，且包含 A，其存在性由 [HW93命题 2 保证。3]特别地，A 等于 A_B^θ的连通分支。

因此，由 A 定义的 $B_{v_0}^\times$ 的公寓 $\mathcal{A}(B_{v_0}^\times, A_B)$ 包含顶点 x_0'，因为由 (4.3.1) 诱导的公寓嵌入 $\mathcal{A}(G_{v_0}, A) \hookrightarrow \mathcal{A}(B_{v_0}^\times, A_B)$ 将 x_0 映射到 x_0'。因此，$A \subseteq A_B$ 是与 $K_{0,v_0} \subseteq K_{B,v_0}$ 处于良好位置的最大分裂环面。于是存在一个诱导嵌入 $X_*(A) \hookrightarrow X_*(A_B)$，它对应于 Cartan 双陪集的包含关系：对于 $\lambda \in X_*(A)$，以及 E_{v_0} 中的一个一致化元 π_{v_0}：

$$K_{0,v_0}\lambda(\pi_{v_0})K_{0,v_0} \subseteq K_{B,v_0}\lambda(\pi_{v_0})K_{B,v_0}.$$

经过基变换后，不失一般性，我们可以选择同构$B_{v_0} \cong \mathrm{Mat}_{N\times N}(E_{v_0})$，使得：

- $(\Lambda_B)_{v_0} = \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathcal{O}_{E_{v_0}})$ 与 $K_{B,v_0} = \mathrm{GL}_N(\mathcal{O}_{E_{v_0}})$;
- $A_B = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots\ldots, x_N) : x_i \in E_{v_0}^\times\}$;
- 对合 θ 可与 $\mathrm{GL}_N(E_{v_0})$ 上的对合等同，后者由 $g \mapsto h^{-1}\bar{g}^{-T}h$ 给出，其中 $h \in$是 $\mathrm{GL}_N(E_{v_0})$ 中的厄米矩阵;
- 当 $v_0 = w_1w_2$ 分裂时，我们有

$$h = (h_1, \bar{h}_1^T) = \iota((h_1, I_N))(h_1, I_N)$$

对某个 $h_1 \in \mathrm{GL}_N(E_{w_0})$。然后，通过 (h_1, I_N) 作共轭，我们不妨假设 h 是单位元;

• 当 v_0 在 E 中不分裂时，由于 θ 同时固定 K_{B,v_0} 与 A_B，在至多相差一个置换矩阵共轭的意义下，我们可以写成

$$h = w_0 \mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r, h_0, \bar{x}_r, \dots, \bar{x}_2, \bar{x}_1),$$

其中 x_1，……，$x_r \in \mathcal{O}_{E_{v_0}}^{\times}$，$w_0 \in \mathfrak{S}_N$是最长置换矩阵，$r$表示 G_{v_0}的分裂秩，且 $h_0 \in \mathbf{GL}_{N-2r}(\mathcal{O}_{E_{v_0}})$。

最后，定义

$$X_N := \{(a_1, \dots, a_N) : a_1 \geq \cdots \geq a_N,\ a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

如假设4.1.3，我们仅考虑 G_{v_0} 为准分裂且非分歧的情形；其他情形可类似地借助 [DEP25，§3.3.2]中更为复杂的理论加以处理。

4.3.3. 分裂情形。当 $v_0 = w_1 w_2$ 在 E中进一步分裂时，我们可通过取 E_{v_0}中每个对角坐标的赋值，将 $X_*(A_B)$与 $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N$ 等同，并将 $X_+(A_B)$与 $X_N \times X_N$ 等同。于是 $X_*(A)$被等同于 $\mathbb{Z}^N$，且 $X_+(A)$被等同于X_N。更确切地说，我们有

$$G_{v_0} \cong \mathrm{GL}_{N,w_1} \xrightarrow{a \mapsto (a, \bar{a}^{-T})} \mathrm{GL}_{N,w_1} \times \mathrm{GL}_{N,w_2} \cong B_{v_0}^{\times}$$

它诱导出

$$X_+(A) \cong X_N \xrightarrow{\lambda \mapsto (\lambda, -\lambda)} X_N \times (-X_N).$$

¯接下来，条件 sx 与 x 之间的距离为 $1s \in \Lambda_0$（v_0 当s 时）等价于$K_{0属于某个v_0}$-双陪集，该双陪集对应于某个（a_i）$_i \in X_N$ 且$a_1 - a_N = 1$（参见，例如，[DEP25，例 3.3。4]）。相差一个中心元的乘法作用，我们不妨为 s选取一个代表元，使得 $a_N = 0$ 且 $a_1 = 1$。

我们还可以计算得出

$$(\Lambda_B)_{v_0} \cap B_{v_0}^{\times} = \mathrm{Mat}_{N \times N}(\mathcal{O}_{E_{v_0}}) \cap \mathrm{GL}_N(E_{v_0})$$

它是对应于 $(a_i)_i \times (a_i')_i \in X_N \times X_N$ 且$a_i, a_i' \geq 0$ 的 K_{B,v_0}-双陪集之并。

注意，E_{w_2} 的任意一致化元 π_{w_2}，视为 A_B 的元素时，对应于

$$\lambda = ((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) \in \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N.$$

因此，关于 s 的条件等价于要求

$$s \in \pi_{w_2}^{-1}(\Lambda_B)_{v_0} \setminus ((\Lambda_B)_{v_0} \cup \pi_{w_2}^{-1} \bar{\pi}_{w_2} (\Lambda_B)_{v_0}$$

总之，如果我们能找到一个“整体化” $\pi \in \mathcal{O}_E$，使其在 w_2 处是一致化元，并且在其他所有素位处都为整数（例如，当 $\mathcal{O}_E$ 是主理想整环时），那么

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,v_0}} = \{\pi^{-1} g \in \bar{\Lambda}_{0,v_0} : \iota(g) g = \pi\bar{\pi},\ g \in \Lambda_B,\ g \notin \pi\Lambda_B \cup \bar{\pi}\Lambda_B\},$$

注意到 $\pi\bar{\pi}$ 是 F_{v_0}的一个一致化元。

4.3.4. 惰性情形。 当 v_0 在 E 中也是惰性的，且 G_{v_0} 是准分裂的情形下，我们可以通过取赋值，将 $X_*(A_B)$与 $\mathbb{Z}^N$、 $X_+(A_B)$与 X_N 对应起来。于是，$X_*(A)$对应于 $\mathbb{Z}^r$ ，而 $X_+(A)$对应于 X_r。更确切地说，我们有

$$G_{v_0} \cong U_N^{E_{v_0}/F_{v_0}}(h) \hookrightarrow \mathrm{GL}_N(E_{v_0}) \cong B_{v_0}^{\times},$$

诱导该嵌入

$$X_*(A) \cong \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\lambda \mapsto (\lambda,0,\dots,0,-\lambda)} \mathbb{Z}^N \cong X_*(A_B).$$

这里，条件 sx 与 x 的距离为 2，等价于 s 包含于某个双陪集 a_i）$_i \in X_r \subset \mathbb{Z}^r$ 中，其中 $a_1 = 1$ 且$a_r = 0$ （例如参见 [DEP25，例 3.3。4]）

类似地，我们有

$$(\Lambda_B)_{v_0} \cap B_{v_0}^{\times}$$

是所有满足 $(a_i)_i \in X_N$ 且 $a_i \geq 0$的双陪集之并。

因此，与分裂情形一样，只要我们能找到一个适当的“整体化”$\pi \in \mathcal{O}_E$ ，使其在 E 的赋值处（该赋值除以 v_0 ）是一致化元，并且在所有其他赋值处都是整的，我们关于 s 的条件就变为 $\pi s \in (\Lambda_B)_{v_0}$ 和 $s \notin (\Lambda_B)_{v_0}$。这就得到

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,v_0}} = \{\pi^{-1} g \in \bar{\Lambda}_{0,v_0} : \iota(g)g = \pi^2,\ g \in \Lambda_B,\ g \notin \pi\Lambda_B\}.$$

第2 部分：一个具体例子

现在，我们将上述一般理论应用于一个满足假设 4.1.3 的类数为一的群的具体例子： G 和 $K^{\infty,\ v_0} \subseteq G$ 。此例最初见于 [MSG12，定理 A(2)]。

设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$，令 $\mathfrak{p}_0$ 为 $\mathcal{O}_E$ 中位于 2 之上的素理想，由 $(1+\sqrt{-7})/2$ 生成。考虑 E 上的 5 次除法代数 D，其满足：

- Hasse 不变量 $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}_0} D = -\mathrm{inv}_{\bar{\mathfrak{p}}_0} D \neq 0$,
- Hasse 不变量 $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} D = 0$ 对所有 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0,\ \bar{\mathfrak{p}}_0$ 均成立。

令 ι 为 G 上的第二类对合（参见§4.3.1），并令 G 为 $\iota \circ (\cdot)^{-1}$-不动点在 $D^{\times}$中的子群。令 G^{der} 为导出子群， G_{ad}为 G的伴随子群。

对于每个 p，令 $K_0^{\mathrm{der}}{}_{,p} \subseteq G_p^{\mathrm{der}}$ 为仿抛物子群，使得

- 它们是相容的；也就是说，存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的群概形 $\mathscr{G}_{\mathrm{der0}}$ ，使得对于几乎所有素数 p， $\mathscr{G}_{\mathrm{der0}}(\mathbb{Z}_p) = K_{\mathrm{der0},p}$。
- $K_{\mathrm{der0},2}$ 是 $G_{\mathrm{der}_2} \cong \mathrm{SL}_1(D_2)$ 的唯一仿抛物子群。
- $K_{\mathrm{der0},7}$ 属于特殊仿抛物子群的两个共轭类之一（见 [MSG12, §11.2]）。注意，这两个类的性质不同——一个是超特殊的，另一个则不是（尽管它们的体积相同）。
- $K_{\mathrm{der0},p}$ 对于 $p \neq 2,7$ 属于超特殊子群的唯一共轭类。

固定一个关于 $E/\mathbb{Q}$ 的分裂素数 p。令

$$\Lambda_{0,p}^{\mathrm{der}} = G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q}) \cap \prod_{p' \neq p} K_{0,p'}^{\mathrm{der}}.$$

我们将 $\Lambda_{0,p}^{\mathrm{der}}$ 实现为 G_p^{der}中的一个格，并令 $N_{G_{\mathrm{ad},p}}(\Lambda_{0,p}^{\mathrm{der}})$ 为 $\Lambda_{0,p}^{\mathrm{der}}$在 $G_{\mathrm{ad},p}$中的正规化子。于是， [MSG12，定理 A(2)] 推出 $N_{G_{\mathrm{ad},p}}(\Lambda_{0,p}^{\mathrm{der}})$ 在 $\mathcal{B}(G_p)$ 的顶点集 $\mathcal{B}^0(G_p)$ 上单传递作用。

在接下来的小节中，我们将找出该例的一个显式矩阵表示，然后将我们的构造应用于其中。

- 在§5中，我们将除代数 D 表示为数域上的矩阵，并将其 $G \subseteq D$ 有理化。
- 在 §6 中，我们找到了一个方便的极大序 $\Lambda_{\max D}$，它位于 D 内。
- 在§7中，我们检验 $\Lambda_{\max D}$ 定义了子群$K_{0,p}$ 以及格$\Lambda_{0,p}$ 这与 [MSG12]一致。要做到这一点，需要一个技术步骤，将我们使用 G 的语境与 [MSG12] 使用 G_{der}的语境联系起来。
- 在§8中，我们计算 G_p 与 $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q}_p)$ 和 $U_5(\mathbb{Q}_p$的标准模型之间的局部同构，以便计算 G_p 在其 Bruhat–Tits 建筑的标准描述上的作用。这使我们能够实现构造4.2.1和4.2.2。
- 在 §9 中，我们给出一种有效方法，以显式构造门集$S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$中的所有元素。
- 在§10中，我们总结完整的算法。

5. A Group G with Class Number One

在§5.1中，我们将所需的除代数 D 构造为数域上的显式矩阵。在§5.2中，我们在 D 上构造第二类对合，从而能够在有理数域上得到所需的群 G。

5.1. 构造 D。

5.1.1. 基本设定。 论文 [Hul35],尽管仅适用于 $\mathbb{Q}$ 上的可除代数，仍为寻找 D 作为循环代数的特别优美的实现提供了思路。

设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ 如前。我们记

$$\rho_2 = (1+\sqrt{-7})/2 \quad \text{and} \quad \bar{\rho}_2 = (1-\sqrt{-7})/2.$$

于是 $2 = \rho_2\bar{\rho}_2$ 与 $\mathcal{O}_E = \mathbb{Z}[\rho_2]$。注意，素数 p 在 $E/\mathbb{Q}$ 上分裂当且仅当 $p \equiv 1$、2、4 (mod 7)，而在 $E/\mathbb{Q}$ 上惰性当且仅当 $p \equiv 3$、5、6 (mod 7)。我们固定一个分裂的奇素数 p_0。记

$$p_0 = \rho_{p_0}\bar{\rho}_{p_0}, \quad \text{where} \quad \rho_{p_0} = a_0 + b_0\rho_2, \quad \bar{\rho}_{p_0} = a_0 + b_0\bar{\rho}_2, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{N}.$$

我们考虑 $\mathbb{Q}$ 的全实循环扩张 M，其次数为 5，判别式为 p_0^4，其唯一的分歧处为 p_0。理论上， M 可实现为全实域 $\mathbb{Q}(\zeta_{p_0} + \zeta_{p_0}^{-1})$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的子域，其中 ζ_{p_0} 是本原 p_0 次单位根。因此， p_0 属于范数群 $N_{M/\mathbb{Q}}(M^\times)$。我们固定 $\delta \in M$，使得 $N_{M/\mathbb{Q}}(\delta) = p_0$。我们固定一个 $\mathbb{Z}$-基 α_i、 $i = 0$、1、2、3、4，使得 $\mathcal{O}_M = \bigoplus_{i=0}^4 \mathbb{Z}\alpha_i$。特别地，当 $\mathcal{O}_M$ 在 $\mathbb{Z}$ 上单生成时，我们可以找到某个 $\alpha_1 \in \mathcal{O}_M$，并选取 $\alpha_i = \alpha_1^i$、 $i = 0$、1、2、3、4。

令 L 为 M 与 E 的复合域，它是 $\mathbb{Q}$ 上次数为 10 的 CM 域。由于 $M/\mathbb{Q}$ 和 $E/\mathbb{Q}$ 都是伽罗瓦扩张，因此 $L/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 为 $= \mathbb{Z}/10$，而且 L/E 也是循环扩张，次数为 5。令 σ 为 $\mathrm{Gal}(L/E)$ $\cong\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ 中一个固定的 5 阶自同构，令 $x \mapsto \bar{x}$ 为 $\mathrm{Gal}(L/M)$ $\cong\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ 中 2 阶自同构。我们有 $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_E\mathcal{O}_M$，因为判别式

M 与 E 互素。此外， L/E 仅在 ρ_{p_0} 和 $\bar{\rho}_{p_0}$ 处分歧，且在那里全温和分歧。

5.1.2. 构造 D。现在我们给出一个在 E 上次数为 5 的除代数 D 的具体实现（它仅在 ρ_2 和 $\bar{\rho}_2$ 处分裂）。

我们假设 ρ_{p_0} 和 $\bar{\rho}_{p_0}$ 都不属于范数群 $N_{L/E}(L^\times)$。那么，我们可以找到一个整数 $d \in \{0,1,2,3,4\}$，使得 $\rho_2/\bar{\rho}_2\bar{\rho}_{p_0}^{2d}$ 在 $\mathbb{F}_{p_0} \cong \mathcal{O}_E/\rho_{p_0}\mathcal{O}_E$ 中是一个五次幂。对于同一个 d，我们也有 $\rho_2\rho_{p_0}^{2d}/\bar{\rho}_2$ 是 $\mathbb{F}_{p_0} \cong \mathcal{O}_E/\bar{\rho}_{p_0}\mathcal{O}_E$ 的五次幂。定义

$$a_1 = \rho_2\rho_{p_0}^d/\bar{\rho}_2\bar{\rho}_{p_0}^d \quad \text{and} \quad a_e = a_1^e, \quad e = 1,2,3,4.$$

我们断言， a_e 关于 L_v/E_v 在 E 上所有不在 2 之上的素位 v 处都是范数元素，但在 $v = \rho_2,\ \bar{\rho}_2$ 处不是范数元素。事实上，

- L/E 在 E 的某个不位于 2 或 p_0 之上的赋值 v 处或者分裂，或者惰性，并且 a_e 在 v 处的赋值为 0。那么 a_e 是 v 处的范数元素。
- p_0 和 $\rho_2\rho_{p_0}^{2d}/\bar{\rho}_2$ 都是 $\bar{\rho}_{p_0}$ 处的范数元素，后者是因为它在 $\mathbb{F}_{p_0} \cong \mathcal{O}_E/\bar{\rho}_{p_0}\mathcal{O}_E$ 中的像是一个五次幂。因此 $a_e = p_0^{-de} \times (\rho_2\rho_{p_0}^{2d})^e/\bar{\rho}_2^e$ 是 $\bar{\rho}_{p_0}$ 处的范数元素。

- 类似地， a_e 也是 ρ_{p_0} 处的范数元素。
- 最后， a_e 不是 ρ_2 或 $\bar{\rho}_2$ 处的范数元素，因为 L/E 在这两个赋值处均非分歧，且 a_e 在这两个赋值处的赋值不能被 5 整除。

因此，对于固定的 e，在 $a = a_e$ 的条件下，除代数

$$D = D(L,a) := \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L, \quad u^5 = a, \quad ulu^{-1} = l^\sigma \text{ for all } l \in L$$

仅在 ρ_2 和 $\bar{\rho}_2$ 处非分裂。通过选取 e 并利用哈斯原理，我们可以使其属于所需的确切同构类。

我们也可以通过以下方式实现 $D \subseteq \mathrm{Mat}_{5\times 5}(L)$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ a & & & & \end{pmatrix}, \qquad l \mapsto \begin{pmatrix} l & & & & \\ & l^\sigma & & & \\ & & l^{\sigma^2} & & \\ & & & l^{\sigma^3} & \\ & & & & l^{\sigma^4} \end{pmatrix} \text{ for } l \in L. \tag{5.1.1}$$

这确实给出了代数幺半群在 E 上的一个嵌入

$$\eta : D \hookrightarrow \mathrm{Res}_E^L \mathrm{Mat}_{5\times 5}. \tag{5.1.2}$$

为便于后续使用，我们可以并将选取一个元素 $b \in 2\mathcal{O}_E$，使得

$$\bar{b} \equiv b^{-1} \pmod{p_0}, \quad b^5 \equiv p_0^{de}a \pmod{\bar{\rho}_{p_0}\mathcal{O}_E}, \quad b^5 \equiv p_0^{-de}a \pmod{\rho_{p_0}\mathcal{O}_E}.$$

5.2. **构造** G。

5.2.1. 对合。 我们在 D 上定义如下对合（作为反同态）：

$$\iota : u \mapsto u^{-1}, \quad l \mapsto \bar{l} \quad \text{for all } l \in L.$$

由于 $\bar{a} = a^{-1}$，它确实是第二类对合。该对合的一个有用公式为：

$$\iota\left(\sum_{i=0}^{4} l_i u^i\right) = \sum_{i=0}^{4} u^{-i}\bar{l}_i = \bar{l}_0 + \sum_{i=1}^{4} \bar{a}\, u^i \bar{l}_{5-i} = \bar{l}_0 + \sum_{i=1}^{4} a^{-1}\, \bar{l}_{5-i}^{\sigma^i} u^i. \tag{5.2.1}$$

5.2.2. 群。 考虑由以下条件定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群 G

$$G(R) := U_{1,D}(R) := \{d \in (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times : \iota(d)d = 1\}.$$

由于 $\bar{a} = a^{-1}$，对合 ι 对应于共轭转置对合的拉回：

$$\iota : A \mapsto \bar{A}^T,$$

经由 η。这将 G 实现为以下嵌入下的一个子群：

$$\eta_G : G \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{M} U_5^{L/M,\mathrm{Id}} \hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{L} \mathrm{GL}_5, \tag{5.2.2}$$

其中 $U^{L/M}{}_{,5}{}^{\mathrm{Id}}$ 表示保持 $\mathrm{Res}_M^L \mathbb{G}_a^5$ 上对角厄米形式的（非准分裂）酉群。由于该厄米形式是正定的，$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{M} U^{L/M}{}_{,5}{}^{\mathrm{Id}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是各向异性的，因此 G 亦然。

5.3. **初始数据的一个具体选择**。 在本小节中，我们在 $p_0 = 11$ 这一特殊情形下考虑前两段的构造。在此情形下，

- 我们有 $\rho_{11} = 2 + \sqrt{-7}$和 $\bar{\rho}_{11} = 2 - \sqrt{-7}$。
- 域 M由最小多项式 $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$定义，并以 数域 5.5.14641.1 在 LMFDB 中编号。
- 记 α_1 为上述多项式的一个根，并将其实现为 M 中的一个元素，我们进一步有 $\mathcal{O}_M = \mathbb{Z}[\alpha_1]$。我们固定 σ 的一个选取，例如$\sigma(\alpha_1) = -\alpha_1^4 + 4\alpha_1^2 - 2$。我们还有 $\mathcal{O}_M = \mathbb{Z}\langle \alpha_1, \alpha_1^\sigma, \alpha_1^{\sigma^2}, \alpha_1^{\sigma^3}, \alpha_1^{\sigma^4} \rangle$。
- 使用 SageMath，我们找到元素 $\delta = \alpha_1 + 2$，使得 $N_{M/\mathbb{Q}}(\delta) = 11$。
- 我们选取 $d = 3$。在这种情况下，我们有$\bar{\rho}_{11} = 4 - \rho_{11} = 4$，
  $\rho_2 = 5, \quad \bar{\rho}_2 = -4$ 在 $\mathbb{F}_{11} \cong \mathcal{O}_E/\rho_{11}\mathcal{O}_E$中。同样，我们有 和 $\rho_2\rho_{11}^{2d}/\bar{\rho}_2 = (-4 \times 4^6)/5 = (-1)^5$ 在 $\mathbb{F}_{11} \cong \mathcal{O}_E/\bar{\rho}_{11}\mathcal{O}_E$.中
  $$\rho_2/\bar{\rho}_2\bar{\rho}_{11}^{2d} = 5/(-4 \times 4^{2\times 3}) = (-1)^5 \quad \text{in} \quad \mathbb{F}_{11} \cong \mathcal{O}_E/\rho_{11}\mathcal{O}_E.$$

$$\rho_{11} = 4 - \bar{\rho}_{11} = 4, \quad \rho_2 = -4, \quad \bar{\rho}_2 = 5 \quad \text{in} \quad \mathbb{F}_{11} \cong \mathcal{O}_E/\bar{\rho}_{11}\mathcal{O}_E$$

- 我们选取 $e = 1$ 和 $b = 10$。

备注 5.3.1。 另一种可能的选择是 $p_0 = 331$。在这种情况下，我们可以单纯地选取 $d = 0$，因为很容易验证 $\rho_2/\bar{\rho}_2$ 已经是$\mathcal{O}_E/\rho_{331}\mathcal{O}_E$ 和 $\mathcal{O}_E/\bar{\rho}_{331}\mathcal{O}_E$中的五次幂。这一特殊性质将在很大程度上简化我们下面的讨论；但另一方面， M的判别式和整数环都比 $p_0 = 11$的复杂得多。

5.4. **一些技术引理**。 我们在此记录两个与算术设置相关、稍后会用到的技术引理:

引理 5.4.1。 定义 $N^1(L) := \{x \in L^\times : x\bar{x} = 1\}$。那么第一伽罗瓦上同调 $H^1(\mathrm{Gal}(L/E)\ N^1(L))$ 是平凡的。换言之，对于任意满足 $x_0\bar{x}_0 = 1$ 的 $x_0 \in E^\times$，存在满足 $l_0 l_0 = 1$ 且 $N_{L/E}(l_0) = x_0$ 的 $l_0 \in L^\times$。

证明。 考虑短正合列

$$1 \to N^1(L) \to L^\times \to N_{L/M}(L^\times) \to 1.$$

取其对应的长正合列，并利用希尔伯特第90定理可知 $H^1(\mathrm{Gal}(L/E)\ L^\times) = \{1\}$，得到

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/E), N^1(L)) = N_{L/M}(L^\times)^{\mathrm{Gal}(L/E)}/N_{E/\mathbb{Q}}(E^\times).$$

因此，Hasse 范数定理表明， $H^1(\mathrm{Gal}(L/E)\ N^1(L)) = \{1\}$ 当且仅当对所有素数 p:

$$N_{L_p/M_p}(L_p^\times)^{\mathrm{Gal}(M_p/\mathbb{Q}_p)}/N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(E_p^\times) = \{1\}.$$

我们逐一检验每个 p:

当 p 在 $M/\mathbb{Q}$上分裂时，我们有 $L_p \cong E_p^{\oplus 5}$，因此

$$N_{L_p/M_p}(L_p^\times)^{\mathrm{Gal}(M_p/\mathbb{Q}_p)} = N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(E_p^\times).$$

当 p 在 $E/\mathbb{Q}$上分裂时，我们有

$$N_{L_p/M_p}(L_p^\times) = M_p^\times \quad \text{and} \quad N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(E_p^\times) = \mathbb{Q}_p^\times.$$

此外， $M^\times{}^{\mathrm{Gal}(M_p/\mathbb{Q}_p)\,p} = \mathbb{Q}_p^\times$.

当 p 既不在 $M/\mathbb{Q}$ 上分裂，也不在 $E/\mathbb{Q}$ 上分裂时（特别是 $p \neq 2$），我们有

$$N_{L_p/M_p}(L_p^\times)^{\mathrm{Gal}(M_p/\mathbb{Q}_p)} \quad \text{and} \quad N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(E_p^\times)$$

是 $\mathbb{Q}_p^\times$的子群，后者的指数为 2。因此，我们只需证明

$$N_{L_p/M_p}(L_p^\times)^{\mathrm{Gal}(M_p/\mathbb{Q}_p)} \neq \mathbb{Q}_p^\times$$

当 L_p/M_p 非分歧时， $\mathbb{Q}_p$ 的一个一致化元不属于前者的范数。当L_p/M_p 温和分歧时（即 $p = 7$），$\mathbb{Z}_p^\times$中一个不属于 $\mathbb{Z}_p^{\times 2}$的元素不属于前者的范数。这就完成了该断言和引理的证明。

□

引理 5.4.2. $Z_G(\mathbb{Q}) = N^1(E) := \{x \in E^\times : x\bar{x} = 1\}$.

证明。 首先， $N^1(E) = G(\mathbb{Q}) \cap E^\times \subseteq Z_G(\mathbb{Q})$。给定一个 x 属于 G 但不属于 $E^\times$的元素，考虑 $E[x]$ 在 D 中的域，其次数为 5，那么存在另一个$L \subset D$ 在 E 上的 5 次域，它与 x不交换。此外，在 L 中存在一个范数为 1 的元素不属于 E，因此我们可以写作 $L = E[y]$，其中 $\bar{y}y = 1$。因此， x 和 y 不交换，所以 x 不在中心 $Z_G(\mathbb{Q})$中。□

6. Construction of a Maximal ι-Stable Order

在本小节中，我们构造一个 ι-稳定的 D 的极大序 $\Lambda_D^{\max}$。

6.1. 构造极大序 $\Lambda_D^{\max}$。 在分解 $D = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L$ 下，我们如下定义 D 的一个阶 Λ_D：

$$\Lambda_D = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{dei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{dei}{5} \rceil} \mathcal{O}_L.$$

利用 $u^5 = a = (\rho_2 \rho_{p_0}^d)^e / (\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_{p_0}^d)^e$ 这一事实，很容易验证 Λ_D 确实是 D 的一个阶。此外，通过直接计算可得

$$\iota(u^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{dei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{dei}{5} \rceil}) = u^{5-i} \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{e(5-i)}{5} \rceil} \bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{de(5-i)}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{e(5-i)}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{de(5-i)}{5} \rceil}.$$

因此，Λ_D 是 ι-稳定的。

现在我们构造一个包含 Λ_D 的 D 的极大序 $\Lambda_D^{\max}$。定义

$$\Lambda_{D,+} = \bigoplus_{i=0}^{4} u_+^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{2dei}{5} \rceil} \mathcal{O}_L, \quad \text{where } u_+ = u\delta^{de} \text{ and } u_+^5 = p_0^{de} a$$

$$\Lambda_{D,+}^{\max} = \bigoplus_{i=0}^{4} y_+^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{4i}{5} \rceil} \mathcal{O}_L, \quad \text{where } y_+ = (b - u_+)\delta^4 / \bar{\rho}_{p_0}$$

$$\Lambda_{D,-} = \bigoplus_{i=0}^{4} u_-^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{2dei}{5} \rceil} \mathcal{O}_L, \quad \text{where } u_- = u\delta^{-de} \text{ and } u_-^5 = p_0^{-de} a$$

$$\Lambda_{D,-}^{\max} = \bigoplus_{i=0}^{4} y_-^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{2dei}{5} \rceil} \mathcal{O}_L, \quad \text{where } y_- = (b - u_-)\delta^4 / \rho_{p_0}.$$

由我们的构造可知，$\Lambda_{D,+}$ 和 $\Lambda_{D,-}$ 是 D 的序；但另一方面，$\Lambda_{D,+}^{\max}$ 和 $\Lambda_{D,-}^{\max}$ 先验而言只是 D 的格。最后，定义

$$\Lambda_D^{\max} := \Lambda_{D,+}^{\max} + \Lambda_{D,-}^{\max} \subset D.$$

命题 6.1.1. 以下结论成立：

(1) 对于 E 中任意一个不整除 p_0 的赋值 v，有 $\Lambda_{D_v,+}^{\max} = \Lambda_{D_v,-}^{\max} = \Lambda_{D_v,+} = \Lambda_{D_v,-} = \Lambda_{D_v}$，它还是 D_v 的一个极大序；*(2)* $\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max}$ 是 $D_{\bar{\rho}_{p_0}}$ 的一个极大序，其中包含 $\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}}}$, $\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}$, $\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},-}$ 和 $\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},-}^{\max}$。*(3)* $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}^{\max}$ 是 $D_{\rho_{p_0}}$ 的一个极大序，其中包含 $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}}}$, $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},+}$, $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}$ 和 $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},+}^{\max}$。*(4)* $\Lambda_D^{\max}$ 是 D 的一个极大序，其中包含 Λ_D。

证明。 陈述 (1)

这些等式直接由这些序的定义得出，因此我们只需证明 Λ_{D_v} 是 D_v 的极大序。如果 v 不整除 2 或 p_0，那么除代数 D_v 是分裂的。在这种情况下，扩张 L_v/E_v 要么是分裂的，要么是非分歧的。特别地，范数映射

$$N_{L_v/E_v} : \mathcal{O}_{L_v}^\times \to \mathcal{O}_{E_v}^\times$$

是满射。由于 a 在 $\mathcal{O}_E$中是整的，我们可以选取 $\gamma_v \in \mathcal{O}_{L_v}^\times$ 使得 $N_{L_v/E_v}(\gamma_v) = a$。记 $u = u'\gamma_v$。由于 ρ_2, $\bar{\rho}_2$ 在 $\mathcal{O}_{E_v}$中也是整的，因此我们有

$$\Lambda_{D_v} = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i \mathcal{O}_{L_v} = \bigoplus_{i=0}^{4} u'^i \mathcal{O}_{L_v}.$$

注意到 $(u')^5=1$，我们将其识别为

$$D_v=\bigoplus_{i=0}^{4}u'^iL_v$$

其中 u' 被视为 5 阶伽罗瓦作用，而 L_v 中的元素被视为乘法作用。此外， Λ_{D_v} 恰好是D_v 中固定 L_v的格 $\mathcal{O}_{L_v}$ 的阶。在分裂或非分歧情形下， $\mathcal{O}_{L_v}$ 是 L_v中的极大格，因此 Λ_{D_v} 是 D_v中的极大序。

现在假设 $v=\rho_2$ 或 $\bar{\rho}_2$，这意味着 D_v 不分裂。令 w 为 L 在 v上方的唯一赋值。于是 L_w/E_v 是一个 5 次非分歧扩张。根据定义，

$$\Lambda_{D_v}=\left\{\sum_{i=0}^{4}u^il_i\;\middle|\;l_i\in L_w,\ 5w(l_i)\geq -iw(a)\right\}.$$

此外，对于 $x=\sum_{i=0}^{4}u^il_i\in D_v$，相对于 D_v ， u^il_i、 $i=0$、.....、4 的赋值两两不同。因此， Λ_{D_v} 由D_v 中赋值非负的元素构成，所以它是 D_v的极大序。命题（2）

第一个断言可由 [Hul35中定理 4 的证明（第 526 页-527]）中的论证得出。更确切地说，我们可以使用 $\mathcal{O}_{E_{\bar{\rho}_{p_0}}}$-基 $\{y_+^i\alpha_j:\ 0\leq i,\ j\leq 4\}$ 来证明 $\Lambda^{\max}_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}$ 是一个阶，并按照 [Hul35中定理 4 的证明（第 526 页-527] , ）计算其判别式，结果为 $\mathcal{O}_{E_{\bar{\rho}_{p_0}}}$的理想 $\mathfrak{p}_{E_{\bar{\rho}_{p_0}}}^{5(5-1)}$ 。根据 [Rei03定理 14.9]， $\Lambda^{\max}_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}$ 因此是一个极大序。特别地，上述论证表明

$$\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}=\bigoplus_{i=0}^{4}u_+^i\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}\subset\bigoplus_{i=0}^{4}y_+^i\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}=\Lambda^{\max}_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}.$$

此外，通过直接计算可得

$$\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},-}=\bigoplus_{i=0}^{4}u_+^i\delta^{-2dei}\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil\frac{2dei}{5}\rceil}\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}\subset\bigoplus_{i=0}^{4}u_+^i\delta^{-dei}\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil\frac{dei}{5}\rceil}\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}=\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}}}\subset\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+},$$

这里用到了 δ 在 $\bar{\rho}_{p_0}$ 处的赋值为 $1/5$这一事实，以及 $0\leq\lceil\frac{dei}{5}\rceil-\frac{dei}{5}\leq\lceil\frac{2dei}{5}\rceil-\frac{2dei}{5}$。最后，我们有

$$y_-\delta^{-2de}=(b-u_-)\delta^{-2de}/\rho_{p_0}=(b\delta^{-2de}-u_+)/\rho_{p_0}$$

因此对于 $i=0$，1，2，3，4，我们有

$$y_-^i\bar{\rho}_2^{\lceil\frac{ei}{5}\rceil}\rho_2^{\lceil-\frac{ei}{5}\rceil}\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil\frac{2dei}{5}\rceil}\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}=(b\delta^{-2de}-u_+)^i\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil\frac{2dei}{5}\rceil}\delta^{2dei}\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}}\subset\bigoplus_{i=0}^{4}u_+^i\mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}},$$

因为 $b\delta^{-2de}$的赋值为 $2de/5\geq 0$，而 $\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil\frac{2dei}{5}\rceil}\delta^{2dei}$在 $\bar{\rho}_{p_0}$处的赋值为$\lceil\frac{2dei}{5}\rceil-\frac{2dei}{5}\geq 0$。因此我们证明了 $\Lambda^{\max}_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},-}\subset\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}$。命题（3）

这个论证与（2）类似。唯一的变化是要证明 $\Lambda^{\max}_{D_{\rho_{p_0}},+}$ 包含于 $\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}$。这是因为

$$y_+=(b-u_+)\delta^4/\bar{\rho}_{p_0}=(b-u_-\delta^{2de})\delta^4/\bar{\rho}_{p_0}$$

因此，对于 $i=0$，1，2，3，4，我们有

$$y_+^i \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5} \rceil} \rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5} \rceil} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{4i}{5} \rceil} = (b - u_- \delta^{2de})^i \delta^{4i} \rho_{p_0}^{\lceil -\frac{4i}{5} \rceil} \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}} \subset \bigoplus_{i=0}^{4} u_-^i \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}},$$

因为 b，δ^{2de}是整的，且 $\delta^{4i}\rho_{p_0}^{\lceil -\frac{4i}{5} \rceil}$在 ρ_{p_0}处的赋值为$-\frac{4i}{5} + \lceil -\frac{4i}{5} \rceil \geq 0$。陈述 (4)

这是因为 $\Lambda_{D_v}^{\max}$是 D_v 的极大序，并且对于 E的任意赋值 v，都有 $\Lambda_{D_v}^{\max} \supset \Lambda_{D_v}$。[3]

□

6.2. **ι-稳定性**。在本节中，我们验证 $\Lambda_D^{\max}$是 ι-稳定的。

引理 6.2.1。 *(1)* 对于一个不同于 p_0 的素数 p，我们有 $\iota(\Lambda_{D_p}) = \Lambda_{D_p}$.

(2) 我们有

$$\iota(\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}}}^{\max}) = \iota(\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max}) = \Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}^{\max} = \Lambda_{D_{\rho_{p_0}}}^{\max}$$

and

$$\iota(\Lambda_{D_{\rho_{p_0}}}^{\max}) = \iota(\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}^{\max}) = \Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max} = \Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}}}^{\max}.$$

这里我们使用识别

$$D_{p_0} \cong \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L_{p_0} \cong \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L_{\rho_{p_0}} \times \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L_{\bar{\rho}_{p_0}} \cong D_{\rho_{p_0}} \times D_{\bar{\rho}_{p_0}},$$

and

$$\iota((\sum_{i=0}^{4} u^i l_i, \sum_{i=0}^{4} u^i l_i')) = (\sum_{i=0}^{4} \bar{l}_i' u^{-i}, \sum_{i=0}^{4} \bar{l}_i u^{-i}),\ l_i \in L_{\rho_{p_0}},\ l_i' \in L_{\bar{\rho}_{p_0}}.$$

As a result, $\iota(\Lambda_{D_{p_0}}^{\max}) = \Lambda_{D_{p_0}}^{\max}$.

证明。 (1) 的证明是直接的。对于 $p \neq 2$，我们有

$$\Lambda_{D_p} = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i \mathcal{O}_{L_p},$$

其中我们记 $\mathcal{O}_{L_p} := \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$。它是 ι-稳定的，因为在这种情况下，$\mathcal{O}_{L_p}$ 是 Gal(L/K)-稳定的，$\iota(u^i) = u^{5-i}a^{-1}$ 且 $a \in \mathcal{O}_{L_p}^{\times}$。对于 $p=2$，由 $\iota(\Lambda_{D_2})$ 和 Λ_{D_2} 都是 $D_2 = D_{\rho_2} \times D_{\bar{\rho}_2}$ 的极大序这一事实可知，它们相同。

对于 (2)，根据对称性和命题 6.1.1.(2)(3)，我们只需证明$\iota(\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max}) \subset \Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}^{\max}$。这里，$\Lambda_{D_{\rho_{p_0}},-}^{\max}$是 $D_{\rho_{p_0}}$的一个极大序，而$\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max}$是 $D_{\bar{\rho}_{p_0}}$的一个极大序。由于

$$\Lambda_{D_{\bar{\rho}_{p_0}},+}^{\max} = \bigoplus_{i=0}^{4} y_+^i \mathcal{O}_{L_{\bar{\rho}_{p_0}}},$$

[3]我们默用了以下事实：设 Γ 是数域 E 上除代数 D 的一个格，则 $\Gamma = D \cap \bigcap_{v \text{ 有限}} \Gamma \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_{v\circ}}$ 事实上，我们可以找到一个自由的 $\mathcal{O}_E$-基 $e_1, \ldots, e_{d^2}$，它属于 Γ，使得 $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{d^2} \mathcal{O}_E e_i$ 且 $\Gamma_v = \bigoplus_{i=1}^{d^2} \mathcal{O}_{E_v} e_{i\circ}$ 一般而言，D 中的任意元素 $x = \sum_{i=1}^{d^2} x_i e_i$，$x_i \in E$ 属于 Γ，当且仅当对每个 i 和 v，x_i 都属于 $\mathcal{O}_{E_v}$，因为 $\mathcal{O}_E = E \cap \bigcap_{v \text{ 有限}} \mathcal{O}_{E_{v\circ}}$

我们只需证明

$$\iota(y_+) \in \Lambda^{\max}_{D_{\rho_{p_0}},-} = \bigoplus_{i=0}^{4} y_-^i \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}}.$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\iota(y_+) &= \iota((b-u_+)\delta^4/\bar{\rho}_{p_0}) = \iota(b\delta^4 - u\delta^{4+de})/\rho_{p_0} = (\delta^4\bar{b} - \delta^{4+de}u^{-1})/\rho_{p_0}\\ &= (\delta^4\bar{b} - \delta^{4+de}u^4a^{-1})/\rho_{p_0} = (\delta^4\bar{b} - u_-^4\delta^{4de}(\delta^\sigma)^{4+de}a^{-1})/\rho_{p_0}\\ &= [\delta^4\bar{b} - (y_-\rho_{p_0}\delta^{-4} - b)^4\delta^{4de}(\delta^\sigma)^{4+de}a^{-1}]/\rho_{p_0}\\ &= \delta^4\bar{b}/\rho_{p_0} - (y_-\rho_{p_0}\delta^{-4} - b)^4\delta^{4de}(\delta^\sigma)^{de}a^{-1}(\delta^\sigma)^4/\rho_{p_0}\end{aligned}$$

引理 6.2.2。 $(y_-\rho_{p_0}\delta^{-4} - b)^4 = b^4 + \sum_{i=1}^4 y_-^i a_i$，其中 a_i 属于 $\mathfrak{p}_{L_{\rho_{p_0}}}$。

证明。 通过直接计算，对于 $l \in L$，我们有

$$ly_-\rho_{p_0}\delta^{-4} = l(b - u\delta^{-de}) = -ul^{\sigma^{-1}}\delta^{-de} + bl = -y_-\rho_{p_0}\delta^{-4}l^{\sigma^{-1}} + b(l - l^{\sigma^{-1}}).$$

多次使用此等式，将 $(y_-\rho_{p_0}\delta^{-4} - b)^4$ 中每个单项式里出现的 y_- 移到最左边，再利用 $b \in \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}} \cap E$ 和 $\rho_{p_0}\delta^{-4} \in \mathfrak{p}_{L_{\rho_{p_0}}}$，即可得到结论。

□

因此，我们只需证明

$$\delta^4\bar{b}/\rho_{p_0} - b^4\delta^{4de}(\delta^\sigma)^{de}a^{-1}(\delta^\sigma)^4/\rho_{p_0} \in \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}},$$

或者等价地，

$$\bar{b} - b^4\delta^{4de}(\delta^\sigma)^{de}a^{-1}(\delta^\sigma)^4\delta^{-4} \in \mathfrak{p}_{L_{\rho_{p_0}}}.$$

这只是因为它在 $\mathbb{F}_{p_0} \cong \mathcal{O}_{L_{\rho_{p_0}}}/\mathfrak{p}_{L_{\rho_{p_0}}}$ 中的像是

$$b^{-1} - b^4\delta^{4de}\delta^{de}a^{-1}\delta^4\delta^{-4} = b^{-1}(1 - b^5p_0^{de}a^{-1}) = 0,$$

因为 $\delta^5 = p_0$、$\bar{b} = b^{-1}$，且 σ-作用在剩余域 $\mathbb{F}_{p_0}$上是平凡的。

□

因此，我们有 $\iota(\Lambda_D^{\max}) = \Lambda_D^{\max}$，因为在每个素数 p处取完备化后，同样的方程仍然成立。我们将其记为以下形式命题。

命题 6.2.3。 $\Lambda_D^{\max}$是 ι-稳定的。

6.3. **和$(\Lambda_D^{\max})^\iota$的描述**。这里的主要目标是将 $\Lambda_D^{\max}$及其 ι-不变部分 $(\Lambda_D^{\max})^\iota$ 描述为自由的 $\mathbb{Z}$-模，然后提出一种计算基的方法。

我们首先研究 D 的 ι-不变部分 D^ι。通过直接计算，对于 $\gamma = \sum_{i=0}^4 u^i l_i \in D^\iota$ 且满足 $l_i \in L$，我们有

$$\bar{l}_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{l}_i a^{-1}u^{5-i} = \iota(\gamma) = \gamma = l_0 + \sum_{i=1}^4 l_i^{\sigma^i}u^i.$$

比较系数可得

$$\bar{l}_0 = l_0,\ l_1^\sigma = a^{-1}\bar{l}_4,\ l_2^{\sigma^2} = a^{-1}\bar{l}_3,\ l_3^{\sigma^3} = a^{-1}\bar{l}_2,\ l_4^{\sigma^4} = a^{-1}\bar{l}_1.$$

令 $l_i = m_i^0 + \rho_2 m_i^1$ 对于 $m_i^0,\ m_i^1 \in M$，则 $m_0^0,\ m_1^0,\ m_1^1,\ m_2^0,\ m_2^1$ 是独立变量，其余变量 $m_0^1,\ m_3^0,\ m_3^1,\ m_4^0,\ m_4^1$ 则由前者确定

变量。更准确地说，令 $a = a_0 + \rho_2 a_1$ 由 a_0，$a_1 \in \mathbb{Q}$ 表示，则通过直接计算可得

$$\begin{aligned} &m_0^1 = 0,\ m_4^0 = (a_0+a_1)(m_1^0)^\sigma + (a_0-a_1)(m_1^1)^\sigma,\\ &m_4^1 = -a_1(m_1^0)^\sigma - (a_0+a_1)(m_1^1)^\sigma,\\ &m_3^0 = (a_0+a_1)(m_2^0)^{\sigma^2} + (a_0-a_1)(m_2^1)^{\sigma^2},\\ &m_3^1 = -a_1(m_2^0)^{\sigma^2} - (a_0+a_1)(m_2^1)^{\sigma^2}. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

现在考虑 $\Lambda_D^{\max}$和 $(\Lambda_D^{\max})^\iota$。先验而言，它们分别是秩为 50 和 25 的自由 $\mathbb{Z}$-模。记

$$D = \bigoplus_{i=0}^{4}\bigoplus_{j=0}^{1} u^i \rho_2^j M$$

此外，作为自由 $\mathcal{O}_M$-模：

$$\Lambda_{D,+}^{\max} = \bigoplus_{i=0}^{4}\bigoplus_{j=0}^{1} y_+^i a_{+,i}\rho_2^j \mathcal{O}_M \quad \text{and} \quad \Lambda_{D,-}^{\max} = \bigoplus_{i=0}^{4}\bigoplus_{j=0}^{1} y_-^i a_{-,i}\rho_2^j \mathcal{O}_M$$

with

$$a_{+,i} := \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5}\rceil}\rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5}\rceil}\rho_{p_0}^{\lceil -\frac{4i}{5}\rceil} \quad \text{and} \quad a_{-,i} := \bar{\rho}_2^{\lceil \frac{ei}{5}\rceil}\rho_2^{\lceil -\frac{ei}{5}\rceil}\bar{\rho}_{p_0}^{\lceil \frac{2dei}{5}\rceil},\ i = 0,1,2,3,4.$$

定义 $\vec{u}$，$\vec{y}_+$，$\vec{y}_-$ 为 D^{10} 中的行向量，其 $(2i+j+1)$-th 个坐标为

$$u^i\rho_2^j, \quad y_+^i a_{+,i}\rho_2^j, \quad y_-^i a_{-,i}\rho_2^j$$

分别对应 $i = 0$，1，2，3，4 和 $j = 0$，1。定义

$$T_{\vec{u},\vec{y}}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4\\ 0 & t & \Sigma_{1,1}(s)t & \Sigma_{2,1}(s)t & \Sigma_{3,1}(s)t\\ 0 & 0 & \Pi_2(t) & \Sigma_{1,2}(s)\Pi_2(t) & \Sigma_{2,2}(s)\Pi_2(t)\\ 0 & 0 & 0 & \Pi_3(t) & \Sigma_{1,3}(s)\Pi_3(t)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_4(t) \end{pmatrix},$$

其中，对于 $s,t \in L$，我们使用简写：

$$\Sigma_{1,1}(s) = s + s^{\sigma^{-1}}, \quad \Sigma_{2,1}(s) = s^2 + ss^{\sigma^{-1}} + (s^{\sigma^{-1}})^2,$$
$$\Sigma_{3,1}(s) = s^3 + s^2 s^{\sigma^{-1}} + s(s^{\sigma^{-1}})^2 + (s^{\sigma^{-1}})^3, \quad \Sigma_{1,2}(s) = s + s^{\sigma^{-1}} + s^{\sigma^{-2}},$$
$$\Sigma_{2,2}(s) = s^2 + ss^{\sigma^{-1}} + ss^{\sigma^{-2}} + (s^{\sigma^{-1}})^2 + s^{\sigma^{-1}}s^{\sigma^{-2}} + (s^{\sigma^{-2}})^2,$$
$$\Sigma_{1,3}(s) = s + s^{\sigma^{-1}} + s^{\sigma^{-2}} + s^{\sigma^{-3}}, \quad \Pi_k(t) = \prod_{i=0}^{k-1} t^{\sigma^{-i}}.$$

回想一下 $y_\pm = s_\pm + ut_\pm$。于是，通过直接计算，我们得到[4]

$$(1, y_\pm, y_\pm^2, y_\pm^3, y_\pm^4) = (1, u, u^2, u^3, u^4)T_{\vec{u},\vec{y}}(s_\pm, t_\pm),$$

其中

$$s_+ = \delta^4 b/\bar{\rho}_{p_0}, \quad t_+ = -\delta^{de+4}/\bar{\rho}_{p_0}, \quad s_- = \delta^4 b/\rho_{p_0}, \quad t_- = -\delta^{4-de}/\rho_{p_0}.$$

由此，我们定义矩阵 $A_+, A_- \in \mathrm{GL}_5(L)$：

$$A_\pm = T_{\vec{u},\vec{y}}(s_\pm, t_\pm)\,\mathrm{diag}(a_{\pm,0}, a_{\pm,1}, a_{\pm,2}, a_{\pm,3}, a_{\pm,4}).$$

[4]此处及下文中，记号 $y_\pm$，$s_\pm$，$t_\pm$ 等表示所有符号均一致选取，从而得到两个恒等式，分别对应 $+$ 情形和 $-$ 情形。

此外，对于满足 $m_0, m_1 \in M$ 的元素 $l = m_0 + m_1\rho_2 \in L$，我们将 l 视为矩阵

$$\begin{pmatrix} m_0 & -2m_1 \\ m_1 & m_0 + m_1 \end{pmatrix}$$

其中，乘以 l 可表示为矩阵在行向量上的右乘。这样，我们将 A_+ 和 A_- 表示为 $\mathrm{GL}_{10}(M)$ 中的矩阵。根据我们的构造，有

$$\Lambda_{D,\pm}^{\max} = \vec{y}_\pm \cdot \mathcal{O}_M^{10} = \vec{u}A_\pm \cdot \mathcal{O}_M^{10},$$

其中，$\mathcal{O}_M^{10} \subset M^{10}$ 中的元素视为具有 10 个坐标的列向量。

对于由 $\mathcal{O}_M$ 上的列向量构成的格 $\mathcal{L}$（行数可被 5 整除；对于 $\mathbb{Z}$ 上的情形亦然），我们用 $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$（分别用 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_M}$）表示通过识别 $\mathcal{O}_M \cong \bigoplus_{i=0}^{4} \mathbb{Z}\alpha_i$ 所得到的、由 $\mathbb{Z}$ 上的列向量构成的对应格，其中对每个 $\mathcal{O}_M$ 坐标都进行此识别。

我们考虑 M^{10} 中的和格 $A_+ \cdot \mathcal{O}_M^{10} + A_- \cdot \mathcal{O}_M^{10}$，它先验上未必是自由的 $\mathcal{O}_M$-模。相反，$(A_+ \cdot \mathcal{O}_M^{10} + A_- \cdot \mathcal{O}_M^{10})_{\mathbb{Z}}$ 是秩为 50 的自由 $\mathbb{Z}$-模。然后，利用在 $\mathbb{Z}$ 上的 Hermite标准形（HNF）算法，我们可以求得一个显式矩阵 $A_{\max} \in$，它属于 $\mathrm{GL}_{50}(\mathbb{Q})$，使得

$$A_{\max} \cdot \mathbb{Z}^{50} = (A_+ \cdot \mathcal{O}_M^{10} + A_- \cdot \mathcal{O}_M^{10})_{\mathbb{Z}}.$$

因此，我们得到

$$\Lambda_D^{\max} = \vec{u} \cdot (A_{\max} \cdot \mathbb{Z}^{50})_{\mathcal{O}_M}.$$

考虑

$$\mathrm{Col}_{\max} := \{(m_i^j)_{2i+j+1}^T \in (A_{\max} \cdot \mathbb{Z}^{50})_{\mathcal{O}_M} : m_i^j \text{ satisfies (6.3.1)},\ i = 0, \ldots, 4,\ j = 0, 1\}.$$

Then

$$(\Lambda_D^{\max})^\iota = \vec{u} \cdot \mathrm{Col}_{\max}.$$

考虑 $\mathcal{O}_M$-格 $\mathrm{Col}_{\max}^{\mathrm{ha}}$，它由 $\mathrm{Col}_{\max}^{\mathrm{hf}}$的第 1、3、4、5、6 行组成；它通过方程（6.3.1）确定 $\mathrm{Col}_{\max}$。此外，$(\mathrm{Col}_{\max}^{\mathrm{half}})_{\mathbb{Z}}$ 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模，秩为 25。因此，我们可以再次使用 HNF 算法来求出一个矩阵 $B_{\max} \in \mathrm{GL}_{25}(\mathbb{Q})$，使得

$$(\mathrm{Col}_{\max}^{\mathrm{half}})_{\mathbb{Z}} = B_{\max} \cdot \mathbb{Z}^{25}.$$

换言之，我们通过 $A_{\max}$ 和 $B_{\max}$ 找到了 $\Lambda_D^{\max}$ 的具体 $\mathbb{Z}$-基以及 $(\Lambda_D^{\max})^\iota$。

7. Constructing the Golden Subgroup K_0^∞

在这一部分中，我们使用 $\Lambda_D^{\max}$（在§6 中构造）来定义 K_0^∞，进而定义 $\Lambda_{0,\,p}$ 对每个 p。我们通过检验其与[的一致性，证明 K_0^∞是黄金的MSG12、定理 A(2)], ，具体说明见本文第 2 部分开头。

7.1. 构造 K_0^∞。定义 $\mathscr{G}_0$ 上的群概形 $\mathbb{Z}$:

$$\mathscr{G}_0(R) := \{g \in \Lambda_D^{\max} \otimes_{\mathbb{Z}} R : \iota(g)g = 1\}$$

对于任意 $\mathbb{Z}$-代数 R。特别地，它是 $G/\mathbb{Q}$ 的一个整模型。对于所有 p，我们有

$$\mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_p) = G(\mathbb{Q}_p) \cap \Lambda_{D_p}^{\max}.$$

命题 7.1.1。以下结论成立：

(1) 对于 $p \neq 27$，我们有 $K_{0,\,p} := \mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_p)$ 是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 中的超特殊仿抛物子群。

(2) $\mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_7)$ 在 $G(\mathbb{Q}_7)$ 中有一个指数为 *2* 的特殊仿抛物子群，我们将其记为 $K_{0,\ 7}$。*(3)* $K_{0,\ 2} := \mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_2)$ 是 $G(\mathbb{Q}_2)$ 中唯一的极大开紧子群。

证明。我们有 $(\mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}} D)_{\mathbb{Q}_p} \cong \prod_{v|p} \mathrm{Res}^{E_v}_{\mathbb{Q}_p} D_v$，其带有一个对合$\theta := \iota \circ (\cdot)^{-1}$。根据命题 6.1.1 和 6.2.3，$(\Lambda^{\max}_{D_p})^\times$ 是 $(\mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}} D^\times)(\mathbb{Q}_p) = D_p^\times$ 的一个 θ-稳定极大开紧子群。令 x_0 为约化建筑 $\mathcal{B}((\mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}} D^\times)_{\mathbb{Q}_p})$ 中对应于 $(\Lambda^{\max}_{D_p})^\times$ 的 θ-稳定顶点。

假设 $p \neq 2$ 是分裂的。记 v、$\bar{v}$ 为 p 上方的两个赋值，并注意到$D_p^\times = D_v^\times \times D_{\bar{v}}^\times$。经过基变换后，我们可以将 $D_v^\times$ 和 $D_{\bar{v}}^\times$ 识别为 $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q}_p)$，此外，对合 θ 给出为

$$\theta : D_v^\times \times D_{\bar{v}}^\times \to D_v^\times \times D_{\bar{v}}^\times,$$
$$(g_1, g_2) \to (g_2^{-1\dagger}, \bar{g}_1^{-1\dagger}).$$

这里，$\dagger$ 表示矩阵的共轭转置。作为 $D_v^\times \times D_{\bar{v}}^\times$ 的一个极大开紧θ-稳定子群，我们可以将 $(\Lambda^{\max}_{D_p})^\times$ 与 $K_v \times K_v^{-1\dagger}$ 等同，其中K_v（分别为 $K_v^{-1\dagger}$）是 $D_v^\times$（分别为 $D_{\bar{v}}^\times$）的极大紧子群。通过将$D_v^\times \times D_{\bar{v}}^\times$投影到 $D_v^\times$ 上，群 $G(\mathbb{Q}_p) = (D_p^\times)^\theta$ 可与 $D_v^\times$等同，而 $K_{0,\ p}$ 可与 K_v等同。因此$K_{0,\ p}$ 是 $G(\mathbb{Q}_p)$ 中的超特殊子群。

假设 $p = 2$。类似地，我们有 $D_2^\times = D_{\rho_2}^\times \times D_{\bar{\rho}_2}^\times$，其中

$$D_{\rho_2} = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L_{\rho_2} \quad \text{and} \quad D_{\bar{\rho}_2} = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i L_{\bar{\rho}_2}.$$

特别地，我们有 $D_{\bar{\rho}_2} \cong D_{\rho_2}^{\mathrm{opp}}$。我们定义反同态

$$\dagger : D_{\rho_2} \to D_{\bar{\rho}_2}, \quad (l \in L_{\rho_2}, u) \mapsto (\bar{l} \in L_{\bar{\rho}_2}, u^{-1}).$$

则对合 θ 由下式给出

$$\theta : D_{\rho_2}^\times \times D_{\bar{\rho}_2}^\times \to D_{\rho_2}^\times \times D_{\bar{\rho}_2}^\times,$$
$$(g_1, g_2) \to (g_2^{-1\dagger}, g_1^{-1\dagger}).$$

在此设定下，$\Lambda^{\max}_{D\ 2,}$ 可与序 $\mathcal{O}_{D_{\rho_2}} \times \mathcal{O}_{D_{\bar{\rho}_2}}$ 的乘积等同。仍使用投影 $D_{\rho_2}^\times \times D_{\bar{\rho}_2}^\times \twoheadrightarrow D_{\rho_2}^\times$，群 $G(\mathbb{Q}_2) = (D_2^\times)^\theta$ 可与 $D_{\rho_2}^\times$ 等同，而 $K_{0,\ 2}$ 可与 $\mathcal{O}_{D_{\rho_2}}^\times$等同。因此，$K_{0,\ 2}$ 是 $G(\mathbb{Q}_2)$ 的唯一极大紧子群。

假设 p 是非分裂的。那么 $(\mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}} D^\times)_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathrm{Res}^{E_v}_{\mathbb{Q}_p} D_v^\times \cong \mathrm{Res}^{E_v}_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_5$ and$G(\mathbb{Q}_p) = (D_p^\times)^\theta$ 是一个酉群。由于 $p \neq 2$，我们有集合的识别 $\mathcal{B}(G(\mathbb{Q}_p)) = \mathcal{B}((\mathrm{Res}^E_{\mathbb{Q}} D^\times)_{\mathbb{Q}_p})^\theta$，因此可以将 x_0 实现为 $\mathcal{B}(G(\mathbb{Q}_p))$中的一个顶点。$\mathcal{B}(G(\mathbb{Q}_p))$的仿射根系见 Tit79，第4.3、4.4]节：若 $E_v/\mathbb{Q}_p$ 非分歧，则其类型为 C-BC$_2^{\mathrm{IV}}$；若 $E_v/\mathbb{Q}_p$ 分歧，则其类型为 C-BC$_2^{\mathrm{III}}$（这里指的是 BT72 第29–30页表] 中仿射根类型的标记）。根据 AN02 第6节和 8], ，我们看到，作为 $\mathcal{B}(G(\mathbb{Q}_p))$中一个顶点实现的 x_0，对应于仿射 Dynkin 图中最左节点。[5] 因此， x_0

[5]事实上，[AN02中的一般结果，备注 15] 仅能推导出 x_0 对应于最左节点或最右节点（作者没有研究箭头的方向）。但在我们的情形中，可以推广他们的计算，从而验证 x_0 必定对应于最左节点。

若 $E_v/\mathbb{Q}_p$ 非分歧（$p \neq 7$），则为超特殊；若 $E_v/\mathbb{Q}_p$ 分歧（$p = 7$），则为特殊。因此，在非分歧情形（$p \neq 7$）下，$K_{0,\ p} := \mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_p)$是与 x_0 相关的 $G(\mathbb{Q}_p)$的超特殊抛物子群，其特殊纤维是一个酉群。在分歧情形（$p = 7$）下，$\mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_7)$不连通，其特殊纤维的约化商是一个正交群。它有一个指标为 2 的连通特殊抛物子群，记作 $K_{0,\ 7}$。



FIGURE 1. C-BC$_2^{\mathrm{IV}}$和 C-BC$_2^{\mathrm{III}}$类型的仿射 Dynkin 图

□

注记 7.1.2。 设 ρ_7 是 E 上方于 7 的赋值。那么，给定 $x \in \mathcal{G}_0(\mathbb{Z})$，我们有 $\mathrm{Nrd}^{D/E}(x) \equiv \pm 1$ (模 ρ_7)；具体取值取决于 x 是否属于 $\mathscr{G}_0(\mathbb{Z}_7)$ 的单位连通分支。

从现在起，我们固定上述命题中的抛物型子群 $K_{0,\ p}$。对每个 p，我们定义 $K_0^{\mathrm{der}}{}_{,\ p} = G_p^{\mathrm{der}} \cap K_{0,\ p}$。

命题 7.1.3。 ，$_p$ 的子群 G_p^{der} 对所有 p 构成一个相容集，其抛物型子群满足第 *21* 页上的要求。

证明。 对于每个素数 p，我们需要证明群 $K_{0,\ p} \cap G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q}_p)$ 是 $G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q}_p)$ 的相应超特殊或特殊仿抛物子群，这可通过逐一讨论各个情形得出：

- 当 $p = 2$ 时，我们有 $G(\mathbb{Q}_2) = U_1(D_{\mathbb{Q}_2})$，以及 $G_{\text{导出}}(\mathbb{Q}_2) = \mathrm{SU}_1(D_{\mathbb{Q}_2})$，结论显然成立；
- 当 p 分裂时，我们有 $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q}_p)$，以及 $G_{\text{导出}}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{SL}_5(\mathbb{Q}_p)$，结论也显然成立；
- 当 p 惰性或分歧时，不妨设 $G_{\text{导出}}(\mathbb{Q}_p) = U_5(\mathbb{Q}_p)$，以及 $G_{\text{导出}}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{SU}_5(\mathbb{Q}_p)$ 与由单位矩阵定义的酉对合 θ 相关。根据我们的选择，仿抛物子群 $K_{0,\ p}$ 对应于连通整模型 $U_5(\mathbb{Z}_p)$，因为它与 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_p})$ 的 θ-稳定超特殊仿抛物子群 $\mathrm{GL}_5(E_p)$ 相关。其与 $\mathrm{SU}_5(\mathbb{Q}_p)$ 的交为 $\mathrm{SU}_5(\mathbb{Z}_p)$，从而得到相应的特殊或超特殊仿抛物子群。

最后，令 $\mathscr{G}_0^{\mathrm{der}}$为定义在 $\mathbb{Z}$ 上的群概形，使得

$$\mathscr{G}_0^{\mathrm{der}}(R) := \{g \in \Lambda_D^{\max} \otimes_{\mathbb{Z}} R : \iota(g)g = 1,\ \det(g) = 1\}.$$

那么，当 p 分裂或惰性时，有 $\mathscr{G}_0^{\mathrm{der}}(\mathbb{Z}_p) = K_0^{\mathrm{der}}{}_{,\ p}$。因此我们得到一个相容集。 □

7.2. Λ_0**的单可迁作用**$_{,\ p}$。对于每个 $p \neq 2$，定义

$$\Lambda_{0,p} := K_0^{\infty,p} \cap G(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G_p, \quad \text{where } K_0^{\infty,p} = \prod_{p' \neq p} K_{0,p'}.$$

根据定义，我们有$\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p = \Lambda_0,_p \cap G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q})$。令$\Lambda_0,_p,_{\mathrm{ad}}$为$\Lambda_0,_p$在$G_{\mathrm{ad}},_p$[6]中的像。若进一步地，关于是分裂的，则我们将()与上的群概形 GL等同起来。

为了将 [MSG12] 应用于我们关于 GL 的情形$_5$（而不是 SL_5），我们需要以下引理及其推论：

引理 7.2.1。存在一个分裂素数 p，使得

(1) 我们有 $N_{\mathrm{PGL}_5(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p) = \Lambda_0,_p,_{\mathrm{ad}}$。*(2)* $\Lambda_0,_p,_{\mathrm{ad}}$ 在 $\mathcal{B}^0(G_p)$ 的顶点集合上单传递作用，其中 $\mathcal{B}(G_p)$。*(3)* $\Lambda_0,_p$ 在 $G_p/K_0,_p$上传递地作用。

证明。断言 (1)：

根据 [MSG12 中的命题 30], , $\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p$ 的像是 $N_{\mathrm{PGL}_5(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p)$ 的一个指数为 5 的子群。由于 $\Lambda_0,_p$ 正规化 $\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p$，我们有 $\Lambda_0,_p,_{\mathrm{ad}} \subset N_{\mathrm{PGL}_5(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p)$。因此，我们只需证明 $\Lambda_0,_p$ 和 $\Lambda_0^{\mathrm{der}},_p$ 在 $\mathrm{PGL}_5(\mathbb{Q}_5)$ 中的像不相同；或者更强地说，作为 $G(\mathbb{Q}_p)$ 中的子群的 $\Lambda_0,_p$，在 $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q}_p)$ 中不包含于 $\mathbb{Q}_p^\times G^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q}_p)$ $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Q}_p)$。

接下来，我们选择 p 使其满足：

- p 关于域扩张 $L/\mathbb{Q}$ 分裂；
- 令 $p = r^2 + 7s^2$ 表示 r，$s \in \mathbb{Z}$，则 $(r + s\rho)/(r - s\rho)$ 是 $\mathbb{Z}/p_0$ 中的一个五次幂，其中 $\rho \in \mathbb{Z}/p_0$ 使得 $\rho^2 \equiv -7 \pmod{p_0}$。

例如，当 $p_0 = 11$ 时，我们有

$$p = 947 = 10^2 + 7 \cdot 11^2, \quad \sqrt{-7} \equiv 2 \pmod{11}, \quad \frac{10 + 2 \cdot 11}{10 - 2 \cdot 11} \equiv 1^5 \pmod{11}$$

接下来，我们断言 $x_0 = (r + s\sqrt{-7})/(r - s\sqrt{-7})$ 是从 L 到 E的一个范数。根据 Hasse 范数定理，只需在局部检查这一点。对于 E的任意素数 v，

- 如果 v 不在 p_0 或 p之上，那么 x_0 属于 $\mathcal{O}_{E_v}^\times$，因此是关于 L_v/E_v的范数元素；
- 如果 v 在 p之上，那么 x_0 是关于分裂扩张L_v/E_v的范数元素；
- 如果 v 在 p_0之上，那么 $x_0 \in \mathcal{O}_{E_v}^\times$ 是关于全驯分歧扩张 L_v/E_v 的范数元素，因为它模 $1 + \mathfrak{p}_{E_v}$是一个五次幂。

令 $l_0 \in L$ 使得 $N_{L/E}(l_0) = x_0$。根据引理 5.4.1，我们还可以进一步假设$l_0 l_0 = 1$。于是我们将 l_0 实现为 $G(\mathbb{Q})$ 中的一个元素。由于 $N_{L/E}(l_0) = x_0 \in \mathcal{O}_E[1/p]$，根据定义，我们有 $l_0 \in \Lambda_{D_v}^{\max}$对于 v 不在 p之上。此外，由x_0的表达式可得

$$N_{L/E}(l_0) = x_0 = (r + s\sqrt{-7})/(r - s\sqrt{-7}) \equiv 1 \pmod{\rho_7}.$$

总计，$l_0 \in G(\mathbb{Q}) \cap K^{\infty},_0{}^p = \Lambda_0,_p$。由于 l_0 在 G_p 中的行列式是一致化元，我们有 $l_0 \notin \mathbb{Q}_p^\times \mathrm{SL}_5(\mathbb{Q}_p)$，从而完成了 (1) 的证明。

断言（2）：

这可由 [MSG12，定理 A(2)] 以及命题7.1.3推出。断言（3）：

设 $\mathcal{B}^0(G_p)$ 为 $\mathcal{B}(G_p)$ 中的顶点集。我们考虑映射

$$G_p/K_0,_p \mapsto \mathcal{B}^0(G_p), \quad g_p K_0,_p \mapsto g_p \cdot x,$$

[6]请注意，这可能与先前定义的 $\bar{\Lambda}_0,_p$ 不同，因为它是对整个中心取商，而不仅仅是在 p 处分裂的那一部分。

其中 x 是相关仿抛物群为$K_{0,p}$的顶点。由于 $\Lambda_{0,p}$ 在 $\mathcal{B}^0(G_p)$ 上传递地作用，故对任意 $g_pK_{0,p}$，存在 $\lambda \in \Lambda_{0,p}$ 使得 $\lambda \cdot x = g_p \cdot x$，或等价地，对某个 $z_p \in Z(G_p)$ 有 $g_p\lambda^{-1}z_p^{-1} \in K_{0,p}$。此外，我们可以选取元素 $z \in E^\times$ 使得

- $z\bar{z} = 1$;
- 两者 z 和 z^{-1} 在 p之外都是整数;
- $zK_{0,p} = z_pK_{0,p}$。

将 z 视为 $G(\mathbb{Q})$中的一个元素，根据我们的构造，确实有$z \in \Lambda_{0,p}$。因此我们有 $g_pK_{0,p} = \lambda zK_{0,p}$。另一方面，若 $g_1K_{0,p} = g_2K_{0,p}$对于 $g_1, g_2 \in \Lambda_{0,p}$成立，则由 (2) 可知，$g_1g_2^{-1}$固定了对应于 $K_{0,p}$ 的顶点，因此在 $\Lambda_{0,p,\mathrm{ad}}$中是平凡的。因此，$g_1$ 和 g_2 在 G_p中相差一个中心元。□

推论 7.2.2。 群 K_0^∞是黄金的。特别地，对所有 p, $\Lambda_{0,p}$ 在 $G_p/K_{0,p}$ 上传递地作用，而 $\Lambda_{0,p}$ 在 $G_p \cdot x_p$上单传递地作用，其中 x_p表示 $\mathcal{B}^0(G_p)$ 中对应于 $K_{0,p}$的顶点。

证明。 由第一个陈述可得第二个陈述：[DEP25，引理 4.1.2(2)]。

对于第一个陈述，引理 7.2.1(3) 和 [DEP25，推论 2.24] 给出$G(\mathbb{Q})K_0^\infty G_\infty = G(\mathbb{A})$。引理 7.2.1(2) 给出 $G(\mathbb{Q}) \cap K_0^\infty \subseteq Z_G(\mathbb{Q})$。因此，只需证明 $K_0^\infty \cap Z_G(\mathbb{Q}) = 1$。

由引理 5.4.2，$Z_G(\mathbb{Q}) = N^1(E)$。我们验证，对于每个素数 p 上方的 E 的局部位 v，元素 $x \in N^1(E)$ 属于 $\mathcal{O}_{E_v}^\times$。当 p 关于 E/F 分裂时，有 $x \in E_v^\times \cap K_p = \mathcal{O}_{E_v}^\times$。当 p 不分裂时，x 和 $\bar{x}$ 在 v 处的赋值均为 0，这意味着 $x \in \mathcal{O}_{E_v}^\times$。因此，$x \in \mathcal{O}_E^\times = \{\pm 1\}$。最后，由于 x 属于 K_7，必有 $x = 1$（参见注 7.1.2）。□

8. Gate Sets for G

要进行命题 4.2.6 中的构造，我们还需要计算门集 $S_{\Lambda_{0,p}}$。本节中，我们常用粗体表示 $\mathrm{Mat}_{5\times 5}(L)$ 的元素，或表示 G 通过映射 $_{5\times 5}(L)$ 视为 Mat η 的元素（见 5.1.2）。我们还将使用简写 $\mathbf{A}^\dagger := \bar{\mathbf{A}}^T$。

8.1. 显式平凡化。

我们需要在局部以及模 n 意义下，对 $\Lambda_D^{\max}$and K_0^∞ 进行显式平凡化（即到标准矩阵代数的显式同构）。

8.1.1. 的局部平凡化 $\Lambda_D^{\max}$。 设 $q \neq 2, 7$。首先假设 $q \neq p_0$，并构造显式同构 $\Lambda_{D,q}^{\max} \to \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_q})$。

首先注意到

$$\Lambda_{D,q}^{\max} = \Lambda_{D,q} = \bigoplus_{i=0}^{4} u^i \mathcal{O}_{L_q}, \quad u^5 = a.$$

由于在 E 上方、位于 q 和 $a \in \mathcal{O}_{L_q}^\times$ 的素位处，L/E 要么分裂，要么非分歧，因此我们可以找到 $\gamma_q \in \mathcal{O}_{L_q}^\times$，使得 $N_{L_q/E_q}(\gamma_q) = a$。定义

$$\mathbf{U}_q = \mathrm{diag}(1, \gamma_q, \gamma_q\gamma_q^\sigma, \gamma_q\gamma_q^\sigma\gamma_q^{\sigma^2}, \gamma_q\gamma_q^\sigma\gamma_q^{\sigma^2}\gamma_q^{\sigma^3}) \in \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{L_q})$$

于是根据定义

$$\mathbf{U}_q^{-1}\eta(l)\mathbf{U}_q = \eta(l) \text{ for } l \in L_q \quad \text{and} \quad \mathbf{U}_q^{-1}\eta(u)\mathbf{U}_q = \begin{pmatrix} & \gamma_q & & & \\ & & \gamma_q^{\sigma} & & \\ & & & \gamma_q^{\sigma^2} & \\ & & & & \gamma_q^{\sigma^3} \\ \gamma_q^{\sigma^4} & & & & \end{pmatrix}.$$

接下来，我们取 $\alpha \in \mathcal{O}_M$，使得该矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^{\sigma} & \alpha^{\sigma^2} & \alpha^{\sigma^3} & \alpha^{\sigma^4} \\ \alpha^{\sigma} & \alpha^{\sigma^2} & \alpha^{\sigma^3} & \alpha^{\sigma^4} & \alpha \\ \alpha^{\sigma^2} & \alpha^{\sigma^3} & \alpha^{\sigma^4} & \alpha & \alpha^{\sigma} \\ \alpha^{\sigma^3} & \alpha^{\sigma^4} & \alpha & \alpha^{\sigma} & \alpha^{\sigma^2} \\ \alpha^{\sigma^4} & \alpha & \alpha^{\sigma} & \alpha^{\sigma^2} & \alpha^{\sigma^3} \end{pmatrix}$$

可以视为 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{L_q})$ 中的一个元素。在

$$\mathcal{O}_M = \mathbb{Z}\langle \alpha, \alpha^{\sigma}, \alpha^{\sigma^2}, \alpha^{\sigma^3}, \alpha^{\sigma^4} \rangle$$

对于某个 $\alpha \in \mathcal{O}_M$ 的情况下，这是因为 $\det(\mathbf{A}) = \mathrm{Disc}(\mathcal{O}_M) = p_0^4$。于是

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_q^{-1}\eta(l)\mathbf{U}_q\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}\mathbf{U}_q^{-1}\eta(u)\mathbf{U}_q\mathbf{A}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_q}), \text{ where } l \in \mathcal{O}_{L_q}.$$

结合命题 6.1.1，我们必有

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_q^{-1}\eta(\Lambda_{D,q}^{\max})\mathbf{U}_q\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_q^{-1}\eta(\Lambda_{D,q})\mathbf{U}_q\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_q}). \tag{8.1.1}$$

现在我们去掉条件 $q \neq p_0$。我们仍然可以找到 $\gamma_{p_0} \in L_{p_0}^{\times}$ 使得$N_{L_{p_0}/E_{p_0}}(\gamma_{p_0}) = a$。我们按上述方式定义 $\mathbf{U}_{p_0}$ 和 $\mathbf{A}$；于是

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_{p_0}^{-1}\eta(\Lambda_{D,p_0}^{\max})\mathbf{U}_{p_0}\mathbf{A}^{-1}$$

是 $\mathrm{Mat}_{5\times 5}(E_{p_0})$ 的极大 $\mathcal{O}_{E_{p_0}}$-阶。利用 $\Lambda_D^{\max}$在 §6.3 中的显式描述以及中国剩余定理，对于任意固定的 n_0，只要它与$2 \cdot 7 \cdot p_0$互素，我们就可以找到一个矩阵 $\mathbf{V}_{p_0} \in \mathrm{GL}_5(L)$，使得

$$\mathbf{V}_{p_0} \in \mathbf{I}_5 + \mathrm{Mat}_{5\times 5}(n_0\mathcal{O}_{E,(n_0)})$$

and

$$\mathbf{V}_{p_0}\mathbf{A}\mathbf{U}_{p_0}^{-1}\eta(\Lambda_{D,p_0}^{\max})\mathbf{U}_{p_0}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_{p_0}^{-1} = \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_{p_0}}).$$

8.1.2. 模 n 的平凡化 $\Lambda_D^{\max}$。 现在，设 n_0 与 $2 \cdot 7 \cdot p_0$互素，并令 $n = n_0 \cdot p_0^{n_{p_0}}$，其中某个 $n_{p_0} \geq 0$。等式 (8.1.1) 可扩展为 $\mathcal{O}_L/n_0$上的一个平凡化。我们应用亨泽尔引理和中国剩余定理，得到 $\gamma_n \in \mathcal{O}_{L,\ (n_0)} \times L_{p_0}$ 使得

$$N_{L/E}(\gamma_n) \equiv a \pmod{n}.$$

定义

$$\mathbf{U}_n := \mathrm{diag}(1, \gamma_n, \gamma_n\gamma_n^{\sigma}, \gamma_n\gamma_n^{\sigma}\gamma_n^{\sigma^2}, \gamma_n\gamma_n^{\sigma}\gamma_n^{\sigma^2}\gamma_n^{\sigma^3}) \in \mathrm{GL}_5(L)$$

and

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{U}_n\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_{p_0}^{-\min(1,n_{p_0})}$$

于是我们有 $\mathbf{B}_n \in \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{L,\ (n_0)})$ 对所有 $q|n_0$均成立。

我们考虑模 n 约化映射

$$(\Lambda_D^{\max})^{\infty} := \prod_{v \text{ finite}} \Lambda_{D_v}^{\max} \to (\Lambda_D^{\max})^{\infty}/n(\Lambda_D^{\max})^{\infty} \cong \Lambda_{D,(n)}^{\max}/n\Lambda_{D,(n)}^{\max}.$$

引理 8.1.1. 我们有如下同构

$$\mathbf{B}_n^{-1}\eta((\Lambda_D^{\max})^\infty)/\eta(n(\Lambda_D^{\max})^\infty)\mathbf{B}_n \cong \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E/n).$$

证明。 $\mathbf{B}_n$ 的定义保证

$$\mathbf{B}_n^{-1}\eta(\Lambda_{D,(n)}^{\max})\mathbf{B}_n \cong \prod_{q|n}\mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_q}).$$

模掉 n 后，我们得到所需结果。

□

8.1.3. 中的平凡化 G。 若$\mathbf{H}$ 是 5×5 上的可逆厄米矩阵，我们定义一个在 $\mathbb{Z}$ 上的代数群为

$$U_5^{\mathbf{H}}(R) := U_5^{\mathcal{O}_E/\mathbb{Z},\mathbf{H}} := \{\mathbf{X}\in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E\otimes_{\mathbb{Z}} R) : \bar{\mathbf{X}}^T\mathbf{H}\mathbf{X}=\mathbf{H}\} \tag{8.1.2}$$

对任意 $\mathbb{Z}$-代数 R，并简记 $U_5(R) := U^{\mathcal{O}_E/\mathbb{Z},\ \mathbf{J}\ 5}$ 其中 $\mathbf{J}$ 是反对角厄米形式。

引理 8.1.2。 设 n 与 $2\cdot 7$ 互素。那么模 n 约化诱导出一个满射

$$\mathbf{B}_n^{-1}\eta(K_0^\infty)\mathbf{B}_n \twoheadrightarrow U_5^{\mathbf{B}_n^\dagger\mathbf{B}_n}(\mathbb{Z}/n)\subseteq \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E/n).$$

证明。设 S 为整除 n的素数集合。只需考虑 $\mathrm{B}_n^{-1}\eta(K_{0,S})\mathrm{B}_n$模 n 的约化。由定义，对 $q|n$ 我们有 $K_{0,\ q}=G_q\cap\Lambda_D^{\max}$、$_q$。由于$\eta(G_q)=\{\mathrm{X}\in\eta(D_q):\mathrm{X}^\dagger\mathrm{X}=1\}$，结论由引理 8.1.1 得出。

□

我们指出，对 $q\mid n_0$，矩阵 $\mathbf{B}_n^\dagger\mathbf{B}_n$ 已经位于 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_q)$ 中。当$q=p_0$时，由于极大紧子群 $\eta(\Lambda_{D_q}^{\max})$ 是 $\dagger$-稳定的，该群

$$\mathbf{B}_n^{-1}\eta(\Lambda_{D_q}^{\max})\mathbf{B}_n \cong \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q}) \cong \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_{\rho_q}})\times\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_{\bar\rho_q}})$$

在 $\mathrm{Ad}(\mathbf{B}_n^\dagger\mathbf{B}_n)$ 下是 $\circ(\cdot)^\dagger$-稳定的，因此 $\mathbf{B}_n^\dagger\mathbf{B}_n\in\mathbb{Q}_q^\times\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$。

我们可以进一步共轭以得到 $U_5(\mathbb{Z}/n)$:

引理 8.1.3. 设 n 与 $2\cdot 7$互素。假设对所有 $q|n$，埃尔米特 $\mathbf{H}$ $\in\mathbb{Q}_q^\times\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$。则存在 $\mathbf{C}_n\in\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_E/n)$ 使得

$$\mathbf{C}_n^{-1}U_5^{\mathbf{H}}(\mathbb{Z}/n)\mathbf{C}_n = U_5(\mathbb{Z}/n).$$

证明。 对于 $q|n$，我们首先断言存在 $\mathbf{C}_q\in\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$，使得

$$\mathbf{C}_q^{-1}U_5^{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{E_q}/q^{v_q(n)})\mathbf{C}_q = U_5(\mathcal{O}_{E_q}/q^{v_q(n)}).$$

若 q 在 $E/\mathbb{Q}$ 中是惰性的，利用 [Jac62 定理 7.1], ，存在 $\mathrm{C}_q\in\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$ 和一个标量 $\lambda\in\mathbb{Q}_q^\times$，使得 $\mathrm{C}_q^\dagger\mathrm{H}\mathrm{C}_q=\lambda\mathrm{J}$。若 $q=\rho_q\bar\rho_q$ 在 $E/\mathbb{Q}$ 上分裂，则两个酉群都分裂，并同构于 $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/q^{v_q(n)})$。将 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$ 与 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_{\rho_q}})\times\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_{\bar\rho_q}})$ 等同，并记 $\mathrm{H}=(\mathrm{X},\mathrm{X}^\dagger)$、$\mathrm{J}=(\mathrm{J},\mathrm{J})$。于是我们可以构造 $\mathrm{C}_q=(\mathrm{X}^{-1}\mathrm{J},\mathrm{I}_5)$，使得 $\mathrm{C}_q\in\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_q})$ 且对某个 $\lambda\in\mathbb{Q}_q^\times$ 有 $\mathrm{C}_q^\dagger\mathrm{H}\mathrm{C}_q=\lambda\mathrm{J}$。

一般地，设 $\mathbf{C}_n$ 为 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_E/n)$ 中的一个矩阵，使得对所有 $q|n$ 有 $\mathbf{C}_n\equiv\mathbf{C}_q$（模 $q^{v_q(n)}$），其存在性由中国剩余定理保证。于是对某个 $\lambda\in\mathbb{Q}^\times$ 有 $\mathbf{C}_n^\dagger\mathbf{H}\mathbf{C}_n\equiv\lambda\mathbf{J}$（模 n），从而 $\mathbf{C}_n^{-1}U_5^{\mathbf{H}}(\mathbb{Z}/n)\mathbf{C}_n=U_5(\mathbb{Z}/n)$。

□

8.2. **显式门。** 由命题 7.1.1，阶 $\Lambda_D^{\max}$满足假设 4.3.1 的条件。平凡化（8.1.1）也给出等同

$$\Lambda_{D_p}^{\max} = \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_p}).$$

我们不妨将其共轭，使其满足§4.3中的其他条件。

因此，由§4.3 可得

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,p}} = \{p^{-1}g : \iota(g)g = p^2,\ g \in \Lambda_D^{\max},\ g \notin p\Lambda_D^{\max}\}$$

在惰性 p处和

$$S_{\bar{\Lambda}_{0,p}} = \{\bar{\rho}_p^{-1}g : \iota(g)g = p,\ g \in \Lambda_D^{\max},\ g \notin \bar{\rho}_p\Lambda_D^{\max} \cup \rho_p\Lambda_D^{\max}\}$$

在分裂 $p = \rho_p\bar{\rho}_p$处。

8.2.1. 寻找门。 寻找显式门元素是我们算法中最困难的部分，我们将其留到9 小节中进行更详细的讨论。

8.2.2. 计数。 当 p 分裂时，门与距 x_0距离 1 的顶点构成双射。根据用 p-二项式系数表示的标准公式，这等于

$$|S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}| = \sum_{i=1}^{4} \binom{5}{i}_p \qquad p \text{ split.}$$

例如，$|S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}| = 3961830$ 当 $p = 11$时。

当 p 为惰性时，门与距离 2 的超特殊顶点构成双射。其中每一个顶点都唯一对应于一个距离 1 的非特殊顶点。正如我们将在§10.1中看到的，这样的非特殊顶点有（p^5+1）（p^2+1）个，而这样的特殊但非超特殊顶点有（p^3+1）（p^5+1）个。每个这样的非特殊顶点（分别地，特殊但非超特殊顶点） x_1 对应于 p（分别为（$p+1$）（p^3+1）-1个距离 2 的顶点x_2（按照§10.1中的记号，若固定 x_1，则 x_0 以及所有可能的 x_2 构成与 x_1相邻的类型 0 顶点集合，而 x_1的类型为 1 或 2）。因此

$$|S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}| = p(p^2+1)(p^5+1) + [(p+1)(p^3+1)-1](p^3+1)(p^5+1) \qquad p \text{ inert.}$$

例如，$|S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}| = 765672$ 当 $p = 3$ 时，以及当 $p = 5$时为 297782760。

8.3. **门的约化。** 最后，我们讨论在 $\Lambda_{0,\ p}/\Lambda_p$ 中对 $K^{\infty,\ p}$ 的选择，以及 $S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}$ 的约化。

8.3.1. , ^{p} 的选择。 现在我们考虑与 $2\cdot 7\cdot p$ 互素的 n。令

$$n = \prod_{q_S \text{ split}} q_S^{n_{q_S}} \prod_{q_I \text{ inert}} q_I^{n_{q_I}}$$

并定义

$$K^{\infty,p} := \prod_{q\neq p} K_{0,q}(q^{n_q})$$

其中，$K_{0,\ q}(q^{n_q})$ 表示 $K_{0,\ q} \subseteq G_q$ 中的 q^{n_q} 级主合同子群。于是

$$K_{0,q}/K_{0,q}(q^{n_q}) \cong \begin{cases} \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/q^{n_q}) & q \text{ split,} \\ U_5(\mathbb{Z}/q^{n_q}) & q \text{ non-split,} \end{cases}$$

其中 U_5 的定义见方程（8.1.2）。

那么，由于 $G(\mathbb{Q}) \subseteq G^{p,\infty}$ 是稠密的：

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,p}/\Lambda_p &= (G(\mathbb{Q}) \cap K_0^{\infty,p})/(G(\mathbb{Q}) \cap K^{\infty,p}) = K_0^{\infty,p}/K^{\infty,p} \\ &= \prod_{q_S \text{ split}} \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/q^{n_{q_S}}) \prod_{q_I \text{ inert}} U_5(\mathbb{Z}/q^{n_{q_I}}) =: U_5(\mathbb{Z}/n).\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

由于 $\Lambda_{0,p} \cap Z_{G_p}^{\mathrm{spl}} = \Lambda_{0,p} \cap Z_G^{\mathrm{spl}_p}$ 其中 $Z_G^{\mathrm{spl}_p}$ 表示中心在$\mathbb{Q}_p$上分裂的部分，我们还得到

$$\bar{\Lambda}_{0,p}/\bar{\Lambda}_p = U_5^\sharp(\mathbb{Z}/n) := \begin{cases} U_5(\mathbb{Z}/n)/U_1(\mathbb{Z}/n) & p \text{ split}, \\ U_5(\mathbb{Z}/n) & p \text{ inert}. \end{cases} \tag{8.3.2}$$

我们还可以将这些群的阶计算为所有整除 n 的素数对应的乘积。对于素数 n，其阶是标准结果，可见 [CCN+85，§2]。对于素数幂 n，我们还利用非分歧处的性质 $[K_{0,q}(q^{i+1}) : K_{0,q}(q^i)] = q^{\dim G}$ 对于 $i \geq 1$ (例如参见 [KP23，定理 13.5.1(1)])。一般 n 的公式则由中国剩余定理得出。

$$|U_5(\mathbb{Z}/n)| = n^{25} \prod_{\substack{q_S \mid n \\ q_S \text{ split}}} \left(\frac{1}{q_S^{25}} \prod_{i=0}^{4} (q_S^5 - q_S^i) \right) \times \prod_{\substack{q_I \mid n \\ q_I \text{ inert}}} \left(\frac{1}{q_I^{25}} \prod_{i=0}^{4} (q_I^5 + (-1)^i q_I^i) \right),$$

$$|U_1(\mathbb{Z}/n)| = n \prod_{\substack{q_S \mid n \\ q_S \text{ split}}} \frac{q_S - 1}{q_I} \times \prod_{\substack{q_I \mid n \\ q_I \text{ inert}}} \frac{q_I + 1}{q_I}.$$

8.3.2. 显式约化。接下来，我们需要计算 $S_{\bar{\Lambda}_p}$ 中各元素在 $U_5^\sharp(\mathbb{Z}/n)$ 中的像。如引理 8.1.1 和8.1.3中所示，取$\mathbf{B}_n \in \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{L,(n)})$ 及$\mathbf{C}_n \in \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_E/n)$，使得模 n 约化定义了一个满射

$$\mathbf{B}_n^{-1} \eta((\Lambda_D^{\max})^\infty) \mathbf{B}_n \twoheadrightarrow \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E),$$

and

$$(\mathbf{B}_n \mathbf{C}_n)^\dagger (\mathbf{B}_n \mathbf{C}_n) = 1.$$

于是：

引理 8.3.1. 模 n约化诱导出一个同构

$$\mathbf{C}_n^{-1} \left(\mathbf{B}_n^{-1} \eta(\Lambda_{0,p}) \mathbf{B}_n / \mathbf{B}_n^{-1} \eta(\Lambda_p) \mathbf{B}_n \right) \mathbf{C}_n \xrightarrow{\sim} U_5(\mathbb{Z}/n).$$

证明. 由等式 (8.3.1)，我们有

$$\mathbf{B}_n^{-1} \eta(\Lambda_{0,p}) \mathbf{B}_n / \mathbf{B}_n^{-1} \eta(\Lambda_p) \mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n^{-1} \eta(K_0^{\infty,p}) \mathbf{B}_n / \mathbf{B}_n^{-1} \eta(K^{\infty,p}) \mathbf{B}_n,$$

其中 S 是整除 n的素数集合。根据主同余子群的定义，$\mathbf{B}_n^{-1}\eta(K^{\infty,p})\mathbf{B}_n$ 恰好是$\mathbf{B}_n^{-1}\eta(K^{\infty,p}_0)\mathbf{B}_n$ 中模 n 同余于 1 的元素集合。因此，由引理 8.1.2，这个商恰好是 $U^{\mathbf{B}_n^\dagger \mathbf{B}_5 \ n}(\mathbb{Z}/n)$。

由$\mathbf{C}_n$的定义即可得到该结果。 □

8.4. **建筑中的门到顶点。** 我们需要的最后一项数据，是将 $x \in \mathcal{X}$ 明确赋给门 $s_x \in S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 如构造 4.2.3 或 4.2.4所示。

8.4.1. 标记 $\mathcal{X}$。我们首先需要标记 $\mathcal{X}$ 的顶点，并描述它的单形。在分裂情形下，令 $p = \rho_p\bar{\rho}_p$，并固定一个同构 $G_p \cong \mathrm{GL}_5(E_{\rho_p})$。我们假设，在此同构下，$x_0$ 被 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}})$。那么，根据一个标准构造（例如 [KP23，§15.1]），$\mathcal{X}$ 的顶点对应于格$\mathcal{M} \subset E^5_{\rho_p}$，满足

$$\rho_p\mathcal{O}^5_{E_{\rho_p}} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{O}^5_{E_{\rho_p}}.$$

对于 $1 \le k \le 5$，包含 x_0 的 k-单形对应于满足以下条件的格序列 $\mathcal{M}_i$

$$\rho_p\mathcal{O}^5_{E_{\rho_p}} \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{O}^5_{E_{\rho_p}}$$

最后，G_p-作用通过同构 $G_p \cong \mathrm{GL}_5(E_{\rho_p})$ 给出。

模 ρ_p 化简后，我们得到如下构造：

构造 8.4.1。设 $p = \rho_p\bar{\rho}_p$ 在 E中分裂。则 Q 在构造 *4.2.3*中的顶点可与子空间

$$0 \neq \bar{\mathcal{M}} \subsetneq (\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5.$$

¯其中包含 x_0 的 k-单形对应于针对 $1 \le i \le k$ 的此类 $\mathcal{M}_i$ 序列，且满足

$$0 \neq \bar{\mathcal{M}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_k \subsetneq (\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5.$$

¯此外，给定如上的 $\mathcal{M}$，则对任意满足 $gx_0 \in Q$的 $g \in \mathrm{GL}_5(E_{\rho_p})$，¯我们有 $gx_0 = \mathcal{M}$ 当且仅当存在 $\lambda \in E_{\rho_p}$ 使得 $\lambda g \in \mathrm{GL}_5(E_{\rho_p}) \cap \mathrm{Mat}_{5\times5}(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}})$ 且 $\lambda g(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5 = \bar{\mathcal{M}}$。

在惰性情形中，我们已显式构造了一个厄米形式 $\mathbf{H}_p := \mathbf{B}^\dagger_{p^2}\mathbf{B}_{p^2} \in \mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_p})$，定义在 E^5_p 上，以及相关的识别 $G_p \cong U_5^{\mathbf{H}_p}(\mathbb{Q}_p)$。假设 x_0 被 $\mathrm{GL}_5(\mathcal{O}_{E_p})$ 稳定。同样，通过标准构造（例如，[KP23，§15.2]），

- 顶点 x_0 对应于$\mathbf{H}_p$-自对偶[7] 格 $\mathcal{O}^5_{E_p}$；
- x_1 的顶点 $\mathcal{X}$ 距离为 1 时，对应于格对 $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2 \subset E^5_p$ 使得且 $\mathcal{M}_1$ 是 $p^{-1}\mathcal{M}_2$ 的 $\mathbf{H}_p$-对偶格；
$$p\mathcal{O}^5_{E_p} \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_2 \subsetneq \mathcal{O}^5_{E_p}$$
- 给定对应于上述两个距离 1 格 x_1，x_1' 的格对 $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ 和 $(\mathcal{M}_1', \mathcal{M}_2')$，当且仅当 $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_1'$ 或 $\mathcal{M}_1' \subsetneq \mathcal{M}_1$时，$\{x_0, x_1, x_1'\}$ 构成一个单形；
- $\mathcal{X}$ 中距离为 2 的 0 型顶点 x_2 对应于满足以下条件的格 $\mathcal{M} \subset E^5_p$：$p^{-1}\mathcal{M}$是 $\mathbf{H}_p$-自对偶，且
$$p^2\mathcal{O}^5_{E_p} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{O}^5_{E_p}$$
此外，给定一个距离为 2 的顶点 x_2 及其关联的格 $\mathcal{M}$，x_0 与 x_2 之间的距离 1 顶点 x_1 恰好对应于满足以下条件的格对 $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$：
$$\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_2.$$
此外，x_1 位于 x_0 和 x_2 的凸包中，当且仅当相关的$\mathcal{M}_1$ 在所有可能的 x_1中是最小的。

[7]Here we say that an $\mathcal{O}_{E_p}$-module $\mathcal{M}_2$ is the dual of $\mathcal{M}_1$ if $\mathcal{M}_2 = \{x \in E^5_p : \mathbf{H}_p(\mathcal{M}_1, x) \in \mathcal{O}_{E_p}\}$.

如果我们固定一个包含 x_0 和 x_2的公寓，则这样的 x_1可能有一个或三个，具体取决于凸包在约化建筑中由两条长边还是两条短边组成。在后一种情况下，设（$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$）、（$\mathcal{M}_1', \mathcal{M}_2'$）和（$\mathcal{M}_1'', \mathcal{M}_2''$）是对应于 x_0 和 x_2 之间距离 1 顶点的三对。那么，（$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$）对应于 x_0 和 x_2 的中点，当且仅当 $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_1'$ 和 $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_1''$。

例。取 $\mathbf{H}_p = \mathbf{J}$。那么， x_0 与 $\mathcal{O}_{E_p}^5$相关， x_2 与 $p^2\mathcal{O}_{E_p} \oplus p\mathcal{O}_{E_p}^3 \oplus \mathcal{O}_{E_p}$相关， x_2' 与 $p^2\mathcal{O}_{E_p}^2 \oplus p\mathcal{O}_{E_p} \oplus \mathcal{O}_{E_p}^2$相关， x_1 与 $p\mathcal{O}_{E_p}^4 \oplus \mathcal{O}_{E_p} \subset p\mathcal{O}_{E_p} \oplus \mathcal{O}_{E_p}^4$相关， x_1'与 $p\mathcal{O}_{E_p}^3 \oplus \mathcal{O}_{E_p}^2 \subset p\mathcal{O}_{E_p}^2 \oplus \mathcal{O}_{E_p}^3$相关， x_1'' 与 $p\mathcal{O}_{E_p} \oplus \mathcal{O}_{E_p} \oplus p\mathcal{O}_{E_p}^2 \oplus \mathcal{O}_{E_p} \subset p\mathcal{O}_{E_p} \oplus \mathcal{O}_{E_p}^2 \oplus p\mathcal{O}_{E_p} \oplus \mathcal{O}_{E_p}$相关。于是， x_1' 是 x_0 和 x_2'之间唯一的顶点，而x_1， x_1'， x_1'' 是在一个固定公寓中 x_0 和 x_2 之间的三个顶点（不过，在其他公寓中可能还有更多这样的顶点）。

对模 p^2 约化，我们得到如下构造：

构造 8.4.2. 设 p 在 E 中惰性。考虑秩 *5* 自由 $\mathcal{O}_{E_p}/p^2$-模$(\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5$ ，并将 $\mathbf{H}_p$ 实现为其上的厄米形式。则 Q 中构造 *4.2.4*里的顶点可等同于 $\mathcal{O}_{E_p}/p^2$-子模

$$0 \neq \bar{\mathcal{M}} \subsetneq (\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5$$

且为$\mathbf{H}_p$-自对偶的[8]。此外，对任意 $g \in U_5^{\mathbf{H}_p}(\mathbb{Q}_p)$ 使得 $gx_0 \in Q$，我们有 $gx_0 = \mathcal{M}$ ，当且仅当存在 $\lambda \in E_p$ 满足

$$\lambda g \in \mathrm{GL}_5(E_p) \cap \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_p}) \quad and \quad \lambda g(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/p^2)^5 = \bar{\mathcal{M}}.$$

$\mathcal{X}$ 中距离 *1* 处的顶点可等同于 $\mathcal{O}_{E_p}/p^2$-子模对

$$(p\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5 \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_1 \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_2 \subsetneq (\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5.$$

使得 $\mathcal{M}_1$ 是 $p\mathcal{M}_2$ 的$\mathbf{H}_p$-对偶。包含 x_0 的一个 *2*-单形由两个这样的对$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ 与$(\mathcal{M}_1', \mathcal{M}_2')$ 组成，使得

$$(p\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5 \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_1 \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_1' \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_2' \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_2 \subsetneq (\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5.$$

与（$\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$）相关的距离 *1* 顶点位于 x_0 与和 $\bar{\mathcal{M}}$ 相关的距离 *2* 顶点之间，当 $\bar{\mathcal{M}} \subsetneq \bar{\mathcal{M}}_1 \subsetneq (\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5$, ; 此外，当相关的 $\mathcal{M}_1$ 为最小时，它还位于凸包中。

8.4.2. 与门匹配。 现在我们可以将 s_x 与 $x \in Q$匹配。

在分裂情形下 $p = \rho_p\bar{\rho}_p$，选择 $\mathbf{B}_p$ ，如引理 8.1.1所示。则

$$\mathbf{B}_p^{-1}\eta(S_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_p \subseteq \mathrm{GL}_5(E_{\rho_p}) \cap \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}})$$

and

$$\mathbf{B}_p^{-1}\eta(S_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_p \cap \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\rho_p\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}) = \emptyset.$$

因此引理 8.1.1 给出了一个模 ρ_p 约化映射，且该映射为单射

$$\mathbf{B}_p^{-1}\eta(S_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_p \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E/\rho_p).$$

[8]Here we say that an $\mathcal{O}_{E_p}/p^2$-module $\bar{\mathcal{M}}_2$ is the dual of $\bar{\mathcal{M}}_1$ if $\bar{\mathcal{M}}_2 = \{x \in (\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5 : \mathbf{H}_p(\bar{\mathcal{M}}_1, x) = 0\}$.

现在我们应用构造 8.4.1。注意，条件 $g(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5 = \bar{\mathcal{M}}$ 仅¯取决于 g 模 ρ_p 的约化。总之，对于每个顶点 $\mathcal{M} \in Q$，都有 $s_{\bar{\mathcal{M}}}$ 是 $S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 中满足以下条件的元素

$$(\mathbf{B}_p^{-1}\eta(s_{\bar{\mathcal{M}}})\mathbf{B}_p)(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5 = \bar{\mathcal{M}}.$$

在惰性情形下，我们改为选择 $\mathbf{B}_{p^2}$，如引理 8.1.1中所示。然后类似地，

$$p\mathbf{B}_{p^2}^{-1}\eta(S_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_{p^2} \subseteq \mathrm{GL}_5(E_p) \cap \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_{E_p})$$

and

$$p\mathbf{B}_{p^2}^{-1}\eta(S_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_{p^2} \cap \mathrm{Mat}_{5\times 5}(p^2\mathcal{O}_{E_p}) = \emptyset.$$

因此，引理 8.1.1 给出了模p^2 映射作为一个单射

$$\mathbf{B}_{p^2}^{-1}\eta(pS_{\bar{\Lambda}_{0,p}})\mathbf{B}_{p^2} \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathcal{O}_E/p^2).$$

¯我们同样输入构造 8.4.2。总之，对于每个顶点 $\mathcal{M} \in Q$，都有 $s_{\bar{\mathcal{M}}}$ 是 $S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 中的元素，使得

$$(\mathbf{B}_{p^2}^{-1}\eta(ps_{\bar{\mathcal{M}}})\mathbf{B}_{p^2})(\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5 = \bar{\mathcal{M}}.$$

9. Finding Gates

选择一个素数 $p \neq 2,7$，并令 e 在 p 在 E 中分裂时取 1，在 p 在 E 中惰性时取 2。实际上，我们关注 $p^e = 9$ 或 11，它们分别对应于最小的惰性情形和分裂情形。

9.1. 基本约化。

引理 9.1.1. 设 $x \in \Lambda_D^{\max} \setminus \mathcal{O}_E$ 使得 $\iota(x)x = p^e$。则

- $L' := E[x] \subseteq D$ 是一个 CM 域，其在 E 上的次数为 5，且 ι 的作用为复共轭。
- 记 $M' = (L')^\iota$，它是一个在 $\mathbb{Q}$上的次数为 5 的全实域。记$x = \alpha + \rho_2\beta$ 为 α、$\beta \in M'$和 $\rho_2 = (1+\sqrt{-7})/2$。则 $M' = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(2\alpha+\beta)$。
- 7α、7β、$2\alpha+\beta \in \mathcal{O}_{M'} \cap \Lambda_{\max D}$。此外，当 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7处非分歧时，α、$\beta \in \mathcal{O}_{M'}$。
- β 的所有实嵌入的绝对值（$2\alpha+\beta$的相应绝对值）均小于 $\sqrt{4p^e/7}$（$\sqrt{4p^e}$）。
- 判别式$\mathrm{Disc}(M') \leq \begin{cases} C \cdot (4p^e/7)^{10} & M' \text{在7处不分歧,} \end{cases}$

$C \cdot 4p^e{}^{10}$ M' 7, ()在

其中常数 C $\approx 0.134288.$

证明。根据我们的构造，L' 是定义在 E 上的阿贝尔除代数，且不等于 E。由于 D 的所有极大阿贝尔子代数在 E上都是 5 次的，L' 必定是极大的，且次数也为 5。

由于 $\iota(x) = p^e x^{-1}$，$\iota(x) \in E(x) = L'$，这迫使 $\iota(L') = L'$。接着，由于 $\{x \in D_\infty^\times : \iota(x)x = 1\}$ 是紧的，因此 $\{x \in (L')_\infty^\times : \iota(x)x = 1\}$也是紧的。只有当 $M' = L'^\iota$ 是全实域时，这才有可能；此时，由于 ι 是一个对合，它必须作为复共轭作用。

令 $x = \alpha + \rho_2\beta$，其中 α，$\beta \in M'$。那么，

$$\alpha^2 + \alpha\beta + 2\beta^2 = p^e.$$

不能有 $\mathbb{Q}(\alpha)$、$\mathbb{Q}(\beta)$ 或 $\mathbb{Q}(2\alpha+\beta)$ 真包含于 M'，等价地说，α、β 或 $2\alpha+\beta$ 包含于 $\mathbb{Q}$。否则，利用上述方程，$E[x]/E$ 的次数为 1 或 2，这是不可能的。

通过直接计算，我们得到

$$7\alpha=(\rho_2\iota(x)-\bar{\rho}_2x)\sqrt{-7},\ 7\beta=(x-\iota(x))\sqrt{-7}\in\sqrt{-7}\Lambda_D^{\max}\cap M'\subset\mathcal{O}_{M'},$$

$$2\alpha+\beta=x+\iota(x)\in\Lambda_D^{\max}\cap M'\subset\mathcal{O}_{M'}.$$

由于范数形式作为关于 α 的多项式有一个实根：

$$(\beta^{(i)})^2-4(2(\beta^{(i)})^2-p^e)\geq 0\implies|\beta^{(i)}|\leq\sqrt{4p^e/7},$$

其中 $\beta^{(i)}$ 表示 β 在第 i 个实嵌入 $M'\hookrightarrow\mathbb{R}$ 下的像，$i=1$、.....、5。由于 $(2\alpha+\beta)^2=4p^e-7\beta^2$，我们得出 $2\alpha+\beta$ 的每个实嵌入的绝对值都不大于 $\sqrt{4p^e}$。

如果 M' 不在 7 处分歧，则有 $\alpha,\ \beta\in\mathcal{O}_{M'}$，因为 $(\Lambda_D^{\max})^\times\cap L'^\times\subseteq\mathcal{O}_{L'}$ 且 $\mathcal{O}_{L'}=\mathcal{O}_{M'}\mathcal{O}_E$。因此，我们有 $\mathbb{Z}[\beta]$ 是 $\mathcal{O}_{M'}$ 中的一个阶，并且

$$|\operatorname{Disc}(M')|\leq|\operatorname{Disc}(\mathbb{Z}[\beta])|=\prod_{1\leq i<j\leq 5}|\beta^{(i)}-\beta^{(j)}|^2$$

如果有 $-1\leq\beta^{(i)}\leq 1$，我们可以对上述等式右侧的乘积进行数值最大化，并将其界定为 $C\approx 0.134288$。将其乘以 $(4p^e/7)^{20/2}$ 后得到

$$|\operatorname{Disc}(M')|\leq C\cdot(4p^e/7)^{10}.$$

若 M' 在 7 处分歧，则与非分歧情形一样，我们有

$$|\operatorname{Disc}(M')|\leq|\operatorname{Disc}(\mathbb{Z}[2\alpha+\beta])|\leq C\cdot(4p^e)^{10}.$$

□

推论 9.1.2。设 $x\in\Lambda_D^{\max}$满足 $\iota(x)x=p^e$。那么，当 $E/\mathbb{Q}$ 在 p 上分裂（分别为惰性）时，$x\in\bar{\rho}_p\Lambda_D^{\max}\cup\rho_p\Lambda_D^{\max}$（分别为 $x\in p\Lambda_D^{\max}$）当且仅当 $x\in\mathcal{O}_E$。

证明。若 $x\in\mathcal{O}_E$，注意到 $\mathcal{O}_E$ 是主理想整环，我们有理想 (x) 等于 (ρ_p) 或 $(\bar{\rho}_p)$（惰性情形下为 (p)）。这意味着$x\in\bar{\rho}_p\Lambda_D^{\max}\cup\rho_p\Lambda_D^{\max}$（分别为 $x\in p\Lambda_D^{\max}$）。反过来，若 x 不在 $\mathcal{O}_E$中，则 $L'=E[x]$是 E 上的 5 次 CM 域，且 x 在 $\mathcal{O}_{L'}$中。假设 $x\in\bar{\rho}_p\Lambda_D^{\max}\cup\rho_p\Lambda_D^{\max}$（分别为 $x\in p\Lambda_D^{\max}$），那么对于 $\mathcal{O}_{L'}$中的 $y=\rho_p^{-1}x$ 或 $\bar{\rho}_p^{-1}x$（分别为 $y=p^{-1}x$），我们有$\iota(y)y=1$。容易验证，$\mathcal{O}_{L'}$ 中的单位元只有 1 或 -1。于是 $y=\pm1$ 且 x 在 E中，矛盾！

□

9.2. 二次型、特征多项式和最小向量。我们将 $(\Lambda_D^{\max})^\iota$ 视为一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其秩为 25，并考虑以下二次型

$$(\Lambda_D^{\max})^\iota\to\mathbb{Z},\quad\gamma\mapsto\operatorname{Trd}_{D/E}(\gamma^2),\tag{9.2.1}$$

由约化迹映射诱导。若 $\gamma\notin E$，则 $E(\gamma)$ 是关于 E 的 5 次 CM 域，其中 $\mathbb{Q}(\gamma)=E(\gamma)^\iota$ 是关于 $\mathbb{Q}$ 的 5 次全实域。于是 $\operatorname{Trd}_{D/E}(\gamma^2)=\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}}(\gamma^2)$ 是一个非负整数。若 $\gamma\in E\cap(\Lambda_D^{\max})^\iota=\mathbb{Z}$，则 $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}}(\gamma^2)=5\gamma^2$ 仍是一个非负整数。因此，该二次型是正定的。

设 $\gamma=\sum_{i=0}^{4}u^i l_i$ 满足 $l_i\in L$，则 $\iota(\gamma)=\gamma$ 意味着

$$l_0=\bar{l}_0,\ l_1^{\sigma}=a^{-1}\bar{l}_4,\ l_2^{\sigma^2}=a^{-1}\bar{l}_3,\ l_3^{\sigma^3}=a^{-1}\bar{l}_2,\ l_4^{\sigma^4}=a^{-1}\bar{l}_1,$$

因此

$$\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma^2)=\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}}(\sum_{i=0}^{4}l_i\bar{l}_i)$$

我们将 $l_0=m_0^0$, $l_1=m_1^0+\rho_2 m_1^1$ 和 $l_2=m_2^0+\rho_2 m_2^1$ 记为 $m_i^j\in M$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma^2)=\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}}((m_0^0)^2+2((m_1^0)^2+m_1^0m_1^1+2(m_1^1)^2)+\\ 2((m_2^0)^2+m_2^0m_2^1+2(m_2^1)^2))\end{aligned}\tag{9.2.2}$$

注意，这个方程只涉及全实循环扩张 $M/\mathbb{Q}$。

Let

$$\vec{m}=((m_0^0)_{\mathbb{Q}},(m_1^0)_{\mathbb{Q}},(m_1^1)_{\mathbb{Q}},(m_2^0)_{\mathbb{Q}},(m_2^1)_{\mathbb{Q}})$$

是 $\mathbb{Q}^{25}$中的一个行向量，其中 $(m_i^j)_{\mathbb{Q}}$ 表示 m_i^j 在 $\mathbb{Q}^5$ 下对应的行向量，通过识别 $M\cong\bigoplus_{i=0}^{4}\mathbb{Q}\alpha_i$。利用我们在 §6.3中的讨论，每个$\gamma\in(\Lambda_D^{\max})^{\iota}$ 对应于 $\mathbb{Z}^{25}$ 中的一个列向量 $\vec{x}^T$，满足

$$\vec{m}^T=B_{\max}\cdot\vec{x}^T.$$

接下来，考虑 $\mathbb{Z}^{25}$ 上的如下显式二次型:

$$Q_{\max}(\vec{x}):=\vec{x}\cdot B_{\max}^T A_0 B_{\max}\cdot\vec{x}^T,$$

其中我们定义

$$A_0=\mathrm{diag}\left(T,\begin{pmatrix}2T & T\\ T & 4T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2T & T\\ T & 4T\end{pmatrix}\right)\quad\text{with}\quad T=(\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}}(\alpha_i\alpha_j))_{0\le i,j\le 4}.$$

根据上文的讨论，我们有

$$\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma^2)=Q_{\max}(\vec{x}).$$

这意味着我们得到了上述二次型（9.2.1）的一个具体实现。此外，我们可以使用嵌入（5.1.2）来计算 γ 的特征多项式，它可以表示为

$$P_\gamma(t)=t^5+P_1(\vec{x})t^4+P_2(\vec{x})t^3+P_3(\vec{x})t^2+P_4(\vec{x})t+P_5(\vec{x}),\tag{9.2.3}$$

其中，对每个 $i=1,\ldots,5$，$P_i(\vec{x})$ 是一个次数为 i、关于 $\mathbb{Z}[\vec{x}]$ 的齐次多项式（因此含有 25 个变量）。利用 $\vec{x}$ 与 γ 之间的显式关系，可以显式计算这些多项式 $P_i(\vec{x})$。特别地，我们有 $P_1(\vec{x})=-\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma)$，且 $Q_{\max}(\vec{x})=P_1(\vec{x})^2-2P_2(\vec{x})$。

现在我们讨论一种可能选取的最小短向量。考虑 $\iota(x)x=p^e$ 在 $\Lambda_D^{\max}\setminus\mathcal{O}_E$ 中的一个解。利用引理 9.1.1，我们写作 $x=\alpha+\rho_2\beta$，使得

- α，β位于 $(\Lambda_{最大D})^{\iota}$，使得 $M'=\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}(2\alpha+\beta)$ 是一个 5 次全实域，并且 $L'=EM'$ 是一个在 $\mathbb{Q}$ 上次数为 10 的 CM 域。
- 我们有 7α，7β，$2\alpha+\beta\in\mathcal{O}_{M'}\cap\Lambda_{最大D}$。当 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7 处非分歧时，我们进一步有 α，$\beta\in\mathcal{O}_{M'}$。
- 我们有 $\mathrm{Trd}_{D/E}(4\iota(x)x)=\mathrm{Trd}_{D/E}((2\alpha+\beta)^2)+\mathrm{Trd}_{D/E}(7\beta^2)=20p^e$。

令 γ 为 $\Lambda_D^{\max}\cap(\mathcal{O}_{M'}-\mathbb{Z})$中的一个元素，使得 $\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma^2)$达到最小值。令 $\vec{x}\in\mathbb{Z}^{25}$ 为与 γ相关的向量。我们有

$$Q_{\max}(\vec{x})=\mathrm{Trd}_{D/E}(\gamma^2)\le(7/8)[\mathrm{Trd}_{D/E}((2\alpha+\beta)^2)+\mathrm{Trd}_{D/E}((7\beta)^2)/7]=35p^e/2.$$

9.3. **寻找子域** $L' \subset D$。我们将说明如何列出所有可能的极大子域 $L' \subset D$，使得存在一个元素 $x \in L' \cap \Lambda_D^{\max} \setminus \mathcal{O}_E$ 满足$\iota(x)x = p^e$。特别地，我们必有 $x \in \mathcal{O}_{L'}$。考虑 $M' = L'^{\iota}$，它是 $\mathbb{Q}$上的一个 5 次全实域。

我们需要检查所有次数为 5 的 CM 域 L'，它们是 E 的扩张，并满足

- L' 可以嵌入 D，或者根据局部-整体相容性，这等价于L' 在 ρ_2 和 $\bar{\rho}_2$ 处是惰性的；也等价于 $M' = L'^{\iota}$ 在 2 处是惰性的。
- 根据引理 9.1.1，$\mathrm{Disc}(M') \leq C \cdot 7^{10\varepsilon} \cdot (4p^e/7)^{10}$，其中 $\varepsilon = 0$，或者为 1，具体取决于 $M'/\mathbb{Q}$ 是否在 7 处分歧。
- 方程 $\iota(x)x = p^e$ 在 $\mathcal{O}_{L'} \setminus \mathcal{O}_E$ 中有解。

策略是列出所有满足上述前两个条件的 L'，然后逐一检查是否满足第三个条件。

要检验 $\iota(x)x = p^e$ 在 $\mathcal{O}_{L'} \setminus \mathcal{O}_E$ 中是否有解，一个必要且可有效检验的条件是：存在一个主理想 I，它整除 (p^e)，并且当 $e = 2$（相应地，$e = 1$）时不同于 (p)（相应地，(ρ_p) 与 $(\bar{\rho}_p)$），使得 $\iota(I)I = (p^e)$。为求出 I，只需考虑 (p^e) 分解为素理想之积，并检验能否将这些素理想分成两个多重集，使其乘积分别等于主理想 I 与 $\iota(I)$。注意，满足 $I = (x)$ 的 $\iota(x)x = p^e$ 的两个解相差一个单位 $u \in \mathcal{O}_{L'}^{\times}$，且该单位满足 $\iota(u)u = 1$。此外，由于 $\mathcal{O}_{L'}$ 与 $\mathcal{O}_{M'}$ 的单位群具有相同的秩，映射 $\mathcal{O}_{L'}^{\times} \to \mathcal{O}_{M'}^{\times}, y \mapsto \iota(y)y$ 的核与余核均为有限。因此 u 是一个单位根。最后，任意在 E 上为 5 次的 CM 域 L' 仅有单位根 1 与 -1。因此，对每个理想 I，至多有 2 个解 $x, -x$ 满足 $I = (x)$。由于可能的 I 只有有限多个，故对每个 L'，$\iota(x)x = p^e$ 只有有限多个解。

使用 SageMath，对于 $p^e = 9$ 或 11，我们检查了 LMFDB 网站上列出的前 8000 个满足前两个条件的 CM 域 L'，发现其中约有 200 个域有一个解 $\iota(x)x = p^e$。我们也列出了相关的解。特别是，这份列表包含所有满足 L' 使得 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7 处非分歧的域。如果进一步聚焦于 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7 处分歧的情形，那么对于 $p^e = 9$或 11，还剩不到 40000 个域需要检查。判别式变大时，检查某个域 L' 是否有解以及求出这些解会变得更慢。但无论如何，这只需检查一次。

因此，我们最终希望对于较小的 p^e，能够列出所有满足上述条件的 CM 域 L'，以及满足 $x \in \mathcal{O}_{L'} \setminus \mathcal{O}_E$ 使得 $\iota(x)x = p^e$ 的域。另一方面，这只是一个必要条件，也就是说，某些解 x 可能无法嵌入 $\Lambda_D^{\max}$。

9.4. **策略**。现在，计算 $\Lambda_D^{\max} \setminus \mathcal{O}_E$ 中的 $\iota(x)x = p^e$ 的所有解，可以分为以下三个步骤：

（1）列出所有次数为 5 的可能全实域 $M'/\mathbb{Q}$ 及相关的 CM 域 $L' = EM'$，使得在 $\mathcal{O}_{L'} \setminus \mathcal{O}_E$ 中存在解 $\iota(x)x = p^e$，并对每个 L' 找出所有解 x。利用引理 9.1.1，我们需要搜索所有具有有界判别式的可能全实域 M'；当 p^e 较小时，这可以实现。（2）列出所有满足 $\mathrm{Trd}^{D/E}(\gamma^2) \leq 35p^e/2$ 的 $\gamma \in (\Lambda_D^{\max})^{\iota}$。等价地，列出所有满足 $Q_{\max}(\vec{x}) \leq 35p^e/2$ 的 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^{25}$。注意，在这里 $Q_{\max}$ 是一个具体的 25 变量正定二次型，并且其系数是明确给定的。

主要问题在于解的数量极其庞大——当 $p^e = 11$ 和 $35p^e/2 = 375/2$ 时，大约有 10^{14} 个解 $\vec{x}$，因此几乎不可能将它们全部列出，并在下面的第（3）步中进一步检查。另一方面，通过取一个更小的界，我们仍然能够找到某些 γ，这可能会导出一些解 x。

(3) 对于步骤 (2) 列表中的每个 γ，检查域 $M' = \mathbb{Q}(\gamma)$ 是否位于步骤 (1) 的列表中；这可以通过计算 γ 的特征多项式$P_\gamma(t)$来完成。之后，对于 $\mathcal{O}_{L'} \setminus \mathcal{O}_E$ 中满足 $\iota(x)$ $x = p^e$ 的任意 x，我们可以将其表示为关于 γ 和 ρ_2 的显式 $\mathbb{Q}$-系数多项式。然后，我们可以直接检查 x 是否属于 $\Lambda_D^{\max}$。理论上，这将给出 $\Lambda_D^{\max} \setminus \mathcal{O}_E$ 中 $\iota(x)$ $x = p^e$ 的全部解。结合 §8.2 和推论 9.1.2，我们可以找到所有的门。

更准确地说，在步骤 (3) 中，如果我们写成 $x = \alpha + \rho_2\beta$，那么有 $M' = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}$ $(\beta) = \mathbb{Q}(2\alpha + \beta)$，并且可以将 γ 视为 $\mathbb{Z}[7\alpha, 7\beta, 2\alpha + \beta] \setminus \mathbb{Z} \subset (\Lambda_D^{\max})^\iota \setminus \mathbb{Z}$ 中的一个最短向量。因此，通过求解 L' 中的方程 $\iota(x)x = p^e$，我们可以针对步骤 (1) 中的每个候选 L'，预先计算 γ 的特征多项式。从这个意义上说，我们实际上需要解决以下问题：

问题 9.4.1。 求出所有向量 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^{25}$，使得 $Q_{\max}(\vec{x}) \leq 35p^e/2$ 和$(P_1(\vec{x})\ P_2$ $(\vec{x})\ P_3(\vec{x})\ P_4(\vec{x})\ P_5(\vec{x}))$ 属于 $\mathbb{Z}^5$ 中一个预先计算好的固定向量列表。

上述问题相当具体。我们希望一些技巧，包括针对较小 n 的模 n 技巧，能够降低问题的复杂度，并导出一种有效算法，以找出较小 p^e（例如 $p^e = 9$ 或 11）时的所有解。然而，解决这个问题，甚至判断它在现代硬件上是否具有计算可行性，都远远超出了作者目前的专业能力范围。

9.5. **初始数据**。 为方便读者，我们列出在 $B_{\max}$ 和 $Q_{\max}$的设定下采用的选择，见 §5.3。

使用 §6.3 中的步骤，在 SageMath 中可以找到一个显式的 25×25 矩阵$B_{\max}$，其各行为：

行 1: (-1 11 , 0, . . . , 0); 行 2: (0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 3: (0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 4: (6 11 , 2 11 , 1 11 , 1, 0, . . . , 0); 行 5: (5 11 , 8 11 , 3 11 , 0, 1, 0, . . . , 0); 行 6: (3 121, 8 121, 2 121, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 7: (6 121, 5 121, 4 121, 0, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 8: (10 121, 1 121, 3 121, 0, 0, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 9: (7 121, 4 121, 1 121, 0, 0, 0, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 10: (5 121, 6 121, 7 121, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 11: (97 121, 178 121, 226 121, 0, 0, 3 11 , 0, 0, 0, 0, 2, 0, . . . , 0); 行 12: (-194 121, 81 121, 210 121, 0, 0, 0, 3 11 , 0, 0, 0, 0, 2, 0, . . . , 0); 行 13: (162 121, 113 121, 97 121, 0, 0, 0, 0, 3 11 , 0, 0, 0, 0, 2, 0, . . . , 0);

行 14: (2485 121 , 2146 121 , 1807 121 , 0, 0, 16, 4, 8, 201 11 , 6, 12, 4, 2, 22, 0, . . . , 0); 行 15: (1291 121 , 1162 121 , 791 121 , 0, 0, 10, 20, 12, 4, 25 11 , 10, 16, 6, 0, 22, 0, . . . , 0); 行 16: (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 121, 0, . . . , 0); 行 17: (4 121 , 2 121 , 5 121 , 0, 0, 1 121, 10 121 , 6 121, 1 121, 7 121, 7 121, 4 121, 1 121, 0, 0, 2 121, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 18: (9 121 , 6 121 , 5 121 , 0, 0, 10 121, 9 121 , 10 121, 5 121, 9 121, 5 121, 6 121, 7 121, 0, 0, 7 121, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 19: (7 121 , 9 121 , 1 121 , 0, 0, 1 121, 7 121 , 0, 7 121, 1 121, 8 121 , 3 121, 9 121 , 0, 0, 6 121 , 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 20: (10 121 , 6 121 , 4 121 , 0, 0, 5 121, 8 121 , 1 121, 1 121, 6 121, 5 121, 6 121, 7 121, 0, 0, 9 121, 0, 0, 0, 1 11 , 0, . . . , 0); 行 21: (12, 18, 4, 0, 0, 12, 20, 4, 14, 16, 0, 0, 0, 0, 0, 597 121, 0, 0, 0, 0, 0, 22, 0, 0, 0); 行 22: (2146 121 , 710 121 , 81 121 , 0, 0, 839 121, 162 121, 1888 121 , 1323 121 , 65 121, 1517 121 , 2388 121 , 597 121, 0, 0, 1194 121 , 113 11 , 0, 0, 0, 0, 22, 0, 0, 0); 行 23: (1501 121 , 920 121 , 565 121 , 0, 0, 162 121, 1017 121 , 1372 121 , 1533 121 , 291 121, 323 121, 920 121, 1517 121 , 0, 0, 1517 121 , 0, 113 11 , 0, 0, 0, 0, 22, 0, 0); 行 24: (549 121 , 1501 121 , 597 121 , 0, 0, 1323 121 , 65 121, 2, 1033 121 , 1565 121 , 2114 121 , 1791 121 , 49 121, 0, 0, 920 121, 0, 0, 113 11 , 0, 0, 0, 0, 22, 0); 行 25: ($\frac{12988}{121}$, $\frac{23910}{121}$, $\frac{16908}{121}$, 0, 0, $\frac{16053}{121}$, $\frac{18570}{121}$, $\frac{28911}{121}$, $\frac{13181}{121}$, $\frac{18344}{121}$, $\frac{8309}{121}$, $\frac{8906}{121}$, $\frac{1517}{121}$,0, 0, 26669 121 , 176, 132, 220, 597 11 , 44, 154, 176, 132, 242).

利用这个 $B_{\max}$，我们找到一个显式的 $Q_{\max}$ ，使得相关的对称矩阵 $B_{\max}^T A_0 B_{\max}$ 的系数均为非负整数。由于它已经是显式的，为简洁起见，我们不展示其各项。我们也不会展示 50×50矩阵 $A_{\max}$，尽管这样的矩阵有助于验证 D 中的元素 x 是否位于 $\Lambda_D^{\max}$中。作为补偿，通过观察 $\eta(x) \in \mathrm{GL}_5(L)$，仍可判断 x 是否在 $\Lambda_D^{\max}$ 中。

9.6. **寻找显式门元素**。 在这一部分，我们说明寻找显式门元素的策略。我们假设 $p^e = 9$ 或11。

(1) 我们列出了所有全实域 M' ， 以及具有 $\iota(x)x = p^e$ 之解的CM 域 L' ， 且

- $M'/\mathbb{Q}$ 在2处惰性;
- Disc(M') 的界为 $0.134288 \cdot (44/7)^{10} \approx 12959555$ 对于 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7 处不分歧的情况，以及 $0.134288 \cdot 44^{10} \approx 3.6523 \times 10^{15}$ 对于 $M'/\mathbb{Q}$ 在 7 处分歧的情况。我们检查了 LMFDB 上列出的前 8000 个全实域 M' ， 发现其中有 139 个候选域在 L' 中存在范数解。这里列出其中最小和最大的 M' 及其判别式: $\mathbb{Q}[t]/(t^5 - 2t^4 - 3t^3 + 5t^2 + t - 1)$ 36497， $\mathbb{Q}[t]/(t^5 - 2t^4 - 9t^3 + 7t^2 + 7t + 1)$ 8733025。(2) 我们列出了所有满足 $Q_{\max}(\vec{x}) \leq 40$ 的 $\vec{x}$ 。结果共有 463798 个解。我们恢复了相应的 γ。

(3) 我们检查了步骤 (2) 中的 γ，以确认 $\mathbb{Q}(\gamma)$ 是否出现在步骤 (1) 的预先计算列表中。结果发现只有几百个候选项。(4) 我们检查了步骤 (3) 中的每个相关解 x，确认它作为关于 ρ_2 和 γ 的多项式是否属于 $\Lambda_D^{\max}$。

例。 在上述范围内，我们已经找到一个元素 $\vec{x}$ 以及相应的$\gamma \in(\Lambda_D^{\max})^\iota$，使得

- $Q_{\text{最大值}}(\vec{x}) = \mathrm{Trd}^{D/E}(\gamma^2) = 34$;
- $(m_0^0, m_1^0, m_1^1, m_2^0, m_2^1) = (-\frac{2}{11}\alpha_1^4 + \frac{7}{11}\alpha_1^2 - \frac{3}{11}\alpha_1 - \frac{2}{11}, -\frac{34}{121}\alpha_1^4 + \frac{36}{121}\alpha_1^3 + \frac{64}{121}\alpha_1^2 - \frac{10}{121}\alpha_1 + \frac{61}{121}, \frac{30}{121}\alpha_1^4 - \frac{46}{121}\alpha_1^3 - \frac{28}{121}\alpha_1^2 + \frac{80}{121}\alpha_1 - \frac{125}{121}, \frac{45}{121}\alpha_1^4 + \frac{43}{121}\alpha_1^3 - \frac{229}{121}\alpha_1^2 - \frac{9}{11}\alpha_1 + \frac{177}{121}, \frac{3}{121}\alpha_1^4 + \frac{19}{121}\alpha_1^3 + \frac{17}{121}\alpha_1^2 - \frac{5}{11}\alpha_1 - \frac{85}{121})$.
- γ 具有特征多项式 $x^5 - 17x^3 + 21x^2 + 21x - 25$，它定义了域 M'，其判别式为 89417，且在 7 处非分歧。
- 对于 $\alpha = \frac{1}{11}\gamma^4 + \frac{2}{11}\gamma^3 - \frac{8}{11}\gamma^2 + \frac{3}{11}\gamma - \frac{17}{11}, \beta = -\frac{3}{11}\gamma^4 - \frac{4}{11}\gamma^3 + \frac{43}{11}\gamma^2 - \frac{9}{11}\gamma = \frac{42}{11}$，我们验证了 $x = \alpha + \beta\rho_2$ 是 $\iota(x)x = 11$ 的一个解。
- 最后，$x \in \Lambda_{\max D}$。这可以先将 x 转换为相关的列向量 $(\vec{x}_L)^T \in \mathbb{Q}^{50}$，然后验证 $A_{\max} \cdot (\vec{x}_L)^T \in \mathbb{Z}^{50}$ 来检验。

10. Algorithm Summary

我们现在总结构造我们的拉马努金复形 $X_G(K^{\infty,p})$ 的完整算法。

10.1. **输出复形的结构。** 我们按照 §3.4 中的方法，计算输出复形的局部结构细节。

10.1.1. 分裂情形。 如果 v_0 是分裂的，则 $\mathcal{B}(G_{v_0})$ 的类型为 A_4。单形的类型是 $\{0,1,2,3,4\}$ 的子集在循环置换 (1234) 下的轨道。我们可以根据各种旗簇的大小，计算一个顶点包含多少个各类型的单形:

$\{0,1\}$	$\frac{2(q_v^5-1)}{(q_v-1)}$	$\{0,1,3\}$	$\frac{3(q_v^5-1)(q_v^4-1)(q_v^3-1)}{(q_v^2-1)(q_v-1)^2}$
$\{0,2\}$	$\frac{2(q_v^5-1)(q_v^4-1)}{(q_v^2-1)(q_v-1)}$	$\{0,1,2,3\}$	$\frac{4(q_v^5-1)(q_v^4-1)(q_v^3-1)}{(q_v-1)^3}$
$\{0,1,2\}$	$\frac{3(q_v^5-1)(q_v^4-1)}{(q_v-1)^2}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\frac{(q_v^5-1)(q_v^4-1)(q_v^3-1)(q_v^2-1)}{(q_v-1)^4}$

每个 4-单纯形也包含在 q_v+1 个房间中。

注意，与 §3.4 中一样，这些复形的万有覆盖与 [LSV05a 和 LSV05b] 中构造的不同。

10.1.2. 惰性情形。 如果 v_0 是惰性的，则 $\mathcal{B}(G_{v_0})$的类型为 ${}^2A_4'$。存在三种类型的顶点 $\{0,1,2\}$，不失一般性，可标记使得0为超特殊、2为非超特殊特殊。高维单纯形的类型是 $\{0,1,2\}$ 的子集，而 $\mathcal{B}(G_{v_0})$由形如图2的公寓构成。

我们再次根据旗簇的大小，计算每个顶点处每种类型的室的次数：

	$\{0,1,2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$
0	$(q_v^2+1)(q_v^3+1)(q_v^5+1)$	$(q_v^2+1)(q_v^5+1)$	$(q_v^3+1)(q_v^5+1)$	—
1	$(q_v+1)(q_v^3+1)$	(q_v+1)	—	(q_v^3+1)
2	$(q_v+1)(q_v^2+1)(q_v^3+1)$	—	$(q_v+1)(q_v^3+1)$	$(q_v^2+1)(q_v^3+1)$

注意，类型 0 顶点处整模型的特殊纤维的约化商，1，2 分别为 $U(5)$ $U(3)\times U(2)$，以及 $U(4)$。有限域上酉群的点计数公式可见 [CCN+85，§2]。

或者， [Tit79] 表格中顶点的编号标签给出：

- 每条类型为 $\{0,1\}$ 的边都包含在 (q_v^3+1) 个房间中。
- 每条类型为 $\{0,2\}$ 的边都包含在 (q_v^2+1) 个房间中。
- 每条类型为 $\{1,2\}$ 的边都包含在 (q_v+1) 个房间中。

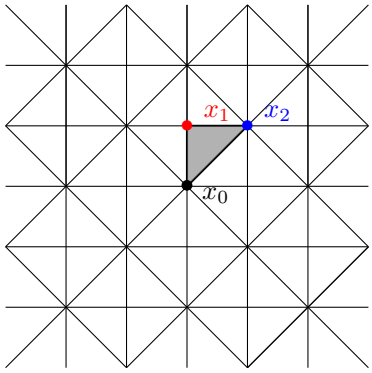


FIGURE 2. 类型为 ${}^2A_4'$的公寓和室

10.2. 算法。 按照前几节中的记号，我们选取 $G, K_0^{\infty,\Lambda_{0,p}}$，满足 $a := a_1$。数值 n 将定义 $K^{\infty,p} = K^{\infty,0\ p}(n)$，从而定义 Λ_p。

输入。 素数 $p \neq 2,7$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 与 $2\cdot 7\cdot p$互素。

输出。 文中所述类型的 Ramanujan 单纯复形

$$\begin{cases} \S 10.1.1 & p \equiv 1,2,4 \pmod 7 \\ \S 10.1.2 & p \equiv 3,5,6 \pmod 7 \end{cases}$$

with

$$n^{24} \prod_{\substack{q\mid n,\\ q\equiv 1,2,4 \\ \bmod 7}} \left(\frac{1}{q^{24}(q-1)} \prod_{i=0}^{4} (q^5 - q^i) \right) \times \prod_{\substack{q\mid n,\\ q\equiv 3,5,6 \\ \bmod 7}} \left(\frac{1}{q^{24}(q+1)} \prod_{i=0}^{4} (q^5 + (-1)^i q^i) \right)$$

顶点，如果 $p \equiv 1$，2，4（模 7），并且

$$n^{25} \prod_{\substack{q|n,\\ q\equiv 1,2,4 \\ \bmod 7}} \left(\frac{1}{q^{25}} \prod_{i=0}^{4} (q^5 - q^i) \right) \times \prod_{\substack{q|n,\\ q\equiv 3,5,6 \\ \bmod 7}} \left(\frac{1}{q^{25}} \prod_{i=0}^{4} (q^5 + (-1)^i q^i) \right)$$

若 $p \equiv 2$ 满足 3，5，（模 7）的 0 型顶点。

常数与记号。我们定义常数:

- $p_0 = 11$,
- α_1 是多项式 $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ 的根，且 $\alpha_i := \alpha_1^i$,
- $\rho_2 := (1 + \sqrt{-7})/2$, $\rho_{11} = 2 + \sqrt{-7}$,
- 如果 p 是分裂的，$p = \rho_p \bar{\rho}_p$ 在 $\mathbb{Z}[\rho_2]$,
- $a = \rho_2 \rho_{11}^3 / \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_{11}^3$,
- $b = 10$,
- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^{\sigma} & \alpha_1^{\sigma^2} & \alpha_1^{\sigma^3} & \alpha_1^{\sigma^4} \\ \alpha_1^{\sigma} & \alpha_1^{\sigma^2} & \alpha_1^{\sigma^3} & \alpha_1^{\sigma^4} & \alpha_1 \\ \alpha_1^{\sigma^2} & \alpha_1^{\sigma^3} & \alpha_1^{\sigma^4} & \alpha_1 & \alpha_1^{\sigma} \\ \alpha_1^{\sigma^3} & \alpha_1^{\sigma^4} & \alpha_1 & \alpha_1^{\sigma} & \alpha_1^{\sigma^2} \\ \alpha_1^{\sigma^4} & \alpha_1 & \alpha_1^{\sigma} & \alpha_1^{\sigma^2} & \alpha_1^{\sigma^3} \end{pmatrix}^{-1}.$$
- 将 $n = n_0 p_0^{n_{p_0}}$写成 $\gcd(n_0, p_0) = 1$ 和 $n_{p_0} \geq 0$。

作为记号

- E 是数域 $\mathbb{Q}[\rho_2]$,
- M 是全实域 $\mathbb{Q}[\alpha_1]$,
- L 是数域 $\mathbb{Q}[\rho_2, \alpha_1]$，其整数环为
$$\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}\langle \alpha_i,\ \rho_2 \alpha_i : 0 \leq i \leq 4 \rangle,$$
- σ： $\alpha_1 \mapsto \alpha_1^4 + 4\alpha_1^2 - 2$, $\rho_2 \mapsto \rho_2$ 和 $^-$： $\alpha_1 \mapsto \alpha_1$, $\rho_2 \mapsto \bar{\rho}_2$ 是自同构 of L,
- 给定 $\gamma \in L$,
$$\mathbf{U}_\gamma := \begin{pmatrix} \gamma & & & & \\ & \gamma\gamma^{\sigma} & & & \\ & & \gamma\gamma^{\sigma}\gamma^{\sigma^2} & & \\ & & & \gamma\gamma^{\sigma}\gamma^{\sigma^2}\gamma^{\sigma^3} & \\ & & & & \gamma\gamma^{\sigma}\gamma^{\sigma^2}\gamma^{\sigma^3}\gamma^{\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

算法：预计算。 我们首先对素数 p进行一些预计算，以确定扩张复形的局部结构

(1) 找出门集$S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}$：(a) 按照 §§6.3，9.2 找出转移矩阵 $A_{\max}$，$B_{\max}$ 以及二次型 $Q_{\max}$。一种可能的 $B_{\max}$ 和 $Q_{\max}$ 取值列于 §9.5。(b) 按照§9.4 中的三步策略，求解满足以下条件的 $x \in \Lambda_D^{\max} \setminus \mathcal{O}_E$ 的范数方程

$$\iota(x)x = p^e := \begin{cases} p & p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7, \\ p^2 & p \equiv 3, 5, 6 \pmod 7. \end{cases}$$

(c) 令 $S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}$ 为这些 x 对应的 ψx 集合，使得 $\iota(x)x = p^e$，且在分裂和惰性情形下，$e = 1$ 分别为 2 或 $\psi = \bar{\rho}_p^{-1}$分别为 p^{-1}。

(2) 计算映射 $Q \xrightarrow{\sim} S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}$： $x \mapsto s_x$ 构造 4.2.3、4.2.4所需：(a) 当 p 或 n 可被 p_0整除时，使用 $\Lambda_D^{\max}$的表达式和中国剩余定理计算矩阵 $\mathbf{V}_{p_0} \in \mathrm{GL}_5(L)$，如 §8.1.1 所示。(b) 若 $p \equiv 1,\ 2、\ 4$ （模 7），

(i) 求 $\gamma_p \in \mathcal{O}_{L,\ (p)}$ 使得 $N_{L/E}(\gamma_p) \equiv a$ (模 p)。(ii) 定义矩阵 $\mathbf{B}_p = \mathbf{U}_{\gamma_p}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}^{-\log_{p_0}(\gcd(p,\ p_0))}\ {}_{p_0}$。(iii) Q 中的顶点 $\bar{\mathcal{M}} \subsetneq (\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5$ 以及包含这些顶点的单形由构造 8.4.1确定。(iv) $s_{\bar{\mathcal{M}}}$ 是 $S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}$ 中的元素，使得

$$(\mathbf{B}_p^{-1} s_{\bar{\mathcal{M}}} \mathbf{B}_p)(\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/\rho_p)^5 = \bar{\mathcal{M}}.$$

(c) 若 $p \equiv 3, 5, 6$（模 7）：

(i) 求 $\gamma_{p^2} \in \mathcal{O}_{L,(p)}$，使得 $N_{L/E}(\gamma_{p^2}) \equiv a$ （模 p^2）。(ii) 定义矩阵 $\mathrm{B}_{p^2} = \mathrm{U}_{\gamma_{p^2}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{V}^{-\log_{p_0}(\gcd(p,p_0))}\ {}_{p_0}$。(iii) Q 中的顶点 $\bar{\mathcal{M}} \subsetneq (\mathcal{O}_{E_{\rho_p}}/p^2)^5$ 以及包含这些顶点的单形，由输入 $\mathrm{H} = \mathrm{B}_{p^2}^{\dagger}\mathrm{B}_{p^2}$ 的构造 8.4.2 确定。

(iv) $s_{\bar{\mathcal{M}}}$ 是 $S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 中使得

$$(\mathbf{B}_{p^2}^{-1} p s_{\bar{\mathcal{M}}} \mathbf{B}_{p^2})(\mathcal{O}_{E_p}/p^2)^5 = \bar{\mathcal{M}}.$$

（若需要，可以进一步用一个 $\mathbf{C}_{p^2}$ 如引理 8.1.3 那样进行共轭，使得$\mathbf{H}$ 输入到构造 8.4.2 的是反对角厄米形式$\mathbf{J}$。）

算法：构造。 于是我们可以构造以 n 为指标的复形的无限族：

(1) 将$S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 模 Λ_p约化：(a) 通过亨泽尔引理和中国剩余定理，求出 $\gamma_n \in \mathcal{O}_{L,(n)}$，使得 $N_{L/E}(\gamma_n) \equiv a$ (模 n)。(b) 定义矩阵 $\mathrm{B}_n = \mathrm{U}_{\gamma_n}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{V}^{-\min(1,n_{p_0})}\ {}_{p_0}$。(c) 求 C_n，使得 $\mathrm{C}_n^{\dagger}\mathrm{B}_n^{\dagger}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n \equiv \lambda \cdot \mathrm{J} \bmod n$，其中 J 是所有元素均为 1 的反对角矩阵，且 $\lambda \in (\mathbb{Z}/n)^{\times}$。(d) 定义 $U_5(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$为保持厄米形式 J 的子群 $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}[(1+\sqrt{-7})/2]/n)$。令

$$U_5^{\sharp}(\mathbb{Z}/n) := \begin{cases} U_5(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/U_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & p \equiv 1,2,4 \pmod 7 \\ U_5(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & p \equiv 3,5,6 \pmod 7 \end{cases}$$

(e) $\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{B}_n^{-1}S_{\bar{\Lambda}_{0,\ p}}\mathbf{B}_n\mathbf{C}_n$ (模 n) 给出 $U_5^{\sharp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$的一组代表元。

(2) 使用群$\Lambda_{0,p}/\Lambda_p \cong U_5^{\sharp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$的生成元$S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 以及赋值$Q \xrightarrow{\sim} S_{\bar{\Lambda}_{0,p}}$ 构造 $X_G(K(n)^{p,\infty})$，方法如下： $x \mapsto s_x$

$$\begin{cases} \text{Construction } 4.2.3 & p \equiv 1,2,4 \pmod 7, \\ \text{Construction } 4.2.4 & p \equiv 3,5,6 \pmod 7. \end{cases}$$

计算量最大的步骤是预计算中的步骤 (1)，关键在于解决问题 9.4.1。幸运的是，对每个复形的无限族，预计算只需进行一次——从算法在 n 多项式时间内运行的理论角度来看，这仅仅是一个（极其巨大的）加性常数因子。

References

[AB08] Peter Abramenko 和 Kenneth S Brown，*Buildings: Theory and Applications*，第 248 卷，Springer Science & Business Media，2008 年。[AGI+24] Hiraku Atobe、Wee Teck Gan、Atsushi Ichino、Tasho Kaletha、Alberto M´ınguez 和 Sug Woo Shin，*Local Intertwining Relations and Co-tempered A-packets of ClassicalGroups*，2024 年。[ALGV19] Nima Anari、Kuikui Liu、Shayan Oveis Gharan 和 Cynthia Vinzant，*Log-concave polynomials II: high-dimensional walks and an FPRAS for counting bases of a matroid*，第 51 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，2019 年，第 1–12 页。[AN02] Peter Abramenko 和 Gabriele Nebe，*Lattice champ models for affine buildings of classical type* **322** 2002 537 562 ，《数学年刊》（），–。[Art13] James Arthur，*The endoscopic classification of representations*，美国数学会学术丛书，第 61 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013 年，正交群与辛群。MR 3135650[Bad08] Alexandru Ioan Badulescu，*Global Jacquet-Langlands correspondence multiplicity one and classification of automorphic representations* **172** 2008 ，，《发明数学》（），第 2 期，附有 Neven Grbac 的附录。[BC11] Cristina Ballantine 和 Dan Ciubotaru，*Ramanujan bigraphs associated with* SU(3) *over a p-adic field*，《美国数学会会刊》139（2011），第 6 期，1939–1953。MR 2775370[BFG+15] Cristina Ballantine、Brooke Feigon、Radhika Ganapathy、Janne Kool、Kathrin Maurischat 和 Amy Wooding，*Explicit construction of Ramanujan bigraphs*，《欧洲女性与数》、美国数学会女性数学家丛书第 2 卷，Springer，Cham，2015 年，第 1–16 页。MR 3596599[BT72] Fran¸cois Bruhat 和 Jacques Tits，*Groupes réductifs sur un corps local: I. données radicielles valuées*，《IHÉS 数学出版物》41（1972），5–251。[Car12] Ana Caraiani，*Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles* **161** 2012 12, 2311 2413 ，《杜克数学杂志》（），第 – 期。[CCN+85] JH Conway、RT Curtis、SP Norton、RA Parker 和 RA Wilson，*Atlas of finite groups*，牛津 Clarendon 出版社，1985 年。[Clo93] Laurent Clozel，*On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties*，《杜克数学杂志》72（1993），第 3 期，757–795。[CS98] Donald I Cartwright 和 Tim Steger，*A family of A_n-groups*，《以色列数学杂志》103（1998），第 1 期，125–140。[CSZ03] Donald I. Cartwright、Patrick Sol´e 和 Andrzej ˙Zuk，*Ramanujan geometries of type $\tilde{A}_n$*，《离散数学》269（2003），第 1–3 期，35–43。MR 1989451[DDL24] Yotam Dikstein、Irit Dinur 和 Alexander Lubotzky，*Low acceptance agreement tests via bounded-degree symplectic hdxs*，2024 年 IEEE 第 65 届计算机科学基础年会（FOCS），IEEE，2024 年，第 826–861 页。[Del80] Pierre Deligne，*La conjecture de Weil. II*，《高等科学研究所数学出版物》（1980），第 52 期，137–252。MR 601520[DEL+22] Irit Dinur、Shai Evra、Ron Livne、Alexander Lubotzky 和 Shahar Mozes，*Locallytestable codes with constant rate, distance, and locality*，第 54 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，2022 年，第 357–374 页。[DEL+25] Irit Dinur、Shai Evra、Ron Livne、Alexander Lubotzky 和 Shahar Mozes，*Good locally testable codes* **201** 2025 3, ，《数学年刊》（），即将出版。[DEP25] Rahul Dalal、Shai Evra 和 Ori Parzanchevski，*Multi-qubit golden gates*，2025 年。[Din07] Irit Dinur，*The PCP theorem by gap amplification*，《美国计算机协会会刊》54（2007），第 3 期，12–es。

[DK17] Irit Dinur 和 Tali Kaufman, *High dimensional expanders imply agreement expanders*, 2017 年 IEEE 第 58 届计算机科学基础年会（FOCS），IEEE，2017 年，第 974–985 页。[Dri88] V. G. 德林费尔德, *Proof of the Petersson conjecture for* 2 *over a global field of* GL( ), 《功能分析及其应用》（ ），第 – 期。MR [EFMP23] Shai Evra、Brooke Feigon、Kathrin Maurischat 和 Ori Parzanchevski, *characteristic p* **22** 1988 1, 34 54, 96 936697 *Ramanujan bigraphs* 2023 , 。[EGGG24] Shai Evra、Mathilde Gerbelli-Gauthier 和 Henrik P. A. Gustafsson, *The Cohomological Sarnak-Xue Density Hypothesis for* SO_5 2024 , 。[EK24] Shai Evra 和 Tali Kaufman, *Bounded degree cosystolic expanders of every dimension*, 《美国数学会杂志》 37 （ 2024 ），第 1 期，39–68。[EKZ22] Shai Evra、Tali Kaufman 和 Gilles Z´emor, *Decodable quantum LDPC codes beyondthe n distance barrier using high-dimensional expanders*, 《SIAM计算杂志》53（2022），第 6 期，FOCS20–276。[EP22] Shai Evra 和 Ori Parzanchevski, *Ramanujan complexes and golden gates in PU*(3), 《几何与泛函分析》32（2022），第 2 期，193–235。MR 4408431[EP24] Shai Evra 和 Ori Parzanchevski, *Arithmeticity thinness and efficiency of qutrit* , , 。[Fir16] Uriya A *clifford+t gates* 2024 First, *The Ramanujan property for simplicial complexes*, 2016 年。[GH24] Jayce R Getz 和 Heekyoung Hahn, *With a view toward trace formulae* 300, *An introduction to automorphic representations* 2024 , 第 Springer Nature 卷，。[GK22] Roy Gotlib 和 Tali Kaufman, *Nowhere to go, but high: a perspective on high-dimensional expanders* 6, 2022, 4842 4871 , 《国际数学家大会论文集》，第 卷，第 – 页。[GL17] Alain Genestier 和 Vincent Lafforgue, *Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de langlands locale* 2017 , 。[GLS+23] Alexander Golovnev、Jonathan Lee、Srinath Setty、Justin Thaler 和 Riad S Wahby, *Brakedown: Linear-time and field-agnostic snarks for r1cs*, 国际密码学年会，Springer，2023 年，第 193–226 页。[HLM+25a] Jun-Ting Hsieh、Ting-Chun Lin、Sidhanth Mohanty、Ryan O'Donnell 和 Rachel Yun Zhang, *Explicit two-sided vertex expanders beyond the spectral barrier*, 第 57 届 ACM计算理论研讨会论文集，2025 年，第 833–842 页。[HLM+25b] Jun-Ting Hsieh、Alexander Lubotzky、Sidhanth Mohanty、Assaf Reiner 和 Rachel Yun Zhang, *Explicit lossless vertex expanders*, 2025 年。[Hul35] Ralph Hull, *Maximal orders in rational cyclic algebras of odd prime degree*, 《美国数学会汇刊》38（1935），第 3 期，515–530。[HW93] Aloysius G Helminck 和 Shu Ping Wang, *On rationality properties of involutions of reductive groups* **99** 1993 1, 26 96 , 《数学进展》（ ），第 – 期。[Jac62] Ronald Jacobowitz, *Hermitian forms over local fields*, 《美国数学杂志》84（1962），第 3 期，441–465。[KKL14] Tali Kaufman、David Kazhdan 和 Alexander Lubotzky, *Ramanujan complexes and bounded degree topological expanders*, 2014 年 IEEE 第 55 届计算机科学基础年会，IEEE，2014 年，第 484–493 页。[KMSW14] Tasho Kaletha、Alberto Minguez、Sug Woo Shin 和 Paul-James White, *Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups* 2014 , 。[KP23] Tasho Kaletha 和 Gopal Prasad, *Bruhat–Tits theory: a new approach*, 第 44 卷，剑桥大学出版社，2023 年。[KST20] Ju-Lee Kim、Sug Woo Shin 和 Nicolas Templier, *Asymptotic behavior of supercuspidal representations and Sato-Tate equidistribution for families* **362** , 《数学进展》（ 2020 106955, 57 4046074 ），。MR Laf Laurent Lafforgue, [02] *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, 《发明数学》147（2002），第 1 期，1–241。MR 1875184[Laf18] Vincent Lafforgue, *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de langlands globale* **31** 2018 3, 719 891 , 《美国数学会杂志》（ ），第 – 期。[Li04] W.-C. W. Li, *Ramanujan hypergraphs*, 《几何与泛函分析》14（2004），第 2 期，380–399。MR 2060199[LPS88] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. 萨纳克, *Ramanujan graphs*, 《组合数学》8（1988），第 3 期，261–277。MR 963118

[LSV05a] Alexander Lubotzky、Beth Samuels 和 Uzi Vishne, *Explicit constructions of ramanujan complexes of type $\tilde{A}_d$*, 《欧洲组合学杂志》26 6，965 2005 993（），第 – 号。[LSV05b] , *Ramanujan complexes of type A_d*, 《以色列数学杂志》149（2005），267–299。[Lub94] Alex Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, 第 125 卷，Springer Science & Business Media，1994。[Lub18] Alexander Lubotzky, *High dimensional expanders*, 国际数学家大会论文集：2018 年里约热内卢，世界科学出版社，2018，第 705–730 页。[Mar73] G. A. Margulis, *Explicit constructions of expanders*, Problemy Peredaˇci Informacii 9（1973），第 4 号，71–80。MR 484767[Mar84] , *Arithmetic groups and graphs without short cycles*, 第六届国际信息论研讨会论文集（莫斯科–塔什干），1984，俄文，第 123–125 页。[Mar88] , *Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators*, Problemy Peredachi Informatsii 24（1988），第 1 号，51–60。MR 939574[Mok15] Chung Pang Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups* **235** 2015 1108, +248 , 《美国数学会回忆录》（），第 vi 号。MR 3338302
[12] MSG A. Mohammadi 和 A. Salehi Golsefidy, *Discrete subgroups acting transitively on vertices of a Bruhat–Tits building* **161** 2012 , 《杜克数学杂志》（），第 3 号，483 544–。[NP21] Arvind N Nair 和 Dipendra Prasad, *Cohomological representations for real reductive groups* **104** 2021 4, 1515 1571 , 《伦敦数学会杂志》（），第 – 号。[PK22] Pavel Panteleev 和 Gleb Kalachev, *Asymptotically good quantum and locally testableclassical LDPC codes*, 第 54 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，2022，第 375–388 页。[PS18] Ori Parzanchevski 和 Peter Sarnak, *Super-golden-gates for PU*（2），Adv. Math. 327（ 2018 869 901 3762004 ），–。
[03] *Maximal orders* MR Rei Irving Reiner, ，牛津大学出版社，2003。[RZR24] Noga Ron-Zewi 和 Ron Rothblum, *Local proofs approaching the witness length*, 《美国计算机协会会刊》71（2024），第 3 号，1–42。[Sar07] Alireza Sarveniazi, *Explicit construction of a Ramanujan n_1 n_2 n_{d-1} -regular (, , ...,) , hypergraph* **139** 2007 1, 141 171 《杜克数学杂志》（），第 – 号。MR 2322678
[13] *Local fields* 67, Ser Jean-Pierre Serre, , 第 Springer Science & Business Media 卷，2013。[Spi95] Daniel A Spielman, *Linear-time encodable and decodable error-correcting codes*, 第二十七届 ACM计算理论研讨会年度会议论文集，1995，第 388–397 页。[SS96] Michael Sipser 和 Daniel A Spielman, *Expander codes*, 《IEEE信息论汇刊》42（1996），第 6 号，1710–1722。[Tit79] Jacques Tits, *Reductive groups over local fields*, 《自守形式、表示和 L函数》（《纯粹数学专题讨论会论文集》，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），第 1 部分，第 1 卷，1979，第 29–69 页。[V+12] Salil P Vadhan 等, *Pseudorandomness*, 《理论计算机科学基础与趋势》7（2012），第 1–3 号，1–336。

Succinct Inc, 101 Mission St. San Francisco, CA
Email address: dalal.rahul@gmail.com

Departamento de Álgebra and Instituto de Matemáticas (IMUS), Universidad de Sevilla, C/ Tarfia s/n, 41012 SevillaUniversity of Vienna, Fakultät für Mathematik, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien*Email address*: alberto.minguez@univie.ac.at

Institute for Advanced Study in Mathematics of Harbin Institute of Technology, Harbin, China
Email address: idealzjd@gmail.com