衰落信道下连续孔径阵列的保密性能

Xuan Yang，IEEE 研究生会员；Chongjun Ouyang，IEEE 会员；Dongming Li，IEEE 会员；Yuanwei Liu，IEEE 会士

arXiv:2603.06171v1 [cs.IT] 6 Mar 2026

摘要——本文分析了基于连续孔径阵列（CAPA）的窃听信道的保密性能，包括保密速率和保密中断概率（SOP）。首先，建立了瑞利衰落信道下采用最大比传输的CAPA系统模型，并利用Mercer定理和Landau 特征值定理，推导出合法用户Bob的信噪比（SNR）和窃听者Eve的信噪比的近似概率密度函数。本文考虑了三种场景：单个窃听者、多个独立窃听者和多个协作窃听者。随后，推导了这三种场景下保密速率和保密中断概率的表达式，并获得Bob处于高信噪比区域时的高信噪比斜率、高信噪比功率偏移、分集阶数和阵列增益。随后从理论上证明，在这三种场景下，CAPA系统均可实现相同的高信噪比斜率和相同的分集阶数，且后者等于空间自由度。此外，单个窃听者场景下的CAPA系统具有最小的高信噪比偏移和最高的阵列增益，而多个协作窃听者场景下的CAPA系统则表现出最大的高信噪比偏移和最低的阵列增益。最后，仿真结果验证了保密速率、保密中断概率和高信噪比性能的理论分析；与天线间距为半波长的空间离散阵列系统相比，CAPA系统可实现更高的保密速率和更低的保密中断概率。

索引词——连续孔径阵列（CAPA）、最大比传输（MRT）、保密速率、保密中断概率、高信噪比斜率、分集阶数。

I. 引言

过去几十年来，多输入多输出（MIMO）技术已成为现代通信系统的基石。通过利用多天线的优势，MIMO技术显著提升了系统性能。MIMO的发展趋势是增加天线数量并采用更高的通信频率。相应地，巨型MIMO [1] 和超大规模MIMO [2]等几种新的MIMO范式应运而生。近年来，为了在给定孔径面积内充分发挥天线数量极其庞大的MIMO系统的极限性能，研究人员提出了连续孔径阵列（CAPA） [3] 的概念。这一概念也称为全息MIMO [4] 或连续孔径MIMO（CAP-MIMO） [5]。CAPA的概念利用近乎无限数量的辐射单元，实现孔径范围内任意的电流分布。从传统的空间离散阵列（SPDA）转向CAPA，可实现更灵活的电磁（EM）控制，从而更充分地发挥空间复用和分集的优势。受益于天线技术的进步，已有多个CAPA系统原型被开发出来，以验证这一概念 [3]。

与传统 SPDA系统类似，许多研究探讨了 CAPA系统的基本性能极限。从电磁学角度出发，文献 [6] 基于麦克斯韦方程组分析了 CAPA系统的香农信息容量。在此框架下，文献 [7] 在白噪声模型下采用 Mercer 展开，并将分析扩展至有色噪声场景。随后，该框架被推广，用于考察多用户 CAPA系统的上行链路和下行链路信道容量 [8]。除互信息和信道容量外，CAPA系统的空间自由度（DoF）也受到了广泛关注 [9]–[12]。已有多种方法用于分析空间自由度，包括特征函数方法 [9], 、近似解析表达式 [13], 、傅里叶平面波级数展开 [14],，以及基于 Landau 特征值定理的方法 [11]。其他研究考察了特定因素对空间自由度的影响，例如耦合增益 [13], 、几何构型 [10], 和近场通信 [12]。由于分集和复用是无线系统的两项关键指标，相关研究也探讨了它们在 CAPA系统中的表现。具体而言，文献 [15]，分析了两个非平行连续孔径阵列（CAPA）的分集与复用性能，并表征了分集复用权衡（DMT）。

除了分析 CAPA系统的基本性能极限外，CAPA系统中的波束成形设计也引起了广泛的研究兴趣。波束成形设计在 CAPA系统中也称为电流分布或方向图设计，是决定通信性能的关键因素 [13]。在 CAPA系统中，方波函数 [13] 和傅里叶基函数 [16]已用于波数分复用（WDM）方案中的下行链路波束成形设计。WDM方案进一步扩展至平面连续孔径天线阵列系统，适用于下行链路 [17] 和上行链路 [18] 多用户信道，并分别以和速率最大化和频谱效率最大化为准则获得最优解。为降低基于傅里叶的方法的计算复杂度 [17], [18], ，研究人员提出了基于变分法（CoV）的最优波束成形方法[19], [20]。除了发射端波束成形设计 [18],，研究人员还针对各种优化准则提出了接收端波束成形方案 [21]。此外，深度学习已被证明是波束成形的有效工具

X. Yang 和 D. Li 任职于中国南京 211189 东南大学网络空间科学与工程学院。（电子邮箱：xuan yang@seu.edu.cn；li dm@seu.edu.cn）C. Ouyang 任职于英国伦敦 E1 4NS 伦敦玛丽女王大学电子工程与计算机科学学院。（电子邮箱：c.ouyang@qmul.ac.uk）Y. Liu 任职于中国香港香港大学电气与电子工程系（电子邮箱：yuanwei@hku.hk）

CAPA系统中的设计 [22]。

尽管关于 CAPA系统波束成形设计的研究日益增多，但大多数研究主要关注系统的有效性和可靠性。作为无线系统第三项关键特征的安全性能鲜少得到研究，只有少数工作探讨了这一方面 [23], [24]。在 [23], 中，作者考虑了视距（LoS）信道下的单用户、单窃听者场景，并推导出在功率约束下使保密速率最大化的最优电流分布，以及达到目标保密速率所需的最小功率。研究表明，与 SPDA系统相比，CAPA系统在物理层安全（PLS）性能方面具有优势。随后，该系统模型扩展至多用户、多窃听者场景 [24]。以加权保密和速率最大化为准则，研究采用块坐标下降优化方法和基于迫零的启发式算法设计了安全波束成形。然而， [23] 和 [24]均考虑的是视距信道。CAPA系统在非视距（NLoS）信道下的关键物理层安全性能指标，例如保密速率、保密中断概率（SOP）以及高信噪比（高SNR）性能，仍有待进一步研究。

为弥补这一空白，我们研究了瑞利衰落信道下CAPA系统的保密速率、保密中断概率（SOP）和高信噪比保密性能，并明确考虑了信道相关性。据我们所知，这是首项在考虑信道相关性影响的同时，分析瑞利衰落信道下 CAPA系统安全性能的研究。本文的主要贡献总结如下：

- 我们利用高斯随机场构建 CAPA系统的信道模型，并建立了瑞利衰落下采用最大比传输（MRT）的CAPA系统模型，分别考虑两名合法用户与单个窃听者（Eve）、多个独立窃听者以及多个协作窃听者的场景。随后，我们通过分布等价性获得信道自相关函数，并利用 Mercer定理和 Landau 特征值定理对其进行分解，从而推导出相应的特征值和特征函数。此外，基于分解得到的特征值和特征函数，我们推导出三种场景下合法用户 Bob 的信噪比（SNR）以及 Eve 的信噪比的近似概率密度函数（PDF）。

- 我们推导了上述窃听场景下保密速率和保密中断概率的解析表达式。此外，我们还分析了 Bob 的高信噪比区域中的高信噪比斜率、高信噪比功率偏移、分集阶数和阵列增益。结果表明，在所有三种场景中，高信噪比斜率均相同，且各场景下的分集阶数均等于系统的空间自由度（DoF）。同时，我们发现，具有单个窃听者的 CAPA系统具有最小的高信噪比偏移和最高的阵列增益，而具有多个协作Eve的 CAPA系统则表现出

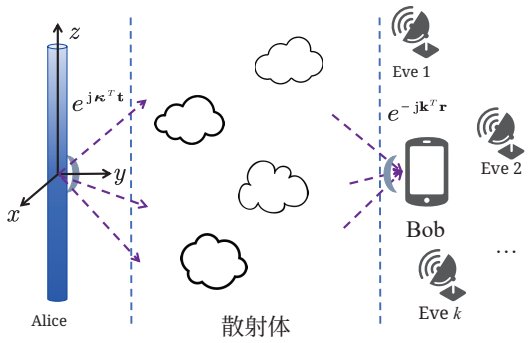

图 1：CAPA系统窃听模型。

最大的高信噪比偏移和最低的阵列增益。

- 我们通过仿真验证理论分析，涵盖 CAPA 系统的保密速率、保密中断概率（SOP）和高信噪比保密性能。仿真结果表明：i）在半波长孔径间距下，CAPA 系统的保密速率高于 SPDA 系统，保密中断概率低于 SPDA 系统；ii）CAPA 系统具有相同的高信噪比斜率和相同的分集阶数，且分集阶数等于空间自由度；iii）单个窃听者场景下的 CAPA 系统具有最低的高信噪比偏移和最高的阵列增益，而多个协作 Eve 场景下的 CAPA 系统则具有最大的高信噪比偏移和最低的阵列增益。

本文其余部分安排如下：第二节介绍系统模型和 CAPA 信道的统计特性。第三节推导不同场景下 Bob 和 Eve 的信噪比（SNR）概率密度函数。第四节（单个窃听者）、第五节（多个独立窃听者）和第六节（多个协作 Eve）分析保密速率和保密中断概率。第七节给出仿真结果，以验证理论分析并展示 CAPA 系统相较于 SPDA 系统的优越性。最后，第八节对全文进行总结。

记号：标量和向量分别用非粗体和粗体小写字母表示。算子$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 和$(\cdot)^*$分别表示转置和共轭运算。期望算子用 $\mathbb{E}\{\cdot\}$ 表示。自然对数记为 $\ln(\cdot)$， $\overset{d}{=}$ 表示依分布相等。标量 a 的幅度记为 $|a|$。克罗内克δ函数用$\delta_{i,j}$表示，狄拉克δ函数用 $\delta(\cdot)$表示。最后， $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 分别表示实数集和正整数集。

II. 系统模型

A. MRT 下的信号模型

如图 1 所示，本文所考虑的系统模型由两名合法用户 Alice 和 Bob，以及单个窃听者 Eve 或多个窃听者组成，其中 Alice 配备线性 CAPA，Bob 和窃听者均配备单根天线。Alice、Bob 和 Eve 分别记为 a、b 和 e。Alice 与 Bob 之间不存在视距路径，Alice 与窃听者之间也不存在视距路径。长度为 L 的 CAPA 沿 z 轴排列，并关于

x-y 平面对称。Alice 发射的信号可表示如下：

$$x(\mathbf{t}) = \sqrt{P} w(\mathbf{t}) s, \mathbf{t} \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

其中 s 是满足功率约束 $\mathbb{E}\left\{|s|^2\right\} = 1$的归一化编码数据信号， P 表示发射功率，

$\mathcal{A}$ =(t)是预编 w $\left\{[0,0,z]^{\mathrm{T}} | z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]\right\}$ 码向量，并表示CAPA的孔径。信号经频率平坦瑞利衰落信道传输后，Bob接收到的信号由下式给出

$$y_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}) = \sqrt{P} s \int_{\mathcal{A}} h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) w(\mathbf{t}) d\mathbf{t} + n_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

其中r表示Bob的位置， h_{b}(r,t)表示Bob与CAPA上点t之间的信道。项 n_{b}(r)表示零均值、单位方差的复高斯噪声。

设 K 表示窃听者的数量。对于每个 $k \in \{1, \cdots, K\}$, Eve k 接收到的信号由下式给出

$$y_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}) = \sqrt{P} s \int_{\mathcal{A}} h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) w(\mathbf{t}) d\mathbf{t} + n_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

其中 h_{e_k}(r, t)表示Eve k 与CAPA上点t之间的信道。假设 h_{e_k}(r, t)是零均值、单位方差复高斯（ZUCG）随机过程，且与 h_{b}(r, t)相互独立。项 n_{e_k}(r)表示零均值、单位方差的复高斯噪声。

为最大化 Bob 处的接收信号功率，Alice 采用最大比传输（MRT）。因此，我们有

$$w(\mathbf{t}) = \frac{h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}} |h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}}}. \tag{4}$$

由此可得

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}) &= \sqrt{P} s \cdot \sqrt{\int_{\mathcal{A}} |h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})|^2 dt} + n_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}), \\ y_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}) &= \sqrt{P} s \cdot \frac{\int_{\mathcal{A}} h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r}, \mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}} |h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}}} + n_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5}$$

B. 信道模型

假设散射体局限于 Alice、Bob 和窃听者之间的区域。在此假设下，Alice 与 Bob 之间的电磁多径空间响应 h_{b}(r,t) 可建模为 [14], [25]

$$h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \iiiint_{\mathscr{D}(\boldsymbol{\kappa}) \times \mathscr{D}(\mathbf{k})} \frac{e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}} H_{\mathrm{b}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) e^{\mathrm{j}\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}}{(2\pi)^2} \mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x, \gamma(\kappa_x \ \kappa_z$ $= [k_x, \gamma \ k_x \ k_z \ k_z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \ \gamma \ x \ y = \left(k_0^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}},) \ \kappa_z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$、k(,)、(,)、$\mathscr{D}$ $\boldsymbol{\kappa}$ $\kappa_x \ \kappa_z$ $\mathscr{D}$= () = {{ $k_x \ k_z \in \mathbb{R}^2 \mid k_x^2 + k_z^2 \le k_0^2\}$ k_0 ,) $\in \mathbb{R}^2 \mid \kappa_x^2 + \kappa_z^2 \le k_0^2\}$，以及 (k) (,)。这里， 是波数，由 $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$给出，其中 λ 是波长。项 $e^{j\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}$和 $e^{j\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}$分别表示方向为$\frac{\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|}$ 和 k|k|的发射平面波和接收平面波。此外， H_{b}(k $\boldsymbol{\kappa}$) 表示将发射方向映射到接收方向的角度响应 $\frac{\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|}$ 至接收方向 k |k|，并将其建模为随机场。为便于解析处理，我们假设瑞利衰落和各向同性散射 [14], [25], ， 从而得到

$$H_{\mathrm{b}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}} A_S(k_0)}{\sqrt{\gamma(k_x, k_z)\gamma(\kappa_x, \kappa_z)}} W_{\mathrm{b}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}), \tag{7}$$

其中， W_{b}(k $\boldsymbol{\kappa}$) 表示定义在 $\mathscr{D}$($\boldsymbol{\kappa}$) × $\mathscr{D}$(k) 上的 ZUCG随机场。归一化常数 $A_S(k_0)$ 设为 $\frac{2\pi}{k_0}$，以确保信道增益满足 $\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2$，即 $\mathbb{E}\{|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})|^2\} = \sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2$。

采用类似的方法，Alice 与 Eve 之间的电磁多径空间响应h_{e_k}(r, t) k 可表示如下：

$$h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \iiiint_{\mathscr{D}(\boldsymbol{\kappa}) \times \mathscr{D}(\mathbf{k})} \frac{e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}} H_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) e^{\mathrm{j}\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}}{(2\pi)^2} \mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{8}$$

其中

$$H_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{e}_k}} A_S(k_0)}{\sqrt{\gamma(k_x, k_z)\gamma(\kappa_x, \kappa_z)}} W_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}), \tag{9}$$

并且，其中 W_{e_k}(k $\boldsymbol{\kappa}$) 表示定义在 $\mathscr{D}$($\boldsymbol{\kappa}$) × $\mathscr{D}$(k) 上的 ZUCG随机场。

C. 信道统计

1) 统计等价：将 (7) 中的 H_{b}(k $\boldsymbol{\kappa}$) 代入 (6)，可得

$$h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}}}{(2\pi)^2} \iint_{\mathscr{D}(\boldsymbol{\kappa})} \frac{e^{\mathrm{j}\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}}{\sqrt{\gamma(\kappa_x, \kappa_z)}} \hat{H}_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa}) \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{10}$$

其中 ˆ $H_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa}) = \iint_{\mathscr{D}(\mathbf{k})} \frac{A_S(\ k_0 \ e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}))}{\sqrt{\gamma(k_x, k_z}} W_{\mathrm{b}}$(k $\boldsymbol{\kappa}$)dk。由于 W_{b}(k $\boldsymbol{\kappa}$) 是 ZUCG 随机场，因此 ˆ $H_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa})$ 是零均值复高斯（ZMCG）随机场。经过基本的数学运算，可以证明 ˆ H_{b} ($\boldsymbol{\kappa}$) $\stackrel{d}{=}$ ˆ$W_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa}) A_S(k_0)(2\pi k_0)^{\frac{1}{2}}$, 其中 ˆ $W_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa})$ 表示定义在 $\mathscr{D}$ (k)上的 ZUCG随机场。

由于 $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x, \gamma(\kappa_x, \kappa_z) \ \kappa_z]^{\mathrm{T}}$ 且 t $= [0, 0, z]^{\mathrm{T}}$ 对于 $z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, (10) 可以简化如下：

$$h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}}}{(2\pi)^2} \int_{-k_0}^{k_0} e^{\mathrm{j}\kappa_z z} H_{\mathrm{b}}(\kappa_z) \mathrm{d}\kappa_z \triangleq g_{\mathrm{b}}(z), \tag{11}$$

其中， $H_{\mathrm{b}}(\kappa_z) = \int_{-\sqrt{k_0^2-\kappa_z^2}}^{\sqrt{k_0^2-\kappa_z^2}} \hat{}H_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa}) \sqrt{\gamma(\kappa_x, \kappa_z)} \mathrm{d}\kappa_x$ 是定义在 $[-k_0, k_0]$ 上的 ZMCG 随机场。由于 ˆ $H_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{d}{=}$ ˆ$W_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\kappa})$ $A_S(k_0)(2\pi k_0)^{\frac{1}{2}}$, , 因此

$$H_{\mathrm{b}}(\kappa_z) \stackrel{d}{=} A_S(k_0)(2\pi k_0)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} W_{\mathrm{b}}(\kappa_z), \tag{12}$$

其中， $W_{\mathrm{b}}(\kappa_z)$表示定义在$[-k_0, k_0]$上的ZUCG随机场。由此可知， $g_{\mathrm{b}}(z)$是定义在$\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$上的ZMCG随机场。因此， $g_{\mathrm{b}}(z)$的统计特性完全由其自相关函数表征，该函数可表示如下：

$$\begin{aligned} R_{g_{\mathrm{b}}}(z, z') =& \mathbb{E}\{g_{\mathrm{b}}(z) g_{\mathrm{b}}^*(z')\} = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2}{(2\pi)^4} \int_{-k_0}^{k_0} \int_{-k_0}^{k_0} \\ & \mathbb{E}\{H_{\mathrm{b}}(\kappa_z) H_{\mathrm{b}}^*(\kappa_z')\} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa_z z} e^{-\mathrm{j}\kappa_z' z'} \mathrm{d}\kappa_z \mathrm{d}\kappa_z'. \end{aligned} \tag{13}$$

2) 自相关：根据式（12），可得$\mathbb{E}\{H_{\mathrm{b}}(\kappa_z)H_{\mathrm{b}}^*(\kappa_z')\} = A_S^2(k_0)(2\pi k_0)\pi\delta(\kappa_z-\kappa_z')$。进而可得

$$R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z') = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2}{2k_0}\int_{-k_0}^{k_0} e^{\mathrm{j}(z-z')\kappa_z}\mathrm{d}\kappa_z = \frac{\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sin\left[k_0\left(z-z'\right)\right]}{k_0\left(z-z'\right)}. \tag{14}$$

因此，自相关函数 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 是一个有界、对称且半正定的希尔伯特–施密特算子[26]。根据 Mercer定理 [27]，，对 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 进行谱分解 [26]，可得：

$$R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z') = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell\phi_\ell(z)\phi_\ell^*(z') \approx \sum_{\ell=1}^{T}\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell\phi_\ell(z)\phi_\ell^*(z'), \tag{15}$$

其中，$\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell$、 $\ell = 1$、2、...、∞ 是 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 的特征值，满足 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_\infty \geqslant 0$。相应的特征函数 $\phi_\ell(\cdot)$ $\ell = 1$、2、...、∞ 在 $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$ 上构成正交基，$_z$ 使得 $_z\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\phi_\ell^*$ ($\delta_{\ell\,\ell'}$ $\delta_{\ell\,\ell'}$)

$\phi_{\ell'}(\,)\mathrm{d}$，，其中，是克罗内克δ函数。前 T 个特征函数可对 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ [27] 进行精确近似。特征值 $\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell$ 可通过高斯–勒让德求积 [28] 结合奇异值分解（SVD）获得。更多详细信息请参阅附录 A。

接下来，我们利用特征值的其他性质来获得更深入的认识。定义 $K(z,z')$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-k_0}^{k_0} e^{\mathrm{j}(z-z')^{\kappa_z}}\mathrm{d}\kappa_z$，其中 z，$z' \in \left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$。由此可得，$R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z') = \frac{2\pi}{2k_0}\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2K(z,z')$。$K(z,z')$ 的特征值记为 ε_ℓ, $\ell = 1,2,...,\infty$，满足 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \ldots \geqslant \varepsilon_\infty \geqslant 0$。因此，$R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 的特征值为 $\sigma_\ell = \frac{2\pi\varepsilon_\ell}{2k_0} = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_\ell$。

假设 $f(z')$ 是定义在 $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$ 上的平方可积函数。我们定义 ˆ $f(z)$ $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}K(z,z')\,f(z')\,dz'$。ˆ然后，$f(z)$ 可重写如下：

$$\hat{f}\left(z\right) = \mathbb{1}_{\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]}\left(z\right)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}k\left(z-z'\right)f\left(z'\right)dz', \tag{16}$$

其中，$\mathbb{1}_{[\cdot,\cdot]}(\cdot)$ 表示示性函数，定义如下：

$$\mathbb{1}_{[a,b]}\left(z\right) = \begin{cases} 1, z\in[a,b] \\ 0, \text{others.} \end{cases} \tag{17}$$

同时，$k($. x — κ_z $x \in$ $\mathbb{R}$ k ·) 定义为 $k(\,)$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-k_0}^{k_0}e^{\mathrm{j}x\kappa_z}\mathrm{d}$，。因此，( ) 是 $\mathbb{1}_{[-k_0,k_0]}(\kappa_z)$ 的傅里叶逆变换，而经过傅里叶变换后，$k(\cdot)$ 可解释为频率范围 $[-k_0,k_0]$ 上的理想滤波器。在此框架下，可以应用 Landau 特征值定理 [29]，并将特征值 $\{\varepsilon_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ 表征如下：

$$1 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \ldots \geq \varepsilon_\infty \geq 0. \tag{18}$$

对于 $\varepsilon > 0$ 和 $L \gg \lambda$，可得：

$$\left|\{\ell : \varepsilon_\ell > \varepsilon\}\right| = \mathsf{DOF} + \left(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\ln\mathsf{DOF} + o(\ln\mathsf{DOF}), \tag{19}$$

其中，自由度= $\frac{2L}{\lambda}$ 表示CAPA系统的有效空间自由度 [15]。

注1。如(18)和(19)所示，当 $L \gg \lambda$时，特征值 $\{\varepsilon_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ 在迅速衰减至零之前保持接近于1。该过渡区域的宽度与ln自由度成正比。由于这种快速衰减，前自由度个特征值可用于近似 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ *[15]*。

III. 不同场景下 Bob 和 Eve 的信噪比概率密度函数

S景

本节推导最大比传输波束成形下 Bob 和 Eve 的信噪比概率密度函数。我们考虑三种场景：单个窃听者、多个相互独立的窃听者，以及多个协作窃听者。

A. 鲍勃的信噪比概率密度函数

由于 $g_{\mathrm{b}}(z)$ 是 ZMCG随机场，$g_{\mathrm{b}}(z)$ 的统计特性完全由其自相关函数 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 决定。根据 (14)，可得

$$g_{\mathrm{b}}(z) \overset{d}{=} \overline{g}_{\mathrm{b}}(z) = \sigma_{h_{\mathrm{b}}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\phi_\ell(z)\phi_\ell^*(z')\overline{W}_{\mathrm{b}}(z')\mathrm{d}z', \tag{20}$$

其中，$\overline{W}_{\mathrm{b}}(z)$ 是定义在$\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$上的 ZUCG随机场。可以验证，$g_{\mathrm{b}}(z)$ 和 $\overline{g}_{\mathrm{b}}(z)$ 具有相同的自相关函数。因此，由于二者都是 ZMCG随机场，$g_{\mathrm{b}}(z)$ 和 $\overline{g}_{\mathrm{b}}(z)$ 具有相同的统计特性。由此可得 Bob 的瞬时信噪比为

$$\rho_{\mathrm{b}} = \bar{\rho}_{\mathrm{b}}\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{t} \overset{d}{=} \bar{\rho}_{\mathrm{b}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left|\bar{g}_{\mathrm{b}}(z)\right|^2\mathrm{d}z, \tag{21}$$

其中，$\bar{\rho}_{\mathrm{b}} = \frac{P}{\sigma_{\mathrm{b}}^2}$，而 P 表示 x(t) 的发射功率。定义 $\Phi_{\mathrm{b},\ell} \overset{d}{=} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\phi_\ell^*(z')\overline{W}_{\mathrm{b}}(z')\mathrm{d}z'$。由于 $\overline{W}_{\mathrm{b}}(z)$ 是 ZUCG随机场，$\Phi_{\mathrm{b},\ell}$ 是复高斯随机变量。此外，由于 $\{\phi_\ell(\cdot)\}_{\ell=1}^{\infty}$ 的正交性，集合 $\{\Phi_{\mathrm{b},\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ 由均值为零、方差为一的独立同分布（i.i.d.）复高斯随机变量组成。因此，可得

$$\rho_{\mathrm{b}} \overset{d}{=} \overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_\ell|\Phi_{\mathrm{b},\ell}|^2, \tag{22}$$

$\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}$ $\overline{\gamma}_{\mathrm{b}} =$ $\frac{P\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2}{\sigma_{\mathrm{b}}^2}$ 1, $i = 1\ 2\ \cdots$

其中，表示 Bob 的平均信噪比，其定义为 。如备注 中所述，对于，，，个自由度，特征值满足 $\varepsilon_i \approx 1$和 $\sigma_i \approx \frac{\lambda}{2}$。对于 $i >$个自由度，ε_i 和 σ_i 均迅速减小并趋近于零。随着 $L \gg \lambda$，这种阶梯状行为愈发明显。因此，Bob 接收信号的瞬时信噪比可表示如下：

$$\rho_{\mathrm{b}} \overset{d}{=} \overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_\ell|\Phi_{\mathrm{b},\ell}|^2 \approx \overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sum_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell|\Phi_{\mathrm{b},\ell}|^2. \tag{23}$$

因此，ρ_{b} 可以渐近近似为具有不同权重的相互独立的指数分布随机变量之和。ρ_{b} [30] 的概率密度函数可表示为

$$f_{\rho_{\mathrm{b}}}(x) \approx \frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\psi_q\left(\frac{x}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\right)^{\mathsf{DOF}+q-1}e^{-\frac{x}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}}{\sigma_{\min}^q\Gamma(\mathsf{DOF}+q)}, \tag{24}$$

其中，$x>0$。$\Gamma(z)$表示伽马函数，其定义为$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$，且 $\sigma_{\min}=\min\{\sigma_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}=\sigma_{\mathsf{DOF}}$。系数 ψ_q 表示为

$$\psi_q=\sum_{k=1}^{q}\left[\sum_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\left(1-\sigma_{\min}/\sigma_\ell\right)^k\right]\frac{\psi_{q-k}}{q},q=1,2,..., \tag{25}$$

与 $\psi_0=1$。

B. 单个窃听者的信噪比概率密度函数

当存在单个窃听者 Eve，即 $K=1$ 时，Alice 与 Eve 之间的信道可表示如下：

$$h_{\mathrm{e}_1}(\mathbf{r},\mathbf{t})=\frac{\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2}{(2\pi)^2}\int_{-k_0}^{k_0}e^{\mathrm{j}\kappa_z z}H_{\mathrm{e}_1}(\kappa_z)\mathrm{d}\kappa_z\triangleq g_{\mathrm{e}_1}(z). \tag{26}$$

采用与分析 Bob 的瞬时信噪比相似的方法，Alice 与 Eve 之间的信道可分解如下：

$$g_{\mathrm{e}_1}(z)\overset{d}{=}\overline{g}_{\mathrm{e}_1}(z)=\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\phi_\ell(z)\phi_\ell^*(z')\overline{W}_{\mathrm{e}_1}(z')\mathrm{d}z'. \tag{27}$$

Eve 接收到的等效无噪信号可表示如下：

$$\begin{aligned}\overline{y}_{\mathrm{e}_1}&=\sqrt{P}s\cdot\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_1}(s)\,h_{\mathrm{b}}^*(s)\,ds}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(s)\right|^2ds}}\\&\overset{d}{=}\sqrt{P}s\cdot\frac{\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\Phi_{\mathrm{e}_1,\ell}\int_{\mathcal{A}}\phi_\ell(s)h_{\mathrm{b}}^*(s)\,ds}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(s)\right|^2ds}}.\end{aligned} \tag{28}$$

每一项 $\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ \ell},\ \ell\in\{1,2,...,\infty\}$ 均可表示如下：

$$\begin{aligned}\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ell}&\overset{d}{=}\Phi_{\mathrm{e}_1,\ell}\cdot\frac{\sqrt{P}s\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{A}}\phi_\ell(s)h_{\mathrm{b}}^*(s)\,ds}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(s)\right|^2ds}}\\&\overset{d}{=}\Phi_{\mathrm{e}_1,\ell}\cdot\frac{\sqrt{P}s\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{A}}\phi_\ell(s)\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_p^{\frac{1}{2}}\phi_p^*(s)\Phi_{\mathrm{b},p}^*ds}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{\frac{1}{2}}\phi_n(s)\Phi_{\mathrm{b},n}\right|^2ds}}.\end{aligned} \tag{29}$$

h_{b} 的一次实现记为$\underline{h}_{\mathrm{b}}$，而$\Phi_{\mathrm{b},\ p}$ 与$\Phi_{\mathrm{b},\ n}$ 的相应实现分别记为$\underline{\Phi}_{\mathrm{b},\ p}$ 与$\underline{\Phi}_{\mathrm{b},\ n}$。由此可得

$$\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ell}|\underline{h}_{\mathrm{b}}\overset{d}{=}\Phi_{\mathrm{e}_1,\ell}\cdot\frac{\sqrt{P}s\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}\sigma_\ell^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{A}}\phi_\ell(s)\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_p^{\frac{1}{2}}\phi_p^*(s)\underline{\Phi}_{\mathrm{b},p}^*ds}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{\frac{1}{2}}\phi_n(s)\underline{\Phi}_{\mathrm{b},n}\right|^2ds}}. \tag{30}$$

可以观察到，$\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ell}$ 是一个零均值复高斯随机变量。在给定 $\underline{h}_{\mathrm{b}}$ 的条件下，$\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ell}$ 的方差由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\overline{y}_{\mathrm{e}_1,\ell}|\underline{h}_{\mathrm{b}}\right)&=\frac{P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2\sigma_\ell\left|\int_{\mathcal{A}}\phi_\ell(s)\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_p^{\frac{1}{2}}\phi_p^*(s)\underline{\Phi}_{\mathrm{b},p}^*ds\right|^2}{\int_{\mathcal{A}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{\frac{1}{2}}\phi_n(s)\underline{\Phi}_{\mathrm{b},n}\right|^2ds}\\&=\frac{P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2\sigma_\ell^2\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},\ell}\right|^2}{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},n}\right|^2}.\end{aligned} \tag{31}$$

由于$\Phi_{\mathrm{b},\ell}$、$\ell=1$、2、...、∞是相互独立的零均值复高斯随机变量，在给定 $\underline{h}_{\mathrm{b}}$ 的条件下，$\overline{y}_{\mathrm{e}_1}$ 的方差可表示如下：

$$\mathrm{var}\left(\overline{y}_{\mathrm{e}_1}|\underline{h}_{\mathrm{b}}\right)=\frac{P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2\sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_\ell^2\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},\ell}\right|^2}{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},n}\right|^2}. \tag{32}$$

根据Landau特征值定理，可得

$$\mathrm{var}\left(\overline{y}_{\mathrm{e}_1}|\underline{h}_{\mathrm{b}}\right)\approx\frac{\frac{\lambda}{2}P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2\sum_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},\ell}\right|^2}{\sum_{n=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_n\left|\underline{\Phi}_{\mathrm{b},n}\right|^2}=\frac{\lambda}{2}P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2. \tag{33}$$

可以观察到，在给定$\underline{h}_{\mathrm{b}}$的条件下，$\overline{y}_{\mathrm{e}_1}$ 的方差可视为近似独立于 $\underline{h}_{\mathrm{b}}$。因此，$\overline{y}_{\mathrm{e}_1}$ 是方差为$\frac{\lambda}{2}P\sigma_{h_{\mathrm{e}_1}}^2$ 的零均值复高斯随机变量，且近似独立于 h_{b}。因此，Eve瞬时信噪比的概率密度函数$\rho_{\mathrm{S},\ \mathrm{e}}$可近似如下：

$$f_{\rho_{\mathrm{S,e}}}(x)\approx\begin{cases}0,x<0\\\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}e^{-\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}x},x\geqslant0,\end{cases} \tag{34}$$

其中 $\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}=\frac{\lambda P\sigma_{h_{\mathrm{e}}}^2}{2\sigma_{\mathrm{e}_1}^2}$[1]成立。

C. 多个独立窃听者场景下信噪比的概率密度函数

在多个独立窃听者场景下，假设窃听信道为独立同分布，且每个Eve处的噪声功率相同，即 σ_{e}^2。于是，窃听者中最高瞬时信噪比的累积分布函数（累积分布函数） [31]可表示如下：

$$F_{\rho_{\mathrm{M,e}}}=\left(1-e^{-\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}x}\right)^K,x\geqslant0. \tag{35}$$

因此，窃听者中最高瞬时信噪比的概率密度函数为

$$f_{\rho_{\mathrm{M,e}}}=K\left(1-e^{-\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}x}\right)^{K-1}\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}e^{-\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}x}. \tag{36}$$

D. 多个协作Eve的信噪比概率密度函数

在多个协作Eve场景下，所有Eve构成一个分布式天线系统。Eve端采用最大比合并（MRC），以最大化接收信号功率。还假设窃听信道是独立同分布的，且每个Eve处的噪声功率相同。对式（5）中的接收信号进行最大比合并后，Eve k 处的处理信号可表示如下：

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r})&=\sqrt{P}s\left(\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r},\mathbf{t})h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r},\mathbf{t})d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2d\mathbf{t}}}\right)^*\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r},\mathbf{t})h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r},\mathbf{t})d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2d\mathbf{t}}}\\&+\left(\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r},\mathbf{t})h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r},\mathbf{t})d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2d\mathbf{t}}}\right)^*n_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r})\\&=\sqrt{P}s\left|\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r},\mathbf{t})h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r},\mathbf{t})d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2d\mathbf{t}}}\right|^2+\left(\frac{\int_{\mathcal{A}}h_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r},\mathbf{t})h_{\mathrm{b}}^*(\mathbf{r},\mathbf{t})d\mathbf{t}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}}\left|h_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},\mathbf{t})\right|^2d\mathbf{t}}}\right)^*n_{\mathrm{e}_k}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{37}$$

因此，瞬时信噪比 $\rho_{\mathrm{MC,e}}$ 是独立同分布的指数随机变量之和。因此，$\rho_{\mathrm{MC,e}}$ 服从伽马分布，其概率密度函数可表示如下：

$$f_{\rho_{\mathrm{MC,e}}}(x)\approx\begin{cases}0,x<0\\\frac{x^{K-1}e^{-\frac{x}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}^K\Gamma(K)},x\geqslant0.\end{cases} \tag{38}$$

IV. CAPA系统的保密速率与保密中断概率

A. 单个Eve场景下的保密速率与保密中断概率

Alice 与 Bob 之间以及 Alice 与 Eve 之间的互信息可表示如下:

$$I\left(x;y_{\mathrm{b}}\right)=\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{b}}\right),I\left(x;y_{\mathrm{S,e}}\right)=\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{S,e}}\right). \tag{39}$$

系统的保密速率为

$$R_{\mathrm{S}}=\mathbb{E}\left\{\max\left(\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{b}}\right)-\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{S,e}}\right),0\right)\right\}. \tag{40}$$

由于 $h_{\mathrm{b}}(\mathrm{r,t})$ 和 $h_{\mathrm{e}}(\mathrm{r,t})$ 近似独立，如式（33）所示，因此瞬时信噪比 ρ_{b} 和 ρ_{e} 同样可视为近似独立。因此，单个Eve场景下 CAPA 系统的保密速率可表示为:

$$R_{\mathrm{S}}=\int_0^{\infty}\int_{\rho_{\mathrm{S,e}}}^{\infty}\left[\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{b}}\right)-\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{S,e}}\right)\right]f_{\rho_{\mathrm{b}}}f_{\rho_{\mathrm{S,e}}}d\rho_{\mathrm{b}}d\rho_{\mathrm{S,e}}. \tag{41}$$

经过直接的数学推导后， R_{S} 的最终结果见附录B。

为评估高信噪比斜率和高信噪比功率偏移量[32], , 引入以下引理。

引理 1. 令 $y=\ln(x)+\mathrm{E}_1(x)$。当 $x\to0^+$ 时，我们有$y=-\gamma+o(x)$，其中 $-\gamma$ 表示欧拉-马歇罗尼常数。

证明：当 $x\to0^+$ 时，$\mathrm{E}_1(x)$ 的级数展开可写为

$$\mathrm{E}_1(x)=-\gamma-\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k\cdot k!}. \tag{42}$$

根据 $y=\ln(x)+\mathrm{E}_1(x)$，我们有 $y=-\gamma+o(x)$。 ■

在 Bob 的高信噪比区域，根据 (83)，保密速率可近似表示如下:

$$\begin{aligned}&\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}R_{\mathrm{S}}\approx\frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left\{\log_2\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\right)-\frac{1}{\ln 2}\right\}\\&\cdot\left[e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)+\gamma-\sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right].\end{aligned} \tag{43}$$

高信噪比斜率可表示如下:

$$S_{\mathrm{S},\infty}=\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\frac{R_{\mathrm{S}}}{\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\approx\frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q. \tag{44}$$

相应地，高信噪比功率偏移为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{S},\infty}&=\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\left(\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}-\frac{R_{\mathrm{S}}}{S_{\mathrm{S},\infty}}\right)\\&\approx-\log_2\left(\sigma_{\min}\right)+\frac{1}{\ln 2}\left[\gamma+e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\right.\\&\left.-\left(\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right)/\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\right].\end{aligned} \tag{45}$$

对应目标保密速率 R_0 的保密中断概率可表示如下:

$$\begin{aligned}&P_{\mathrm{SOP_S}}\left(R_0\right)=P\left(R_{\mathrm{S}}<R_0\right)=P\left(\rho_{\mathrm{b}}<2^{R_0}\left(1+\rho_{\mathrm{e}}\right)-1\right)\\&\approx\frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left[1-e^{-\frac{2^{R_0}-1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\frac{1}{\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\right)^k}\right.\\&\left.\cdot\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^{k-m}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^m}{(k-m)!}\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m+1}\right].\end{aligned} \tag{46}$$

由此可见，CAPA系统的保密中断概率分集阶数为自由度，而阵列增益为

$$\mathrm{Ag_S}\approx\frac{1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\left[\left(\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell\right)/\left(\psi_0\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^m\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}. \tag{47}$$

详细的数学推导见附录 C。

B. 多个独立窃听者场景下的保密速率和保密中断概率

Alice 与信噪比最高的 Eve 之间的互信息为

$$I\left(x;y_{\mathrm{M,e}}\right)=\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{M,e}}\right). \tag{48}$$

存在多个独立窃听者时，系统的保密速率可表示如下:

$$R_{\mathrm{M}}=\mathbb{E}\left\{\max\left(\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{b}}\right)-\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{M,e}}\right),0\right)\right\}. \tag{49}$$

由于 $h_{\mathrm{b}}(\mathrm{r,t})$ 与 $h_{\mathrm{e}_k}(\mathrm{r,t})$ 相互独立， ρ_{b} 和 $\rho_{\mathrm{M,\ e}}$ 也相互独立。因此，保密速率可表示如下:

$$R_{\mathrm{M}}=\int_0^{\infty}\int_{\rho_{\mathrm{M,e}}}^{\infty}\left[\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{b}}\right)-\log_2\left(1+\rho_{\mathrm{M,e}}\right)\right]f_{\rho_{\mathrm{b}}}f_{\rho_{\mathrm{M,e}}}d\rho_{\mathrm{b}}d\rho_{\mathrm{M,e}}, \tag{50}$$

经过一些简单的数学推导后，式（50）的最终结果见附录 D。

为评估多个独立窃听者场景下的高信噪比斜率和高信噪比功率偏移，我们引入以下引理。

引理 2. 令 $K\geqslant1$，$K\subseteq\mathbb{Z}^+$，则有 $K\sum_{d=0}^{K-1}\binom{K-1}{d}(-1)^d\frac{1}{d+1}=1$。

证明：左侧可表示为:

$$\begin{aligned}&K\sum_{d=0}^{K-1}\binom{K-1}{d}(-1)^d\int_0^1x^d dx\\&=K\int_0^1\sum_{d=0}^{K-1}\binom{K-1}{d}(-x)^d\,dx\\&=K\int_0^1(1-x)^{K-1}\,dx\\&=1.\end{aligned} \tag{51}$$

证明完毕。 ■

根据（96）中的结果，在 Bob 的高信噪比区域内，保密速率可表示为:

$$\begin{aligned}&\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}R_{\mathrm{M}}\approx\frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left\{\log_2\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\right)\right.\\&-\frac{1}{\ln 2}\left(\gamma-\sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right)\\&\left.-\frac{K}{\ln 2}\sum_{a=0}^{K-1}\binom{K-1}{a}\frac{(-1)^a}{1+a}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{52}$$

因此，存在多个独立窃听者时的高信噪比斜率为

$$S_{\mathrm{M},\infty}=\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\frac{R_{\mathrm{M}}}{\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\approx\frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q. \tag{53}$$

如式（44）和（53）所示，单个窃听者和多个独立窃听者情况下的高信噪比斜率相同。同时，高信噪比功率偏移为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{M},\infty} &= \lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\left(\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}} - \frac{R_{\mathrm{M}}}{S_{\mathrm{M},\infty}}\right)\\ &\approx -\log_2(\sigma_{\min}) + \frac{1}{\ln 2}\left[\gamma + K\sum_{a=0}^{K-1}\binom{K-1}{a}\frac{(-1)^a}{1+a}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\right.\\ &\left.\cdot\,\mathrm{E}_1\left(\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right) - \left(\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right)\Big/\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\right].\end{aligned} \tag{54}$$

为了比较单个窃听者和多个独立窃听者情况下的高信噪比功率偏移，下面给出一个引理。

引理3。设 $K \geqslant 1$满足 $K \subseteq \mathbb{Z}^+$，并定义$y(K) = K\sum_{a=0}^{K-1}\binom{K-1}{a}\frac{(-1)^a}{1+a}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_e}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1+a}{\overline{\gamma}_e}\right)$。那么，$y(K)$是 K的递增函数。

证明： $y(K)$可简化如下：

$$y(K) = \sum_{b=1}^{K}(-1)^{b-1}\binom{K}{b}e^{\frac{b}{\overline{\gamma}_e}}\mathrm{E}_1\left(\frac{b}{\overline{\gamma}_e}\right). \tag{55}$$

对于满足 $K\subseteq\mathbb{Z}^+$的 $K\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}y(K+1) - y(K) &= \sum_{c=0}^{K}(-1)^c\binom{K}{c}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(1+c)y/\overline{\gamma}_e}}{1+y}dy\\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-y/\overline{\gamma}_e}}{1+y}\left(1-e^{-y/\overline{\gamma}_e}\right)^K dy > 0.\end{aligned} \tag{56}$$

因此，对于满足$K\subseteq\mathbb{Z}^+$的 $K\geqslant 1$， $y(K)$是 K 的递增函数。证明完毕。■

由于$\mathcal{L}_{\mathrm{S},\infty}$是$\mathcal{L}_{\mathrm{M},\infty}$在 $K=1$条件下的一个特例，引理3结合式（45）和（54）可知，对于 $K\geqslant 2$，具有多个独立窃听者的CAPA系统比具有单个窃听者的CAPA系统具有更大的高信噪比功率偏移。

在多个独立窃听者场景下，目标保密速率为 R_0 时的保密中断概率可表示如下：

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{SOP_M}}(R_0) &= P(R_{\mathrm{S}} < R_0) = P\left(\rho_{\mathrm{b}} < 2^{R_0}(1+\rho_{\mathrm{M,e}}) - 1\right)\\ &\approx \frac{K\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^n\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left[\frac{1}{n+1}-\right.\\ &e^{-\frac{2^{R_0}-1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\frac{1}{(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})^k}\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^{k-m}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^m}{(k-m)!}\\ &\left.\cdot\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{(n+1)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m+1}\right].\end{aligned} \tag{57}$$

因此，可以得到，在存在多个独立窃听者时，CAPA系统的分集阶数为自由度，而系统的阵列增益为

$$\mathrm{Ag_M} \approx \frac{1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\left[\left(\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell\right)\Big/\left(K\psi_0\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^m\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\mathsf{DOF}-m+1}\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}. \tag{58}$$

推导详情见附录E。

下面引入一个引理，以便比较单个Eve场景与多个独立窃听者场景下的阵列增益。

Lemma 4. Let $K\geqslant 1$ with $K\subseteq\mathbb{Z}^+$, and define $y(K) = K\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\mathsf{DOF}-m+1}$, where $0\leqslant m\leqslant$ 自由度与 $m\subseteq\mathbb{Z}_{\circ}$ 那么，当 $m=$ 自由度时， $y(K)=1$；当 $m<$ 自由度时， $y(K)$是 K 的增函数。

证明：当 $m=$ 自由度时，有

$$\begin{aligned}y(K) &= K\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^n\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{b=1}^{K}\binom{K}{b}(-1)^{b-1} = 1.\end{aligned} \tag{59}$$

当 $m<$自由度时，令 $\alpha=$自由度$-m+1$。于是可得

$$\begin{aligned}y(K+1) - y(K) &= \sum_{n=0}^{K}(-1)^n\binom{K}{n}(n+1)^{1-\alpha}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}\sum_{n=0}^{K}\binom{K}{n}(-e^{-t})^n dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^K dt > 0.\end{aligned} \tag{60}$$

因此，当 $m<$自由度时， $y(K)$是 K 的增函数。证明完毕。■

由于当 $K=1$时，$\mathrm{Ag_S}$是$\mathrm{Ag_M}$的一个特例，因此引理4结合式（47）和（58）表明，对于 $K\geqslant 2$，具有多个独立窃听者的CAPA系统的阵列增益低于具有单个窃听者的系统。

C. Secrecy Rate and SOP Under Multiple Collaborative Eves

Alice与多个协作窃听者之间的互信息为

$$I(x; y_{\mathrm{MC,e}}) = \log_2(1+\rho_{\mathrm{MC,e}}). \tag{61}$$

存在多个协作窃听者时，系统的保密速率可表示如下：

$$R_{\mathrm{MC}} = \mathbb{E}\left\{\max\left(\log_2(1+\rho_{\mathrm{b}}) - \log_2(1+\rho_{\mathrm{MC,e}}), 0\right)\right\}. \tag{62}$$

由于 h_{b}(r,t)和 h_{e_k}(r,t)相互独立，因此 ρ_{b} 和$\rho_{\mathrm{MC,\ e}}$也相互独立。因此，存在多个协作窃听者时，CAPA系统的保密速率可表示如下：

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{MC}} = \int_0^{\infty}\int_{\rho_{\mathrm{MC,e}}}^{\infty}&\left[\log_2(1+\rho_{\mathrm{b}}) - \log_2(1+\rho_{\mathrm{MC,e}})\right]\\ &\cdot f_{\rho_{\mathrm{b}}}f_{\rho_{\mathrm{MC,e}}}d\rho_{\mathrm{b}}d\rho_{\mathrm{MC,e}}.\end{aligned} \tag{63}$$

式（63）经过数学推导后的结果见附录F。

在Bob的高信噪比区域内，有

$$\begin{aligned}\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}R_{\mathrm{MC}} &\approx \frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left\{\log_2(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}) - \frac{1}{\ln 2}\right.\\ &\left.\cdot\left(e^{\frac{1}{K\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right) + \gamma - \sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{64}$$

因此，在多个协作窃听者存在时，高信噪比斜率为

$$S_{\mathrm{MC},\infty} = \lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\frac{R_{\mathrm{MC}}}{\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}} \approx \frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q. \tag{65}$$

由式（44）、（53）和（65）可知，三种不同场景下的保密速率具有相同的高信噪比斜率。同时，相应的高信噪比功率偏移为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{MC},\infty} &= \lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}\left(\log_2\overline{\gamma}_{\mathrm{b}} - \frac{R_{\mathrm{MC}}}{S_{\mathrm{MC},\infty}}\right)\\ &\approx -\log_2(\sigma_{\min}) + \frac{1}{\ln 2}\left[\gamma + e^{\frac{1}{K\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\right.\\ &\left. - \left(\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\sum_{p=0}^{\mathsf{DOF}+q-2}\frac{1}{(\mathsf{DOF}+q-1-p)}\right)\Big/\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\right].\end{aligned} \tag{66}$$

为比较多个独立窃听者和多个协作Eve场景下的高信噪比功率偏移，下面给出一个引理。

引理 5. 设 $K \geqslant 2$ with $K \subseteq \mathbb{Z}^+$, 并定义 $y\ K = e^{\frac{1}{K\overline{\gamma}}}\ {}_1\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right) - (\,)_{\mathrm{e}}\mathrm{E}()_{\mathrm{e}}\mathrm{E}$。则 $K\sum_{a=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\a\end{pmatrix}\frac{-1\ ^a}{1+a}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}}}\ {}_1\left(\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\quad y\ K\ >0$ () 成立。

证明：令 $f(x) = e^x\mathrm{E}_1(x)$，其中 $x>0$。我们有

$$f'(x) = e^x\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du - \frac{1}{x} < e^x\frac{1}{x}\int_x^{\infty}e^{-u}du - \frac{1}{x} = 0. \tag{67}$$

因此， $f(x)$ 是 $x>0$ 上的递减函数。于是，我们有

$$\begin{aligned}y(K) &= f\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_e}\right) - K\sum_{a=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\a\end{pmatrix}\frac{(-1)^a}{1+a}f\left(\frac{1+\alpha}{\overline{\gamma}_e}\right)\\ &< f\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_e}\right) - K\sum_{a=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\a\end{pmatrix}\frac{(-1)^a}{1+a}f\left(\frac{1}{K\overline{\gamma}_e}\right) = 0.\end{aligned} \tag{68}$$

证明完毕。 ■

根据引理 5 以及式 (54) 和 (66) 中 $\mathcal{L}_{\mathrm{M},\infty}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{MC},\infty}$ 的表达式可知，对于 $K\geqslant 2$，具有多个协作Eve的CAPA系统比具有多个独立窃听者的CAPA系统具有更大的高信噪比功率偏移。

对于目标保密速率 R_0，存在多个协作Eve时的保密中断概率可表示如下：

$$\begin{aligned}&P_{\mathrm{SOP_{MC}}}(R_0) = P(R_{\mathrm{MC}} < R_0)\\ &= P\left(\rho_{\mathrm{b}} < 2^{R_0}(1+\rho_{\mathrm{e,MC}}) - 1\right)\\ &\approx \frac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left(1 - \frac{1}{(K-1)!}e^{-\frac{2^{R_0}-1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\right.\\ &\cdot\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\frac{1}{k!(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})^k}\sum_{m=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}\left(2^{R_0}-1\right)^{k-m}\\ &\left.\cdot\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^m\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{K+m}(K+m-1)!\right).\end{aligned} \tag{69}$$

由此可得，存在多个协作Eve时 CAPA系统的分集阶数为 DOF，而系统的阵列增益为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ag_{MC}} \approx &\frac{1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\left[\left(\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell\right)\Big/\left(\psi_0\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\frac{1}{m!}\right.\right.\\ &\left.\left.\cdot\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^m\begin{pmatrix}\mathsf{DOF}-m+K-1\\K-1\end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}.\end{aligned} \tag{70}$$

具体内容见附录 G。因此可得，在所有三种场景下，CAPA系统的分集阶数均为 DOF。

下面引入一个引理，以便比较多个独立窃听者场景与多个协作Eve场景下的阵列增益。

表 I：仿真参数

参数	数值
Bob 的信噪比	20 分贝
Eve 的信噪比	20 分贝
λ	0.1249 米
L	40λ
Q	160
T	1000
窃听者数量	5
R_0	3

Lemma 6. Let $K \geqslant 2$ with $K \subseteq \mathbb{Z}^+$, and define $y(K) = \begin{pmatrix}\mathsf{DOF}-m+K-1\\K-1\end{pmatrix} - K\sum_{n=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\n\end{pmatrix}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\mathsf{DOF}-m+1}$, where $0\leqslant m\leqslant \mathsf{DOF}$ with $m\subseteq\mathbb{Z}$. Then, $y(K)=0$ when $m=\mathsf{DOF}$, and $y(K)>0$ when $0\leqslant m<\mathsf{DOF}$.

Proof: When $m=$, we have

$$y(K) = 1 - \sum_{n=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K\\n+1\end{pmatrix}(-1)^n = 0. \tag{71}$$

When $m<\mathsf{DOF}$, let $f(K) = \begin{pmatrix}\mathsf{DOF}-m+K-1\\K-1\end{pmatrix}$ and $g(K) = \sum_{n=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\n\end{pmatrix}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\mathsf{DOF}-m+1}$. It can be proved by mathematical induction that $f(K)\geqslant K$ for $K\geqslant 2$. Let $\alpha = \mathsf{DOF}-m+1$. We have

$$\begin{aligned}&g(K) = \sum_{n=0}^{K-1}\begin{pmatrix}K-1\\n\end{pmatrix}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-(n+1)t}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{K-1}dt\\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt = 1.\end{aligned} \tag{72}$$

因此，当 $0\leqslant m<$ 自由度时，可得 $y(K)>0$。证明完毕。 ■

根据引理6，由（58）和（70）可知，对于$K\geqslant 2$，与多个独立Eve相比，具有多个协作窃听者的CAPA系统具有更低的阵列增益。

V. 仿真结果

本节给出仿真结果，以验证理论分析中所采用近似的准确性，并从保密速率和保密中断概率方面评估CAPA系统相较于传统SPDA系统的优势。仿真参数列于表 I 中，其中 Q表示从（24）中的级数中取用的项数，以实现对 $f_{\rho_{\mathrm{b}}}(x)$ 的精确近似。采用具有 2×10^6 个随机信道实现的蒙特卡洛（MC）仿真来获得最终结果。孔径间距设置为半个波长，每个SPDA单元的孔径长度设置为 $\frac{\lambda}{5\sqrt{4\pi}}$。

A. 保密速率

Bob 的信噪比、Eve 的信噪比、阵列长度以及窃听者数量对保密速率的影响分别如图2(a)、图 2(b)、图 2(c) 和图 2(d) 所示。我们用 SE、MIE 和 MCE 分别表示单个Eve场景、多个独立Eve场景和多个协作Eve场景。如图2(a)所示，分析结果

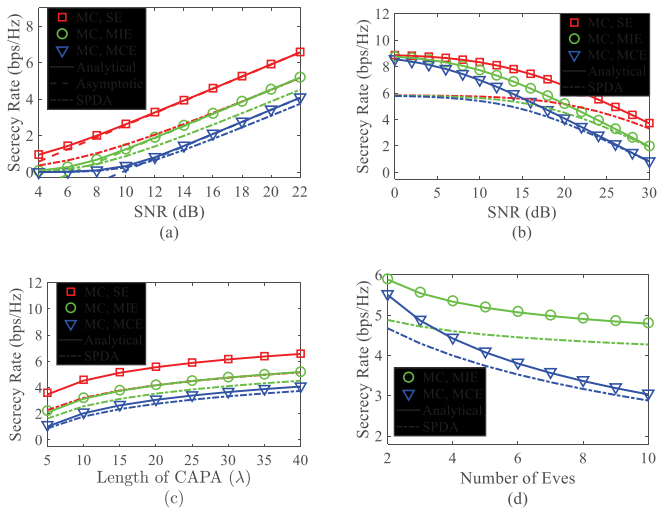

图2：保密速率随 (a) Bob的信噪比、(b) Eve的信噪比、(c) 阵列长度以及 (d) 窃听者数量的变化。

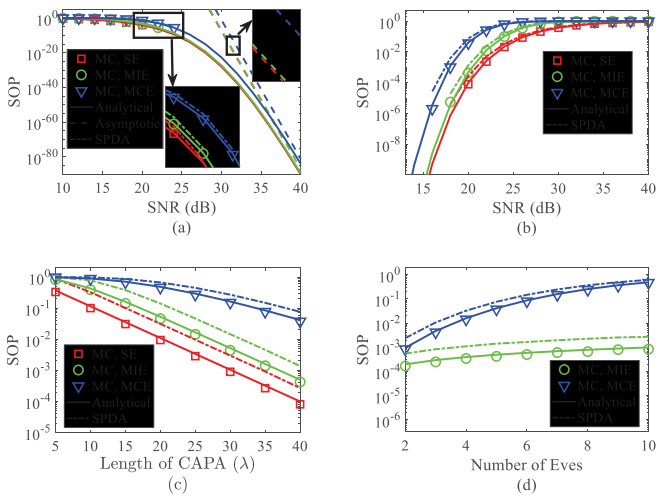

图 3：保密中断概率随以下因素的变化：(a) Bob 的信噪比，(b) Eve 的信噪比，(c) 阵列长度，以及 (d) 窃听者数量。

与蒙特卡罗仿真结果高度吻合，表明基于 Landau 特征值定理的近似方法准确。分析结果也与高信噪比区域的渐近结果一致，验证了理论分析的正确性。在 Bob 的信噪比给定时，单个窃听者场景下的系统保密速率最高，而多个协作窃听者场景下的系统保密速率最低。这是因为多个协作窃听者对安全性能的损害比单个窃听者更严重。同时，如图2(a)所示，三个场景下的高信噪比斜率相同；而单个窃听者场景下的 CAPA 系统具有最小的高信噪比偏移，多个协作窃听者场景下的 CAPA 系统则具有最大的高信噪比偏移，这与第四节中的理论分析一致。

从图2(a)中还可以观察到，在相同场景下，就保密速率而言，CAPA系统始终优于SPDA系统。这是因为CAPA系统能够更好地利用电磁特性，从而实现更高的保密速率。同时，在单个窃听者场景下，CAPA系统相较于SPDA系统的性能增益大于多个独立窃听者和多个协作Eve场景。这是因为在单个窃听者场景下，CAPA的旁瓣抑制可直接转化为保密性能的提升。然而，在存在多个独立窃听者或多个协作Eve时，CAPA系统发生旁瓣泄漏的可能性更高，从而削弱了其相较于SPDA系统的保密速率优势。此外，在低信噪比区域，CAPA系统和SPDA系统的保密速率相近。这是因为在低信噪比区域，CAPA系统利用空间资源的潜力尚未得到充分发挥。在高信噪比区域，空间资源得到充分利用，此时CAPA系统在保密速率方面相较于SPDA系统的优势更加明显。

如图 2(b) 所示，在 CAPA 和 SPDA 系统中，随着 Eve 的信噪比增加，保密速率均会降低。这是因为，当 Eve 的信噪比较高时，无线系统的安全性能会受到更严重的影响，例如 Eve 靠近合法用户时。还可以观察到，当窃听者的信噪比较低时，在 CAPA 和 SPDA 系统中，三种场景下的保密速率相近。这是因为在 Eve 的信噪比较低时，保密速率主要由 Bob 的信噪比决定。图2(c)显示，增加阵列长度会使两个系统的保密速率相应提高。这是因为通过最大比传输，Bob 的接收信号信噪比提升幅度大于窃听者接收信号的信噪比提升幅度。因此，Bob 对应的互信息和保密速率增幅也大于窃听者的增幅。同时，出于与图2(a)中讨论的原因类似，在单个窃听者场景下，CAPA系统的保密速率提升幅度大于在多个独立窃听者或多个协作Eve场景下的提升幅度。此外，如图 2(d) 所示，保密速率会随着窃听者数量的增加而降低。还可以观察到，在多个独立窃听者场景下，CAPA系统的保密速率提升幅度大于在多个协作Eve场景下的提升幅度。这是因为多个协作Eve可以利用CAPA系统中的旁瓣泄漏，从而削弱其保密优势。随着窃听者数量增加，CAPA系统相较于SPDA系统的保密速率性能提升幅度会减小。原因与图2(a)中的讨论类似。

B. 保密中断概率

图 3(a)、图 3(b)、图 3(c) 和图 3(d) 分别展示了保密中断概率随 Bob 的信噪比、Eve 的信噪比、阵列长度以及窃听者数量的变化情况。如图 3(a) 所示，解析结果与蒙特卡罗仿真结果吻合，并且在高信噪比区域与渐近结果一致，证明了基于 Landau 特征值定理的近似方法的准确性以及理论分析的正确性。对于给定的 Bob 信噪比，单个窃听者场景下的系统保密中断概率最低，而多个协作Eve场景下的系统保密中断概率最高，因为与单个窃听者相比，多个协作窃听者对安全性的损害更严重。

同时，如图 3(a) 所示，所有三个场景下的分集阶数均等于空间自由度；其中，单个窃听者场景下的 CAPA系统具有最高的阵列增益，而多个协作Eve场景下的 CAPA系统具有最低的阵列增益。

图 3(b)显示，所有系统的保密中断概率（SOP）均随 Eve 的信噪比增加而上升，原因与图 2(b) 中讨论的类似。同样，如图 3(c)所示，增大阵列长度会降低 CAPA系统和 SPDA系统的 SOP。此外，与多独立窃听者或多个协作 Eve场景相比，CAPA系统在单个Eve场景中的 SOP 改善幅度更大，原因与图 2(c)中讨论的保密速率改善情况类似。此外，图 3(d)表明，SOP 随窃听者数量增加而上升；按照与图 2(d)相同的原理，CAPA系统在多独立窃听者场景中的改善幅度大于在多个协作Eve场景中的改善幅度。

VI. 结论

本文分析了 CAPA系统在三种场景下的保密速率和保密中断概率（SOP）：单个窃听者、多个独立窃听者和多个协作Eve。我们推导了所有场景下保密速率和 SOP 的解析表达式，并得到了 CAPA系统的高信噪比斜率、高信噪比功率偏移、分集阶数和阵列增益。结果表明，分集阶数等于有效空间自由度，且各种情况下的高信噪比斜率相同。同时可以观察到，存在单个窃听者时的 CAPA系统具有最小的高信噪比偏移和最高的阵列增益，而存在多个协作 Eve时的 CAPA系统具有最大的高信噪比斜率和最低的阵列增益。我们进行了蒙特卡罗仿真，其结果与解析结果一致，并验证了基于 Landau 特征值定理的近似方法的准确性。对于给定的 Bob 信噪比，存在单个窃听者时的 CAPA系统可实现最高的保密速率和最低的 SOP，而存在多个协作Eve时的系统则表现出最低的保密速率和最高的 SOP。此外，随着 Bob 的信噪比升高、阵列长度增加、Eve 的信噪比降低以及窃听者数量减少，CAPA系统的保密速率会提高，SOP 会降低。此外，与多独立窃听者或多个协作Eve场景相比，CAPA系统在单个窃听者场景下表现出更好的安全性能。

附录 A 特征值的计算 $\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell$

根据式（15），对于 $R_{g_{\mathrm{b}}}(z,z')$ 的第 m 个特征值，其中 $m\subseteq\{1,2,...,N\}$，可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}R_{g_{\mathrm{b}}}\left(z,z'\right)\phi_m\left(z'\right)dz'\\&=\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sum_{\ell=1}^{N}\sigma_\ell\phi_\ell\left(z\right)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\phi_\ell^*\left(z'\right)\phi_m\left(z'\right)dz'\\&=\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_m\phi_m\left(z\right).\end{aligned}\tag{73}$$

同时，利用高斯-勒让德求积 [28], ，我们得到

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}R_{g_{\mathrm{b}}}\left(z,z'\right)\phi_m\left(z'\right)dz'=\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{T}w_kR_{g_{\mathrm{b}}}\left(z,z_k'\right)\phi_m\left(z_k'\right),\tag{74}$$

其中， z_k' 表示第 k个点， w_k 表示相应的权重。由式（73）和（74）可得

$$\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{T}w_kR_{g_{\mathrm{b}}}\left(z,z_k'\right)\phi_m\left(z_k'\right)=\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_m\phi_m\left(z\right).\tag{75}$$

在 z 横坐标上选取相同的点，即当$a=k$时取 $z_a=z_k'$，可得

$$\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{T}w_kR_{g_{\mathrm{b}}}\left(z_a,z_k'\right)\phi_m\left(z_k'\right)=\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_m\phi_m\left(z_a\right).\tag{76}$$

对于 $\alpha\in\{1,...,T\}$和 $k\in\{1,...,T\}$，该表达式可写成下一页顶部的式（77）。因此，通过对矩阵 F 应用奇异值分解，可以得到特征值 $\sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2\sigma_\ell$。

附录B 单个Eve场景下的保密速率

首先，我们介绍伽马函数 $\Gamma(n)$和上不完全伽马函数 $\Gamma(n,x)$。这些函数可表示如下：

$$\Gamma\left(n\right)=\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt=\begin{cases}\mathrm{E}_1\left(0\right),n=0\\(n-1)!,n\in\mathbb{Z}^+\end{cases},\tag{78}$$

and

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n,x\right)&=\int_x^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt\\&=\begin{cases}\mathrm{E}_1\left(x\right),n=0\\(n-1)!e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!},n\in\mathbb{Z}^+.\end{cases}\end{aligned}\tag{79}$$

其中 $\mathrm{E}_1(x)$ 表示一阶指数积分，可表示如下：

$$\mathrm{E}_1\left(x\right)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du.\tag{80}$$

同时，函数 $\mathrm{F}\left(n+1,x\right)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}\left(n+1,x\right)=\textstyle\int_x^{+\infty}\ln u\cdot u^n\cdot e^{-u}du\\&=n!\left(\ln x\cdot e^{-x}+\mathrm{E}_1\left(x\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln x\cdot x^{n-k}\cdot e^{-x}+\Gamma(n-k,x)}{(n-k)!}\right)\\&,n\in\mathrm{N}.\end{aligned}\tag{81}$$

当 $n=1$时，我们有 $\mathrm{F}\left(1,x\right)=\ln x\cdot e^{-x}+\mathrm{E}_1\left(x\right)$。此外，还使用了以下结果

$$\int_0^x u^ne^{-u}du=n!\left(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right),n\in\mathrm{N}.\tag{82}$$

然后，根据式（41），CAPA系统的保密速率可表示为下一页顶部的式（83）。

$$\underbrace{\frac{L}{2}\begin{pmatrix} w_1 R_{g_{\mathrm{b}}}(z_1,z_1') & \cdots & w_N R_{g_{\mathrm{b}}}(z_1,z_N') \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 R_{g_{\mathrm{b}}}(z_N,z_1') & \cdots & w_N R_{g_{\mathrm{b}}}(z_N,z_N') \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} \phi_1(z_1') & \cdots & \phi_N(z_1') \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_1(z_N') & \cdots & \phi_N(z_N') \end{pmatrix} = \sigma_{h_{\mathrm{b}}}^2 \begin{pmatrix} \sigma_1\phi_1(z_1) & \cdots & \sigma_N\phi_N(z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_1\phi_1(z_N) & \cdots & \sigma_N\phi_N(z_N) \end{pmatrix}. \tag{77}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{S}} \approx{}& \tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\tfrac{\psi_q}{\sigma_{\min}^q\Gamma(\mathsf{DOF}+q)}\left\{\left(\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\right)^{\mathsf{DOF}+q-1}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\binom{\mathsf{DOF}+q-1}{k}(-1)^{\mathsf{DOF}+q-1-k}\right. \\ &\cdot(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})^{k+1}\left[\tfrac{k!}{\ln 2}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\left(e^{-\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}}\ln\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}+\mathrm{E}_1\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right. \\ &+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\left(\mathrm{E}_1\left(\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)-e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)+\sum_{p=0}^{k-1}\tfrac{1}{(k-p)!}\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}e^{\frac{1}{\gamma_{\mathrm{e}}}}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{k-p+1}\right. \\ &\cdot\left(\mathrm{F}\left(k-p+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\Gamma\left(k-p+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\ln\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right) \\ &\left.+(k-p-1)!e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\sum_{r=0}^{k-p-1}\tfrac{(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{r+1}}{(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{r+1}r!}\Gamma\left(r+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right) \\ &+\log_2(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})\cdot k!e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\sum_{n=0}^{k}\tfrac{(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{n+1}}{(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{n+1}n!}\Gamma\left(n+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\Big] \\ &-\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}+q}\cdot(\mathsf{DOF}+q-1)!e^{\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}}}{\ln 2}\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\tfrac{\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)^m}{m!}\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}(-1)^{m-t}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{t+1} \\ &\left.\cdot\left[\mathrm{F}\left(t+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\Gamma\left(t+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\ln\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{83}$$

附录 C
单个窃听者场景下的分集阶数与阵列增益

为简洁起见，我们分别将 $1/\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}$ 和自由度记为 z 和 N。在目标保密速率 R_0 下，Bob 的高信噪比区域内的保密中断概率可近似表示如下:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{SOP_S}}(R_0) \approx{}& \tfrac{\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}}}{\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell}\sum_{q=0}^{\infty}\psi_q\left(1-1/\underbrace{\left(1+\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}z\right)^{N+q}}_{A}\right. \\ &\cdot\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^n}{n!}z^n+o\left(z^N\right)\right)}_{B}\underbrace{\sum_{k=0}^{N+q-1}\frac{1}{\sigma_{\min}^k}z^k}_{C} \\ &\left.\cdot\underbrace{\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^{k-m}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^m}{(k-m)!}\left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\min}+2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}z}\right)^{m+1}}_{C}\right). \end{aligned} \tag{84}$$

接下来，我们将说明，对于 $0\leqslant M\leqslant N-1$，(84) 中 z^M 的系数为零；而对于 $M=N$，该系数非零。对于 $k\in\mathbb{Z}^+$，$0\leqslant k\leqslant N-1$，项 C中 z^k的系数可表示如下:

$$\mathrm{coeff}\left(z_C^k\right)=\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^k\sum_{a=0}^{k}\sum_{b=0}^{a}\binom{N+q-k-1+a}{a-b}\cdot\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^b\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{k-b}}{b!}. \tag{85}$$

随后，项 $B*C$ 中 z^M 的系数，对于 $M\in\mathbb{Z}^+$ 和 $k\leqslant M\leqslant N-1$，可表示如下:

$$\mathrm{coeff}\left(z_{B*C}^M\right)=\sum_{k=0}^{M}\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^{M-k}}{(M-k)!}\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^k\sum_{a=0}^{k}\sum_{b=0}^{a}\cdot\binom{N+q-k-1+a}{a-b}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^b\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{k-b}}{b!}. \tag{86}$$

接下来，项 A 中 z^M的系数，对于 $M\in\mathbb{Z}^+$ 和 $k\leqslant M\leqslant N-1$，为

$$\mathrm{coeff}\left(z_A^M\right)=\binom{N+q}{M}\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}\right)^M. \tag{87}$$

接下来可以证明，$\mathsf{coeff}\left(z_{B*C}^M\right)=\mathsf{coeff}\left(z_A^M\right)$，如下一页顶部的 (88) 所示。因此，对于 $0\leqslant M\leqslant N-1$，(84) 中 z^M 的系数为零。

当 $M=N$和 $q\geqslant 1$ 成立时，采用类似的方法可以发现，(84) 中 z^N 的系数为零。当 $M=N$和 $q=0$ 成立时，项 C中的 z^N 系数可表示如下:

$$\mathrm{coeff}\left(z_C^N\right)=\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^N\sum_{a=1}^{N-1}\sum_{b=1}^{a}\binom{a}{a-b+1}\cdot\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^b\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{N-b}}{b!}. \tag{89}$$

因此，项 $B*C$ 中的 z^N 系数为

$$\begin{aligned} \mathrm{coeff}\left(z_{B*C}^N\right)={}&\underbrace{\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^0}{0!}\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^N\sum_{a=1}^{N-1}\sum_{b=1}^{a}}_{D}\cdot\underbrace{\binom{a}{a-b+1}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^b\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{N-b}}{b!}}_{D} \\ &+\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^{N-k}}{(N-k)!\left(\sigma_{\min}\right)^k}\sum_{a=0}^{k}\sum_{b=0}^{a}}_{E} \\ &\cdot\underbrace{\binom{N-k-1+a}{a-b}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^b\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{k-b}}{b!}}_{E}. \end{aligned} \tag{90}$$

在项 D中，我们得到

$$\mathrm{coeff}\left(z_D^N\right)=\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}\right)^N\sum_{m=1}^{N-1}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{N-m}\cdot\frac{1}{(N-m)!}\sum_{c=0}^{m-1}\binom{N-m+c}{c+1}. \tag{91}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{coeff}\left(z_{B*C}^{M}\right)=\sum_{k=0}^{M}\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^{M-k}}{(M-k)!}\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^{k}\sum_{b=0}^{k}\sum_{a=b}^{k}\binom{N+q-k-1+a}{a-b}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^{b}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{k-b}}{b!}\\&=\sum_{b=0}^{M}\sum_{k=b}^{M}\frac{\left(-\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^{M-k}}{(M-k)!}\left(\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)^{k}\frac{\left(2^{R_0}-1\right)^{b}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{k-b}}{b!}\binom{N+q}{k-b}=\binom{N+q}{M}\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}\right)^{M}=\operatorname{coeff}\left(z_{A}^{M}\right).\end{aligned}\tag{88}$$

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{M}}\approx{}&K\sum_{a=0}^{K-1}\binom{K-1}{a}\frac{(-1)^{a}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_{\ell}}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\psi_{q}}{\sigma_{\min}^{q}\Gamma(\mathsf{DOF}+q)}\left\{\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\right)^{\mathsf{DOF}+q-1}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\binom{\mathsf{DOF}+q-1}{k}\right.\\&\cdot(-1)^{\mathsf{DOF}+q-1-k}\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\right)^{k+1}\left[\frac{k!}{\ln 2}\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\left(e^{-\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}}\ln\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}+\mathrm{E}_{1}\left(\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right.\\&+\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{1+a}\left(\mathrm{E}_{1}\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)-e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_{1}\left(\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{1}{(k-p)!}\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{k-p+1}\right.\\&\cdot\left(\mathrm{F}\left(k-p+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\Gamma\left(k-p+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\ln\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\\&\left.+(k-p-1)!e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\sum_{r=0}^{k-p-1}\frac{\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{r+1}}{\left((1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{r+1}r!}\Gamma\left(r+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right)\\&\left.+\log_{2}\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\right)\cdot k!e^{\frac{1+a}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}\sum_{n=0}^{k}\frac{\left(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{\left((1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{n+1}n!}\Gamma\left(n+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right]\\&-\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}+q}\cdot(\mathsf{DOF}+q-1)!e^{\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}}}{\ln 2}\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\frac{\left(\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)^{m}}{m!}\sum_{t=0}^{m}\binom{m}{t}(-1)^{m-t}\left(\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{t+1}\\&\left.\left.\cdot\left[\mathrm{F}\left(t+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\Gamma\left(t+1,\frac{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\ln\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{(1+a)\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right]\right\}.\end{aligned}\tag{96}$$

在项 E 中，由此可得

$$\operatorname{coeff}\left(z_{E}^{N}\right)=-\left(\frac{2^{R_0}-1}{\sigma_{\min}}\right)^{N}\sum_{m=0}^{N-1}\binom{N}{m}\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{2^{R_0}-1}\right)^{m}\frac{1}{(N-m)!}.\tag{92}$$

根据（91）和（92），可得（90）中的结果如下:

$$\operatorname{coeff}\left(z_{B*C}^{N}\right)=-\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}\right)^{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{N-m}\frac{1}{(N-m)!}.\tag{93}$$

因此，在 Bob 的高信噪比区域，（84）中 z^N 的系数为

$$\begin{aligned}&\operatorname{coeff}\left(z^{N}\right)=\frac{\sigma_{\min}^{N}}{\prod_{\ell=1}^{N}\sigma_{\ell}}\psi_{0}\left[\left(\frac{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\min}}\right)^{N}-\operatorname{coeff}\left(z_{B*C}^{N}\right)\right]\\&=\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{N}\sigma_{\ell}}\psi_{0}\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\frac{1}{m!}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{N}>0.\end{aligned}\tag{94}$$

因此，在 Bob 的高信噪比区域，（46）可改写如下:

$$\begin{aligned}\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}P_{\mathrm{SOP_S}}\left(R_0\right)\approx{}&\left\{\left[\left(\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_{\ell}\right)/\right.\right.\\&\left.\left.\left(\psi_{0}\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right\}^{-\mathsf{DOF}}.\end{aligned}\tag{95}$$

相应地，分集阶数为自由度，阵列增益如（47）所示。

■

附录D
多个独立窃听者场景下的保密速率

根据（50），多个独立窃听者场景下 CAPA系统的保密速率由下一页顶部的（96）式给出。

附录E
多个独立窃听者场景下的分集阶数和阵列增益

为简洁起见，$1/\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}$ 和自由度分别记为z 和 N。采用与定理 1 类似的证明，可以发现，在 Bob 的高信噪比区域中，项 z^k，对于 $k\in\mathbb{Z}^{+}$ 和 $0\leqslant k\leqslant N-1$，在(57)中相互抵消。 z^N 的系数为

$$\begin{aligned}\operatorname{coeff}\left(z^{N}\right)=&\frac{K\psi_{0}}{\prod_{\ell=1}^{N}\sigma_{\ell}}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\sum_{n=0}^{K-1}\\&\binom{K-1}{n}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{N-m+1}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{N}.\end{aligned}\tag{97}$$

由于 $\frac{1}{(n+1)^{k}}=\frac{1}{(k-1)!}\int_{0}^{1}t^{n}\left(-\ln t\right)^{k-1}dt$ 成立，因此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{N-m+1}\\&=\frac{1}{(N-m)!}\int_{0}^{1}\left(-\ln t\right)^{N-m}\left(1-t\right)^{K-1}dt>0.\end{aligned}\tag{98}$$

因此，z^N的系数为正。据此，在 Bob 的高信噪比区域，（57）式可改写如下:

$$\begin{aligned}\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}P_{\mathrm{SOP_M}}\left(R_0\right)\approx{}&\left\{\left[\left(\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_{\ell}\right)/\left(K\psi_{0}\right.\right.\right.\\&\cdot\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\sum_{n=0}^{K-1}\binom{K-1}{n}(-1)^{n}\\&\left.\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\mathsf{DOF}-m+1}\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right\}^{-\mathsf{DOF}}.\end{aligned}\tag{99}$$

因此，分集阶数为自由度，阵列增益由（58）式给出。■

APPENDIX F
多个协作Eve下的保密速率

多个协作窃听者下的保密速率如下一页顶部的式 (100) 所示。附录 G

多个协作Eve下的分集阶数和阵列增益

为使表达式简洁，$1/\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}$ 和自由度分别记为 z 和 N。按照与定理 1 类似的证明可知，在 Bob 的高信噪比区域内，对于 $k\in\mathbb{Z}^{+}$ 和 $0\leqslant k\leqslant N-1$，式（69）中 z^k项的系数为零。 z^N 的系数为

$$\begin{aligned}\operatorname{coeff}\left(z^{N}\right)=&\frac{\psi_{0}}{\prod_{\ell=1}^{N}\sigma_{\ell}}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}\left(\frac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\\&\cdot\binom{N-m+K-1}{K-1}\left(2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\right)^{N}.\end{aligned}\tag{101}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{MC}} \approx & \tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}^{K}\Gamma(K)\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_{b,\ell}}\sum_{q=0}^{\infty}\tfrac{\psi_q}{\sigma_{\min}^{q}\Gamma(\mathsf{DOF}+q)}\left\{\left(\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}\right)^{\mathsf{DOF}+q-1}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}}\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\binom{\mathsf{DOF}+q-1}{k}(-1)^{\mathsf{DOF}+q-1-k}\right.\\
&\cdot(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})^{k+1}\left[\tfrac{k!}{\ln 2}\left(e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\sum_{a=0}^{K-1}\binom{K-1}{a}(-1)^{K-a-1}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{a+1}\left[\mathrm{F}\left(a+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right.\right.\right.\\
&\left.+\ln\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\Gamma\left(a+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right]+\left[(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{K}(K-1)!\left[\mathrm{E}_1\left(\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)-e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\mathrm{E}_1\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right]\right.\\
&-\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\left[(-1)^{K-1}\mathrm{E}_1\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\sum_{t=1}^{K-1}\binom{K-1}{t}(-1)^{K-1-t}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{t}\Gamma\left(t,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)\right]\\
&-e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\sum_{w=2}^{K-1}(\overline{\gamma}_{\mathrm{e}})^{w}\left(\textstyle\prod_{i=1}^{w-1}(K-i)\right)\left[(-1)^{K-w}\mathrm{E}_1\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\sum_{t=1}^{K-w}\binom{K-w}{t}(-1)^{K-w-t}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{t}\right.\\
&\left.\left.\cdot\Gamma\left(t,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)\right]\right]+\sum_{p=0}^{k-1}\tfrac{1}{(k-p)!}\left(e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\sum_{b=0}^{K-1}\binom{K-1}{b}(-1)^{K-b-1}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{b+1}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{k-p}\right.\\
&\cdot\left(\mathrm{F}\left(k-p+b+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\ln\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\Gamma\left(k-p+b+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)+(k-p-1)!\\
&\left.\cdot\sum_{r=0}^{k-p-1}\tfrac{1}{r!}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\sum_{c=0}^{K-1}\binom{K-1}{c}(-1)^{K-1-c}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{c+1}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{r}\Gamma\left(r+c+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right)\\
&+\log_2(\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min})\,k!\sum_{n=0}^{k}\tfrac{1}{n!}e^{\frac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}}\sum_{d=0}^{K-1}\binom{K-1}{d}(-1)^{K-1-d}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{d+1}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{n}\\
&\cdot\Gamma\left(n+d+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{b,\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\Big]-\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}^{\mathsf{DOF}+q}(\mathsf{DOF}+q-1)!\sum_{k=0}^{\mathsf{DOF}+q-1}\tfrac{1}{k!}\left(\tfrac{1}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}}\right)^{k}e^{\frac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}}\sum_{f=0}^{K+k-1}\binom{K+k-1}{f}\\
&\left.\cdot(-1)^{K+k-1-f}\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{f+1}\tfrac{1}{\ln 2}\left(\mathrm{F}\left(f+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)+\ln\left(\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)\Gamma\left(f+1,\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\sigma_{\min}+\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}\sigma_{\min}}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{100}
$$

因此，在 Bob 的高信噪比区域内，式（69）可改写为：

$$
\begin{aligned}
\lim_{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}\to\infty}P_{\mathrm{SOP_{MC}}}(R_0)\approx & \left\{\left[\left(\textstyle\prod_{\ell=1}^{\mathsf{DOF}}\sigma_\ell\right)/\left(\psi_0\sum_{m=0}^{\mathsf{DOF}}\tfrac{1}{m!}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\cdot\left(\tfrac{2^{R_0}-1}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right)^{m}\binom{\mathsf{DOF}-m+K-1}{K-1}\right)\right]^{\frac{1}{\mathsf{DOF}}}\tfrac{\overline{\gamma}_{\mathrm{b}}}{2^{R_0}\overline{\gamma}_{\mathrm{e}}}\right\}^{-\mathsf{DOF}}.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

因此，相应的分集阶数为自由度，阵列增益如式（70）所示。■

参考文献

[1] M. Li、Z. Yuan、Y. Lyu、P. Ky¨osti、J. Zhang 和 W. Fan，“巨型MIMO信道表征：挑战与实现方案”，IEEE Commun. Mag.，第61卷，第10期，第140–146页，2023年10月。[2] Z. Wang、J. Zhang、H. Du、W. E. Sha、B. Ai、D. Niyato 和 M. Debbah，“超大规模MIMO：基础、挑战、解决方案与未来方向”，IEEE 无线通信，第31卷，第3期，第117–124页，2024年6月。[3] Y. Liu、C. Ouyang、Z. Wang、J. Xu、X. Mu 和 Z. Ding，“CAPA：革新6G无线通信的连续孔径阵列”，IEEE 无线通信，第32卷，第4期，第38–45页，2025年8月。[4] ¨O. T. Demir、E. Bj¨ornson 和 L. Sanguinetti，“全息大规模MIMO平面阵列的信道建模与信道估计”，IEEE Wireless Communications Letters，第11卷，第5期，第997–1001页，2022年5月。[5] Z. Wan、J. Zhu 和 L. Dai，“连续孔径MIMO能否比离散MIMO获得更多互信息？”，IEEE Commun. Lett.，第27卷，第12期，第3185–3189页，2023年12月。[6] F. K. Gruber 和 E. A. Marengo，“无线与天线系统电磁信息论的新视角”，IEEE Trans. Antennas Propag.，第56卷，第11期，第3470–3484页，2008年11月。[7] Z. Wan、J. Zhu、Z. Zhang、L. Dai 和 C.-B. Chae，“基于随机场的电磁信息论互信息”，IEEE Trans. Commun.，第71卷，第4期，第1982–1996页，2023年4月。[8] B. Zhao、C. Ouyang、X. Zhang 和 Y. Liu，“基于连续孔径阵列（CAPA）的无线通信：容量表征”，IEEE Trans. Wireless Commun.，第24卷，第12期，第10 456–10 473页，2025年12月。[9] D. A. Miller，“体积之间的波通信：正交空间信道的评估及耦合强度的限制”，Appl. Opt.，第39卷，第11期，第1681–1699页，2000年4月。[10] L. Ding、E. G. Str¨om 和 J. Zhang，“三维线性大规模天线阵列通信中的自由度——空间带宽方法”，IEEE J. Sel. Areas Commun.，第40卷，第10期，第2805–2822页，2022年10月。[11] A. Pizzo 和 A. Lozano，“关于视距MIMO信道的 Landau 特征值定理”，IEEE Wireless Commun. Lett.，第11卷，第12期，第2565–2569页，2022年12月。

[12] A. Pizzo、L. Sanguinetti 和 T. L. Marzetta，《全息多输入多输出通信的傅里叶平面波级数展开》，IEEE《无线通信汇刊》，第21卷，第9期，第6890–6905页，2022年9月。[13] D. Dardari，《与大型智能表面通信：基本限制与模型》，IEEE《精选通信领域期刊》，第38卷，第11期，第2526–2537页，2020年11月。[14] A. Pizzo、T. L. Marzetta 和 L. Sanguinetti，《全息多输入多输出小尺度衰落的空间平稳模型》，IEEE《精选通信领域期刊》，第38卷，第9期，第1964–1979页，2020年9月。[15] C. Ouyang、Z. Wang、X. Zhang 和 Y. Liu，《基于连续孔径阵列（CAPA）的通信中的分集与复用》，IEEE《无线通信汇刊》，第24卷，第10期，第8662–8680页，2025年10月。[16] L. Sanguinetti、A. A. D’Amico 和 M. Debbah，《视距全息多输入多输出通信中的波数分复用》，IEEE《无线通信汇刊》，第22卷，第4期，第2186–2201页，2023年4月。[17] Z. Zhang 和 L. Dai，《多用户连续孔径多输入多输出的模式分复用》，IEEE《精选通信领域期刊》，第41卷，第8期，第2350–2366页，2023年8月。[18] M. Qian、L. You、X.-G. Xia 和 X. Gao，《关于多用户全息多输入多输出上行传输的频谱效率》，IEEE《无线通信汇刊》，第23卷，第10期，第15 421–15 434页，2024年10月。[19] Z. Wang、C. Ouyang 和 Y. Liu，《多用户连续孔径阵列（CAPA）系统的最优波束成形》，IEEE《通信汇刊》，第73卷，第10期，第9207–9221页，2025年3月。[20] Z. Wang、C. Ouyang 和 Y. Liu，《基于连续孔径阵列（CAPA）的通信的波束成形优化》，IEEE《无线通信汇刊》，第24卷，第6期，第5099–5113页，2025年6月。[21] C. Ouyang、Z. Wang、X. Zhang 和 Y. Liu，《CAPA系统的线性接收波束成形》，IEEE《无线通信汇刊》，第25卷，第1030–1047页，2025年7月。[22] J. Guo、Y. Liu、H. Shin 和 A. Nallanathan，《多用户连续孔径阵列系统中的波束成形深度学习》，IEEE《无线通信汇刊》，第25卷，第7773–7791页，2025年11月。[23] B. Zhao、C. Ouyang、X. Zhang 和 Y. Liu，《连续孔径阵列（CAPA）系统的物理层安全》，arXiv预印本 arXiv:2412.13748，2024年。[24] M. Sun、C. Ouyang、Z. Wang、S. Wu 和 Y. Liu，《连续孔径阵列（CAPA）系统的安全波束成形》，IEEE《无线通信汇刊》，第25卷，第8922–8937页，2025年12月。[25] A. Pizzo、L. Sanguinetti 和 T. L. Marzetta，《电磁随机信道的空间表征》，IEEE《通信学会开放期刊》，第3卷，第847–866页，2022年4月。[26] R. G. Ghanem 和 P. D. Spanos，《随机有限元：谱方法》。Courier Corporation，2003年。[27] D. Hilbert，《数学物理方法》。CUP Archive，1985年。[28] P. N. Swarztrauber，《关于计算高斯–勒让德求积的节点和权重》，SIAM《科学计算杂志》，第24卷，954，2003 3，第945–页。

[29] H. J. Landau 和 H. Widom，《时间与频率限制的特征值分布》，《数学分析与应用杂志》，第77卷，481，1980 2，第469–页。[30] P. G. Moschopoulos，《独立伽马随机变量之和的分布》，《统计数学年刊》，第37卷，544，1985 1，第541–页。[31] P. Wang、G. Yu 和 Z. Zhang，《多个窃听者存在时衰落无线信道的保密容量》，载于 IEEE ISIT 2007 会议论文集，法国尼斯，2007年6月。[32] S. Shamai 和 S. Verd´u，《频率平坦衰落对CDMA频谱效率的影响》，IEEE《信息论汇刊》，第47卷，第4期，第1302–1327页，2001年5月。