arXiv:2603.06179v1 [math.GR] 6 Mar 2026

具有相同元素阶集合的子群类偏序集

SACHIN BALLAL* 和 TUSHAR HALDER†

海得拉巴大学数学与统计学院，印度，500046

摘要

本文研究有限群中具有相同元素阶集合的子群类所构成的偏序集。我们证明，只有在 p-群的情形下，该偏序集才是链；此外，我们刻画了所有使该偏序集为 C_2（即含两个元素的链）的有限群。我们还证明，在有限循环群和二面体群的情形下，该偏序集构成一个格，并刻画该格何时为分配格和模格。

关键词： 偏序集、格、子群格、子群类的偏序集等。**AMS 数学主题分类：** 06A06, 06B99, 20D30 等。

1 引言

子群格理论始于 Ada Rottl¨ander [10]，随后 Iwasawa [5], 、Schmidt [11], 、Suzuki [12], 等其他研究者对其进行了研究。自上世纪以来，它已成为群论中的一个重要研究领域。通过对有限群的子群等价类集合施加偏序来研究它们，是一种新颖的方法， [7], [14], 等文献对此进行了探讨。

对于正整数 n，阶为 $2n$的二面体群，记作 D_n，定义如下：

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = e,\ s^2 = e,\ srs^{-1} = r^{-1} \rangle.$$

近年来，人们对 D_n 上的各种组合结构以及子群格进行了研究。Kharat $et\ al.$ 在 [6] 中研究了 D_n的所有拟正规子群和 Hall子群构成的偏序集。在 [1], 中，Ballal $et\ al.$研究了 D_n 的交超图，并考察了若干图论性质，如直径、围长和色数。 D_n 上的若干图及其相关性质也在 [8]和[13]中得到了类似研究。然而，本文考虑 D_n 的子群等价类，并研究其结构。

在以下结果中，给出了 D_n 的所有子群的完整列表。

*sachinballal@uohyd.ac.in（通讯作者）

†24mmpp03@uohyd.ac.in

定理 1.1. [3] D_n 的每个子群都是循环群或二面体群。子群的完整列表如下:

1. $\langle r^d \rangle$，其中 $d|n$，指标为 $2d$；2. $\langle r^d,\ r^i s \rangle$，其中 $d|n$ 和 $0 \le i \le d-1$，指标为 d。

D_n 的每个子群在此列表中恰好出现一次。

备注 1. 1. 若 D_n 的子群如定理 1.1 的 (1) 所述为循环群，则称其为**类型 (1)** 子群。

2. 若 D_n 的子群如定理 1.1 的 (2) 所述为二面体子群，则称其为**类型 (2)** 子群。

我们用 $\mathcal{L}(G)$ 表示群 G的子群格，用 e表示 G 的单位元。对于有限群的子群 H，我们用 $\pi_e(H)$ 表示集合 $\{o(x) \mid x \in H\}$，其中 $o(x)$ 表示 x的阶。有限群 G 的指数 是满足 $g^n = e$（对所有 $g \in G$均成立）的最小正整数 n。我们用 C_n 表示含有 n 个元素的链，用 $T(n)$ 表示整数 n 的正因子格。对于奇素数 p，在同构意义下，存在唯一一个阶为 p^3、指数为 p的非阿贝尔群。该群同构于定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的所有上三角幺幺 3×3 矩阵群，记作 Heis($\mathbb{Z}_p$)。除非另有说明，p_1，p_2，…，p_k 始终表示互异奇素数。

~本文研究具有相同元素阶集合的子群类的偏序集 Π(G)。我们~刻画了所有使得 G 有限群 Π(G)为链的 C_2，特别地，$\sim$ $\sim$。我们证明偏序集Π(D_n)是一个格，并刻画使 n (Π)为分配模格的所有D_n值。

关于格、群和子群格的更多细节，可参阅 [4], [9] 和 [11]。

~2 偏序集 Π（G）

对于有限群 G，在 $\mathcal{L}(G)$上定义如下等价关系 $\equiv$:

$$H_1 \equiv H_2 \ \text{ if and only if } \ \pi_e(H_1) = \pi_e(H_2),$$

令 $\mathcal{L}(G)\Big/\equiv$ 表示关于 $\equiv$的等价类集合。在 [14], T˘arn˘auceanu提出了研究有限群的具有相同元素阶集合的子群类偏序集的问题。受此问题启发，我们在 $\mathcal{L}(G)\Big/\equiv$上引入如下偏序

$$[H_1] \lesssim [H_2] \ \text{ if and only if } \ \pi_e(H_1) \subseteq \pi_e(H_2),$$

我们将偏序集 $\left(\mathcal{L}(G)\Big/\equiv,\ \lesssim\right)$ 称为具有相同元素阶集合的 G 的子群类偏序集

~ ~元素，并记作 Π(G)。本节将特别研究二面体群的偏序集 Π(G)。

~在以下结果中，我们刻画了所有使得 Π(G)为链的有限群 G .

~**定理 2.1.** 偏序集 Π(G)是链，当且仅当 G 是 p-群。

~证明. 设 Π(G)是链。反设 G不是 p-群，则对 $|G|$的不同素因子 p_1 和 p_2 ，存在 G中的元素 a 和 b ，其阶分别为 p_1 和 p_2。显然，$\pi_e(\langle a\rangle) = \{1, p_1\}$ 且 $\pi_e(\langle b\rangle) = \{1, p_2\}$，因此 $[\langle a\rangle]$ 和 $[\langle b\rangle]$ 在 $\widetilde{\Pi}(G)$中不可比，矛盾。因此， G是 p-群。

反之，设 G 是一个阶为 p^n 的 p-群，且 A和 B 是 G的两个子群，满足 $\exp(A) = p^{m_1}$ 和 $\exp(B) = p^{m_2}$。不失一般性，若 $m_1 \leq m_2$，则 $\pi_e(A) = T(p^{m_1}) \subseteq T(p^{m_2}) = \pi_e(B)$， ~这意味着 $[A]$ 和 $[B]$ 可比较，因此 Π(G)是一条链。 □

~ ~**推论 2.1.1**。设 G_1 和 G_2 满足 $\Pi(G_1) \cong \Pi(G_2)$。若 G_1 是一个 p-群，则 G_2也是如此。此外， ~ ~$\exp(G_1) = \exp(G_2)$。若 $\exp(G_1) = p^n$，则 $\Pi(G_1) \cong C_{n+1} \cong \Pi(G_2)$。

~在下一个结果中，我们刻画了满足 $\Pi(G)$ 同构于C_2 的有限群类。

~**定理 2.2.** 对于有限群 G，偏序集 $\Pi(G) \cong C_2$ 当且仅当 G 是阶为 p 的循环群，或 G是初等阿贝尔 p-群，或 G 有一个与 Heis($\mathbb{Z}_p$) 同构的子群，且 $\exp(G) = p$，其中 p 是素数。

证明。 </style}显然，若 $G \cong \mathbb{Z}_p$ 或 $G \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ ，或 G 有一个与 Heis($\mathbb{Z}_p$) 同构的子群，且~$\exp(G) = p$，则 $\Pi(G) \cong C_2$。

反过来，设 $\widetilde{\Pi}(G) \cong C_2$，则 $\exp(G) = p$，否则存在一个阶为 p^2 的 G 的子群，这意味着~ Π(G) 有一个与 C_3 同构的子格，这是不可能的。现在，若 G是阿贝尔的，则 G 是阶为 p 的循环群，或是初等阿贝尔 p-群。若 G 是非阿贝尔的，则 G 有一个阶为 p^3 的非阿贝尔子群 H。由于 $\exp(G) = p$，所以 $\exp(H) = p$ ，因此 $H \cong$ Heis($\mathbb{Z}_p$)。 □

现在我们聚焦于有限循环群。接下来的结果表明，在 $\mathbb{Z}_n$的情形下，我们所研究的偏序集与子群格一致

~ ~**定理2.3.** 对于所有正整数 n，偏序集 Π($\mathbb{Z}_n$)与 $\mathcal{L}$($\mathbb{Z}_n$)同构，特别地， Π($\mathbb{Z}_n$)是一个格。

~ ~证明。考虑映射 $\Phi: \mathcal{L}(\mathbb{Z}_n) \to \Pi(\mathbb{Z}_n)$，由 $\Phi(H) = [H]$给出。显然， $|\Pi(\mathbb{Z}_n)| \leq |\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n)|$。现在，设 H 和 K 是 $\mathbb{Z}_n$的两个不同子群，其阶分别为 m_1 和 m_2。显然，当$m_1 > m_2$时， $\pi_e(H) \neq \pi_e(K)$，因为 $m_1 \notin \pi_e(K)$，但 $m_1 \in \pi_e(H)$，因此 $[H]$和 $[K]$ 是不同的~ ~类。因此， $|\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n)| \leq |\Pi(\mathbb{Z}_n)|$，从而 $|\Pi(\mathbb{Z}_n)| = |\mathcal{L}(\mathbb{Z}_n)|$。这意味着 Φ 定义良好且为双射。

若 $[H_1] \lesssim [H_2]$，则 $\pi_e(H_1) \subseteq \pi_e(H_2)$。任取 $x \in H_1$ ，则 $o(x) \in \pi_e(H_1)$；又由于$\pi_e(H_1) \subseteq \pi_e(H_2)$，因此存在 $y \in H_2$ 使得 $o(y) = o(x)$。由于阶为 $o(x)$的子群唯一，因此我们有 $< y >=< x >$，从而存在一个正整数 m' 使得 $x = y^{m'}$ ，于是 $x \in H_2$。由于 x 任意，我们有 $H_1 \leq H_2$。此外，若 $H_1 \leq H_2$，则显然有 $\pi_e(H_1) \subseteq \pi_e(H_2)$，从而 $[H_1] \lesssim [H_2]$。因此， Φ~是 $\mathcal{L}$($\mathbb{Z}_n$)与 Π($\mathbb{Z}_n$)之间的双射保序映射，这意味着 Φ是格同构。 □

~为了证明 $\Pi(D_n)$ 是一个格，我们实质上需要以下结果。

引理 2.4. 设 G 是一个有限群，且 $[H_1], [H_2] \in \Pi(G)$。考虑集合

$$X = \bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}).$$

集合 $\{[H], [K]\}$ 有最小上界，当且仅当存在子群 $L' \in \mathcal{L}(G)$，满足 $\pi_e(L') = X$。此外，$[H] \vee' [K] = [L']$。

类似地，考虑集合

$$Y = \bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}} \pi_e(\widehat{L}).$$

集合 $\{[H], [K]\}$ 有最大下界，当且仅当存在子群 $L'' \in \mathcal{L}(G)$，满足$\pi_e(L'') = Y$。此外，$[H] \wedge' [K] = [L'']$。

证明。设存在子群 $L' \in \mathcal{L}(G)$，满足 $\pi_e(L') = X$。由于 $\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq X$，可知 $[L']$ 是 $\{[H], [K]\}$ 的上界。此外，若 $[S]$ 是 $\{[H], [K]\}$ 的上界，则$\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq \pi_e(S)$，因此 $\pi_e(L') \subseteq X \subseteq \pi_e(S)$，从而 $[H] \vee' [K] = [L']$。

反之，假设 $[H] \vee' [K] = [L']$，那么根据 X 的定义可得 $X \subseteq \pi_e(L')$。现在假设 L 满足 $\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq L$，那么 $[L]$ 是 $[H]$ 和 $[K]$ 的一个上界。由于 $[L']$ 是 $[H]$ 和 $[K]$ 的最小上界，因此可得 $\pi_e(L') \subseteq X$。第二部分的证明方法类似。

根据引理 2.4，我们证明如下结论：

定理 2.5. 对于正整数 n，偏序集 $\Pi(D_n)$ 是一个格。

证明。设 $n = 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，其中 p_i 是互异奇素数，且 $\alpha,\ t_i's \geq 0$ 和 $[H],\ [K] \in \widetilde{\Pi}(D_n)$ 是任意的类。只需证明 $\{[H], [K]\}$ 存在最小上界和最大下界。因此考虑以下几种情形：

情形 1: 如果 $2 \notin \pi_e(H)\ \pi_e(K)$，那么 $H = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$ 和 $K = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$，其中 $0 \leq u_i, v_i \leq t_i$ 和$1 \leq i \leq k$，因此，

$$\pi_e(H) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}\right) \text{ and } \pi_e(K) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right).$$

因此，我们断言 $[L']$ 是 $\{[H], [K]\}$的最小上界，其中 $L' = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle$。显然，$\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq \pi_e(L')$，因为 $H,\ K \leq L'$ 因此，

$$\bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}) \subseteq \pi_e(L').$$

$_k$现在，假设 $\prod p_i^{x_i} \in \pi_e(L')$，其中 $0 \le x_i \le t_i - \min\{u_i, v_i\}$，$1 \le i \le k$ 以及 $L \le G$ 满足$_{i=1}\pi_e(H)$ $\pi_e(K) \subseteq \pi_e(\bar{L})$。那么 $\bar{L}$ 有一个阶为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}$的元素，记作 $\left\langle r^{a_1 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$，以及一个阶为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$的元素$_k$ $_k$ $_k$，记作 $\left\langle r^{a_2 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$。现在，由于 $\left\langle r^{a_1 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$ 且 $\left\langle r^{a_2 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$，所以 $\left\langle r^{a_1 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle \vee \left\langle r^{a_2 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle \vee \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle \le \bar{L}$，因此 $\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle \le \bar{L}$，进而 $\bar{L}$ 包含一个阶为 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_i}$ $_{\{u_i,v_i\}}$的元素。注意，$\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle$ 包含阶为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^x$的元素，其中 $0 \le x \le t_i - \min\{u_i, v_i\}$；因为循环群$_k$满足拉格朗日定理的逆命题，所以 L 包含一个阶为 $\prod p_i^x$ 的元素，其中 $0 \le x \le t_i -_{i=1}\min\{u_i, v_i\}$。由于 L 是任意的，我们得到，

$$\pi_e(L') \subseteq \bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}).$$

因此，$[L']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最小上界。

现在，我们声称 $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界，其中 $L'' = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle$。显然，$\pi_e(L'')$ $\subseteq \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，因为 $L'' \le H$，K 因此，

$$\pi_e(L'') \subseteq \bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}} \pi_e(\widehat{L}).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 $L \le G$ 满足 $\pi_e(L) \subseteq \pi_e(H)$ $_k\pi_e(K)$。假设 $m \in \pi_e(L)$，则 $m \in \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，这意味着 m 整除 $|H|$ 和 $|K|$，即 m 整除 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}$和 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$。因此，$m$ 整除 $\gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}\right)$，即 m 整除 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\max_i}$ $_{\{u_i,v_i\}}$，这意味着 m 整除 $r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}$ $_{i=1}$ $_{i=1}\widehat{\ }$的阶，因此 $m \in \pi_e(L'')$。由于 L 是任意的，我们有，

$$\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G) \\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}} \pi_e(\widehat{L}) \subseteq \pi_e(L'').$$

因此，$[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界。

情形 2： 如果 $2 \notin \pi_e(H)$ 且 $2 \in \pi_e(K)$，则有以下子情形：

子情形 2.1： 如果 $\{1,2\}=\pi_e(K)$，那么 $K=\langle r^l s\rangle$ 或 $\left\langle r^{2^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i}}\right\rangle$ 或 $\left\langle r^{2^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i}},\ r^j s\right\rangle$，其中 $0\leq l\leq n-1, 0\leq j\leq\left(2^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i}\right)-1$。由于 $2\notin\pi_e(H)$，我们有 $H=\left\langle r^{2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{u_i}}\right\rangle$，且 $0\leq u_i\leq t_i, 1\leq i\leq k$。我们声称 $[L']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最小上界，其中 $L'=\left\langle r^{2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{u_i}},\ s\right\rangle$。显然，$\pi_e(H)\ \pi_e(K)\subseteq\pi_e(L')$，因为 $H\leq L'$ 且 $\pi_e(K)=\{1,2\}\subseteq\pi_e(L')$，因此我们有，

$$\bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}}\pi_e(\bar{L})\subseteq\pi_e(L').$$

设 $m\in\pi_e(L')$ 且 $\bar{L}\leq G$，并有 $\pi_e(H)\ \pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})$，则 $m=2$ 或 $m\in T\left(\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i}\right)$。由于 $\pi_e(K)=\{1,2\}$ 且 $\pi_e(H)=T\left(\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i}\right)$，故 $m\in\pi_e(\bar{L})$。由于 $\bar{L}$ 是任意的，我们有，

$$\pi_e(L')\subseteq\bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}}\pi_e(\bar{L}).$$

因此，$[L']$ 是 $\{[H],[K]\}$ 的最小上界。

我们断言 $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$ 的最大下界，其中 $L''=\langle e\rangle$。显然，$\pi_e(L'')\subseteq\pi_e(H)\ \pi_e(K)$，因为 $\pi_e(L'')=\{1\}$，因此我们有，

$$\pi_e(L'')\subseteq\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}}\pi_e(\widehat{L}).$$

设 $m\in\pi_e(\widehat{L})$，其中 $\widehat{L}\leq G$ 满足 $\pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H)\ \pi_e(K)$，从而 $m\in T\left(\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i}\right)\bigcap\{1,2\}=\{1\}$，这意味着 $m=1\in\pi_e(L'')$，因此，

$$\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}}\pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(L'').$$

因此，$[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界。

子情形 2.2： 若 $\{1,2\}\subsetneq\pi_e(K)$，则 $K=\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{v_i}}\right\rangle$，其中 $0\leq\beta\leq\alpha-1$；若 $\beta=\alpha-1$，则并非所有 $v_i=t_i$ 或 $K=\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{v_i}},\ r^j s\right\rangle$，其中 $0\leq\beta\leq\alpha, 0\leq v_i\leq t_i, 1\leq i\leq k$，$0\leq j\leq\left(2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{v_i}\right)-1$；若 β 是 $\alpha-1$ 或 α，则并非所有 $v_i=t_i$。由于 $2\notin\pi_e(H)$，我们有

$H = \left\langle r^{2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$ 与 $0 \le u_i \le t_i, 1 \le i \le k$。我们断言，$[L']$ 是$\{[H],[K]\}$的最小上界，其中 $L' = \left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}\text{最小值}\{u_i,v_i\}}, \ s \right\rangle$。显然，$\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq \pi_e(L')$，因为 $H \le L'$ 且$\pi_e(K) = T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) \subseteq T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最小值}_{\{u_i,v_i\}}}_i\right) = \pi_e(L')$。因此，我们有，

$$\bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}) \subseteq \pi_e(L').$$

对于 $m \in \pi_e(L')$，我们有 $m \in T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,v_i\}}}_i\right)\bigcup\{2\}$。令 $\bar{L} \le G$ 满足 $\pi_e(H)\ \pi_e(K) \subseteq k\pi_e(\bar{L})$。于是 $\bar{L}$ 包含一个阶为 $\prod_{i=1k} p_i^{t_i-u_i}$ 的元素，因为所有阶为 $\prod_{i=1k} p_i^{t_i-u_i}$ 的元素都在 H 中，并生成 H，因此有 $H \le L$。此外，L 包含一个阶为 $2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$ 的元素。我们有，所有阶为 $2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$ 的元素都在 $\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$ 或 $\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s \right\rangle$ 中，$r^j s$，且所有这些元素生成 $\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$。因此，$\left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle \le \bar{L}$，从而 $\left\langle r^{2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle \vee \left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle = \left\langle r^{2^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle \le \bar{L}$。所以，$T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,v_i\}}}_i\right) \subseteq \pi_e(\bar{L})$，又由于 $2 \in \pi_e(K) \subseteq \pi_e(\bar{L})$，我们有，¯，特别地，$m \in \pi_e(L)$。所以，

$$\pi_e(L') \subseteq \bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}).$$

因此，$[L']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最小上界。

现在，我们断言 $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界，其中 $L'' = \left\langle r^{2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle$。显然，$\pi_e(L'') \subseteq \pi_e(H)\ \pi_e(K)$，因为 $L'' \le H$ 且 $\pi_e(L'') = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最大值}_{\{u_i,v_i\}}}_i\right) \subseteq T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)\bigcup\{2\} = \pi_e(K)$，因此我们有，

$$\pi_e(L'') \subseteq \bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}} \pi_e(\widehat{L}).$$

令 $\widehat{L} \le G$ 满足 $\pi_e(\widehat{L}) \subseteq \pi_e(H)\ \pi_e(K)$，并考虑 $m \in \pi_e(L)$，则 $m \in T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}\right) \bigcap \left\{T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)\bigcup\{2\}\right\} = T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}\right)\bigcap T\left(2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)$，因此 m 整除 $\gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i},\ 2^{\alpha-\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) = \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最大值}_{\{u_i,v_i\}}}_i$。由于 $\pi_e(L'') = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最大值}_{\{u_i,v_i\}}}_i\right)$，特别地，我们有，

$\widehat{}$特别地， $m \in \pi_e(L'')$。由于 L 是任意的，我们有，

$$\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}} \pi_e(\widehat{L}) \subseteq \pi_e(L'').$$

因此， $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界。

情形 3：如果 $2 \in \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，那么只需考虑 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，因为不失一般性地，如果 $\pi_e(H) = \{1,2\}$，则 $\pi_e(H) \subseteq \pi(K)$，从而， $[K]$ 是 $\{[H],[K]\}$的最小上界，而 $[H]$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界。因此，如果 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，则 $H = \left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$，其中 $0 \le \beta_1 \le \alpha-1$；如果 $\beta_1 = \alpha-1$，则并非所有的 $u_i = t_i$或 $H = \left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ r^{j_1}s \right\rangle$，其中 $0 \le \beta_1 \le \alpha$；如果 β_1是 $\alpha-1$或 α，则并非所有的 $u_i = t_i$和 $K = \left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$，其中 $0 \le \beta_2 \le \alpha-1$；如果 $\beta_2 = \alpha-1$，则并非所有的 $v_i = t_i$或 $K = \left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ r^{j_2}s \right\rangle$，其中， $0 \le \beta_2 \le \alpha$；如果 β_2是 $\alpha-1$或 α，则并非所有的$v_i = w_i$和 $0 \le u_i$、 $v_i \le t_i$、 $1 \le i \le k$、 $0 \le j_1 \le \left(2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}\right) - 1$、 $0 \le j_2 \le \left(2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}\right) - 1$。我们断言，$[L']$是$\{[H],[K]\}$的最小上界，其中 $L' = \left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}、\ s \right\rangle$。显然，根据对 L'的选择， π_e (H) $\pi_e(K) \subseteq \pi_e(L')$是显然的，因此，我们有，

$$\bigcap_{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)} \pi_e(\bar{L}) \subseteq \pi_e(L').$$

设 $m \in \pi_e(L')$，则 $m \in T\left(2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\min\{u_i,v_i\}}\right)$。设 $\bar{L} \le G$，且 $\pi_e(H)$ $\pi_e(K) \subseteq \pi_e(\bar{L})$，则 $\bar{L}$包含k个阶为$2^{\alpha-\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}$的元素，因为所有阶为$2^{\alpha-\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}$的元素都在$\left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$或$\left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ r^{j}s \right\rangle$中，$r^{j}s$并且生成$\left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$，因此，$\left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle \le \bar{L}$。此外，$k\bar{L}$包含一个阶为$2^{\alpha-\beta_2}\prod p_i^{t_i-v_i}$的元素。我们有，所有阶为$2^{\alpha-\beta_2}\prod p_i^{t_i-v_i}$的元素都在$\left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$或$\left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ r^{j}s \right\rangle$，并且所有这样的元素都生成$\left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$。因此，$\left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle \le \bar{L}$从而，$\left\langle r^{2^{\beta_1}\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle \vee \left\langle r^{2^{\beta_2}\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle = \left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle \le \bar{L}$。所以，$T\left(2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min\{u_i,v_i}\right)$ $\subseteq \pi_e(L)$，并且由于$2 \in \pi_e(H) \subseteq \pi_e(L)$，我们特别有$m \in \pi_e(L)$。因此，

$$\pi_e(L') \subseteq \bigcap_{\substack{\bar{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(H),\pi_e(K)\subseteq\pi_e(\bar{L})}} \pi_e(\bar{L}).$$

因此， $[L']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最小上界。

我们断言， $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界，其中 $L''=\left\langle r^{2^{\max\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}\right\rangle$。显然， $\pi_e(L'')\subseteq\pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，因为 $\pi_e(L'')=T\left(2^{\alpha-\max\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p^{t_i-\text{最大}_i}_{\{u_i,v_i\}}\right)\bigcup\{2\}\subseteq T\left(2^{\alpha-\beta_1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i}\right)=\pi_e(H)$且 $\pi_e(L'')=T\left(2^{\alpha-\max\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p^{t_i-\text{最大}_i}_{\{u_i,v_i\}}\right)\bigcup\{2\}\subseteq T\left(2^{\alpha-\beta_2}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-v_i}\right)=\pi_e(K)$，因此我们有，

$$\pi_e(L'')\subseteq\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}}\pi_e(\widehat{L}).$$

设 $\widehat{L}\leq G$ 满足 $\pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，并考虑 $m\in\pi_e(\widehat{L})$，则 $m\in T\left(2^{\alpha-\beta_1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i}\right)\bigcap T\left(2^{\alpha-\beta_2}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-v_i}\right)$，因此 m 整除最大公约数$\left(2^{\alpha-\beta_1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-u_i},\ 2^{\alpha-\beta_2}\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i-v_i}\right)=2^{\min\{\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}}=2^{\alpha-\max\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p^{t_i-\text{最大值}_i}_{\{u_i,v_i\}}$。由于，$\pi_e(L'')=T\left(2^{\alpha-\max\{\beta_1,\beta_2\}}\prod_{i=1}^{k}p^{t_i-\text{最大值}_i}_{\{u_i,v_i\}}\right)$，特别地，我们有 $m\in\pi_e(L'')$。由于 $\widehat{L}$ 是任意的，我们有，

$$\bigcup_{\substack{\widehat{L}\in\mathcal{L}(G)\\ \pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(H),\pi_e(K)}}\pi_e(\widehat{L})\subseteq\pi_e(L'').$$

因此， $[L'']$ 是 $\{[H],[K]\}$的最大下界。 □

例子：

~1. $\Pi(D_{2^\alpha})\cong C_{\alpha+1}$，一个长度为 $\alpha+1$的链。~2. 对于互异奇素数 p_1,p_2, $\Pi(D_{p_1p_2})\cong\mathcal{P}(\{1,2,3\})$，它们是 $\{1,2,3\}$的幂集。~3. 对任意奇素数 p, $\Pi(D_p)\cong M_2$和 $\Pi(D_{p^\alpha})\cong T(p_1^\alpha p_2)$，其中 p_1,p_2是任意互异素数。

以下定理保证，对于 $n=\prod p_i^{t_i}$，其中 p_i是互异奇素数，且 $t_i's$ 是非负的， $\Pi(D_n)$是一个分配格。

定理 2.6. 设 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{t_i}$，其中 p_i' 为互异奇素数，且 $t_i's\geq0$，则 $\widetilde{\Pi}(D_n)\cong T(n)\times C_2$.$i=1$ k k证明。首先注意到， $|T(n)|=\prod(t_i+1)$，因此， $|T(n)\times C_2|=2\prod(t_i+1)$。由于每个$i=1$ $i=1$~类型（1）子群在 $\Pi(D_n)$和 $2\notin\pi_e(H)$中分别属于不同的类，对任意类型（1）子群 H，包含类型（2）子群的不同类的数量与不同类型（1）子群的数量相同

k子群，因此，$|\Pi(D_n)| = 2|$类型（1）子群的数量$| = 2|T(n)| = 2\prod(t_i+1)$。因此，$\sim_{i=1}|\Pi(D_n)| = |T(n) \times C_2|$。

考虑映射 $\phi\colon \Pi(D_n) \to T(n) \times C_2$，定义如下：

$$\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}\right\rangle\right] \longmapsto \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i} \text{ and } \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right] \longmapsto 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}.$$

若 $\phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}\right\rangle\right]\right) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}\right\rangle\right]\right)$，则根据 ϕ 的定义，$\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$，这意味着 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i-v_i} = 1$，因此对所有 i，$u_i = v_i\ 1 \le i \le k$，从而 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}\right\rangle\right]$。类似地，若 $\phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}},\ s\right\rangle\right]\right) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}},\ s\right\rangle\right]\right)$，则根据 ϕ 的定义，$2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i} = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}$，这意味着 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i-v_i} = 1$，因此对所有 i，$u_i = v_i\ 1 \le i \le k$，从而 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}},\ s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，这意味着 ϕ 是一个单射。由于，$|\widetilde{\Pi}(D_n)| = |T(n) \times C_2|$，我们有，$\phi$ 是一个双射。

现在证明 ϕ 是格同态，即对于所有 $[H]$，$[K] \in \Pi(D_n)$，$\phi([H]\vee'[K]) =$等于 lcm($\phi([H])$ $\phi([K])$），且 $\phi([H]\wedge'[K]) =$等于 gcd($\phi([H])$ $\phi([K])$)。因此，考虑以下情形：

情形 1： 如果 H 和 K 都是类型（1）子群，那么 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}\right\rangle\right]$ 和 $[K] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}\right\rangle\right]$,$0 \le u_i, v_i \le t_i$, $1 \le i \le k$。根据定理 2.5以及 ϕ的定义，我们有，$\phi([H] \vee' [K]) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}\right\rangle\right]\right) = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最小值}}{}_{i}{}^{\{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =lcm\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)$ =lcm($\phi([H])$ $\phi([K])$)。

类似地，$\phi([H] \wedge' [K]) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}\right\rangle\right]\right) = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最大值}}{}_{i}{}^{\{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =$最大公约数$\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i},\ \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)$ =最大公约数($\phi([H])$ $\phi([K])$)。

情形 2： 若 H是类型 (1)，且 K是类型 (2)，则 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}\right\rangle\right]$ 和 $[K] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}},\ s\right\rangle\right]$,$0 \le u_i,\ v_i \le t_i$, $1 \le i \le k$。根据定理 2.5 和 ϕ的定义，我们有，$\phi([H] \vee' [K]) =\phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}},\ s\right\rangle\right]\right) = 2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\text{最小值}}{}_{i}{}^{\{u_i,v_i\}} = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =$最小公倍数$\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i},\ 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)$ =最小公倍数($\phi([H])$ $\phi([K])$)。

Similarly, $\phi([H] \wedge' [K]) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}\right\rangle\right]\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\max\{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =$

$\gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) = \gcd(\phi([H]), \phi([K]))$.

情形 3：若 H和 K均为类型（2）子群，则 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 和 $[K] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$,$0 \le u_i, v_i \le t_i$, $1 \le i \le k$。根据定理 2.5 和 ϕ的定义，我们有，$\phi([H] \vee' [K]) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]\right) = 2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-}$最小值$_{i} \quad {}^{\{u_i,v_i\}} = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =$最小公倍数$\left(2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) =$最小公倍数($\phi([H])$ $\phi([K])$)。类似地，$\phi([H] \wedge' [K]) = \phi\left(\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]\right) = 2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-}$最大值$_{i} \quad {}^{\{u_i,v_i\}} = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{t_i-u_i,t_i-v_i\}} =$最大公约数$\left(2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-u_i}, 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) =$最大公约数($\phi([H])$ $\phi([K])$。□

~为刻画所有使 $\Pi(G)$ 成为分配格的 n 值，需要用到 Birkhoff 提出的以下分配格刻画定理。

定理 2.7. ([2]) 一个格是分配格，当且仅当它不包含同构于五边形格 (N_5) 或菱形格(M_3) 的子格。



N_5 M_3

图 1

~**定理 2.8.** 对于所有 n，格 $\Pi(D_n)$ 均不包含同构于 M_3 的子格。

证明。 对于 $n = 1$, $\widetilde{\Pi}(D_n) \cong C_2$ 以及对于 $n = 2^k$, $\widetilde{\Pi}(D_n) \cong C_{k+1}$，因此这些情形下结论成立。$_k$ 因此，设 $n = 2^\alpha \prod p_i^{t_i}$，其中 p_i's 是互异奇素数，α 是非负整数，且并非所有$_{i=1}t_i$'s 都为零。反之，若存在一个与 M_3 同构的子格，则存在互异的$[H]$、$[K]$、$[L]$、$[H] \vee' [K]$、$[H] \wedge' [K]$，满足 $[H] \vee' [K] = [H] \vee' [L] = [K] \vee' [L]$ 且 $[H] \wedge' [K] = [H] \wedge' [L] =$[K] $\wedge'$ [L]。

现在，考虑以下情形：$_k$ $_k$情形 1：若 $2 \notin \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，则 $H = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$ 且 $K = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$，其中 $0 \le u_i$、$v_i \le t_i$和$1 \le i \le k$。由定理 2.5，$[H] \vee' [K] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [K] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$。由于 $[H] \vee' [K] = [H] \vee' [L]$ 且 $2 \notin \pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right)$，因此 $2 \notin \pi_e(L)$。于是，$L = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}} \right\rangle$，对于 $0 \le w_i \le t_i$、$1 \le i \le k$。由定理 2.5，$[H] \vee' [L] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [L] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right]$。由于 $[H] \vee' [K] = [H] \vee' [L]$，所以 $\left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right]$，从而 $\pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right) = \pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right)$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}\right) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,w_i\}}\right)$。因此，特别地，$\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,w_i\}}$，且 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,w_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}$，因此 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,w_i\}}$，进而对于所有 $1 \le i \le k$，$\min\{u_i, v_i\} = \min\{u_i, w_i\}$。类似地，由于 $[H] \wedge' [K] = [H] \wedge' [L]$，所以 $\left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right]$，从而 $\pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right) = \pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,w_i\}}} \right\rangle\right)$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,v_i\}}\right) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,w_i\}}\right)$。因此，特别地，$\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,v_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,w_i\}}$，且 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,w_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,v_i\}}$，因此 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \max_i \{u_i,w_i\}}$，进而对于所有 $1 \le i \le k$，$\max\{u_i, v_i\} = \max\{u_i, w_i\}$。因此，对于所有 $1 \le i \le k$，$v_i = w_i$，从而 $[K] = [L]$，矛盾。情形 2：若 $2 \notin \pi_e(H)$，但 $2 \in \pi_e(K)$，则显然，对于 $0 \le u_i \le t_i$、$1 \le i \le k$，有 $H = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$。子情形 2.1：若 $\pi_e(K) = \{1, 2\}$，则由定理 2.5，$[H] \vee' [K] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ s \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [K] = [\langle e \rangle]$。显然，$2 \in \pi_e(L)$；否则，若 $2 \notin \pi_e(L)$，则由定理 2.5，对于所有 $\widetilde{T} \in [H] \vee' [K]$、$_k$，有 $2 \notin \pi_e(\widetilde{T})$，这显然不成立，因为 $2 \in \pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ s \right\rangle\right)$。因此，$\pi_e(K) \subseteq \pi_e(L)$，从而 $[K] \lesssim [L]$，矛盾。子情形 2.2：若 $\{1, 2\} \subsetneq \pi_e(K)$，则 $[K]$ 是 $\left[\left\langle r^{2^\beta \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ s \right\rangle\right]$、$0 \le \beta \le \alpha$，并且若 β是 $\alpha - 1$或 α，则并非所有 $v_i = t_i$。由定理 2.5，$[H] \vee' [K] = \left[\left\langle r^{2^\beta \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}、\ s \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [K] = \left[\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$。现在，若 $2 \in \pi_e(L)$，则 $\pi_e(\langle s \rangle) \subseteq \pi_e(K)$ $\pi_e(L)$，从而 $[\langle s \rangle] \lesssim [K] \wedge [L]$，因此对于所有

$\widetilde{T} \in [K] \wedge' [L] = [H] \wedge' [K]$，但这是不可能的，因为 $2 \notin \pi_e\left(\left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right)$。因此，$2 \notin \pi_e(L)$，从而 $L = \left\langle r^{2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}} \right\rangle$；由定理 2.5，$2 \notin \widetilde{T}$对任意 $\widetilde{T} \in [H] \vee' [L] = [H] \vee' [K]$均成立，这就构成了矛盾。

情形 3：若 $2 \in \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，则 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$；否则，若 $\pi_e(H)$ 或 $\pi_e(K)$ 为 $\{1,2\}$，则 $[H]$ 和$[K]$ 可比较。因此，$[H]$ 是 $\left[\left\langle r^{2^{\beta_1} \prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$，而 $[K]$ 是 $\left[\left\langle r^{2^{\beta_2} \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$, $0 \le \beta_1, \beta_2 \le \alpha$；并且若$\beta_1, \beta_2$是 $\alpha-1$ 或 α，则并非所有 u_i 和 v_i 都是 t_i。由定理 2.5，$[H]\vee'[K] = \left[\left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$且 $[H]\wedge'[K] = \left[\left\langle r^{2^{\max\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$，因此显然 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(L)$，进而 $[L] = \left[\left\langle r^{2^{\beta_3} \prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$；由定理 2.5，$[H]\vee'[L] = \left[\left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,w_i\}}}, s\right\rangle\right]$ 且 $[H]\wedge'[L] = \left[\left\langle r^{2^{\max\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,w_i\}}}, s\right\rangle\right]$。由于 $[H]\vee'[K] = [H]\vee'[L]$，我们有 $\left[\left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2^{\min\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,w_i\}}}, s\right\rangle\right]$，这意味着 $T\left(2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,v_i\}}}\right) \cup \{2\} = T\left(2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,w_i\}}}\right) \cup \{2\}$。因此，$2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,v_i\}}}$ 整除 $2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,w_i\}}}$，反之亦然；于是，$2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_2\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,v_i\}}} = 2^{\alpha-\min\{\beta_1,\beta_3\}} \prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{\{u_i,w_i\}}}$，这意味着 $\min\{\beta_1,\beta_2\} = \min\{\beta_1,\beta_3\}$ 且 $\min\{u_i,v_i\} = \min\{u_i,w_i\}$，对 $1 \le i \le k$ 成立。同样，通过比较 $[H]\wedge'[K] = [H]\wedge'[L]$，我们得到 $\max\{\beta_1,\beta_2\} = \max\{\beta_1,\beta_3\}$ 且 $\max\{u_i,v_i\} = \max\{u_i,w_i\}$，对 $1 \le i \le k$ 成立，因此对所有 i，$\beta_2 = \beta_3$ 且 $v_i = w_i$，从而得到矛盾。

□

在下一个结果中，我们证明，对于 $n = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，格 $\widetilde{\Pi}(D_n)$ 包含一个与N_5同构的子格，$k = 1$除外。此外，对于带有 $k \ge 2$的 $n = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，我们得到了 $\widetilde{\Pi}(D_n)$ 中与 N_5 同构的子格的完整结构。

定理 2.9. 设 $n = 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，且至少有一个 $t_i \neq 0$。格 $\widetilde{\Pi}(D_n)$ 包含一个子格，当且仅当 $n = 2^\alpha \prod p_i^{t_i}$带有 $\alpha \ge 2$ 或 $n = 2\prod p_i^{t_i}$带有 $k \ge 2$时，该子格与 N_5 同构。

证明。设 $n = 2^\alpha \prod p_i^{t_i}$，其中 $\alpha \ge 2$ 且并非所有 t_i 都为零。不失一般性，假设满足 $t_1 \neq 0$。考虑集合 $A_1 = \{1,2\}$、$A_2 = \{1,2,p_1\}$、$A_3 = \{1,2,4\}$、$A_4 = \{1,2,p_1,2p_1\}$、$A_5 = \{1,2,4,p_1,2p_1,4p_1\}$ 以及子群 $H_1 = \langle s\rangle$、$H_2 = \langle r^{2^\alpha p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k}},\ s\rangle$、$H_3 = \langle r^{2^{\alpha-2}p_1^{t_1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k}},\ s\rangle$、$H_4 = \langle r^{2^{\alpha-1}p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k}}\ s\rangle$ $H_5 = \langle r^{2^{\alpha-2}p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k}}\ s\rangle$ D_n π_e $H_i = A_i$ $1 \le i \le 5$ ，、，。显然，对于，有（）。

Mor此外， $[H_1]$， $[H_2]$， $[H_3]$， $[H_4]$ 和 $[H_5]$ 构成一个五边形的顶点，如图 2 所示。

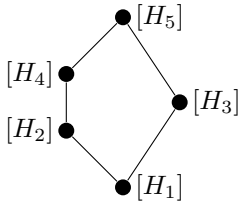

图 2

现在，假设对于 $n = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，格 $\widetilde{\Pi}(D_n)$ 包含一个与 N_5 同构的子格，那么$_{i=1}$存在互不相同的类 $[H]$、$[K]$、$[L]$、$[H] \vee' [K]$ 和 $[H] \wedge' [K]$，其中 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$ 且 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$。

现在考虑以下情形：

情形 1：如果 $2 \notin \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，那么 $H = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$ 且 $K = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}} \right\rangle$。根据定理 2.5，$[H] \vee' [K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$，这意味着 $2 \notin \pi_e(L)$，因此$L = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}} \right\rangle$。利用定理 2.5 以及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$，我们得到 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}} \right\rangle\right]$，所以 $\pi_e\left(\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}} \right\rangle\right) = \pi_e\left(\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}} \right\rangle\right)$，这意味着 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}\right) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{w_i,v_i\}}\right)$。由于 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{w_i,v_i\}}$，且 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{w_i,v_i\}}$ 整除 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}}$，我们有 $\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{u_i,v_i\}} = \prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_i \{w_i,v_i\}}$。因此，对于所有 $1 \le i \le k$，$\min\{u_i, v_i\} = \min\{w_i, v_i\}$。

同样，利用定理 2.5 以及事实 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$，我们得到 $\max\{u_i, v_i\} = \max\{w_i, v_i\}$ 对所有 $1 \le i \le k$ 均成立，这意味着 $u_i = w_i$ 对所有 $1 \le i \le k$ 均成立，因此，$H = L$，这就产生了矛盾。**情形 2：** 如果 $2 \notin \pi_e(H)$，但 $2 \in \pi_e(K)$，那么 $H = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}} \right\rangle$。考虑以下子情形。

子情形 2.1： 若 $\pi_e(K) = \{1, 2\}$，则 $[K] = [\langle s \rangle]$，根据定理 2.5，$[H] \vee' [K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}},\ s \right\rangle\right]$ 且 $[H] \wedge' [K] = [\langle e \rangle]$。显然 $2 \notin \pi_e(L)$，否则若 $2 \in \pi_e(L)$，则 $[K] \lesssim [L]$，这是不可能的。因此，$L = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}} \right\rangle$。利用定理 2.5 以及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$，我们得到，对于所有$1 \le i \le k$，$u_i = w_i$，因此 $H = L$，这与假设矛盾。

子情形 2.2： 若 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(K)$，则 $[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}},\ s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}},\ s\right\rangle\right]$，其中并非所有 v_i 都是 t_i。对于 $[K]$ 的两种选择，利用定理 2.5 以及事实 $[H]\vee'[K] = [L]\vee'[K]$ 和 $[H]\wedge'[K] = [L]\wedge[K]$，我们得到 $H = L$，这与假设矛盾。

情形 3：若 $2 \in \pi_e(H)$，但 $2 \notin \pi_e(K)$，则 $K = \left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}\right\rangle$。考虑以下子情形：子情形 3.1：若 $\pi_e(H) = \{1,2\}$，则 $[H] = [\langle s\rangle]$，由定理 2.5，$[H]\vee'[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ s\right\rangle\right]$和 $[H]\wedge'[K] = [\langle e\rangle]$。显然，$2 \in \pi_e(L)$，且由于 $[L]$ 与 $[H]$不同，因此 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(L)$。于是，$[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，但并非所有 $w_i = t_i$。若 $[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，则由定理 2.5 及事实 $[H]\vee'[K] = [L]\vee'[K]$，可得 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}}、\ s\right\rangle\right]$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)\cup\{2\} = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{i}\{w_i,v_i\}}\right)\cup\{2\}$，特别地，$T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right) = T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{i}\{w_i,v_i\}}\right)$，这意味着对所有 $1 \le i \le k$，$\min\{w_i,v_i\} = v_i$。类似地，利用定理 2.5 和事实 $[H]\wedge'[K] = [L]\wedge'[K]$，可得 $[\langle e\rangle] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{w_i,v_i\}}}\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}\right\rangle\right]$，因此对所有$1 \le i \le k$，$w_i = t_i$，从而 $[L] = [\langle s\rangle] = [H]$，这就产生了矛盾。若 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，则由定理 2.5 且由于 $[H]\vee'[K] = [L]\vee'[K]$，可得 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}、\ s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}}、\ s\right\rangle\right]$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)\cup\{2\} = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{i}\{w_i,v_i\}}\right)$。

显然，存在 i_0 使得 $\min\{w_{i_0},v_{i_0}\} \neq t_{i_0}$，否则 $[H]\vee'[K] = [H]$，这是不可能的。于是 $2p_{i_0} \in T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i-\min_{i}\{w_i,v_i\}}\right)$，但 $2p_{i_0} \notin T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-v_i}\right)\cup\{2\}$，矛盾。

子情形 3.2：若 $\{1,2\} \subsetneq \pi_e(H)$，则 $[H] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ s\right\rangle\right]$，但并非所有 $u_i = t_i$。设 $[H] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}、\ s\right\rangle\right]$，则利用定理 2.5，可得 $[H]\vee'[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}、\ s\right\rangle\right]$和 $[H]\wedge'[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}\right\rangle\right]$。这意味着 $[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，其中并非所有 $w_i = t_i$。若 $[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，则利用定理 2.5 以及事实 $[H]\vee'[K] = [L]\vee'[K]$和 $[H]\wedge'[K] = [L]\wedge'[K]$，容易证明 $[H] = [L]$，这就产生了矛盾。现在，若 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}、\ s\right\rangle\right]$，则利用定理 2.5 及事实 $[H]\vee'[K] = [L]\vee'[K]$，可得,

$\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{u_i,v_i\}}}\right) \cup \{2\} = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{w_i,v_i\}}}\right)$，这意味着对 $1 \le i \le k$，$t_i = \min\{u_i, v_i\} = \min\{w_i, v_i\}$。类似地，利用 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$，可得对 $1 \le i \le k$，$\max\{u_i, v_i\} = \max\{w_i, v_i\}$。因此，对 $1 \le i \le k$，$u_i = w_i$。现在，并运算意味着 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{u_i,v_i\}}}\right) \cup \{2\} = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{u_i,v_i\}}}\right)$，这只有在对所有 i，$t_i = \min\{u_i, v_i\}$ 时才成立，从而 $[H] \vee' [K] = [\langle s\rangle]$，这就产生了矛盾。若 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$，则显然 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$，并且使用与上段类似的论证，可得 $[H] = [L]$，这就产生了矛盾。情形 4：若 $2 \in \pi_e(H)$ $\pi_e(K)$，则 $2 \in \pi_e(L)$。由于 $[H]$ 和 $[K]$ 不可比，因此 $\{1, 2\} \subsetneq [H]$、$[K]$。于是，$[H]$ 的选择为 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，而 $[K]$ 的选择为 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，其中并非所有 $u_i = t_i$ 且并非所有 $v_i = t_i$。

子情形 4.1：若 $[H] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 且 $[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，则 $[L]$ 的选择为 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$。设 $[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$，则由定理 2.5 及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$ 和 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$，可得 $w_i = u_i$，从而 $[H] = [L]$，这就产生了矛盾。现在，设 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$，则利用定理 2.5 及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$，可得 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{u_i,v_i\}}}\right) \cup \{2\} = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{w_i,v_i\}}}\right)$，这意味着对所有 i，$t_i = \min\{u_i, v_i\} = \min\{w_i, v_i\}$。类似地，对交进行比较，可得对所有 i，$\max\{u_i, v_i\} = \max\{w_i, v_i\}$。因此，对所有 i，$u_i = w_i$，从而$[H] \vee' [K] = [\langle s\rangle]$，这就产生了矛盾。

子情形 4.2：若 $[H] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 且 $[K] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，则 $[L]$ 的选择为 $\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$ 或 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$。设 $[L] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$，则利用定理 2.5 及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$ 和 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$，可得对所有 $1 \le i \le k$，$u_i = w_i$，从而 $[H] = [L]$，这就产生了矛盾。

现在，假设 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$，则根据定理 2.5 以及事实 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$，我们有 $\left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{w_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$，即 $T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{u_i,v_i\}}}\right) = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p^{t_i - \min_{i\ \{w_i,v_i\}}}\right)$，因此，对于所有 $1 \le i \le k$，$\min\{u_i, v_i\} = \min\{w_i, v_i\}$。类似地，利用定理 2.5 以及事实 $[H] \wedge' [K] =$

$[L] \wedge' [K]$，我们有，$\left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{u_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{w_i,v_i\}}}, s\right\rangle\right]$，即 $T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\max\{u_i,v_i\}}\right) \cup \{2\} = T\left(2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\max\{w_i,v_i\}}\right)$。显然，如果存在 i_0 使得 $t_{i_0} \neq \max\{u_{i_0}, v_{i_0}\}$，那么 $2p_{i_0} \in T\left(2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\max\{w_i,v_i\}}\right)$，但 $2p_{i_0} \notin T\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i-\max\{u_i,v_i\}}\right) \cup \{2\}$，这是不可能的。因此，$t_i = \max\{u_i, v_i\} = \max\{w_i, v_i\}$，所以，对于所有 $1 \leq i \leq k$，$u_i = w_i$。于是，$\Pi(D_n)$ 的与 N_5 同构的子格如图 3 所示。

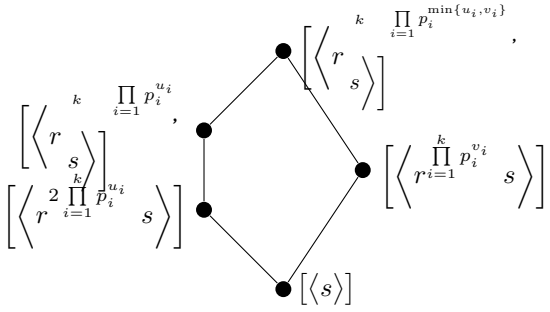

图 3

注意，如果 $k \geq 2$，则存在这样一个与 N_5 同构的子格。

子情形 4.3： 如果 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 且 $[K] = \left[\left\langle r^{2\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，那么 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$。

利用定理 2.5 以及 $[H] \vee' [K] = [L] \vee' [K]$ 和 $[H] \wedge' [K] = [L] \wedge' [K]$这一事实，对于所有 $1 \leq i \leq k$，我们有 $\min\{u_i, v_i\} = \min\{w_i, v_i\}$ 和 $\max\{u_i, v_i\} = \max\{w_i, v_i\}$。因此，对于所有 $1 \leq i \leq k$，有 $u_i = w_i$，从而 $[H] = [L]$，矛盾。

子情形 4.4： 如果 $[H] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{u_i}}, s\right\rangle\right]$ 且 $[K] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}}, s\right\rangle\right]$，那么 $[L] = \left[\left\langle r^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{w_i}}, s\right\rangle\right]$。通过与子情形 4.3 中类似的论证，我们得到矛盾。 □

注 2。 对于 $n = 2\prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$ 至少有一个 $t_i \neq 0$ 的情形，定理 2.9 对中同构于 N_5 的子格给出了完整描述，如图 3 所示。

根据定理 2.5、2.6、2.8 和 2.9，我们得出如下结论。

定理 2.10。 </style} $\Pi(D_n)$ 格是模的，当且仅当 n 是以下之一：

1. $n = 2^{\alpha}$，其中 α 是非负整数。2. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{t_i}$，其中 p_i 是互异奇素数，t_i 是非负整数。

3. $n = 2p^{\alpha}$，其中 p是奇素数，且 $\alpha \geq 1$。

注记 3. 定理 2.8 保证，对于任意选择的 n，格 $\Pi(D_n)$ 均不包含一个与 M_3 同构的子格。因此，根据定理 2.9，$\Pi(D_n)$ 是模的，当且仅当它是分配的。

致谢

Tushar Halder 感谢 CSIR 以初级研究奖学金（JRF）的形式提供经费支持，文件编号为：09/0414(22038)/2025-EMR-I。

参考文献

[1] BALLAL, S., AND ARDRA, A. N. 关于 D_n 的交超图。《亚欧数学杂志》*19*, 02 (2026), 2540018.[2] BIRKHOFF, G. 格论。美国数学会专题出版物。美国数学会，1940。[3] CONRAD, K. 二面体群 II。[4] GR¨ATZER, G. 一般格论，第 2 版。Birkh¨auser 出版社，1998。[5] IWASAWA, K., SATAKE, I., FUJISAKI, G., KAZUYA, K., KURIHARA, M., NAKAJIMA, S., AND COATES, J. 论文集。施普林格数学文库。施普林格日本，2001。[6] KHARAT, V., MITKARI, S., AND BALLAL, S. 关于二面体群、交错群和对称群的某些子群格。《数学讨论——一般代数与应用》*43* (2023), 309–326.[7] MAINARDIS, M. 子群共轭类偏序集与某个阿贝尔群的子群共轭类偏序集同构的有限群。《意大利数学联合会通报》*1-B*, 3 (10 1998), 691–698.[8] REDDY, A. S., AND SAMANT, K. 有限二面体群的生成图。《数学研究成果》*78*, 5 (2023), 200.[9] ROBINSON, D. 群论教程。数学研究生教材。施普林格纽约，1996。[10] ROTTL¨ANDER, A. A. 证明存在具有相同子群结构但不同构的群。《数学杂志》*28* (1928), 641–653.[11] SCHMIDT, R. 群的子群格。德古意特，柏林、纽约，1994。

[12] SUZUKI, M. 群的结构及其子群格的结构。施普林格，柏林，海德堡，1956。[13] TAMIZH CHELVAM, T., KRISHNAN, S., AND RAJA, S. 二面体群上的交换图。《数学与计算机科学杂志》 *02* (2011), 402–406.[14] T ˇARN ˇAUCEANU, M. 有限群的同构子群类偏序集。马来西亚数学科学学会通报 *0*, 40 (2017), 163–172。