arXiv:2603.06191v1 [math.CV] 6 Mar 2026

二维前哨系综的塞格ő型相关性

Yacin Ameur 和 Ena Jahic

摘要。我们考虑一类二维库仑系统，其重合集包含一个前哨，形状为一条适当的若尔当曲线。我们研究液滴的前哨与外边界并集上的相关性渐近行为。这些相关性具有普适性，并可用某个解析函数希尔伯特空间的再生核表示，从而推广了 Ameur 和 Cronvall 最近得到的塞格ő型边缘相关性。此外，我们还得到若干其他结果，例如在存在前哨的情况下插入一个外部点电荷所产生的影响。

1. 引言与主要结果

我们继续研究近期在 [6, 3] 中引入的二维前哨系综。因此，我们研究在一个连通液滴 (S) 附近聚集的库仑系统，其中有若干离群点分布在液滴外部的一条光滑若尔当曲线 (C_2) 上。见图1。

在适当条件下，离群点的数量（位于C_2附近）服从渐近海涅分布；尤其是，即使在热力学极限下，随着粒子总数无限增加，离群点的期望数量仍严格大于零且有限（参见 [6, 3]）。其统计行为与文献中讨论埃尔米特随机矩阵时出现的前哨系综截然不同， [12, 15, 24]。

前哨区制具有如下意义上的临界性：在拉普拉斯增长过程中，它对应于液滴发生拓扑变化的点，而前哨则是一个新环状分量的“萌芽”。基于临界现象值得特别关注这一原则，我们将深入探讨这一特定区制，并为相关的函数理论带来一些新的认识。

秉承 [7, 3, 18], 的思路，我们将研究沿前哨与液滴外缘之并集的渐近长程相关。我们将发现，这些相关性可方便地用某个适当的解析函数希尔伯特空间的再生核来表达，从而为 [7]中的 Szeg˝o 型渐近性提供自然的推广。

我们指出， [6, 3, 5]研究了不连通液滴“后临界”状态的若干方面。 [5] 证明了，在假设径向对称的情况下，描述谱隙边缘相关性的 Szeg˝o 核会随着粒子数的变化而振荡。直观地说，关联函数中的振荡是由粒子随机地双向来回位移造成的

2020 数学主题分类。60B20；82D10；41A60；31C20。关键词和短语。二维库仑气体；若尔当前哨；相关性；一般正交多项式；Szeg˝o 型渐近性。

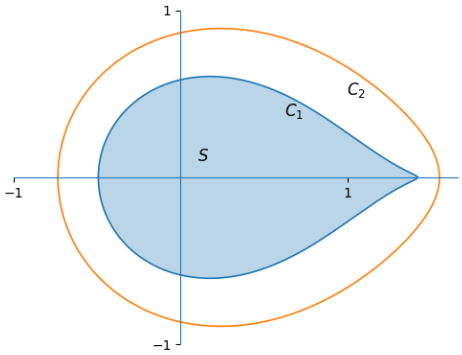

图1. 第 1.5 节所述前哨势在 $\alpha = -0.5$、$r_1 = 0.735$ 以及 $r_2 = 1$ 时的重合集 $S^* = S \cup C_2$。

跨越谱隙。在当前情形中，位移是单向的，即从S到C_2,，这不足以引起振荡。

1.1. 二维前哨系综。 我们回顾来自 [6]的前哨模型。尽管以下条件乍看之下可能显得较为严格，但我们向读者保证，相关例子十分丰富。若干相关评注与具体例子见第 1.5 节，另参见 [6]。

1.1.1. 势理论背景。 我们考虑相对于吉布斯测度随机选取的库仑系统 $\{z_j\}_1^n \subset \mathbf{C}$

$$d\mathbb{P}_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{1 \le i < j \le n} |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^{n} e^{-nQ(z_i)}\, dA(z_i) \tag{1.1}$$

其中 $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个取值于 $\mathbf{R} \cap \{+\infty\}$ 的次调和函数，它在某个开集上取有限值，并且满足

$$\liminf_{|z| \to \infty} \frac{Q(z)}{2 \log |z|} > 1.$$

本文始终将 $dA(z) = \pi^{-1} d^2 z$ 记为 $\mathbf{C}$ 上的归一化面积测度。

为便于查阅，我们现在回顾加权势理论中的一些概念和结果。证明及更多细节请参见 [26]。

相对于Q的 Frostman 平衡测度是Q]上唯一的紧支撑概率测度 $\sigma = \sigma[$，它使加权

能量泛函

$$I_Q[\mu] = \iint_{\mathbb{C}^2} \log \frac{1}{|z-w|}\, d\mu(z) d\mu(w) + \int_{\mathbb{C}} Q\, d\mu$$

对所有定义在 $\mathbb{C}$ 上的紧支撑博雷尔概率测度 μ 取上确界。支撑集$S = S[Q] = \operatorname{supp}\sigma$ 称为相对于Q的液滴。

假设（如我们将要假设的）Q在S的某个邻域内C^2光滑，则 σ关于归一化面积测度$dA(z) = \frac{1}{\pi} d^2z$绝对连续，而且事实上（参见 [26]）

$$d\sigma(z) = \Delta Q(z) \cdot \mathbf{1}_S(z)\, dA(z). \tag{1.2}$$

此处及下文中， $\Delta := \partial\bar{\partial} = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ 表示归一化拉普拉斯算子，即标准拉普拉斯算子除以 4。

接下来，我们将障碍函数 $\check{Q}(z)$ 定义为$s(z)$ 的逐点上确界，其中$s(w)$ 遍历所有满足$s(w) \le 2\log|w| + O(1)$（当$w \to \infty$时）的次调和函数$s : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$。于是 $\check{Q}$在全局上$C^{1,1}$光滑，且 $\check{Q}$在 $\mathbb{C} \setminus S$上调和，见 [26]。特别地$d\sigma = \Delta\check{Q} dA$。

我们将障碍问题的重合集定义为

$$S^* := \{Q = \check{Q}\}.$$

该集合满足$S \subset S^*$（再次参见 [26]）。

尽管绝大多数关于库仑气体系综的研究都假设$S = S^*$，但我们在此将依照 [3, 6], 研究一类有趣的势函数，其中“浅层集”$S^* \setminus S$ 具有正容量。

1.1.2. 前哨势函数类。 给定液滴S，我们用U 表示$\hat{\mathbb{C}} \setminus S$ 中包含无穷远点的连通分支。

我们假设边界 ∂U 是一条单一的正则若尔当曲线C_1。我们还假设 $(S^* \setminus S) \cap U$ 是一条若尔当曲线C_2，且$Q(z)$在$C_1 \cup C_2$的某个邻域内实解析且严格次调和。

令 $\mathbb{D}_* = \{|z| > 1\} \cup \infty$，并令 $\phi_1 : U \to \mathbb{D}_*$ 为如下形式的共形映射

$$\phi_1(z) = \frac{1}{r_1} z + a_{0,1} + a_{1,1}\frac{1}{z} + \cdots \tag{1.3}$$

对于 ∞的一个邻域中的z，其中$r_1 = \operatorname{Cap} C_1 > 0$。（见图 2。）

按照 [6],，我们施加两个假设，即相容条件，用以限制曲线C_2 的类别以及拉普拉斯算子 ΔQ 沿$C_1 \cup C_2$的取值。

第一相容条件是， ϕ_1 应将前哨C_2 映射到以原点为中心、半径为r_2/r_1 的圆，其中$r_2 > r_1$ 是任意但固定的。于是归一化共形映射 $\phi_2 : \operatorname{Ext} C_2 \to \mathbb{D}_*$即为 $\phi_2 = r_2^{-1}\phi_1$，$r_2 = \operatorname{Cap} C_2$。

接下来考虑环形域$G = (\text{外部}\, C_1) \cap (\text{内部}\, C_2)$。令

$$\omega(z) = \frac{\log|\phi_1(z)|}{\log(r_2/r_1)}$$

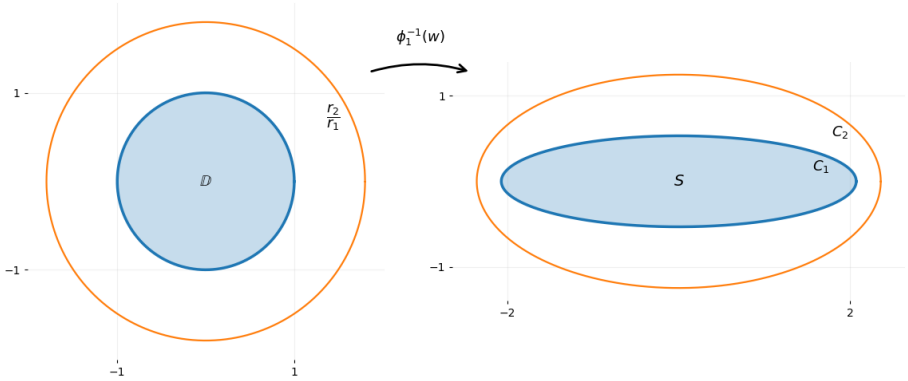

图 2。以椭圆 Ginibre 势函数为模型的前哨势函数，参见第 1.5 节

为调和函数，其在C_1 上为 0，在C_2上为 1。此外，令$H(z)$为G 上的调和实值函数，其边界值为$H(z) = \frac{1}{2}\log \Delta Q(z)$，定义于$C_1 \cup C_2$上。

关于 Dirichlet 问题的标准结果（例如 [11]）表明，存在一个全纯函数 h_1，定义在 G 上，以及一个实常数 c，使得

$$H(z) = \mathrm{Re}\, h_1(z) + c\omega(z), \qquad (z \in G). \tag{1.4}$$

第二个相容条件是，$h_1(z)$ 应延拓为定义在 U 上的全纯函数。我们要求 $h_1(\infty)$ 为实数，以此唯一确定该函数。

1.1.3. 相关核。 考虑按照 (1.1) 随机选取的点过程 $\{z_j\}_1^n$。

对于 $k \leq n$，k 点相关函数$R_{n,k}$ 定义为：对于 $\mathbb{C}^k$ 上的所有有界连续函数 f，

$$\mathbb{E}_n(f(z_1,\dots,z_k)) = \frac{(n-k)!}{n!}\int_{\mathbb{C}^k} f\cdot R_{n,k}\, dA^{\otimes k}.$$

过程$\{z_j\}_1^n$ 是行列式型的，即存在一个核$K_n(z,w)$，使得$R_{n,k}(w_1,\dots,w_k) = \det(K_n(w_i,w_j))_{i,j=1}^k$。

事实上，过程$\{z_j\}_1^n$ 的相关核$K_n(z,w)$可以按如下方式构造。

考虑加权多项式空间

$$\mathcal{W}_n = \left\{ f(z) = p(z)\cdot e^{-\frac{1}{2}nQ(z)} ;\, p \in \mathrm{Pol}(n-1) \right\}$$

其中$\mathrm{Pol}(n-1)$是次数至多为$n-1$的全纯多项式集合。我们赋予W_n 从$L^2(\mathbb{C};dA)$继承的范数。

空间 W_n 的再生核随后是 $\{z_j\}_1^n$ 的相关核；下文始终选用这个典范相关核。我们可以写成

$$K_n(z,w) = \sum_{j=0}^{n-1} e_{j,n}(z)\overline{e_{j,n}(w)} \tag{1.5}$$

其中波函数

(1.6) $$e_{j,n}(z) = \gamma_{j,n} p_{j,n}(z) e^{-\frac{1}{2}nQ(z)}$$

由$p_{j,n}(z) = z^j + a_{j-1,n}z^{j-1} + \cdots + a_{0,n}$表示关于该范数的第$j$个首一正交多项式

$$\|p\|_{nQ}^2 := \int_{\mathbb{C}} |p|^2 e^{-nQ}\, dA$$

及$\gamma_{j,n} = 1/\|p\|_{nQ}$。

我们所说的余循环，是指形式为 $c(z, w) = a(z)a(w)$ 的函数，其中 $\overline{a(z)}$ 是连续模为一函数。那么，对于任意核 $K(z, w)$，都有 $\det(K(z_i, z_j)c(z_i, z_j))^n_{i,j=1} = \det(K(z_i, z_j))^n_{i,j=1}$。也就是说，核 K 和 cK 产生相同的行列式点过程。

在此条件下，我们考虑空间 W_n的再生核$K_n(z,w)$。我们将推导$n \to \infty$ 趋于无穷时，在z、w位于$C_1 \cup C_2$, 附近的情形下，$c_n(z,w)K_n(z,w)$的渐近性，其中$c_n(z,w)$是合适的余循环。这些相关性可用U上解析函数希尔伯特空间的再生核来表示，下面我们将转而讨论这一点。

1.2. 相关的 Szegő 核与海涅分布。 对于在 U 中解析、且沿 C_1, 具有适当边界值的函数 $f(z)$，我们定义平方范数为

$$\|f\|_1^2 = \oint_{C_1} |f(z)|^2 \frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}}.$$

（此处及下文中，$|dz|$ 表示通常的弧长测度。）

如上所述，设 $h_1(z)$ 是外部 $\mathrm{Ext}C_1$（在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中包含 ∞ 的连通分支）上的解析函数，它在 ∞ 处取实值，并满足边值问题

$$\mathrm{Re}\, h_1 = \frac{1}{2}\log \Delta Q, \qquad (\text{along} \quad C_1).$$

设 H_1 为所有解析函数 $f: U \to \mathbb{C}$ 的希尔伯特空间，其中 $\|f\|_1 < \infty$ 且 $f(\infty) = 0$。这是 [7, 5] 中所讨论类型的加权哈代空间。我们记

(1.7) $$S_1(z, w) := \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}\, e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}}{1 - \phi_1(z)\overline{\phi_1(w)}}$$

为空间 H_1 的再生核。（此处及下文中，$\sqrt{\phi_1'}(z)$ 表示在无穷远处取实值的平方根分支。）

此外，我们还将考虑 H_1 上的以下等价范数

(1.8) $$\|f\|_{1,2}^2 := \oint_{C_1} |f(z)|^2 \frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}} + \oint_{C_2} |f(z)|^2 \frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}}.$$

我们将$H^{1,2}$ 记为U 上的解析函数所构成的希尔伯特空间，其范数为 $\|\cdot\|_{1,2}$；并将$S^{1,2}(z,w)$记为$H^{1,2}$的再生核；如下文所示，该核有几种有用的表示形式。

引理1.1。 当 $z,w \in \mathrm{Ext}C_1$ 时，我们有如下表示式

$$S_{1,2}(z,w) = \sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}\,e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^j}\frac{r_1^{1-2j}}{r_1^{1-2j}+e^{-c}r_2^{1-2j}}. \tag{1.9}$$

证明见第2节。

需要注意的是，$S_{1,2}(z,w)$ 作为 $(z,\bar{w})$ 的函数，可亚纯延拓至一个更大的域。

具体而言，设 D 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 中包含 $C_1 \cup \mathrm{Ext}C_1$ 的任意域，使得 ϕ_1 可解析延拓至 D，并在其中满足 $|\phi_1| > r_1/r_2$。此外，我们还假设 $h_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 可解析延拓至 D。

由引理1.1可容易推出（详细内容见第2节）

$$\begin{aligned} S_{1,2}(z,w) &= S_1(z,w) \\ &+ \sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}\,e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^j}\frac{e^{-c}r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}+e^{-c}r_2^{1-2j}}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中，$S_1(z,w)$ 是 (1.7) 中的 Szegő 核。注意，(1.10) 第二行中的和对于所有 $(z,w) \in D \times D$ 都是关于 $(z,\bar{w})$ 的解析函数，因此该公式给出了一个双亚纯延拓。

接下来，我们定义若干进一步的对象，以便表述主要结果。

设$q_1(z)$为定义在 $\mathrm{Ext}C_1$ 上的解析函数，它满足边值问题 $\mathrm{Re}q_1 = Q$ on C_1 (且$q_1(\infty)$为实数)。类似地，设$q_2(z)$为定义在 Ext C_1 上的解析函数，使得沿C_2有 $\mathrm{Re}q_2 = Q$。

在 [6,引理 2.1]中证明了，在 Ext C_2上， $\bar{\phi_1}(z)e^{\frac{1}{2}q_1(z)} = \phi_2(z)e^{\frac{1}{2}q_2(z)}$。因此，我们可以明确地定义一个解析函数:

$$u(z) := \phi_1(z)e^{\frac{1}{2}q_1(z)} = \phi_2(z)e^{\frac{1}{2}q_2(z)} \tag{1.11}$$

对于上述区域z 中的D 。与之密切相关的是障碍函数的以下恒等式

$$\check{Q}(z) = 2\log|\phi_1(z)| + \mathrm{Re}\,q_1(z), \qquad (z \in \mathrm{Ext}\,C_1). \tag{1.12}$$

接下来回顾有关海涅分布的一些事实。

若离散随机变量X取值于 $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$，则称其服从参数为 $\theta > 0$ 和 $0 < q < 1$ 的海涅分布，当且仅当

$$\mathbb{P}(\{X=k\}) = \frac{1}{(-\theta;q)_\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}k(k-1)}\theta^k}{(q;q)_k}, \qquad k \geq 0, \tag{1.13}$$

其中，q-Pochhammer 符号定义为

$$(z;q)_k = \prod_{j=0}^{k-1}(1-zq^j), \qquad (z;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-zq^j).$$

根据 q-二项式定理（参见 [3] 及其中的参考文献），可知这在 $\mathbb{Z}_+$ 上定义了一个概率分布；我们将该分布记为 $\mathrm{He}(\theta,q)$。

为便于查阅，我们回顾定理 1. [6, 1.2]中的以下结果（参见推论 1. [3,1.10]）。

定理 1.2 （[6], 定理 1.2）。 设$\mathcal{N}$ 是 C_2, 的一个固定邻域，且足够小，使其闭包与液滴 S 不相交。设 $\{z_j\}_1^n$ 是来自(1.1)的随机样本，并令 X_n 表示满足 $z_j \in \mathcal{N}$的 j（介于1 和 n 之间）的个数。则当 $n \to \infty$时，X_n 依分布收敛于一个海涅分布 $X \sim \mathrm{He}(\theta,q)$，其参数为

$$\theta = \frac{r_1}{r_2}e^{-c}, \qquad q = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \tag{1.14}$$

该海涅分布的期望为

$$\mu := \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}e^c + r_2^{1-2j}}. \tag{1.15}$$

下文不会用到定理 1.2；事实上，我们将给出另一种证明，该证明能得到稍好的收敛性。

1.3. 核渐近性的主要结果。对于 $k = 1, 2$，我们将围绕C_k 的“带状区域”定义为

$$\mathcal{B}_k := \left\{ z\,;\, \mathrm{dist}(z, C_k) \le M\sqrt{\frac{\log n}{n}} \right\} \tag{1.16}$$

其中M 是一个固定且足够大的常数。

我们有如下结果。

定理 1.3。 设(z, w) 满足

$$z, w \in \mathcal{B}_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1 \qquad and \qquad |\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)} - 1| \ge \eta, \tag{1.17}$$

其中 $\eta > 0$ 任意但固定。此外，设 $\beta > 0$ 是范围 $0 < \beta < \frac{1}{4}$ 内任意但固定的常数。于是我们有如下收敛（其中 $u(z)$ 由(1.11)给出）

(1.18)

$$K_n(z, w) = \sqrt{2\pi n}\cdot (u(z)\overline{u(w)})^n e^{-\frac{n}{2}(Q(z)+Q(w))}\cdot S_{1,2}(z, w)\cdot (1 + O(n^{-\beta})), \qquad n \to \infty,$$

其中隐含常数在满足(z, w) (1.17)的范围内一致。

我们注意到，定理 1.3 将 Ameur 和 Cronvall 针对连通重合集得到的 Szeg˝o 型收敛推广到了 [7,定理 1.3]。

将上述结果与 (1.12) 结合，可得以下推论。

推论 1.4。 令 $V(z)$ 为 $\check{Q}|_{\mathrm{Ext}\, C_1}$ 在 C_1 上向内延拓至 $C_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1$ 的邻域 D 后得到的调和延拓。那么，对于所有满足(z,w) 条件(1.17)的点，

$$|K_n(z, w)| = \sqrt{2\pi n}\, e^{-\frac{n}{2}(Q-V)(z)-\frac{n}{2}(Q-V)(w)}|S_{1,2}(z, w)|\cdot (1 + O(n^{-\beta})). \tag{1.19}$$

估计式 (1.19) 意味着，当z 或w 位于 $\mathrm{Ext}C_1 \setminus (\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2)$ 中时，$K_n(z,w)$ 可忽略。事实上，存在常数$c > 0$ 使得

$$(Q - \check{Q})(z) \ge c(\mathrm{dist}(z, C_1 \cup C_2))^2, \qquad z \in \mathrm{Ext}\, C_1. \tag{1.20}$$

后一估计可像 [2, 引理 2.1] 的证明中那样，通过直接的泰勒展开得到。利用 (1.19)、(1.20)，我们得到以下推论。

推论 1.5。 设 $z,w \in \mathcal{B}_1 \cup \mathrm{Ext}C_1$，且至少有一个点 z, w 位于补集 $\mathrm{Ext}C_1 \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ 中。给定任意大的常数 N，我们可以将 (1.16) 中的 M 取得足够大，使得 $|K_n(z,w)| \le Cn^{-N}$，其中 C 是仅依赖于 Q、M 和 N 的常数。

接下来我们讨论 z、w 均位于 $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$ 中时的详细渐近性。

若$p \in C_1 \cup C_2$，我们将 $\nu(p)$ 记作曲线 C^j （p 所属曲线）的外单位法向。

给定两点 p、$q \in C_1 \cup C_2$，我们考虑形如以下形式的邻近点 z、w

$$z = p + \frac{s}{\sqrt{2n\Delta Q(p)}}\nu(p), \qquad w = q + \frac{t}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\nu(q), \tag{1.21}$$

其中 s、t 为实数，且 $|s|$、$|t| \le M\sqrt{\log n}$。

当点 z、w中至少有一个靠近C_2时，我们有以下定理。（下文中，β 表示区间 $0 < \beta < \frac{1}{4}$ 中的任意一个固定数。）

定理 1.6. 设 $p,q \in C_1 \cup C_2$。若 p 和 q 都在 C_1 中，我们还假设$|p - q| \ge \eta$，其中 *sufficiently small* $\eta > 0$。那么存在余循环 $c_n(z,w)$，使得当 $n \to \infty$ 时，

$$c_n(z,w)K_n(z,w) = \sqrt{2\pi n}\cdot S_{1,2}(p,q)\cdot e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}\cdot(1+O(n^{-\beta})). \tag{1.22}$$

隐含的O常数对于所讨论的所有此类 p 和 q 都是一致的。

我们还得到了以下关于前哨附近密度$K_n(z,z)$的结果，证明当远离C_2时会出现高斯衰减。

定理 1.7。设 $p \in C_2$ 并令

$$z = p + \frac{t}{\sqrt{2n\Delta Q(p)}}\nu(p). \tag{1.23}$$

那么，当 $n \to \infty$ 时，对于 $|t| \le M\sqrt{\log n}$，有一致的

$$K_n(z,z) = \sqrt{\frac{n\Delta Q(p)}{2\pi}}\cdot\mu\cdot|\phi_2'(p)|\cdot e^{-t^2}\cdot(1+O(n^{-\beta})),$$

其中，μ 是公式(1.15)中给出的海涅分布的期望。

$K_n(z,z)$在z 接近C_1 时的行为更为复杂，本文不予研究。不过，关于此问题的若干相关讨论可参见第 1.6 节。

我们注意到定理 1.7 的以下推论。

设 $\{z_j\}_1^n$ 为一个随机样本，并令 Y_n 表示满足以下条件的指标 j，$1 \le j \le n$ 的数量：$z_j \in \mathrm{B}_2$，，其中 B_2 是式 (1.16) 中 C_2 的邻域。显然

$$\mathbb{E}_n[Y_n] = \int_{\mathcal{B}_2} K_n(z,z)\,dA(z).$$

现在我们可以陈述以下结果，它改进了定理 1.2 中的收敛速度。

推论 1.8. 当 $n \to \infty$时，收敛关系为 $\mathbb{E}_n[Y_n] = \mu\cdot(1+O(n^{-\beta}))$。

1.4. **Berezin 测度与解析载体**。固定一点 $z \in \mathrm{Ext}C_1$，并考虑 C 上的以下概率测度

$$d\mu_{n,z}(w) = \frac{|K_n(z,w)|^2}{K_n(z,z)}\,dA(w). \tag{1.24}$$

这被称为 Berezin 测度；从概率角度看，它衡量了在z处插入一个点电荷所产生的排斥效应，参见 [9, 第7节6]。

在没有前哨的情况下，Berezin测度的渐近性质（当$n \to \infty$时）已得到充分研究。例如，如果z位于液滴内，那么在温和的假设下，$\mu_{n,z}$弱收敛于狄拉克测度δ_z；而如果z位于外部，那么$\mu_{n,z}$收敛于外域的调和测度ω_z，参见例如 [9, 第 7]节。

我们转而研究当前设定下带有前哨C_2时测度$\mu_{n,z}$的渐近性。下文中，点z固定在$\mathrm{Ext}C_1$, 中，并将$\mu_{n,z}$视为如下泛函

$$\mu_{n,z}(f) := \int_{\mathbb{C}} f \, d\mu_{n,z}.$$

我们用 A(Ext C_1) 表示 $\mathrm{Ext}C_1$ 上可连续延拓至C_1的解析函数代数。

我们有如下定理。

定理 1.9。设$f \in \mathcal{A}(\mathrm{Ext}C_1)$。以某种方式将$f$连续延拓至$\hat{\mathbb{C}}$。那么，对于任意给定的$N > 0$，当$n \to \infty$时，我们有

$$\mu_{n,z}(f) = (b_z^{(1)}(f) + b_z^{(2)}(f)) \cdot (1 + O(n^{-\beta})) + \|f\|_\infty \cdot O(n^{-N})$$

其中$b^{(1)}{}_z$和$b^{(2)}{}_z$是如下泛函

$$b_z^{(k)}(f) := \oint_{C_k} f(q) \frac{|S_{1,2}(z.q)|^2}{S_{1,2}(z,z)} \, |dq|, \qquad (k = 1, 2); \tag{1.25}$$

$\|f\|_\infty$表示扩展函数的上确界范数。

此外，我们有如下再生性质

$$b_z^{(1)}(f) + b_z^{(2)}(f) = f(z). \tag{1.26}$$

最后，若令$r = |\phi_2(z)|$（因此$r > r_1/r_2$），则测度$b^{(2)}{}_z$的总质量为

$$b_z^{(2)}(1) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j} \left(\frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}} \right)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j} \frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}}}.$$

方程（1.26）表明，对于函数$f \in \mathrm{A(Ext}\, C_1)$，泛函$b^{(1)}{}_z + b^{(2)}{}_z$与点赋值$\delta_z$具有相同的外解析承载，即$b^{(1)}{}_z(f) + b^{(2)}{}_z(f) = \delta_z(f)$。

在不含前哨这一研究充分的情形中，以外部点z为基点的 Berezin 测度支撑在C_1上，且由下式给出

$$d\omega_z(q) := \frac{|S_1(z,q)|^2}{S_1(z,z)} \, |dq|, \qquad (q \in C_1),$$

其中$S_1(z,w)$是 Szeg˝o 核（1.7）。此外，ω_z是$\mathrm{Ext}C_1$的调和测度。（参见 [7, 9, 19] 及其中的参考文献。）

总之，三个概率测度δ_z、ω_z、$b^{(1)}{}_z + b^{(2)}{}_z$相对于 A($\mathrm{Ext}C_1$) 都具有相同的载体。

注 1。测度$b^{(2)}{}_z$的总质量$b^{(2)}{}_z(1)$是$r = \phi_2(z)$的增函数；当$r = r_1 r_2$时，它从 0 增加到$r_2^{-1} r_1^{-1} e^{-c} + r_2^{-1}$；关于$r \to +\infty$, 见图3。

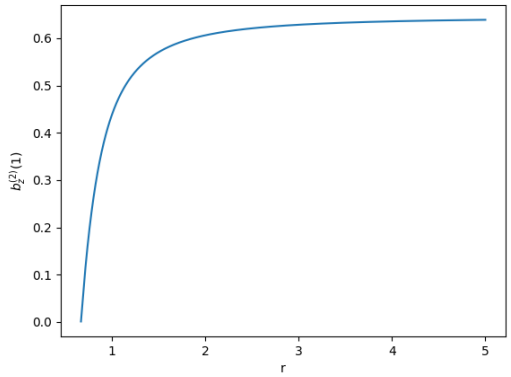

图3. 测度$b^{(2)}{}_z$ 的总质量作为r $=\phi_2(z)$、r $\geq r_2 r_1{}'$ 的函数，其中r $_1 = 1$、$r_2 = 1.5$、c $= 1$。

1.5. **几个具体例子**。 如 [6]，中所述，很容易生成满足上述所有条件的前哨势。例如，下面说明如何生成图1中的系综。出发点是近期工作[21]中研究的一类单点无界求积域。（补集 ˆC\S 在适当的广义意义下是一个求积域，见 [7, 21]及其中的参考文献。）

如 [6, 第1.3节1] 所述，我们可以从任意赫勒-肖势开始，也就是说，从液滴邻域内拉普拉斯算子为常数的势函数开始。我们选取一个形式如下的势函数$Q_1(z)$，其形式曾在 [21,第 2]

$$Q_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{r_1}\Big(|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha \cdot \log(z-2))\Big) & z \in K, \\ +\infty & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.27}$$

其中K 是 C 中一个单连通紧子集，选取它使得液滴S $= S[Q_1]$紧含于K 的内部，同时 $2 \notin K$； α是一个满足 $|\alpha| < 2 + \operatorname{Re}\alpha$ 的复参数。于是液滴S 的归一化面积为$\int sdA$ $= \sqrt{r_{1*}}$. 记$C_1 = \partial S$。

为简单起见，我们取 $-1 < \alpha < 0$。如 [21, 第 2 节1] 所示，归一化共形映射 ϕ_1 : $\operatorname{Ext} C_1 \to \mathrm{D}_*$ 的逆映射为

$$\phi_1^{-1}(w) = r_1 w \frac{w - w_0 + \frac{2}{r_1}\frac{|w_0|^2 - 1}{|w_0|^2}}{w - \bar{w}_0^{-1}}, \qquad (w \in \mathbb{D}_*),$$

其中w_0 是方程的一个实根

$$r_1^2 w_0^4 - 2r_1 w_0^3 - \alpha w_0^2 - 2r_1 w_0 + 4 = 0.$$

当$r_1 > 0$ 低于某个临界值$r_{1*} = r_{1*}(\alpha)$时，液滴的定义良好，且具有光滑边界；此时边缘会形成一个(3,2)型尖点。（与r_{1*} 对应的液滴是最大的，其含义是在局部意义下的 [21]。）

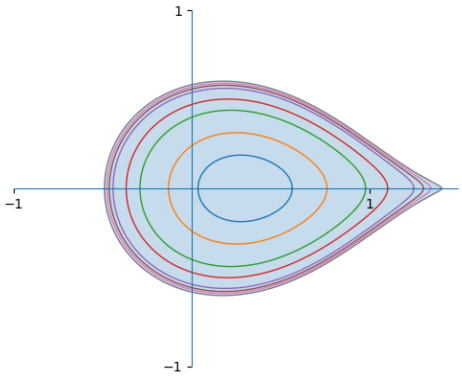

图4. 与势函数 (1.27) 对应的液滴，其中$\alpha = -0.5$，$r_1 \in \{0.225, 0.375, 0.525, 0.6, 0.675, 0.712, 0.731\}$，临界值为$r_{1*} = 0.75$。

现在，任取r_1,r_2，满足 $0 < r_1 < r_{1*}$ 且$r_2 > r_1$,，并令

$$C_2 := \phi_1^{-1}(\frac{r_2}{r_1}\mathbb{T}).$$

现在我们定义一族前哨势，使每个前哨具有C_2。为此，我们采用 [6, 第 1.3 节1]中给出的一般方法。具体而言，固定任意常数$t_0 > 0$，并令

$$Q(z) := \begin{cases} Q_1(z), & z \in \overline{\mathcal{N}}_1, \\ \check{Q}_1(z) + t_0 \dfrac{(|\phi_1(z)|^2 - (r_2/r_1)^2)^2}{2|\phi_1(z)\phi_1'(z)|^2}, & z \in \overline{\mathcal{N}}_2, \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，$\mathbf{N}_1$ 是S的一个小邻域，$\mathbf{N}_2$ 是C_2, 的一个小邻域，且 $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \emptyset$。于是，前哨势的所有条件均得到满足，其中$h_1 \equiv r_1$，且$c = \frac{1}{2}\log t_0 r_1$。

图 2 中的前哨系综以类似的方式生成，但起始势函数为椭圆 Ginibre 势 $Q_1(z) := \frac{1}{r_1}(|z|^2 + \mathrm{Re}(\alpha z^2))$, 其中 α 是一个复参数，满足 $|\alpha| < 1$。

1.6. 评注与相关工作。一维系综中的前哨已得到广泛研究，但其行为往往与本文讨论的前哨大不相同。比较请见 [6, 评注 4]。

对于在液滴补集的无界连通分支中含有圆形前哨的径向对称势函数，给出了自由能的大 [3], n 展开。前哨会影响常数项，且可以用

q-Pochhammer 符号来表示。 [6] 中猜想了对当前这类前哨势的推广。

最近， [25], Kohei Noda 在这一方向上取得了若干新成果。除其他内容外，他研究了这样一类径向对称势：其余切集容纳任意数量的圆形离群点，并推导出这类系综的自由能渐近性。这促使人们引入一种新型的多维海涅分布，在某种意义上，它刻画了不同前哨之间的相互作用。

最后，我们提及几个相关问题；由于篇幅所限，这里不作讨论。

首先，研究对角渐近 $K_n(z,z)$ 是很自然的，其中z 位于液滴外缘C_1 附近。这种情形不同于上文研究的情形，因为体相相互作用会进入渐近图景。事实上，若固定$p \in C_1$ ，并像 (1.23) 中那样以p 为中心进行缩放，则有如下首阶误差函数渐近式

$$K_n(z,z) = n\Delta Q(p)\cdot\frac{\operatorname{erfc} t}{2} + o(n), \qquad (n\to\infty), \tag{1.28}$$

这一结果应与定理 1.7 相比较；在定理 1.7 中，$K_n(z,z)$ 的量级为 $\sqrt{n}$。(1.28) 中的渐近性已在各种各样的二维系综外缘处得到验证，参见近期文献 [16]及其中的参考文献。对于此处的情形，(1.28) 的证明既可以依据下文引理 3.2 和引理 3.3 中的近似，也可以通过调整 [16]中的一般证明方法来完成。（细节从略。）

除了 (1.28) 之外，近来在各种情形下也发现了次主导渐近性 [1, 5, 14] ，这使得如下形式的展开式显得合理（仍考虑 (1.23) 的情形，其中$p \in C_1$）

$$K_n(z,z) = n\Delta Q(p)\frac{\operatorname{erfc} t}{2} + \sqrt{n\Delta Q(p)}\cdot C(p,n;t) + O(1), \qquad (n\to\infty), \tag{1.29}$$

其中$C(p, n;t)$ 随n 振荡$n \to \infty$，但振幅有界。这是一个有趣的问题（本文不予讨论）：确定系数$C(p,n; t)$。

其次，我们回顾一下，文献 [5] 已针对具有环形谱隙的径向对称势，推导出相关核的 Szeg˝o 型渐近性。在这种情况下，长程相关$K_n(p, q)$（其中p、q 是谱隙边缘上的不同点）会随n“振荡”。这些相关性很可能存在普适推广，适用于文献 [6] 中所述的谱隙势。（在此我们指出，对于模型米塔格-莱夫勒系综这一类，在环带谱隙边缘且有硬边约束时，已经证明了一种“平行”但不同类型的 Szeg˝o 型相关性，见文献 [4]。这类液滴并非拉普拉斯增长的后临界态，而是通过施加硬墙形成的。）

1.7. 本文安排。 在第2节中，我们推导加权Szeg˝o核$S_{1,2}(z.w)$的各种表示，并证明引理1.1。在第3节中，我们讨论波函数的各种相关逼近公式，即关于权$e^{-nQ/2}$的加权正交多项式$e_{j,n}(z)$。我们需要两个部分重叠的逼近公式：一个针对“边缘区”，即指标j 满足$n - C\sqrt{n}\log n \le j \le n-1$；另一个针对“分岔区间”，其中$n-\log^2 n \le j \le n-1$。在第4节中，我们将所有这些近似结合起来，并证明定理 1.3。在第5节中，我们证明定理 1.6和定理 1.7。最后，在第6节中，我们证明定理 1.9和推论 1.8。

2. Szeg˝o 核

在本节中，我们证明引理1.1中Szeg˝o核$S_{1,2}(z,w)$的公式，并证明另外几个将派上用场的表示。

为此，我们注意到，对于 $k = 1、2$，函数

$$f_{j,k}(z) := \frac{\sqrt{r_k\phi_k'(z)}}{(r_k\phi_k(z))^j}e^{\frac{1}{2}h_k(z)}, \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

构成希尔伯特空间 $H_{1,2}$ 的正交基（见（1.8））， 且

$$\oint_{C_1} |f_{j,1}(z)|^2\frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}} = 2\pi r_1^{1-2j}, \qquad \oint_{C_1} |f_{j,2}(z)|^2\frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}} = e^{-c}\cdot 2\pi r_1^{2j-1}$$

and

$$\oint_{C_2} |f_{j,1}(z)|^2\frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}} = e^{c}\cdot 2\pi r_2^{1-2j}, \qquad \oint_{C_2} |f_{j,2}(z)|^2\frac{|dz|}{\sqrt{\Delta Q(z)}} = 2\pi r_2^{1-2j}.$$

现在定义

$$k_{j,1} = \|f_{j,1}\|_{1,2}^2 = 2\pi\cdot(r_1^{1-2j} + e^c r_2^{1-2j}), \qquad k_{j,2} = \|f_{j,2}\|_{1,2}^2 = 2\pi\cdot(r_1^{2j-1}e^{-c} + r_2^{1-2j}).$$

Then

$$\begin{aligned} S_{1,2}(z,w) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_{j,1}(z)\overline{f_{j,1}(w)}}{k_{j,1}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^j}\frac{r_1^{1-2j}}{r_1^{1-2j}+e^c r_2^{1-2j}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

这就证明了引理1.1。

公式（2.1）适用于z 和w 都靠近曲线C_1, 的情形，因为 $\phi_1(z)\phi_1(w)$几乎是模为一的。

对于一个或两个点 z,w 靠近 C_2, 的应用，我们注意到以下替代表示，它们由（2.1）以及关系式 $\phi_2 = r_2^{1}\phi_{1r}$ 得出

引理 2.1。 核 $S_{1,2}(z,w)$ 由下式给出

(2.2)

$$S_{1,2}(z,w) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\phi_2'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_2'(w)}}e^{\frac{1}{2}(h_2(z)+\overline{h_2(w)})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\phi_2(z)\overline{\phi_2(w)})^j}\frac{r_2^{1-2j}}{e^{-c}r_1^{1-2j}+r_2^{1-2j}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_2'(w)}}e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_2(w)})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_2(w)})^j}\frac{(r_1r_2)^{\frac{1}{2}-j}}{r_1^{1-2j}e^{-c/2}+e^{c/2}r_2^{1-2j}}. \tag{2.3}$$

3. 波函数及其近似

回忆表示式 $K_n(z,w) = \sum_0^{n-1} e_{j,n}(z)e_{j,n}(w)$，波函数$\overline{e_{j,n}}(z)$由（1.6）给出。

我们尤其关注当z 和w 都属于 $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1$时的渐近性。在这种情况下，(1.5)中满足$j \le n - C\sqrt{n\log n}$ 的项贡献可以忽略

不计，且求和可以近似为仅对满足j：s，且$j = n + O(\sqrt{n}\log n)$的项求和。

引理 3.1. 若 $j \le n - C\sqrt{n\log n}$，其中常数 C 足够大，则对每个 $N > 0$，都存在一个常数 K_N，使得

$$|e_{j,n}(z)| \le K_N n^{-N}, \qquad (z \in \mathcal{B}_1 \cup \operatorname{Ext} C_1).$$

证明是标准的，例如参见 [6,引理 3.6]。

当点 z、$w \in \mathrm{B}_1 \cup \operatorname{Ext} C_1$，时，和式 (1.5) 的主要贡献来自满足 j 且 $n - M\sqrt{n\log n} \le j \le n - 1$ 的指标。这些指标构成边缘区。

正如 [6]，中所观察到的，在当前情形下，指标 j 满足 $n - \log^2 n \le j \le n - 1$ 时，还普遍存在一个分岔区间 。

为涵盖所有可能的情形，我们现在给出两个部分重叠的近似公式，用于波函数 $e_{j,\,n}(z)$，并将在下文中结合使用。

我们首先回顾一种更为人熟知的近似公式，它可追溯至 [22]，用于连通重合集。

对于所有满足j且$n - M\sqrt{n\log n} \le j \le n-1$的情形，令 $\tau = j/n$，并考察势函数$Q_\tau = Q/\tau$。令$S_\tau = S[Q/\tau]$为 τ-液滴。这些液滴构成一个递增链：$\tau < \tau'$ 蕴含$S_\tau \subset S_{\tau'}$。

此外（至少当n充分大时），∂S_τ是一条实解析若尔当曲线，参见例如[7, 21]及其中的参考文献。令$U_\tau := \hat{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$为外域，并且

$$\phi_\tau : U_\tau \to \mathbb{D}_*$$

外部共形映射满足 $\phi_\tau(\infty) = \infty$且 $\phi_\tau'(\infty) > 0$。

我们还需要U_τ 上的两个解析函数$q_\tau(z)$和$h_\tau(z)$，它们满足以下边值问题：

$$\operatorname{Re} q_\tau = Q, \qquad \operatorname{Re} h_\tau = \frac{1}{2}\log \Delta Q, \qquad \text{along} \quad \partial S_\tau, \tag{3.1}$$

通过映射 $\infty \mapsto \infty$ 进行归一化，并且在 ∞处取实值。

为陈述下一个结果，我们还引入“障碍函数”$\check{Q}_\tau(z)$。按定义，$\check{Q}_\tau(z)$是所有$s(z)$的逐点上确界，其中$s(w)$是$\mathbb{C}$上的次调和函数，且当$w \to \infty$时，$s(w) \le 2\tau\log|w| + O(1)$。重合集$S_\tau^* := \{Q_\tau = \check{Q}_\tau$ 满足：当 $\tau < 1$ 足够接近1时，$S_\tau^* = S_\tau$；此外，当$z \to \infty$时，$\check{Q}_\tau(z) = 2\tau\log|z| + O(1)$。

我们现在如下定义一个逼近（或“加权准多项式”）$E_{j,n}(z)$：

$$E_{j,n}(z) := \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\phi_\tau'(z)} \cdot \phi_\tau(z)^j \cdot e^{-\frac{n}{2}(Q-q_\tau)(z)} \cdot e^{\frac{1}{2}h_\tau(z)}. \tag{3.2}$$

只要j 不进入分岔区间，外部逼近“$e_{j,n} \approx E_{j,n}$”便效果良好。

引理 3.2. 设j满足$n - C\sqrt{n\log n} \le j \le n - \sqrt{\log^2 n}$。则对所有$z \in \mathcal{B}_1 \cup \operatorname{Ext} C_1$，我们有估计

$$|e_{j,n}(z) - E_{j,n}(z)| \le K\sqrt{\log n}\cdot e^{-\frac{n}{2}(Q-\check{Q}_\tau)(z)}, \tag{3.3}$$

其中，K 是一个足够大的常数（仅取决于 Q）。

证明。 当 $j \le n - \log^2 n$ 时，根据 [6, 引理 3，7],前哨的影响可以忽略。也就是说，若 E 是液滴 S 的任意小邻域，则对任意给定的 $N > 0$，$e_{j,n}(z)$ 以及 $E_{j,n}(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus E$ 上均一致为 $O(n^{-N})$。应用 [22, 7]标准逼近方案（使用“Hörmander估计”）时，很容易看出，利用 $E_{j,n}(z)$ 进行逼近几乎无需作任何改动。细节从略。
[1] □

对于分岔区间内的j，我们在第 [6,3 节4]推导出波函数$e_{j,n}(z)$的一个外部逼近公式。现在回顾这个公式。

回顾一下， $\phi_k : \mathrm{Ext} C_k \to \mathbb{D}_*$、$k = 1$、2 是外部共形映射。

对于接近n 的j，我们考虑 $B_1 \cup \mathrm{Ext} C_1$中的全纯函数

$$\Phi_{j,n}(z) = \frac{r_1^{j+1/2}}{e^{\frac{n}{2}q_1(\infty)+\frac{1}{2}h_1(\infty)}} \sqrt{\phi_1'(z)}\phi_1(z)^j e^{\frac{n}{2}q_1(z)} e^{\frac{1}{2}h_1(z)}.$$

这里，q_1,h_1 是 Ext C_1 中的全纯函数，且

$$\mathrm{Re}\, q_1 = Q, \qquad \mathrm{Re}\, h_1 = \frac{1}{2}\log \Delta Q \qquad \text{along} \quad C_1,$$

由条件确定：q_1 和h_1 在无穷远处取实值。

如 [6, 第 2]，节所示，对于$z \in \mathrm{Ext} C_2$

$$\Phi_{j,n}(z) = \frac{r_2^{j+1/2}}{e^{\frac{1}{2}nq_2(\infty)+\frac{1}{2}h_2(\infty)}} \sqrt{\phi_2'(z)}\phi_2(z)^j e^{\frac{1}{2}nq_2(z)} e^{\frac{1}{2}h_2(z)}.$$

这里，q_2,h_2 是在 Ext C_2 上满足边界问题的全纯函数

$$\mathrm{Re}\, q_2 = Q, \qquad \mathrm{Re}\, h_2 = \frac{1}{2}\log \Delta Q, \qquad \text{along} \quad C_2,$$

且在无穷远处取实值。

It is easy to see (cf. [6, Section 1.3]) that

$$h_2 = h_1 + c \tag{3.4}$$

其中c 是 (1.4) 中的常数。

我们还定义

$$c_{j,n} := \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(r_1^{2j+1} e^{-nq_1(\infty)-h_1(\infty)} + r_2^{2j+1} e^{-nq_2(\infty)-h_2(\infty)}\right)$$

and

$$F_{j,n}(z) := c_{j,n}^{-\frac{1}{2}} \Phi_{j,n}(z) e^{-\frac{1}{2}nQ(z)}. \tag{3.5}$$

引理 3.3. 假设 n − 对数^2 $n \le j \le n - 1$。那么对于所有 $z \in \mathcal{B}_1 \cup \mathrm{Ext} C_1$，有如下估计

$$|e_{j,n}(z) - F_{j,n}(z)| \le K\sqrt{\log n} \cdot e^{-\frac{1}{2}n(Q-\check{Q})(z)},$$

其中，K 是一个足够大的常数，仅取决于 Q。

证明。 这正是 [6, 定理 3.5]。 □

[1]不难看出，该近似过程同样适用于 [22] 中的高阶近似项。不过，这里我们只关注由 $E_{j,n}(z)$ 给出的一阶近似。

4. 相关核的近似

现在我们证明定理 1.3。这个思路受到论文 [3] 的启发。

对于z、w $\in \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1$，我们用以下两项之和近似$K_n(z,w)\Sigma_1^{(n)}(z,w) + \Sigma_{1\,2}^{(n)}$，$(z,w)$，其中

$$\Sigma_1^{(n)}(z,w) := \sum_{j=n-C\sqrt{n\log n}}^{n-1} E_{j,n}(z)\overline{E_{j,n}(w)} \tag{4.1}$$

and

$$\Sigma_{1,2}^{(n)}(z,w) := \sum_{j=n-\log^2 n}^{n-1} (F_{j,n}(z)\overline{F_{j,n}(w)} - E_{j,n}(z)\overline{E_{j,n}(w)}). \tag{4.2}$$

第一项$\Sigma_1^{(n)}$无需新的分析；利用定理 1. [7,的证明方法即可轻松处理3]。

引理 4.1. 设β为任意一个满足$0 < \beta < \frac{1}{4}$的数。- 那么对于所有满足$|\phi_1(z)\phi_1(w) - 1| \geq \eta$的$\overline{z,w}$ $\in \mathcal{B}_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1$，都有如下估计

$$\Sigma_1^{(n)}(z,w) = \sqrt{2\pi n}\,(u(z)\overline{u(w)})^n e^{-\frac{n}{2}(Q(z)+Q(w))} \cdot S_1(z,w) \cdot (1 + O(n^{-\beta}))$$

当 $n \to \infty$时，其中 $S_1(z,w)$ 是 $Szeg\ddot{o}$ 核(1.7)。

证明。 利用分部求和， [7, 节 4], 中的证明在本情形下无需修改。 □

我们转而考察项 $\Sigma_{1\,2}^{(n)}$，(z,w)。下面给出一个引理。

引理 4.2。 设 z， w $\in \mathcal{B}_1 \cup \mathrm{Ext}\, C_1$。那么当 $n \to \infty$ 时，

$$\Sigma_{1,2}^{(n)}(z,w) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sqrt{\phi_1'(z)}\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}(u(z)\overline{u(w)})^n e^{-\frac{n}{2}(Q(z)+Q(w))} e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}$$
$$\times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^j} \frac{e^{-c} r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} + e^{-c} r_2^{1-2j}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log^4 n}{n}\right)\right).$$

证明。 由 [6, 引理 2.1]可得

$$e^{q_1(\infty)-q_2(\infty)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

同样利用$h_2(\infty) = h_1(\infty) + c$，我们现在写出

$$\Sigma_{1,2}^{(n)}(z,w) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sqrt{\phi_1'(z)}\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}} \cdot (\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^n \cdot e^{\frac{n}{2}(q_1(z)-Q(z))} e^{\frac{n}{2}(\overline{q_1(w)}-Q(w))} e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}$$
$$\times \sum_{j=n-\log^2 n}^{n-1} (\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^{j-n} \cdot \Big[\frac{r_1^{2j+1}}{r_1^{2j+1} + r_2^{2j+1}(\frac{r_1}{r_2})^{2n} e^{-c}} \tag{4.3}$$
$$- \frac{\sqrt{\phi_\tau'(z)}\overline{\sqrt{\phi_\tau'(w)}}}{\sqrt{\phi_1'(z)}\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}} \Big(\frac{\phi_\tau(z)\overline{\phi_\tau(w)}}{\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)}} \Big)^j \frac{e^{\frac{n}{2}(q_\tau(z)+\overline{q_\tau(w)})}}{e^{\frac{n}{2}(q_1(z)+\overline{q_1(w)})}} \frac{e^{\frac{1}{2}(h_\tau(z)+\overline{h_\tau(w)})}}{e^{\frac{1}{2}(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}} \Big].$$

接下来我们将证明

$$\frac{\sqrt{\phi_\tau'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_\tau'(w)}}}{\sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}}\left(\frac{\phi_\tau(z)\overline{\phi_\tau(w)}}{\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)}}\right)^j \frac{e^{\frac{n}{2}(q_\tau(z)+\overline{q_\tau(w)})}}{e^{\frac{n}{2}(q_1(z)+\overline{q_1(w)})}}\,\frac{e^{\frac12(h_\tau(z)+\overline{h_\tau(w)})}}{e^{\frac12(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}} = 1+O\Big(\frac{\log^4 n}{n}\Big). \tag{4.4}$$

这有点技术性，但幸运的是，主要估计已经在 [7]中完成。

事实上，为了证明 (4.4)，我们将 $V_\tau(z)$ 记为 $\check{}Q_\tau(z)$ 从 $\mathbb{C}\backslash S_\tau$ 向内穿过 ∂S_τ 的调和延拓。众所周知且易于验证，

$$|\phi_\tau(z)|^j e^{\frac{2}{n}\operatorname{Re} q_\tau(z)} = e^{\frac{n}{2}V_\tau(z)}.$$

按照 [7, 引理 4.4] 的证明进行，我们定义

$$P_\tau(z) := \tau\log\left[\frac{\phi_\tau(z)}{\phi_1(z)}e^{\frac{1}{2\tau}(q_\tau-q_1)(z)}\right],$$

取对数的分支，使得$P_\tau(\infty)$为实数。注意 $P_1\equiv 0$。

[7, 引理 4.4] 的证明表明，存在一个严格正的常数 a 使得

$$\operatorname{Re}P_\tau(z)\le -a(1-\tau)^2$$

由此可得

$$\left|\left(\frac{\phi_\tau(z)\overline{\phi_\tau(w)}}{\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)}}\right)^j \frac{e^{\frac{n}{2}(q_\tau(z)+\overline{q_\tau(w)})}}{e^{\frac{n}{2}(q_1(z)+\overline{q_1(w)})}}\right| = e^{\frac{n}{2}(\operatorname{Re}P_\tau(z)+\operatorname{Re}P_\tau(w))}\le e^{-a\frac{(n-j)^2}{n}}.$$

对于 $1\le n-j\le \log^2 n$，右端为 $1+\mathrm{O}(n^{-1}\log^4 n)$。

将此渐近式代入 (4.3) 并整理后，我们得到

$$\Sigma_{1,2}^{(n)}(z,w) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,\sqrt{\phi_1'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_1'(w)}}\,(u(z)\overline{u(w)})^n e^{-\frac{n}{2}(Q(z)+Q(w))}e^{\frac12(h_1(z)+\overline{h_1(w)})}$$
$$\times\sum_{j=1}^{\log^2 n}\frac{1}{(\phi_1(z)\overline{\phi_1(w)})^j}\cdot\left[\frac{e^{-c}r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}+r^{-c}r_2^{1-2j}}+O(n^{-1}\log^4 n)\right].$$

该引理现在可由 $S_{1,2}(z,w)$ 的表示式 (1.10) 得出。 □

最后两个引理完成了我们对定理 1.3 的证明。□

5. $\mathrm{B}_1\cup\mathrm{B}_2$ 中点之间的相关性

现在我们证明定理 1.6 和定理 1.7。我们先介绍以下引理。

引理 5.1. 令 $V(z)$ 为$\check{}Q|_{\mathrm{Ext}\,C_1}$ 穿过 C_1向内的调和延拓。对 $p\in C_1\cup C_2$，令

$$z = p+\frac{s}{\sqrt{2n\Delta Q(p)}}\nu(p) \tag{5.1}$$

其中 $\nu(p)$ 为外单位法向。于是我们有如下泰勒展开：

$$(Q-V)(z) = s^2+O\Big(|s|^3/\sqrt{n}\Big)$$

其中隐含常数对所有 $|s|\le M\sqrt{\log n}$ 都是统一的。

证明。令 ∂_{n} 表示沿C_k的外法线方向求导，其中$p \in C_k$。由于$Q - V$在C_k附近实解析，泰勒公式给出，当$\mathrm{l} \to 0$时，$\mathrm{l} \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}(Q-V)(p+\ell v(p)) &= \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{n}}^2(Q-V)(p)\cdot\ell^2 + O(\ell^3)\\ &= 2\Delta(Q-V)(p)\cdot\ell^2 + O(\ell^3)\\ &= 2\Delta Q(p)\cdot\ell^2 + O(\ell^3),\end{aligned}$$

这里用到了V是调和函数。 □

接下来假设p和q都属于$C_1 \cup C_2$，且$|\phi_1(p)\phi_1(q) - 1| \geq \eta > 0$。另外，固定$s$、$t$，使得$|s|, |t| \leq M\sqrt{\log n}$，并令$z$和$w$如 (1.21) 中所定义。利用引理 5.1，可得

$$(u(z)\overline{u(w)})^n e^{-\frac{n}{2}(Q(z)+Q(w))} = e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}\cdot\exp(O((\log n)^{\frac{3}{2}}n^{-\frac{1}{2}})).$$

将此代入定理 1.3，即完成定理 1.6 的证明。接下来利用定理 1.6 和引理 2.1，得出对于z如 (5.1) 中所定义，且$p \in C_2$，

$$\begin{aligned}K_n(z,z) &= \sqrt{2\pi n}\,e^{-s^2}S_{1,2}(p,p)\cdot(1+O(n^{-\beta}))\\ &= \sqrt{2\pi n}\,e^{-s^2}|\phi_2'(p)|\sqrt{\Delta Q(p)}\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}e^{-c}+r_2^{1-2j}}\cdot(1+O(n^{-\beta})).\end{aligned}$$

由 (1.15) 可得

$$\sqrt{\Delta Q(p)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}e^{-c}+r_2^{1-2j}} = \mu,$$

至此完成定理 1.7 的证明。证毕。

6. Berezin measures and the expectation formula

本节证明定理 1.9 和推论 1.8。我们先证明定理 1.9。

回顾一下，以给定点$z \in \mathrm{Ext}C_1$为基点的 Berezin 测度是概率测度

$$d\mu_{n,z}(w) = \frac{|K_n(z,w)|^2}{K_n(z,z)}\,dA(w).$$

令B_1和B_2分别为围绕C_1和C_2的带状区域，见式 (1.16)。我们从以下引理开始，它说明$\mu_{n,\,z}$的支撑集基本上位于这些带状区域的并集上。

引理 6.1。对于固定的$z \in \mathrm{Ext}C_1$以及任意$N > 0$，我们有如下收敛

$$\mu_{n,z}(\mathbb{C}\setminus(\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2)) = O(n^{-N}), \qquad (n\to\infty). \tag{6.1}$$

证明。根据推论 1.5，我们推得（取足够大的常数M）$\mu_{n,z}((\mathrm{Ext}\,C_1)\setminus(\mathrm{B}_1\cup\mathrm{B}_2)) = \mathrm{O}(n^{-N})$。接下来只需考虑区域$I_n = (\mathrm{Int}C_1)\setminus\mathrm{B}_1$的测度。为此，调用 [8,定理 8.1]，中的非对角估计很方便，该估计表明，通过选取足够大的M，我们可以确保

$$|K_n(z,w)|^2 \leq C_N n^{-N}e^{-n(Q-\check{Q})(z)}, \qquad (w\in I_N). \tag{6.2}$$

另一方面，根据定理 1.3，我们有

$$K_n(z,z) = \sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n(Q-\check{Q})(z)}\cdot S_{1,2}(z,z)\cdot(1+O(n^{-\beta})). \tag{6.3}$$

结合 (6.2) 和 (6.3)，可得 $\mu_{n,z}(I_n) = \mathrm{O}(n^{\frac{1}{2}-N})$。 □

现在将 B_2 参数化为 (q,t)，

$$w = w(q,t) := q + \frac{t}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\cdot \nu(q), \qquad (q\in\partial S,\ |t|\le M\sqrt{\log n}). \tag{6.4}$$

计算雅可比行列式（见 [1,引理 3.1]）可得

$$dA(w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\cdot\Big(1+\frac{t\kappa(q)}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\Big)dt\,ds(q), \qquad (w=w(q,t)),$$

其中 $\kappa(q) = \partial_{\mathrm{s}}\arg\nu(q)$ 是 ∂S 的有向曲率。

对于 $w\in\mathrm{B}_1$，也有类似关系。

设 $f(w)$ 为 $H^{1,2}$ 中的任意函数，它连续延拓至边界 ∂U。以某种方式将 f 延拓为 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的连续函数。

利用定理 1.6 和引理 6.1，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} f\,d\mu_{n,z} &= \sum_{k=1}^{2}\int_{\mathcal{B}_k} f\,d\mu_{n,z} + O(n^{-N})\|f\|_\infty \\
&= \sum_{k=1}^{2}\sqrt{2\pi n}\frac{1}{\pi}\int_{-M\sqrt{\log n}}^{M\sqrt{\log n}} f(w)\,e^{-t^2}\,dt\cdot(1+O(n^{-\beta})) \\
&\quad\times\oint_{C_k}\sum_{k=1,2}\sqrt{\Delta Q(q)}\frac{|S_{1,2}(z,q)|^2}{S_{1,2}(z,z)}\frac{1}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\cdot\Big(1+\frac{t\kappa(q)}{\sqrt{2n\Delta Q(q)}}\Big)ds(q) \\
&\qquad + \|f\|_\infty\cdot O(n^{-N}) \\
&= \sum_{k=1,2}\oint_{C_k} f(q)\frac{|S_{1,2}(z,q)|^2}{S_{1,2}(z,z)}\,ds(q) + O(n^{-N})\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

记

$$b_z^{(k)}(f) := \oint_{C_k} f(q)\frac{|S_{1,2}(z,q)|^2}{S_{1,2}(z,z)}\,ds(q), \qquad (k=1,2).$$

由于 $q\mapsto f(q)S_{1,2}(z,q)$ 属于 $H^{1,2}$，$S_{1,2}$ 的再生性质给出

$$b_z^{(1)}(f) + b_z^{(2)}(f) = f(z).$$

现固定 $z\in U$，并记 $r = |\phi_2(z)|$，从而 $r > r_1/r_2$。不失一般性，可设 $\phi_2(z)$ 为实数。于是

$$S_{1,2}(z,w) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\phi_2'(z)}\,\overline{\sqrt{\phi_2'(w)}}\,e^{\frac{1}{2}(h_2(z)+\overline{h_2(w)})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\overline{\phi_2(w)})^j}\frac{r^{-j}r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}e^{-c}+r_2^{1-2j}}$$

由此，令 $\phi_2(q) = e^{i\theta}$，$ds(q) = |\phi_2'(q)|^{-1}d\theta$，

$$\oint_{C_2}|S_{1,2}(z,q)|^2\,ds(q) = \frac{|\phi_2'(z)|}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^{-j}r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j}e^{-c}+r_2^{1-2j}}e^{ij\theta}\Big|^2\,d\theta$$

$$= \frac{|\phi_2'(z)|}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{r^{-j} r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}} \Big)^2,$$

其中最后一个等式用到了帕塞瓦尔定理。

由于

$$S_{1,2}(z,z) = \frac{|\phi_2'(z)|}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j} \frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}}$$

我们得到如下结果：

$$b_z^{(2)}(1) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j} \Big(\frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}} \Big)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j} \frac{r_2^{1-2j}}{r_1^{1-2j} e^{-c} + r_2^{1-2j}}}.$$

这就完成了定理 1.9 的证明。证毕。

最后，我们证明推论 1.8。利用定理 1.7 和变量替换 (6.4)，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_2} K_n(z,z)\, dA(z) &= \frac{1}{\pi} \oint_{C_2} \sqrt{\frac{n\Delta Q(p)}{2\pi}} \cdot \mu \cdot |\phi_2'(p)| \frac{|dp|}{\sqrt{2n\Delta Q(p)}} \\ &\qquad \times \int_{-M\sqrt{\log n}}^{M\sqrt{\log n}} e^{-t^2}\, dt \cdot (1 + O(n^{-\beta})) \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |dz| \cdot (1 + O(n^{-\beta})) = \mu \cdot (1 + O(n^{-\beta})). \end{aligned}$$

证明完毕。证毕。

致谢。作者感谢 Joakim Cronvall 与他们进行讨论，并提供了宝贵的帮助。

参考文献

[1] Ameur, Y., 边缘密度公式 √二维库仑系统的 n 阶修正, arxiv: 2510.16945.[2] Ameur, Y., 外场中平面库仑气体的局部化定理, 《电子概率学杂志》**26** (2021), 第 46 号文章。[3] Ameur, Y., Charlier, C., Cronvall, J., 具有谱隙的随机正规矩阵模型中的自由能与涨落, Constr. Approx. (2025), https://doi.org/10.1007/s00365-025-09720-9. [4] Ameur, Y., Charlier, C., Cronvall, J., 随机正规矩阵：硬墙附近的特征值关联, J. Stat. Phys. **98**, 98, (2024). [5] Ameur, Y., Charlier, C., Cronvall, J., 二维库仑气体：穿越谱隙的涨落, Arch Rational Mech Anal **249**, 63 (2025). https://doi.org/10.1007/s00205-025-02133-9. [6] Ameur, Y., Cronvall, J., 关于库仑系统的涨落与海涅分布的普适性, J. Funct. Anal. **290** (2026), 第 6 期，论文编号 111301。[7] Ameur, Y., Cronvall, J., *Szeg″*全平面加权多项式空间中再生核的类型渐近性, Commun. Math. Phys. **398** (2023), 1291-1348. [8] Ameur, Y., Hedenmalm, H., Makarov, N., 多项式 *Bergman* 空间中的 *Berezin* 变换, Comm. Pure. Appl. Math. **63** (2010), 1533–1584. [9] Ameur, Y., Hedenmalm, H., Makarov, N., 随机正规矩阵特征值的涨落, Duke Math. J. **159** (2011), 31–81. [10] Aronszajn, N., 再生核理论, Trans. Am. Math. Soc. **68**, 337-404 (1950) [11] Bell, S.R., 柯西变换、势理论与共形映射, Chapman & Hall 2016.

[12] Bertola, M., Lee, S.-Y., 随机矩阵理论中谱离群点的首次出现, Constr. Approx. **30** (2009), 225-263. [13] Byun, S.-S., Forrester, P.J., *Ginibre*系综研究进展，KIAS Springer数学丛书**3** (2025). [14] Charlier, C., 二维库仑气体的最小间隙, arXiv:2507.23502. [15] Claeys, T., 酉随机矩阵系综中的割线诞生, Int. Math. Res. Not. IMRN **2008** (2008), 第 6 期，文章编号 rnm166，共 40 页。[16] Cronvall, J, Wennman, A., 随机正规矩阵软边缘与硬边缘普适性的直接方法, arXiv: 2511.18628[17] Forrester, P.J., 复随机矩阵的涨落公式, J. Phys. A: Math. Gen. 32, L159 (1999). [18] Forrester, P.J., Jancovici, B., 四极场中的二维单组分等离子体, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 5 (1996) [19] Garnett, J.B., Marshall, D.E., 调和测度, Cambridge 2005. [20] Gasper, G., Rahman, M., 基本超几何级数, Cambridge 1990. [21] Graven, A.J., Makarov, N.G., 求积域与 *Faber*变换, arXiv: 2509.03777. [22] Hedenmalm, H., Wennman, A., 随机正规矩阵模型中的平面正交多项式与边界普适性. Acta Math. **227** (2021), 309-406. [23] Mineev-Weinstein, M., Putinar, M., Teodorescu, R., 二维随机矩阵、拉普拉斯增长与算子理论, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 263001. [24] Mo, M.Y., 随机矩阵特征值在“割线诞生”转变附近双重标度极限的黎曼–希尔伯特方法, Int. Math. Res. Not. IMRN **2008** (2008), 第 13 期，文章编号 rnn042，共 51 页。[25] Noda, K., 具有多个前哨的二维库仑气体, arXiv: 2602.22184. [26] Saff, E. B., Totik, V., 带外场的对数势, Springer 1997.

Yacin Ameur，隆德大学数学系，瑞典隆德 22100电子邮箱：Yacin.Ameur@math.lu.se

Ena Jahic，隆德大学数学系，瑞典隆德 22100电子邮箱：ena.jahic@math.lth.se