一种用于铁路车辆–桥梁相互作用并结合非线性轮轨接触建模的通用且稳健的三维有限元动力学框架

Pablo Antolin[a,*], Khanh Nguyen[b], Jos´e M. Goicolea[c]

[a]*Institute of Mathematics,École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland*
[b]*ETS de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, Spain*[c]*ETS de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, Spain*

arXiv:2603.06196v1 [math.NA] 6 Mar 2026

摘要

耦合铁路车辆–桥梁动力学三维有限元模型的一项关键挑战，是严格定义运动学约束，并开发高效、稳健的求解方法。本文提出了一种新方法，可通过针对轮轨接触行为设计的约束方程，在通用有限元软件中实现；这对于分析车辆–桥梁横向相互作用至关重要。该方法采用绝对坐标描述界定轨道位置与方向的节点运动，并适用于每个轮对，无需假设位移或转动为无穷小。该通用公式可对强风或地震引发的大幅横向运动等极端情形进行逼真的仿真。本文首先通过已发表的结果验证所提出的轮轨接触模型，并通过一个三维数值算例展示该方法的性能与能力。

1. 引言

移动列车与铁路桥梁之间的动力相互作用（车桥相互作用，VBI）是现代铁路工程中的关键问题，尤其关系到各种运营和环境条件下的结构安全与完整性、运行安全以及乘客舒适度。近几十年来，这一领域受到广泛关注，众多分析、数值和试验研究致力于揭示列车通过桥梁时产生的复杂动力效应。客运列车速度不断提高、桥梁跨度不断增大，这进一步凸显了开展精准车桥相互作用分析的必要性。这不仅关乎创新铁路桥梁设计，也有助于保障列车运营并提升乘坐舒适性。因此，开发精确且计算稳健的车桥相互作用模型，仍是结构工程师和机械工程师面临的一项重大挑战。近期的综述，例如 [1] 和 [2], 的综述，继续展现了该领域不断演进的挑战与进展。

*通讯作者。*Email addresses:* pablo.antolin@epfl.ch （Pablo Antolin）， khanhnguyen.gia@upm.es （Khanh Nguyen），jose.goicolea@upm.es（Jos´e M. Goicolea）

车桥相互作用模型的复杂程度因研究目标而异，研究范围既可以仅关注垂向动力学，也可以涵盖耦合横扭响应。车辆的表示方式多种多样，从移动荷载、移动质量模型或簧上质量模型等简化模型 [3, 4], ，到复杂的多体系统模型（MBS） [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] ，后者能够更真实地将车体、转向架和轮对等列车部件表示为具有详细惯性特性的刚体。虽然许多传统的多体系统车辆模型假定系统呈线性行为，且仅考虑小位移和小转动，但模拟极端事件和复杂非线性现象的需求，要求采用能够处理大运动和几何非线性的模型形式。

桥梁结构通常采用有限元法（FEM）进行离散化，该方法能够对其动力行为进行细致且灵活的建模。文献中介绍了多种有限元模型类型，每种类型都针对不同的应用和复杂程度进行设计。由于简化模型（如梁和桁架）简单可靠，常用于初步分析，相关研究如 [4, 5, 18, 9, 10, 12, 19, 20] 所示。对于更详细的结构分析，则使用壳单元 [21, 22] 来捕捉结构表面层面的行为，而实体单元 [23] 则能全面呈现结构内部的三维应力状态。此外，有时也会采用梁-壳或梁-实体构型等混合模型 [24], ，以平衡计算效率与建模精度。这些方法具有灵活性，使工程师能够根据分析的具体需求选择适当的细节层次。然而，详细模型的开发成本较高，也更容易出错，因此谨慎选择合适的模型至关重要。

车桥相互作用分析的核心在于对相互作用进行建模，主要涉及轮轨界面以及轨桥连接（见图 1）。轮轨相互作用对于涉及横向动力学的研究尤为关键，例如脱轨风险、蛇行运动及其他动力学现象。现有文献将轮轨相互作用模型分类如下。

- 直接且简单的模型假定车辆轮对沿完全导向路径运行，即车轮与钢轨之间的接触点位置固定且具有相同的速度。正如 [6, 18, 21, 25], 中所述，这类模型相对简单。此外，还可以通过规定轮对的运动 [6, 7, 18]来引入蛇行运动这一关键的横向动力学行为。

- 线性模型纳入轮对与轨道之间的相对运动，并假定车轮和钢轨轮廓具有恒定锥度。接触力学经过简化，使这些模型对于许多应用而言具有较高的计算效率 [4, 7, 26], 然而，这种方法仅限于正常运行条件下的分析。

- 非线性 近似模型：这类模型更为先进，能够详细表征车轮、钢 ail,

轨及其相互作用。 [5, 9, 10, 11, 27, 28, 29, 30],提出的精细技术会考虑车轮与钢轨表面的实际几何形状。这些模型能够精确定位接触点，无论是在线还是离线定位，从而提高动力学分析的准确性。

在第三种方法中，准确预测接触点的位置是建立任何轮轨接触问题形式的关键。Chen 和 Zhai [31] 提出了一种所谓的轮轨空间动力耦合模型，该模型通过实时计算左右轮轨之间的最小垂向距离，仅确定每对车轮与钢轨上的一个接触点。Pombo 等人 [32] 将车轮与钢轨表面视为扫掠曲面，即将平面曲线沿空间曲线拖曳而成的曲面；因此，他们使用车轮和钢轨的二维轮廓来确定接触点的位置。借助优化搜索技术，他们能够定位两个可能的接触点：一个位于车轮踏面，另一个位于车轮轮缘。不过，这种方法 [32] 要求车轮和钢轨表面为凸面，而其实际轮廓并非总是如此。 [28], 也采用了类似技术，但每对车轮与钢轨仅考虑一个接触点。Montenegro 等人 [30] 对先前的技术进行了改进，简化了接触点的检测，尤其是在踏面—轮缘过渡区的凹陷区域中。这项改进能够在各种运行条件下实现更精确的轮轨相互作用仿真。不过，轮轨接触模型仍局限于二维平面，因此无法识别处于不同纵向位置的接触点。

轨道-桥梁相互作用对整体系统动力学也起着关键作用。桥梁的振动和变形会通过轨道-桥梁界面影响轨道结构，从而改变轮轨接触几何及相应的接触力。轨道结构起到低通滤波器的作用，即吸收轮轨接触产生的高频能量。因此，与轮轨接触载荷直接作用于桥梁的模型相比，包含轨道结构的模型通常预测桥面在高频范围（>20 Hz）内的加速度幅值较低[1]。轨道-桥梁相互作用通常采用有限元法（FEM）建模，以表示轨道和桥梁的所有组成部分，并建立它们之间的运动学和动力学关系，从而进行全面分析 [33, 12, 27]。这种精细的建模方法有助于深入理解复杂的车桥动力学，对于确保安全和实现最佳性能至关重要。

求解瞬态车辆-桥梁相互作用问题存在两种主要策略。第一种也称为非耦合法，将车辆-桥梁系统视为两个独立的子系统。每个子系统由其非耦合运动方程控制，并独立求解。两个子系统之间的运动学与动力学协调在每个时间步 [7, 18, 9, 26]迭代强制满足。第二种策略将车辆-桥梁系统视为整体耦合体，由一组统一的运动方程表示。这些方程作为集成系统同时求解[33, 6, 4, 34, 10, 11, 12, 28, 29, 30]。对这些

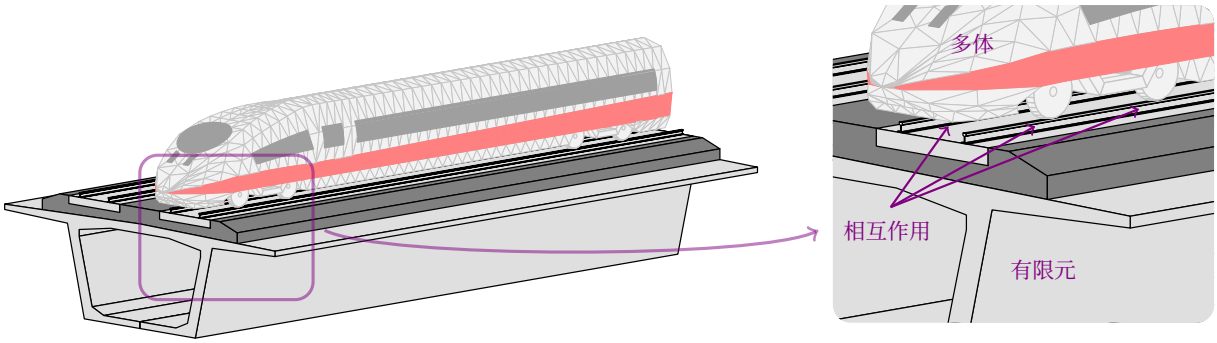


图 1：车辆-结构模型不同组成部分示意图

方法的优缺点的详细分析见 [35, 1]。尽管已取得显著进展，一个持续存在的挑战在于：在能够处理极端运行工况（例如强风、地震）或复杂轨道几何形状（例如曲线/超高桥梁）所固有的大三维位移和转动的整体式非线性有限元框架内，建立稳健且通用的运动学约束公式。许多现有方法对这些方面进行了简化，或是在专用而非通用有限元软件中实现。

本研究旨在通过提出一种用于三维车桥相互作用的新型运动学约束公式，直接弥补这一空白，该公式包含精确的非线性轮轨接触模型。我们的主要贡献是开发了一种严谨的方法，使用绝对坐标描述运动与相互作用，并将其应用于通用有限元软件中。该公式的主要特点如下：

- 引入一组虚拟节点，用于精确表征相对于车辆各轮对的轨道位置和方向。
- 该 formulation 能够天然地处理大位移和大转动，避免了依赖微小运动假设的简化。
- 三维轮轨接触模型能够准确呈现车轮和钢轨的真实几何形状，处理不同位置（如轨头、轮缘或两者）的多点接触场景，并考虑接触区域内表面曲率的变化。
- 能够捕捉精细的轨道几何，包括不平顺和欠超高，以及轨道在荷载下的变形
- 模块化设计便于将其集成到具备多体功能的现有有限元软件中

该方法为开发车桥相互作用模型提供了一个稳健的框架，能够准确捕捉极端情形下控制车辆-结构横向相互作用的关键现象，尤其是组合横向和竖向荷载作用下接触与分离（车轮抬升）之间的转变。这种能力对于分析车辆-桥梁横向相互作用至关重要，因为结构变形、轨道不平顺以及动力放大效应可能导致接触丧失

和重新接触。值得注意的是，所提出的框架可以轻松扩展到在有限元法中显式包含轨道结构的情况，从而无需修改方法即可详细研究高频轨道响应。车辆采用三维多体系统建模，桥梁结构则使用梁单元、壳单元或实体单元等有限元进行离散。该 formulation 旨在充分考虑两个子系统中的几何非线性和材料非线性。本文结构如下：第2节概述耦合系统的一般运动方程；第3节详细介绍所提出的运动学相互作用；第4节描述所提出的轮轨接触模型；随后在第5节中将所提出的方法应用于两个不同的测试案例；最后在第6节总结主要结论。附录详细说明约束线性化及实现方面的内容。

2. 车桥相互作用框架

为了分析可变形结构与列车车辆之间的耦合动力相互作用（见图 1），需要建立控制两个子系统响应及其相互作用的方程。

一般而言，采用有限元建模的结构，其动力响应控制方程可表示为：

$$\mathbf{M}^S\ddot{\mathbf{q}}_S + \mathbf{F}^S_{\mathrm{damp}}(\mathbf{q}_S,\dot{\mathbf{q}}_S) + \mathbf{F}^S_{\mathrm{def}}(\mathbf{q}_S,\dot{\mathbf{q}}_S) + \mathbf{F}^S_{\mathrm{SV}}(\mathbf{q}_S,\dot{\mathbf{q}}_S,\mathbf{q}_V,\dot{\mathbf{q}}_V) = \mathbf{F}^S_{\mathrm{ext}}(t)\,, \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^S(\mathbf{q}_S) = \mathbf{0}\,, \tag{1b}$$

其中，$\mathbf{q}_S$ 为结构系统的广义坐标向量，$\dot{\mathbf{q}}_S$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_S$ 分别为其一阶和二阶时间导数；$\mathbf{q}_V$、$\dot{\mathbf{q}}_V$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_V$ 为车辆对应的变量；$\mathbf{M}^S$ 为结构的质量矩阵；$\boldsymbol{\Phi}^S = \mathbf{0}$ 为结构模型的约束方程组。该方程中出现的力向量如下：

$\mathbf{F}^S_{\mathrm{damp}}$**:** 结构阻尼力向量。

$\mathbf{F}^S{}_{\mathrm{def}}$**:** 与结构弹性（或非弹性）变形相对应的内力 .

$\mathbf{F}^S_{\mathrm{SV}}$**:** 表示结构与行驶于其上的车辆之间动力相互作用的轮轨接触力。

$\mathbf{F}^S_{\mathrm{ext}}$**:** 外力，例如结构自重、气动荷载、地震作用等。

“力向量 ”一词的使用存在歧义，因为向量$\mathbf{F}$同时包含力和力矩，而广义坐标向量同时包含位移和转动自由度。

注1。 值得注意的是，当将轨道结构与桥梁结构一起明确纳入有限元模型时，式(1)仍然有效。与轨道子系统相关的额外自由度将成为向量$\mathbf{q}_S$的一部分。在这种情况下，车辆与基础设施之间的相互作用将在轨道系统与车辆子系统之间建立，其贡献将纳入力向量$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{S}$中。

与结构类似，列车通过桥梁时的一般多体模型的动力学方程可表示为：

$$\mathbf{M}^{V}\ddot{\mathbf{q}}_{V}+\mathbf{F}_{\mathrm{susp}}^{V}(\mathbf{q}_{V},\dot{\mathbf{q}}_{V})+\mathbf{F}_{\mathrm{gir}}^{V}(\mathbf{q}_{V},\dot{\mathbf{q}}_{V})+\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{V}(\mathbf{q}_{V},\dot{\mathbf{q}}_{V},\mathbf{q}_{S},\dot{\mathbf{q}}_{S})=\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}^{V}(t), \tag{2a}$$

$$\mathbf{\Phi}^{V}(\mathbf{q}_{V},\dot{\mathbf{q}}_{V},t)=\mathbf{0}\,, \tag{2b}$$

其中$\mathbf{M}^{V}$为车辆模型的质量矩阵； $\mathbf{\Phi}^{V}=\mathbf{0}$ 为车辆多体模型的约束方程集合。与结构约束式(1b)不同，列车多体模型的约束方程表述得更为一般，还依赖于速度项和时间。式(2)中的力向量为：

$\mathbf{F}_{\mathrm{susp}}^{V}$**:** 由车辆悬挂系统产生的力。

$\mathbf{F}_{\mathrm{gir}}^{V}$**:** 由刚体转动引起的陀螺项。

$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{V}$**:** 表示结构与车辆之间动力相互作用的轮轨接触力。它与$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{S}$相对应。

$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}^{V}$**:** 外力，例如自重、气动荷载等。

Both 子系统（式 (1) 和 (2)）可以合并为单一方程组，表示为 ：

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{F}_{\mathrm{int}}(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t)\,, \tag{3a}$$

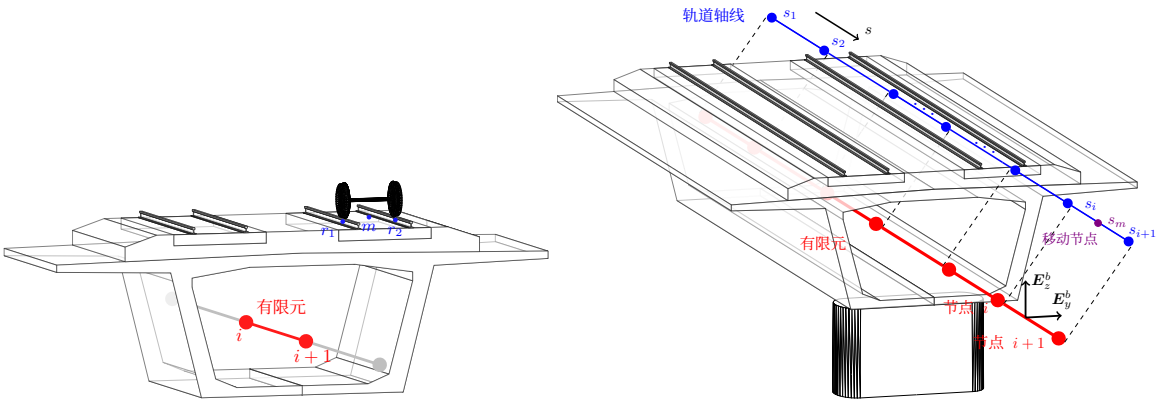
$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}},\,t)=\mathbf{0}\,, \tag{3b}$$

$$\mathbf{\Phi}_{SV}(\mathbf{q})=\mathbf{0}\,, \tag{3c}$$

其中，$\mathbf{q}$ 是完整系统的广义坐标向量，可表示为$\mathbf{q}=\left[\mathbf{q}_{S}^{\mathrm{T}},\mathbf{q}_{V}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$； $\mathbf{M}$ 是质量矩阵；$\mathbf{F}_{\mathrm{int}}$ 汇集了先前定义的向量$\mathbf{F}_{\mathrm{damp}}^{S}$、$\mathbf{F}_{\mathrm{def}}^{S}$、$\mathbf{F}_{\mathrm{susp}}^{V}$ 和$\mathbf{F}_{\mathrm{gir}}^{V}$；同样，$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}$ 和$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ 分别由$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{S}$ 与$\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}^{V}$，以及$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}^{S}$ 与$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}^{V}$组成。约束方程 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)=\mathbf{0}$ 汇集了方程（1b）和（2b）；而 $\mathbf{\Phi}_{SV}(\mathbf{q})=\mathbf{0}$ 则对应于建立结构与车辆之间相互作用所需的约束方程。本研究的主要目的是描述建立约束方程组（3c）所需的运动学关系，详情见第3节。

3. 运动学约束公式 n

运动学对于定义列车与可变形结构之间的相互作用至关重要。本研究假定桥梁结构采用三维梁模型进行建模。不过，本研究提出的方法可直接扩展到壳、实体单元或它们的组合模型。为每个列车轮对引入三个虚拟节点，以建立子系统之间的运动学关系（见图2(a)中的节点 r_1、 r_2和 m）。这些无质量节点仅用于运动学描述，位于轮对的同一横截面内，并沿着轨道定义的轨迹运动。



(a) 虚拟节点 r_1、 r_2 和 m 可用于建立结构模型有限元与梁截面车辆轮对之间的运动学耦合；(b) 有限元节点、移动节点 m 的纵向位置以及方向向量示意图

图 2：虚 拟节点 r_1、 r_2 和 m 可用于建立结构 re
模型与 车辆轮对

第一个虚拟节点 m位于两根钢轨之间，表示相对于可变形结构有限元的轨道中点。另外两个虚拟节点 r_1 和 r_2位于与节点 m同一横截面内各钢轨的形心处，从而能够独立、准确地描述每根钢轨的运动学，同时考虑可能存在的轨道不平顺。

在接下来的第 3.1 节中，描述了虚拟节点 m相对于结构有限元的运动学关系。同样，在第 3.2 节中，建立了节点 r_j 与 m之间的联系。此处，下标 j 可互换地指 $j=1$ （右侧钢轨）和 $j=2$ （左侧钢轨）。

3.1. 移动节点与结构之间的约束

本节定义了节点 m 与结构有限元之间的运动学关系。虚拟节点 m以与列车相同的速度 v 移动，并位于与轮对相同的结构横截面内，如图2(b)所示。

为实现这一点，采用变量 s 对轨道的纵向进行参数化。假设轮对初始位于由 s_0 定义的轨道截面处，则节点 m 在时间 t 的位置记为 s_m，

计算如下：

$$s_m = s_0 + \int_0^t v \, \mathrm{d}t \,. \tag{4}$$

若 v 为常数，公式（4）可简化为 $s_m = s_0 + vt$。如图2(b)所示，若 $s_i \le s_m < s_{i+1}$，则节点 m 位于轨道段 i（梁节点 i 与 $i+1$之间），其中 s_i 和 s_{i+1} 为两个相邻结构节点的纵向位置。为确定节点 m 所在的有限元，忽略结构的纵向变形，因其相对于 s可忽略不计。

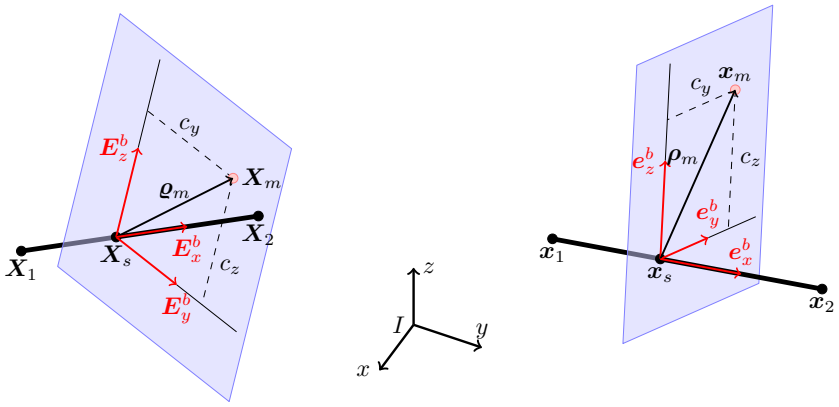


图3：梁单元的方向向量以及节点 m 在初始（左）和当前（右）构型中的偏移量

在参考（或未变形）构型中，单位向量 $\boldsymbol{E}_y^b$ 和 $\boldsymbol{E}_z^b$ 确定梁截面的方向（见图2(b)和图3）。它们是两个单位向量，定义如下： $\boldsymbol{E}_z^b$ 在每个截面[1] 中垂直于轨道平面（指向上方）； $\boldsymbol{E}_y^b$ 的定义使得梁切向量 $\boldsymbol{E}_x^b$ （沿 $\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$方向定义）与 $\boldsymbol{E}_y^b$ 和 $\boldsymbol{E}_z^b$ 构成右手正交归一基。此后，所有向量均相对于全局惯性参考系（在图3中以 $Ixyz$ 表示）。

节点 m的初始偏移量 c_y^m和 c_z^m（相对于梁轴线；该节点最初位于给定截面平面 ζ）可表示为

$$c_y^m = (\boldsymbol{X}_m - \boldsymbol{X}_1) \cdot \boldsymbol{E}_y^{b,0} \,, \tag{5a}$$

$$c_z^m = (\boldsymbol{X}_m - \boldsymbol{X}_1) \cdot \boldsymbol{E}_z^{b,0} \,, \tag{5b}$$

其中， $\boldsymbol{X}_m$ 是节点 m, $\boldsymbol{X}_1$的初始位置向量，该节点对应于梁单元的第一个节点，即轮对的初始所在位置； $\boldsymbol{E}^b{}_{,y}{}^0$和 $\boldsymbol{E}^b{}_{,z}{}^0$是上述定义的方向向量，但其参考位置为轮对的初始位置。

[1]在该情　况下，对于曲线和/或设有超高的桥梁， $\boldsymbol{E}_z^b$ 与轨道轴线曲率的副法向量方向相同　e.

位置 $\boldsymbol{X}_m$ 可表示为（见图3）

$$\boldsymbol{X}_m = \boldsymbol{X}_s + \boldsymbol{\varrho}_m \,, \tag{6}$$

其中， $\boldsymbol{X}_m$ 是梁单元在横截面 s_m 上的点（见图2(b)和图3），而 $\boldsymbol{\varrho}_m$ 为:

$$\boldsymbol{\varrho}_m = c_y^m \, \boldsymbol{E}_y^b + c_z^m \, \boldsymbol{E}_z^b \,. \tag{7}$$

类似地， m 在当前构形中的位置可表示为:

$$\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{\rho}_m \,, \tag{8}$$

其中， $\boldsymbol{x}_s$ 是梁单元在截面 s_m 处的位置，而 $\boldsymbol{\rho}_m$ 是在变形构型中与 $\boldsymbol{\varrho}_m$相对应的量。

假设结构截面在横向 $\boldsymbol{E}_y^b$ 和 $\boldsymbol{E}_z^b$上保持不变形，则初始偏移量 c_y^m和 c_z^m将保持恒定。因此， $\boldsymbol{\rho}_m$ 可表示为:

$$\boldsymbol{\rho}_m = c_y^m \, \boldsymbol{e}_y^b + c_z^m \, \boldsymbol{e}_z^b \,, \tag{9}$$

其中， $\boldsymbol{e}_y^b$ 和 $\boldsymbol{e}_z^b$ 是对应于向量 $\boldsymbol{E}_y^b$ 和 $\boldsymbol{E}_z^b$、并以当前构形为参照的向量。它们可表示为 $\boldsymbol{E}_y^b$ 和 $\boldsymbol{E}_z^b$的旋转

$$\boldsymbol{e}_\alpha^b = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\phi}_m)\boldsymbol{E}_\alpha^b \,, \quad \alpha = \{y, \, z\} \,, \tag{10}$$

其中， $\boldsymbol{\phi}_m$ 为梁截面 s_m 的旋转向量（将在下文介绍）， $\boldsymbol{\Lambda}_m = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\phi}_m$）为其对应的转动张量（详见附录A）。同理， $\boldsymbol{\rho}_m$ 可简洁地表示为:

$$\boldsymbol{\rho}_m = \boldsymbol{\Lambda}_m \boldsymbol{\varrho}_m \,. \tag{11}$$

变形构型中某一点的位置可写为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 分别是其初始位置和位移矢量。因此，式 (8) 可表示为

$$\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{X}_m + \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{X}_s + \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{\rho}_m \,, \tag{12}$$

因此

$$\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{X}_s + \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{X}_m \,. \tag{13}$$

设 s_1 和 s_2 分别为虚拟节点 m 所在梁单元两个节点的纵向参数，其位移向量可表示为自然坐标 $\zeta = (2\, s_m - s_1 - s_2)\ /(s_2 - s_1)$的函数，即[2]

$$\boldsymbol{u}_m = N_1(\zeta)\,(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{u}_1) + N_2(\zeta)\,(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{u}_2) + \boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{X}_m\,, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 为梁单元两个节点的位移矢量。 N_1 和 N_2 为梁单元两个节点在 ζ处求值的基函数， $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 为其在初始构型中的节点位置。

另一方面，两个节点在变形构型中的方向通过其旋转向量 $\boldsymbol{\phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\phi}_2$表示。旋转向量的模表示绕其自身方向（即欧拉轴）的旋转角（详见 [36]）。在由自然坐标 ζ定义的截面 s_m处，旋转向量 $\boldsymbol{\phi}_m$ 插值为:

$$\boldsymbol{\phi}_m = N_1(\zeta)\,\boldsymbol{\phi}_1 + N_2(\zeta)\,\boldsymbol{\phi}_2\,. \tag{15}$$

插值公式(15)既不精确，也不是唯一可行的方法。关于旋转插值方法及其影响的详细讨论可见 [37]。如 [38], 所述，式(15)中的插值存在两个主要局限：所得弹性算子缺乏材料客观性，且依赖于旋转序列。然而，这些缺点在本研究中并不显著，因为 $\boldsymbol{\phi}_1$ 与 $\boldsymbol{\phi}_2$ 之间的差异很小，且并未利用 $\boldsymbol{\phi}_m$得到弹性算子。

因此，根据式（14）和式（15），节点 m 的运动学可以表示为梁节点广义坐标的函数。

从更广义的角度来看，所有节点 m （列车的每个轮对各对应一个节点）的广义坐标记为$\mathbf{q}_m$，这些坐标是相关的，可以表示为结构节点独立坐标$\mathbf{q}_S$的函数，如下所示:

$$\mathbf{q}_m = \boldsymbol{\Xi}^m(\mathbf{q}_S)\,. \tag{16}$$

这可以改写为约束方程$\boldsymbol{\Phi}^m_{SV} = \mathbf{q}_m - \boldsymbol{\Xi}^m(\mathbf{q}_S) = \mathbf{0}$，并将其纳入式（3c）。

大多数现有的施加约束的方法都需要对约束方程进行线性化——

[2]也可以采用其他具有不同节点数量的单元公式，例如二次梁单元或壳。

因此，$\mathbf{q}_m$ 被线性化为:

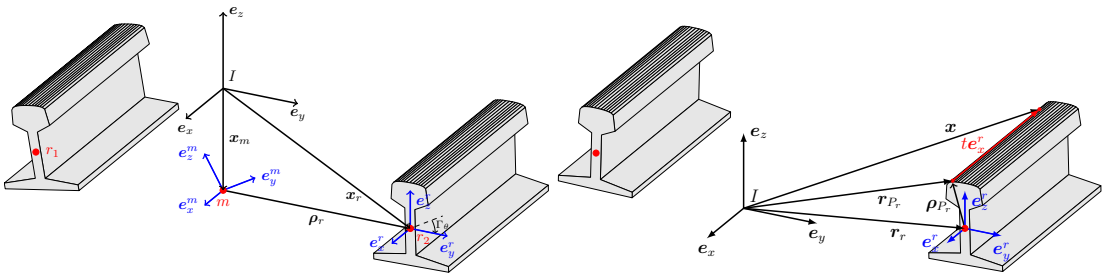
$$\delta\mathbf{q}_m = \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^m(\mathbf{q}_S)}{\partial \mathbf{q}_S}\,\delta\mathbf{q}_S\,, \tag{17}$$

其中，$\delta\mathbf{q}_m$ 和 $\delta\mathbf{q}_S$ 分别为$\mathbf{q}_m$ 和$\mathbf{q}_S$的变分，算子 $\partial\boldsymbol{\Xi}^m(\mathbf{q}_S)/\partial\mathbf{q}_S$ 详见附录 A.2。

备注 2. 需要注意的是，当轨道结构纳入有限元模型时，“移动节点” m 的运动学约束是与轨道子系统的有限元节点建立的，而非与桥梁的有限元节点建立。相应的公式保持不变。

3.2. 移动节点与钢轨之间的约束

如本节开头所述，为定义虚拟节点 m与图 4(a)所示虚拟节点 r_1 和 r_2 之间的运动学关系，另外建立了两个约束。由于 m与 r_1 之间的约束方程和 m 与 r_2 之间的约束方程等价，以下将其统一概括并表述为虚拟节点 m 与 r之间的约束。



(a) 虚拟节点 m 与 虚拟节点 r_1 和 r_2之间的运动学关系

(b) 钢轨表面的几何定义

图 4：钢轨定义示意图

与式 (5) 类似，虚拟节点 r 相对于 m 的初始偏移量表示为（见图 4(a)）

$$c_y^r = (\boldsymbol{X}_r - \boldsymbol{X}_m)\cdot\boldsymbol{E}_y^m\,, \tag{18a}$$

$$c_z^r = (\boldsymbol{X}_r - \boldsymbol{X}_m)\cdot\boldsymbol{E}_z^m\,, \tag{18b}$$

其中，$\boldsymbol{X}_r$ 为参考构形中钢轨形心的位置向量，$\boldsymbol{E}_y^m$和 $\boldsymbol{E}_z^m$为确定虚拟节点 m方向的两个单位向量。因此，轨道截面也对应于未变形构形。

m 与 r 之间的运动学关系为（见图 4(a)）：

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{\rho}_r\,, \tag{19}$$

其中， $\boldsymbol{\rho}_r$ 是 r 与 m之间的向量。

由于轨道的未变形位置可能与其理想几何形状不同，因此需要考虑轨道纵断面中可能存在的不平顺。这些轨道不平顺会显著影响铁路车辆的动力学行为 [1]。本文中，同时关联两个节点 r_1和 r_2的钢轨向量 $\boldsymbol{\rho}_r$ 将计入轨道不平顺，其表达式为：

$$\boldsymbol{\rho}_r = \left(\Gamma_y(s) + c_y^r\right)\, \boldsymbol{e}_y^m + \left(\Gamma_z(s) + c_z^r\right)\, \boldsymbol{e}_z^m \,, \tag{20}$$

其中， Γ_y 和 Γ_z为截面 s[3]处的轨道不平顺。向量 $\boldsymbol{e}_\alpha^m$（ $\alpha = \{x, y, z\}$）对应于与节点 m关联的正交归一基，用于描述当前构型下的轨道方向。与前述约束的情况相同，向量 $\boldsymbol{e}_\alpha^m$ 由其在未变形构形中的对应向量 $\boldsymbol{E}_\alpha^m$（式（10））经转动得到。

与前一节类似，约束式（19）可改写为：

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{X}_r + \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{X}_m + \boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{\rho}_r \,, \tag{21}$$

因此， $\boldsymbol{u}_r$ 可表示为：

$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{X}_m + \boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{\rho}_r - \boldsymbol{X}_r \,. \tag{22}$$

对于 m与 r之间的转动约束，需要考虑钢轨绕纵向轴 $\boldsymbol{e}_x^r$可能发生的转动 Γ_θ（s）。这种转动可能由轨道不平顺引起，也可能是轨道超高所致。因此，钢轨的转动张量 $\boldsymbol{\Lambda}_r = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\phi}_r$）由两个转动复合而成，具体通过

$$\boldsymbol{\Lambda}_r = \boldsymbol{\Lambda}_m \, \boldsymbol{\Lambda}_\Gamma \,, \tag{23}$$

为 $\boldsymbol{\Lambda}_\Gamma = \boldsymbol{\Lambda}(\Gamma_\theta \boldsymbol{e}_x^b)$。因此，可以通过 Spurrier算法 [40]从张量 $\boldsymbol{\Lambda}_r$ 中提取钢轨旋转向量 $\boldsymbol{\phi}_r$ 。

$$\boldsymbol{\phi}_r = \operatorname{spurrier}\left[\boldsymbol{\Lambda}_m \, \boldsymbol{\Lambda}_\Gamma\right] \,. \tag{24}$$

与前一种情况一样，约束方程（22）和（24）可按照方程（16）类似地表述，其中节点 r 的坐标为从属坐标，节点 m 的坐标为独立坐标

[3]、 $\Gamma_y(s)$ 和 $\Gamma_z(s)$，以及下文提到的 $\Gamma_\theta(s)$，均可通过谱密度函数生成（如 [39] 中所做），或通过对两根钢轨的轨道偏差进行实际测量获得（例如参见 [11]）。

。

$$\mathbf{\Phi}^{r}_{SV} = \mathbf{q}_r - \mathbf{\Xi}^{r}(\mathbf{q}_m) = \mathbf{0}\,. \tag{25}$$

与前文相同，该约束的线性化为

$$\delta\mathbf{q}_r = \frac{\partial \mathbf{\Xi}^{r}(\mathbf{q}_m)}{\partial \mathbf{q}_m}\,\delta\mathbf{q}_m\,, \tag{26}$$

具体说明见附录 A.3。

本研究采用了通用非线性有限元软件 Abaqus[41] 。Abaqus 是一种功能强大的结构离散化工具，提供多种单元和材料公式，并具备多体功能，可用于建立简化车辆模型。本节所述的运动学约束通过 Abaqus 的多点约束（MPC）用户子程序实现。这些程序的实现方法见附录 B。尽管本研究采用的实现基于 Abaqus，但所提出的方法不依赖于所用的有限元软件；在其他支持用户子程序的有限元软件（如 Ansys）中，也可以采用类似的实现方式。

4. 轮轨接触模型

轮轨接触现象涉及两个具有复杂型面的三维物体之间的滚动和滑动相互作用。因此，由于存在强非线性，准确识别接触点并求解相关的轮轨相互作用问题极具挑战性。为应对这一复杂问题，本文提出了一种由三个依次进行且相互解耦的步骤组成的系统方法：i）确定车轮与钢轨表面之间的接触点（4.1）；ii）确定接触区域和法向接触力（4.2）；iii）计算蠕滑率，并确定切向蠕滑力和力矩的分布（4.3）。下文各小节将介绍一种用于计算车轮与钢轨之间接触力的系统方法。

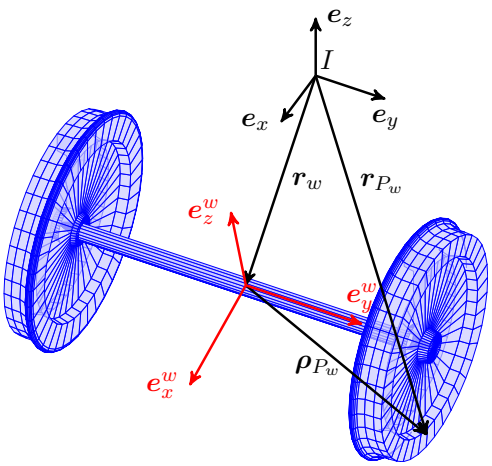
4.1. 车轮与钢轨表面之间接触区域的检测

在动力分析过程中，针对每个时间步在线确定车轮与钢轨表面之间接触点的位置。

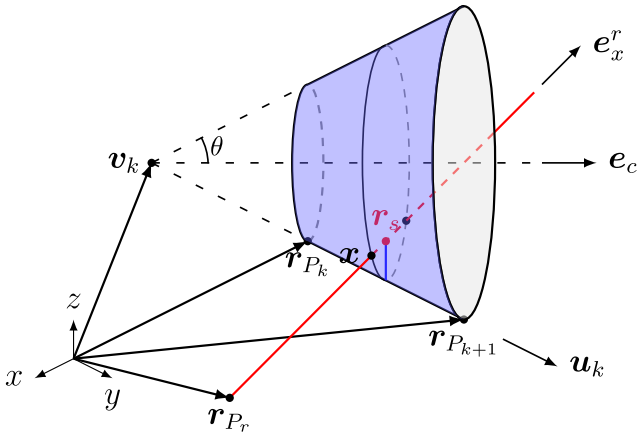
4.1.1. 车轮与钢轨之间的交线

车轮和钢轨实体采用完整的三维形式建模，并根据其实际平面轮廓重建。钢轨表面通过沿轨道纵向线性拉伸其轮廓线生成

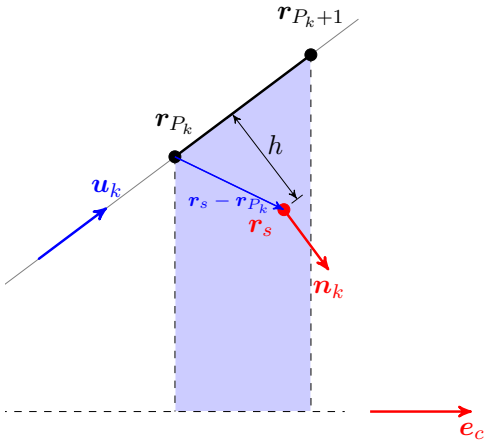
（见图 4(b)），假设钢轨完全笔直且不存在表面缺陷。由于钢轨廓形由一组通过直线段连接的离散点构成，因此生成的钢轨表面可表示为一系列平行线。这些离散廓形点定义了这些线，并使其沿钢轨纵向延伸。假设车轮表面完全光滑，不存在任何损伤或缺陷；不过，将纵向或横向的任何变化纳入模型都很容易。车轮表面通过绕其中心轴旋转其轮廓生成。由于车轮轮廓由一组通过直线段连接的离散点构成，因此生成的车轮表面可视为相邻点之间形成的截锥面包络，如图 5(a) 所示。



(a) 车轮表面定义



(b) 直线与截锥之间的交线



(c) 最大穿透量 h的确定
以及锥面的法向量 $\boldsymbol{n}_k$

图5：车轮与钢轨之间的交线

为确定车轮与钢轨表面之间的接触点，需要确定钢轨挤出线与车轮截锥的交线。假定由钢轨廓形挤出形成的一条直线与车轮截锥相交于点 $\boldsymbol{x}$,

如图5(b)所示。为此，必须满足以下条件：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k||} \cdot \boldsymbol{e}_c \tag{27}$$

$$[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{P_k}) \cdot \boldsymbol{e}_c][(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{P_{k+1}}) \cdot \boldsymbol{e}_c] \leq 0 \tag{28}$$

其中， θ 为截锥的半顶角（见图5(b)）。

第一个条件（27）用于将点 $\boldsymbol{x}$ 限制在锥面上，第二个条件（28）用于约束点 $\boldsymbol{x}$，该点必须位于由点 $\boldsymbol{r}_{P_k}$ 和 $\boldsymbol{r}_{P_{k+1}}$ 形成的截锥边界上。对第一个条件（27）的两边平方后，可将其重新表述为：

$$\begin{aligned} \cos^2\theta||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k||^2 &= [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{e}_c]^2 \\ \text{or} \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k)^T \boldsymbol{M} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_k) &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

其中， $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_c \otimes \boldsymbol{e}_c - \cos^2\theta \mathbf{1}$ 和 $\mathbf{1}$ 为单位张量。将 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_{P_r} + t\boldsymbol{e}_x^r$ 代入式（29），可得到一个二次方程：

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{30}$$

其中， $a = \boldsymbol{e}_x^r \cdot \boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x^r$、 $b = \boldsymbol{e}_x^r \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_{P_r} - \boldsymbol{v}_k)$ 和 $c = (\boldsymbol{r}_{P_r} - \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}_{P_r} - \boldsymbol{v}_k)$ 为两个可能的解，分别是 $t_{+/-} = \left(-b \pm \sqrt{a^2 - 4bc}\right)/2a$。

若 $a = 0$，轨道线与截锥的母线平行，且二者之间存在唯一交点。相反，若 $a \neq 0$，则可能存在三种不同情况：i）轨道线与截锥不相交（$a^2 - 4bc < 0$）；ii）轨道线与截锥表面相切（$a^2 - 4bc = 0$）；iii）轨道线与截锥表面相交于两点（$a^2 - 4bc > 0$）。

确定直线与截锥之间可能存在的交线后，如果存在两个不同的交点，则有必要确定该直线的最大穿透量。为计算这一数值，假设最大穿透量对应于两个交点之间的中点到截锥表面的距离（见图5(c)）。当轮对不存在偏航旋转时，该假设是精确的。此外，由于轨道轴线与轮对轴线之间的相对旋转通常较小，因此该假设也是非常准确的近似。中点可表示为：

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_{P_r} - \frac{b}{2a}\boldsymbol{e}_x^r \tag{31}$$

因此，最大穿透量可按如下方式获得（见图5(c)）：

$$h = ||\boldsymbol{u}_k \times (\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_{P_k})|| \tag{32}$$

并确定锥面的法向量 $\boldsymbol{n}_k$：

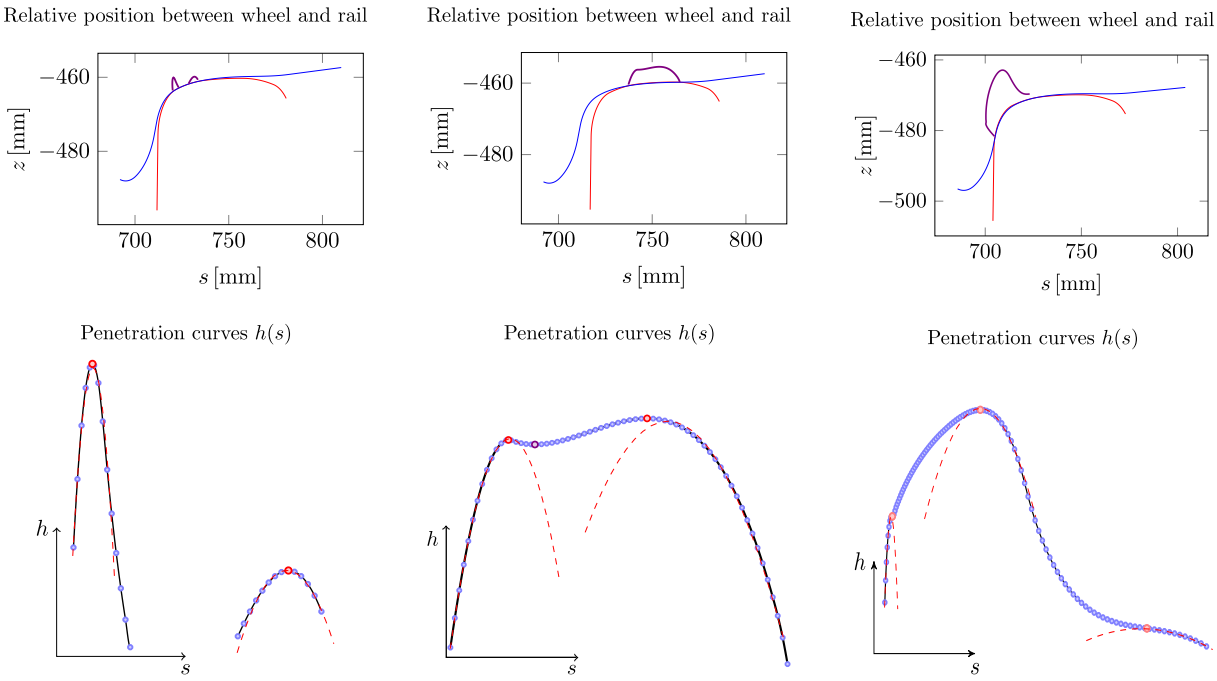
$$\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{u}_k \times (\boldsymbol{e}_c \times \boldsymbol{u}_k) \tag{33}$$

4.1.2. 多个接触区域的确定

对于钢轨表面上每条与车轮表面相交的直线，均可确定一个中点 $\boldsymbol{r}_{si}$ 及其对应的穿透量 h_i，从而识别出多个接触区域（见图 6(a)，其中显示了两个接触区域）。为计算法向接触力，必须确定每个接触区域内的最大穿透量及其对应位置。一种直接的方法是从穿透量集合 $\{h_i\}$ 中找出绝对值最大值。然而，这种方法会引发严重问题：车轮沿钢轨移动时，即使采样网格发生微小偏移，也可能导致识别出的接触点位置突然跳变、计算所得的法向力和切向力骤变，以及预测的接触斑出现振荡。这种现象通常称为网格锁定或离散化噪声，其根源在于仅依赖离散的穿透量数值。为减轻这些问题，采用三次样条插值，根据计算得到的集合 $\{h_i\}$ 确定最大穿透量。样条曲线经过采样得到的穿透量数值，且平滑、连续可微，因此可以通过分析连续插值函数而非离散采样点来确定最大值。这样，算法便能估算每个区间内峰值的精确位置，并计算出更准确的最大穿透量。为此，引入参数 s，确保每个点 $\boldsymbol{r}_{si}$ 均对应于 $s_i = \boldsymbol{r}_{si} \cdot \boldsymbol{e}_y^w$ 的特定数值。

在基于赫兹理论的传统接触公式中，[42], 假设接口处的接触表面可由两个变量的二次函数描述。这一假设意味着穿透曲线呈二阶多项式形式（见图6(a)）。然而，情况并非总是如此。在某些情况下，穿透曲线会偏离抛物线形状，如图6(b)所示。当轮对居中于轨道上 [43], 且两个不同的闭合接触区域相融合时，通常会出现这种情况。在这些情况下，通过计算局部区域的最大穿透量来确定接触区域的数量（图5(c)和图6(b)中的红点）。

还需注意的是，局部极小值和最大值可能彼此非常接近，并可能与它们之间的拐点合并。这种接近会导致求解动力耦合系统方程时出现收敛困难。因此，必须特别谨慎，以准确识别所有局部极小值、最大值和拐点。



(a) 两个分离的接触区域。 (b) 两个连接的接触区域。 (c) 三个连接的接触区域。

图 6：车轮与钢轨表面之间的不同接触区域。虚线红线表示二次近似，红点表示局部最大值

4.2. 法向轮轨接触建模

如上所述，当车轮与钢轨接触时，接口处可能形成多个接触区域，这些区域可以彼此分离（见图 6(a)），也可以相互连接（见图 6(b)）。因此，基于赫兹理论 [42] 采用单一椭圆接触模型的方法并不适用于这些情况。为处理轮轨接触的所有变化并获得准确结果，本研究采用多赫兹接触法 [43, 44]。该方法假设每个接触区均满足赫兹理论 [42, 45], 的必要条件，因此求解法向接触问题需要确定一组椭圆。首先，采用先前研究中确立的方法 [46, 47, 48, 44]对每个接触区 δ_i 的虚拟压缩进行近似。

$$\delta_i = h_i - 0.45h_0 \tag{34}$$

其中， h_i 表示第 i 个接触区域对应的最大穿透量， h_0 表示与椭圆 0 对应的接触区域的最大穿透量（绝对值，见图 7）。计算出虚拟压缩量后，根据赫兹理论在局部确定每个接触区域的法向接触力、半轴以及椭圆压力分布 [42, 45, 8]。

4.3. 轮轨切向接触建模

在本研究中，采用 Kalker 的 USETAB [49] 来预测轮轨接触蠕滑力。在动力分析过程中，蠕滑

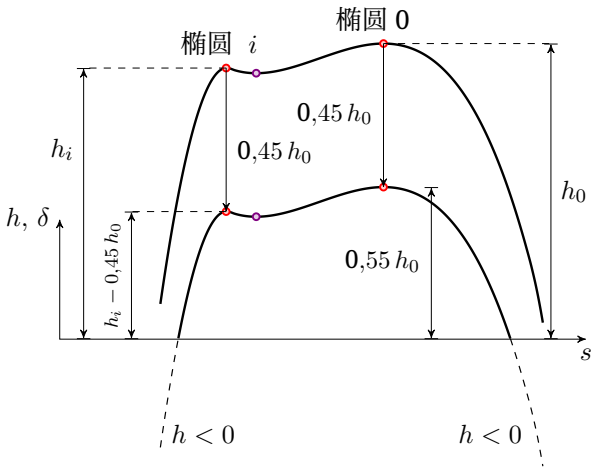


图7：接触区虚拟压缩的近似，改编自 [46, 44]

力的纵向分量 [50], 和横向分量 以及自旋蠕滑力矩 M_z，通过对 USETAB 多维查找表中存储的预计算蠕滑力数值进行线性插值得到。这些预计算数值是预先使用基于精确三维滚动接触理论 [51, 52]的 CONTACT软件 [50], 生成的。提供给 USETAB 的输入包括约化蠕滑率以及接触椭圆半轴的比值 a/b。

约化蠕滑率定义如下：

$$\tilde{\zeta}_x = \frac{abG}{3\mu N} c_{11} \zeta_x \tag{35a}$$

$$\tilde{\zeta}_y = \frac{abG}{3\mu N} c_{22} \zeta_y \tag{35b}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{(ab)^{3/2} G}{\mu N} c_{23} \varphi \tag{35c}$$

其中， ζ_x、 ζ_y、和 φ 分别为全局坐标系中的纵向、横向和自旋蠕滑率。 G 为车轮和钢轨材料的剪切模量， μ 为车轮与钢轨之间的摩擦系数。 c_{11}、 c_{22}、和 c_{23} 为Kalker系数 [53] ， 其取决于比值 a/b 和泊松系数 ν。纵向、横向和自旋蠕滑率如下所示：

$$\zeta_x = \frac{\boldsymbol{v}_w - \boldsymbol{v}_r}{v} \cdot \boldsymbol{e}_x \tag{36a}$$

$$\zeta_y = \frac{\boldsymbol{v}_w - \boldsymbol{v}_r}{v} \cdot \boldsymbol{e}_y \tag{36b}$$

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{w}_w - \boldsymbol{w}_r}{v} \cdot \boldsymbol{e}_z \tag{36c}$$

其中， $\boldsymbol{v}_w$， $\boldsymbol{w}_w$ 和 $\boldsymbol{v}_r$， $\boldsymbol{w}_r$ 分别是接触点处车轮和钢轨的平动速度与角速度向量， $\boldsymbol{e}_x$， $\boldsymbol{e}_y$，和 $\boldsymbol{e}_z$ 是接触点平面的单位基向量， v 是车轮沿纵向的速度大小，与列车速度相同。

5. 数值验证与应用

为突出所提方法的主要优势——即采用统一的有限元法公式，在完全一致的有限元法框架内推导并实现轮轨接触运动学和接触力——本文展示了两个数值应用。

- 第一个应用案例是著名的曼彻斯特接触基准（Manchester Contact Benchmark），由 [54, 55], 报告。该基准用于验证所提出的接触模型是否符合既定行业标准。

- 第二个应用案例研究了风荷载作用下单节铁路客车与连续梁桥之间的动力相互作用，同时考虑桥面扭转和弯曲。该案例旨在展示所提出的统一有限元法公式在复杂车辆–轨道–桥梁系统中的完整功能、数值稳定性和实际适用性，而非与所有现有轮轨接触模型进行全面基准比较。

这些示例共同展示了所提出的方法如何在单一统一的计算框架中一致且高效地实现轮轨相互作用，消除对额外界面假设的需求，并实现完全集成的车辆–轨道–桥梁动力分析。尽管对现有模型的计算效率和精度进行全面定量比较超出了本研究的范围，且将留待未来工作开展，但结果清楚地表明，铁路基础设施大规模动力学分析的方法正转向更加集成、一致且可扩展的框架。

5.1. 曼彻斯特接触基准

本文采用曼彻斯特接触基准 [54, 55] 对轮轨接触模型进行验证。基准仿真案例“案例A” [55],旨在比较采用不同接触模型所预测的结果，例如接触尺寸、法向与切向应力分布以及蠕滑力。该仿真涉及一个具有预设横向位移、摇头角、车轮载荷、速度和摩擦系数的单轮对。在案例A中，采用以下假设：使用真实的S1002车轮和UIC60钢轨廓形；在轮对车轴中心施加20 kN的竖向轴重（见图8）。

为涵盖所有关注的方面，案例A根据所涉及的接触类型和预设位移分为四个子案例。这四个子案例如下：

- A1-1：静态轮对仅考虑法向接触，并施加预设横向位移 t.

- A1-2：静态轮对仅考虑法向接触，并指定横向位移和摇头角。

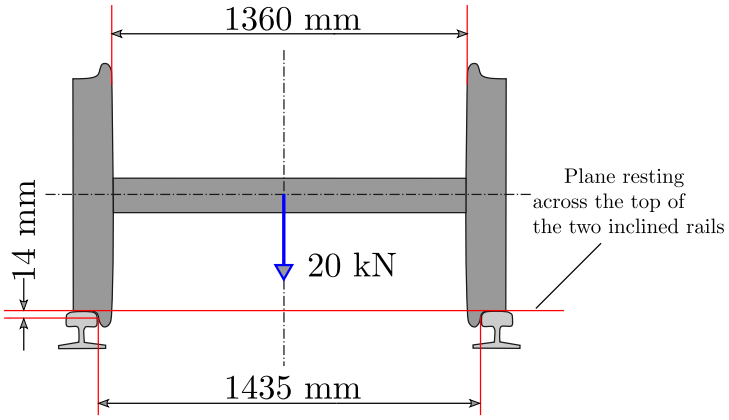


图8：车轮和钢轨的主要几何特性（改编自 [55]）

- A2-1：在指定横向位移的情况下进行准静态切向接触。
- A2-2：给定横向位移和偏航角的准静态切向接触。

给定的横向位移从 0 变化到 10 mm，增量为 0.5 mm。偏航角的数值从 0 mrad 变化到 24 mrad，增量为 1.2 mrad。对于评估切向接触问题的工况，轮对以 2 m/s 的恒定速度在直线轨道上运行。在每个位置，都会评估轮轨接触。本文提出的轮轨接触模型在每次仿真中所得的结果将与[55]给出的结果进行比较。

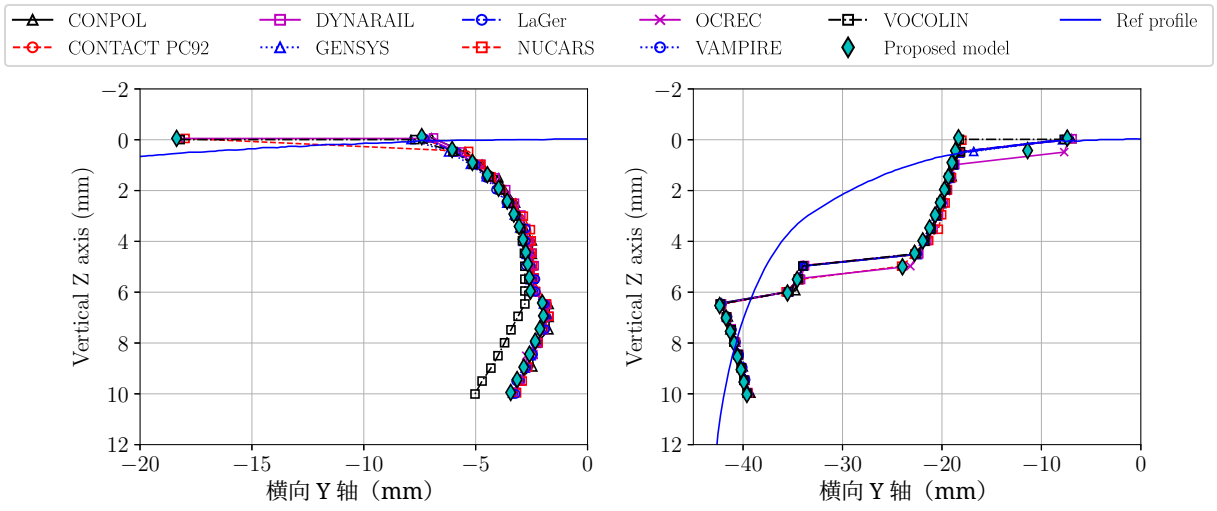
5.1.1. 接触位置和滚动半径差

图9和图10展示了子工况 A1-1 中在钢轨和车轮局部坐标系内定义的左侧和右侧接触位置。可以看出，本文所得结果与 [55]报道的不同接触模型所得结果相似。

子案例 A1-1 两侧车轮之间的滚动半径差如图 11 所示。再次可以看出，本研究的预测结果与 [55]获得的结果一致。此外，可以观察到，当发生轮缘接触（横向位移大于 6 mm）时，滚动半径差会急剧增大，从而导致纵向蠕滑率出现显著变化，如图 11 所示。

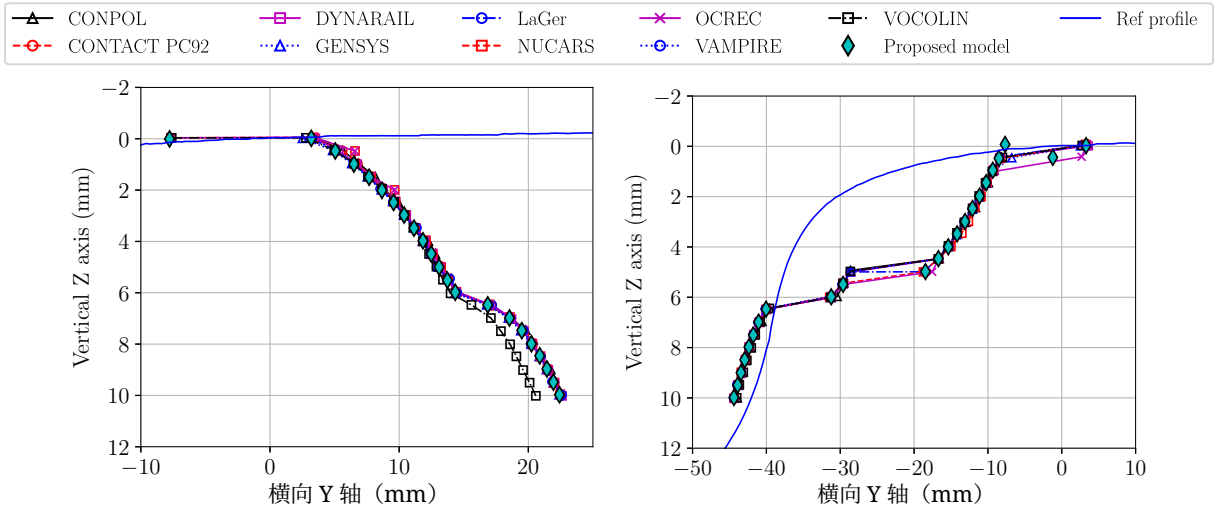
5.1.2. 接触角

图 12 显示了子案例 A1-2 中左侧和右侧轮轨界面的接触角。可以看出，本研究的结果与 CONPOL、GENSYS 和 VAMPIRE 的结果高度一致。所提出的模型有效捕捉了右侧车轮在横向位移超过 6 mm 后因轮缘接触而产生的接触角急剧变化。横向位移为 6.5 mm 时，接触角达到最大值。



（a）左侧钢轨　　（b）右侧钢轨

图 9：案例 A1.1 的钢轨横向接触位置，定义于钢轨局部坐标系中。无标记的蓝色实线表示钢轨廓形。（改编自 [55]）



（a）左侧车轮　　（b）右侧车轮

图 10：　案例 A1.1 的车轮横向接触位置，定义于钢轨局部坐标系中。带有　no
标记显示　ws 车轮轮廓。（改编自 [55]）

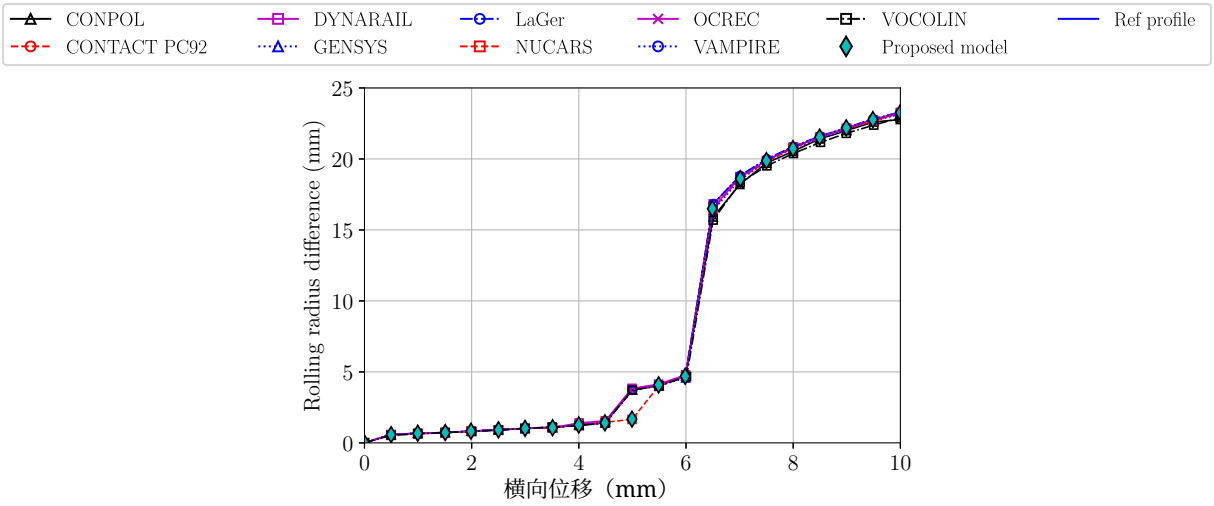
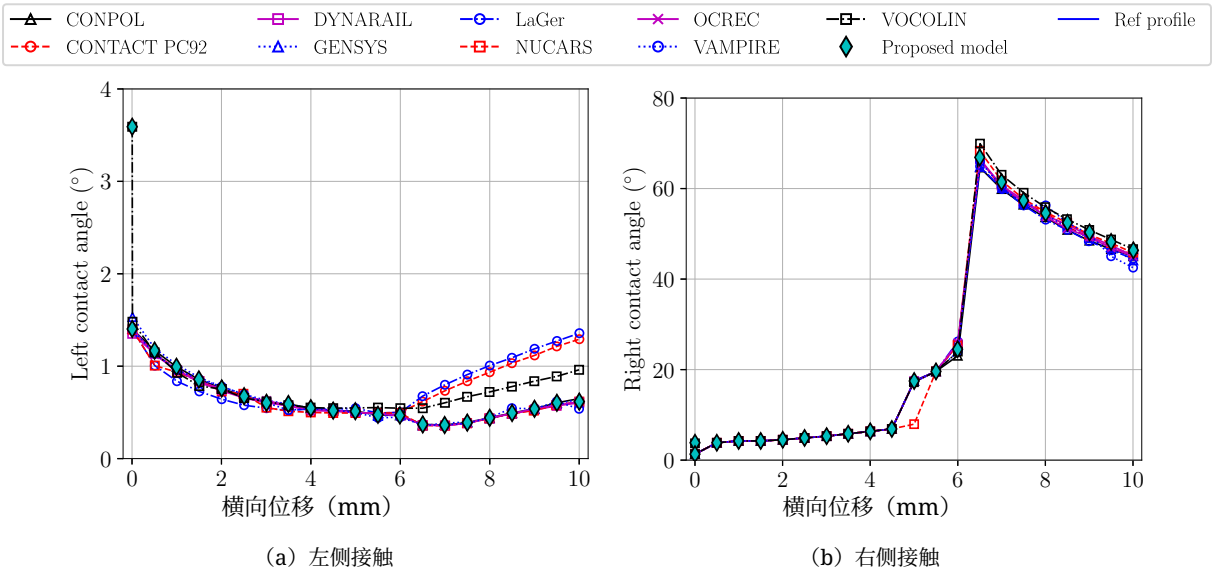


图 11：子工况 A1-1 的滚动半径差异（改编自 [55]）



（a）左侧接触　　（b）右侧接触

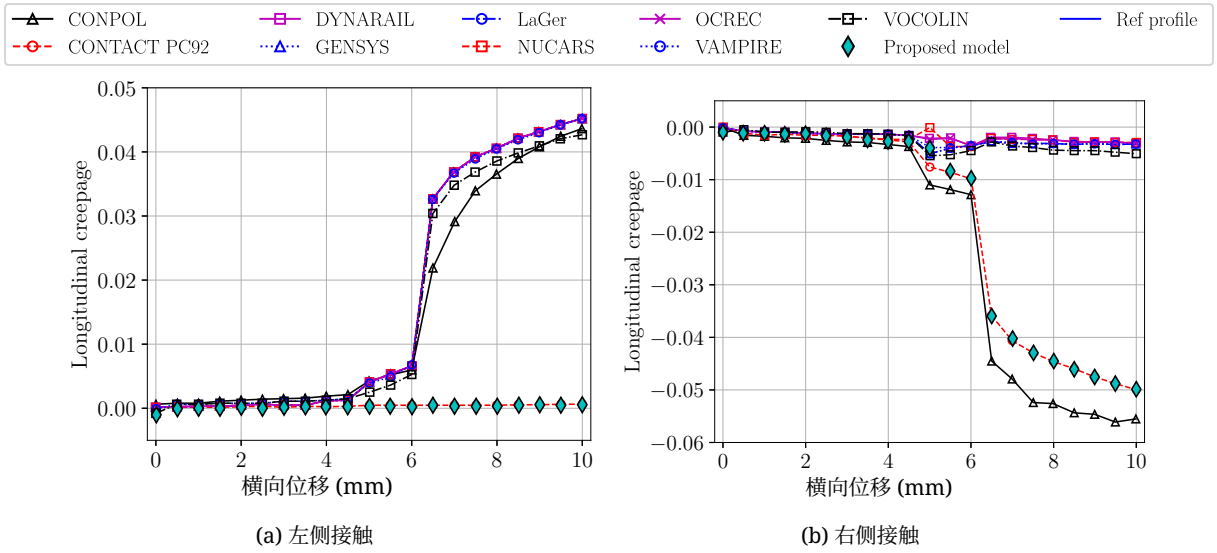
图 12：子工况 A1-2 的轮轨界面接触角（改编自 [55]）

5.1.3. 纵向蠕滑率

图 13 展示了子工况 A2-1 左右侧接触处的纵向蠕滑率。如 [55]，所述，不同代码预测的纵向蠕滑率存在显著差异。本研究所得结果与 CONTACT PC92模型所得结果一致。所有模型中，左右侧纵向蠕滑率之间的差异均保持一致。

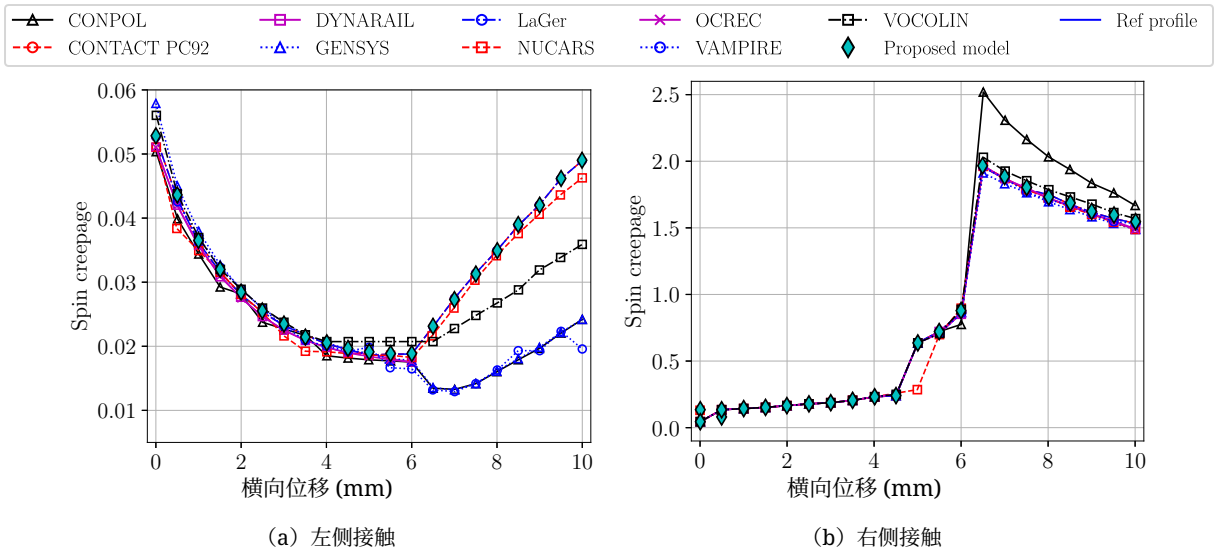
5.1.4. 自旋蠕滑率

图 14 对比了本研究中子工况 A2-2 下左右接触界面的自旋蠕滑率与其他结果。由于自旋蠕滑率直接取决于接触角，因此它们也呈现出相似性（见图 12）。



(a) 左侧接触　　(b) 右侧接触

图 13：子工况 A2-1 左侧和右侧接触处的纵向蠕滑率（改编自 [55]）



（a）左侧接触　　（b）右侧接触

图 14：子工况 A2-2 左侧和右侧接触处的自旋蠕滑率（改编自 [55]）

5.1.5. 横向蠕滑率

如图 15 所示，在横向蠕滑率的预测方面，本研究提出的轮轨模型与大多数程序的变化趋势吻合良好。CONPOL 模型是唯一预测出不同结果的模型，因为该模型未考虑车轮偏航角对接触位置的影响，正如 [55] 的结论所述。

5.1.6. 接触区域

图16展示了本研究所得接触区域与文献[55] 中针对子案例 A1-2采用不同接触模型所得结果的对比。可以看出，横向位移达到 6 mm 后，不同模型预测的接触区域存在明显差异。本研究预测的接触区域与预测数值最高的模型趋势一致，例如 LAGERS、NUCARS 和

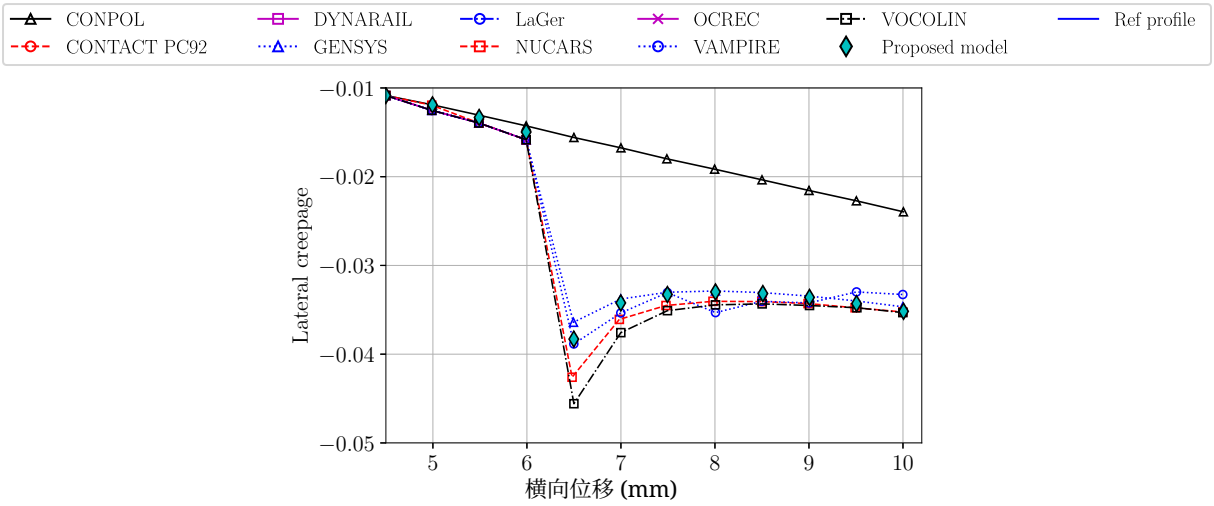
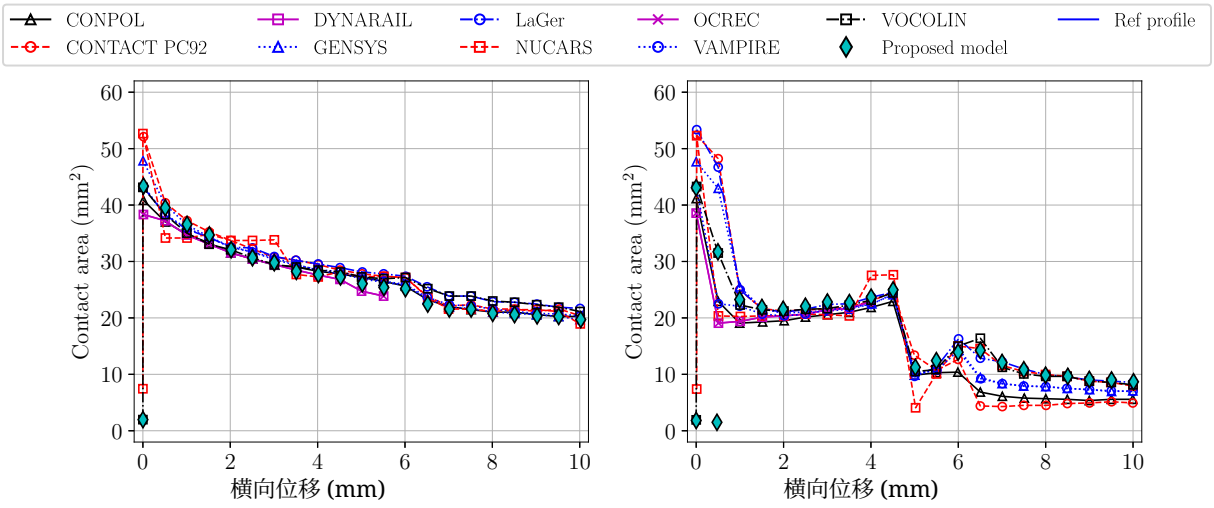


图15：子工况 A2-2 中右侧接触处的横向蠕滑率，定义于局部接触斑坐标系（改编自 [55]）

VOCOLIN 模型。本研究提出的轮轨模型与这些模型一样，在法向接触建模中采用多赫兹方法或非赫兹方法，因此能够更准确地反映接触区域。



(a) 左侧接触　　(b) 右侧接触

图16：子工况 A1-2 左右轮轨接触的接触区域（改编自 [55]

5.2. 风作用下连续梁桥的应用

本节将所提出的模型应用于一个相互作用案例，研究车辆通过连续梁桥的情况，并考虑桥面扭转和弯曲（见图17）。桥梁和列车均承受沿纵向位置变化的气动荷载。这些荷载同时作用于桥梁和列车，使结构发生变形并激发车辆动力学。本例展示了所开发的方法在描述车辆-结构相互作用方面的能力。

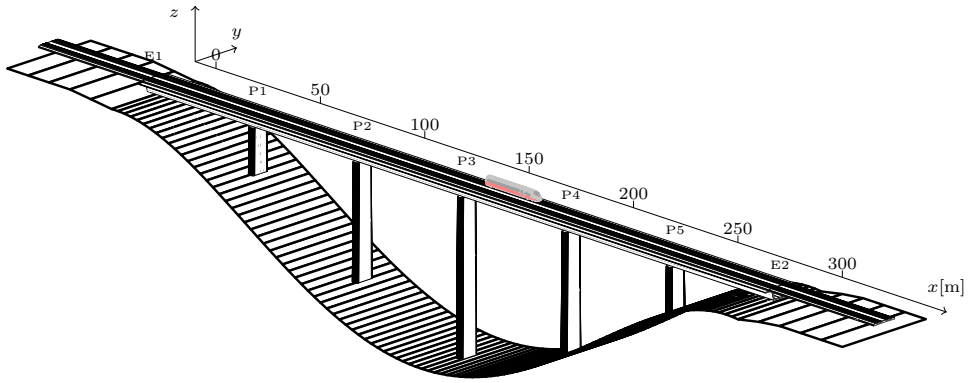


图17：Sc　　相互作用示例的heme：一辆车辆驶过一座连续高架桥。桥梁与tr
ain均受到沿纵向坐标 x变化的风荷载作用。

图17所示的结构为一座双线截面的连续梁桥，总长度为300 m，分为6跨（每跨50 m）。该桥有5个桥墩，高度分别为20 m（P1和P5）、40 m（P2和P4）以及60 m（P3）。主梁横截面沿桥面保持不变，其力学性能见表1。为展示所开发模型的性能，这些参数经过选取，使结构具有极高的横向弯曲柔度，远超桥梁设计规范规定的正常使用极限。

Part	$A\,[\mathrm{m}^2]$	$I_x\,[\mathrm{m}^4]$	I_y [米^4]	J [米^4]
Deck	1.00	0.95	1.00	2.50
P1 和 P5	4.00	2.00	0.75	3.00
P2 和 P4	4.50	2.50	2.00	4.00
P3	5.00	3.00	4.00	7.00

表1：桥梁和桥墩区段的力学性能。 A 为横截面面积； I_x 为主梁的竖向弯曲惯性矩，桥墩的纵向弯曲惯性矩；
I_y 为桥面的横向弯曲惯性矩，桥墩的横向弯曲惯性矩；以及 J
为扭转惯性矩。

主梁和桥墩均采用长度约为1 m的铁木辛柯梁单元（考虑剪切变形）进行建模，并使用代表弹性范围内预应力混凝土的线弹性材料（$E = 30\mathrm{GPa}$、 $\nu = 0.2$和 $\rho = 2500\,\mathrm{kg/m}^3$）。所有支座（桥台和桥面与桥墩连接处）均约束相对平移和扭转转动，同时允许弯曲转动。因此，当车辆沿高架桥行驶时，会在桥面截面产生扭转力矩，并使桥墩发生横向弯曲。

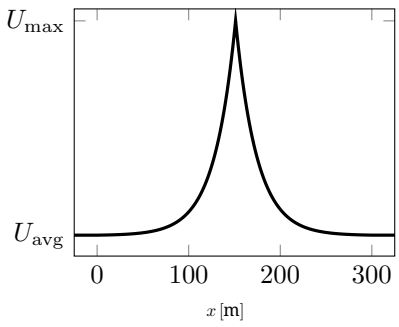
另一方面，本例所考虑的车辆是高速列车中的一节车厢，以恒定速度 $v = 200\mathrm{km/h}$沿背风侧轨道行驶。该车辆的多体模型由一个车体和两个转向架组成，每个转向架包含两个轮对。两套悬挂系统连接不同车体：一系悬挂连接转向架和轮对，二系悬挂则将车体与两个转向架相连。其主要特征列于表2中。

为激发车辆和结构动力学，施加了阵风作用。具体而言，特意采用中国帽形风模型，作为一种简化但严苛的荷载工况。该模型可提供一种

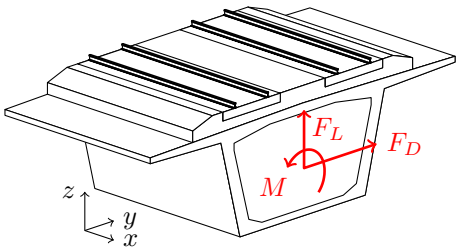
Item	Unit	数值	Item	Unit	数值
m_c	kg	53500.0	I_{cx}	m^4	70000.0
I_{cy}	m^4	2621500.0	I_{cz}	m^4	2621500.0
m_b	kg	3500.0	I_{bx}	m^4	560.0
I_{by}	m^4	315.0	I_{bz}	m^4	1715.0
m_w	kg	1800.0	I_{wx}	m^4	1000.0
I_{wy}	m^4	100.0	I_{wz}	m^4	1000.0
k_{x1}	kN/m	120000.0	k_{y1}	kN/m	12500.0
k_{z1}	kN/m	1200.0	c_{x1}	千牛 ·秒/米	27.9
c_{y1}	千牛 ·秒/米	9.0	c_{z1}	千牛 ·秒/米	10.0
k_{x2}	kN/m	12000.0	k_{y2}	kN/m	240.0
k_{z2}	kN/m	350.0	c_{x2}	kN ·s/m	600.0
c_{y2}	千牛 ·秒/米	30.0	c_{z2}	千牛 · 秒/米	20.0
h_c	m	1.4	h_b	m	0.5
r_0	m	0.46	d_c	m	17.375
d_b	m	2.5	d_w	m	0.753

表2：车辆的力学性能。下标 c 对应车体， b 对应转向架， w 对应轮对。下标 x、 y和 z 表示相应的坐标方向。 m 为各车体的质量， I 为其转动惯量。常数 k 和 c 分别表示两套悬挂系统的刚度和阻尼（下标1表示一系悬挂系统，下标2表示二系悬挂系统）。最后， h_c 表示车体质心相对于轨顶的高度； h_b 对应转向架； r_0 表示车轮的名义滚动半径； d_c 表示沿x方向的转向架中心间距； d_b 表示同一转向架内两个轮对之间的纵向距离； d_w 表示静止状态下同一轮对的两个车轮接触点之间的半间距。

定义明确且具有高度瞬态特征的阵风，用以代表极端情形，可能引发较大的轮轨力变化及安全关键响应。因此，该模型特别适合作为所提出接触公式的压力测试，同时避免随机风模型带来的额外复杂性和不确定性。风荷载通过中国帽函数 [56] 建模，其平均速度为 25 m/s，最大值为 35.17 m/s。风速变化对应一个取决于沿桥梁纵向位置的定常函数（见图 18(a)），最大值出现在 $x = 150$m 处（3号桥墩）。由于车辆以速度 v行驶，



(a) 中国帽形风速函数



(b) 桥梁截面风荷载分量示意图
桥梁截面

图18：桥面某一截面的中国帽形风速函数及气动荷载。

列车感知到风速随时间的变化。然而，这对桥梁而言是静荷载。

风速的竖向分量和纵向分量均不予考虑；仅考虑横向分量（沿 y 轴，见图18(b)）。因此，仅有二维气动

荷载同时作用于桥梁和列车：它们是升力 F_L （沿 z）和阻力F_D （沿 y），以及倾覆力矩 M （绕 x）（见图18(b)）。这些荷载可用表达式 [57]计算。

$$F_D = \frac{1}{2}\,\rho_A\,A\,U_w^2\,c_D\,, \tag{37}$$

$$F_L = \frac{1}{2}\,\rho_A\,A\,U_w^2\,c_L\,, \tag{38}$$

$$M = \frac{1}{2}\,\rho_A\,A\,U_w^2\,c_M\,d\,, \tag{39}$$

其中， ρ_A 为空气密度（取值为 1.25 $\mathrm{kg/m^3}$）； A 和 d 分别为参考面积和参考长度的归一化值； U_w 为风速； c_D、 c_L和 c_M 为相应的气动系数。上述表达式适用于车辆和桥梁。

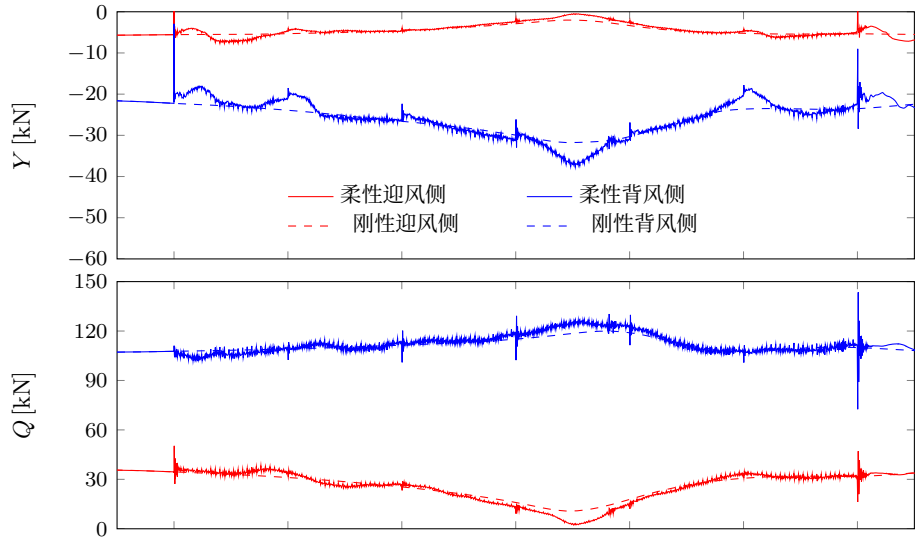
采用中国帽模型引入阵风。假定其作用是瞬时的，因此可以忽略阵风达到最大强度之前桥梁的变形。据此，气动系数按入射角为零进行计算。桥梁采用的气动系数为： $c_D = 0.64$、 $c_L = 0.34$和 $c_M = -0.31$；它们对于 $d = 14\,\mathrm{m}$ 和 $A = L\,d$为无量纲量，其中 L 为所考虑的梁段。

对于车辆， U_w 是风速与车辆速度的合成。因此，风向与列车轨迹方向之间形成水平攻角 β （更多详情参见 [56] ）。 [56] 中规定的气动系数适用于与西门子 Velaro 高速列车类似的车辆。这三个系数取决于水平攻角 β。

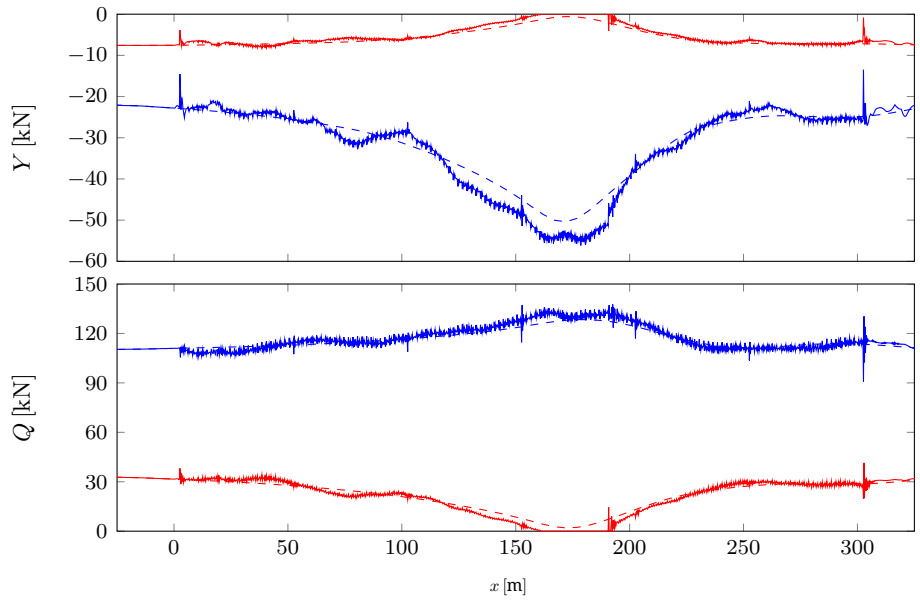
本示例旨在展示所开发的用于将车辆与可变形结构耦合的方法的功能。因此，将获得的结果（针对柔性情况）与在假设结构完全刚性的情况下计算得到的结果（刚性情况）进行比较。为简便起见，本例未考虑轨道不平顺。

在下文所示的所有数值中，横坐标轴上的 x 数值表示车辆第一个轮对的纵向位置： $x = 0\mathrm{m}$对应于位于第一个桥台上方的位置，$x = 300\mathrm{m}$对应于位于第二个桥台上方的位置。

图 19 显示了列车前转向架所有车轮的竖向 Q 和横向 Y 接触载荷。由图可见，结构被视为柔性或刚性时，竖向和横向荷载有所不同。在柔性情况下，第四跨（$x \approx 150\mathrm{m}$，此处气动载荷较强，因此桥梁变形也较大）的竖向荷载为零；也就是说，迎风侧车轮未与钢轨接触。因此，与刚性模型相比，柔性模型的安全性更受影响。力值的差异不仅是由结构的柔性造成的，还因为轨道并非完全笔直或水平，这是由于桥梁在风荷载作用下发生了变形。



(a) 前转向架的前轮对



(b) 前转向架的后轮对

图19：列车前转向架所有车轮的垂向 Q 和横向 Y 接触载荷时程。

值得一提的是，在柔性情况下，载荷历程中会出现由结构响应引起的高频成分。此外，如高架桥入口和出口处所示（位于 $x = 0$m和 $x = 300$m处），竖向荷载值会发生突变。这是轮对从刚性平台驶入柔性平台，反之亦然所造成的。同样，轮对通过桥墩区段时（位于$x = 50$，100，150，200，250 m），也会出现类似但更平缓的现象。

在本示例中，采用Nadal公式 [58]和减载系数评估车辆的安全。Nadal公式通过 $\eta_N = Y/Q$评估爬轨脱轨风险。通常认为，为保证安全，必须确保针对每一个车轮评估 $\eta_N < 0.8$，这些车轮属于

列车。

另一方面，减载系数为 [56]

$$\eta_O = 1 - \frac{Q_{i1} + Q_{j1}}{2\,Q_0}\,, \tag{40}$$

其中 Q_{i1} 和 Q_{j1} 为卸载到同一转向架两个轮对上的车轮垂向载荷值， Q_0 为静态工况下车辆车轮垂向载荷的数值。根据 [56], ，该系数的安全限值为 $\eta_O < 0.9$。此外，众所周知，车轮减载和脱轨是由低频动力学主导的现象。因此，按照EN 14067-6 [56], ，对轮轨力施加截止频率为2 Hz的四阶巴特沃斯低通滤波器，以计算减载系数。对于Nadal系数，采用了UIC 518 [59]中规定的另一种方法。该标准要求根据每个车轮和车轴处Nadal系数的时域信号，计算2 m距离上的移动平均。所得信号随后通过截止频率为20 Hz的低通滤波器。

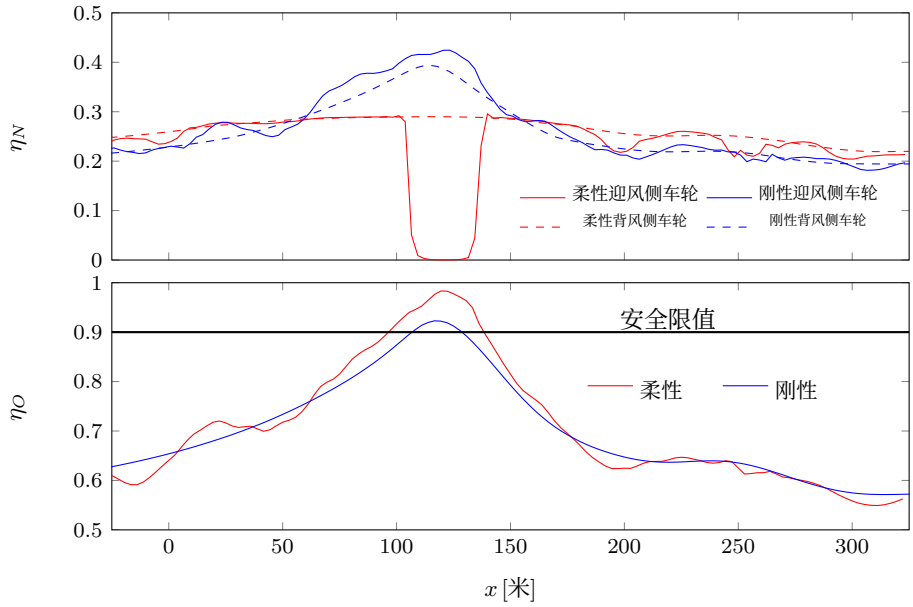


图20：车辆前转向架的安全系数时程。减载系数 η_O对应前转向架，Nadal系数 η_N 对应同一转向架的前轮对

图20展示了列车前转向架的 η_N 和 η_O 时程。可以看出，结构柔性显著影响安全系数的数值，使柔性情况更为不利。可以看到，截面 $x \approx 150$m处的Nadal系数 η_N 为零，因为车轮载荷为零 $Q = Y = 0$。柔性和刚性情况下的减载系数均超过安全限值。

乘用车车体质心的横向和竖向加速度如图 21 所示。加速度的最大值受到桥梁柔性的显著影响。

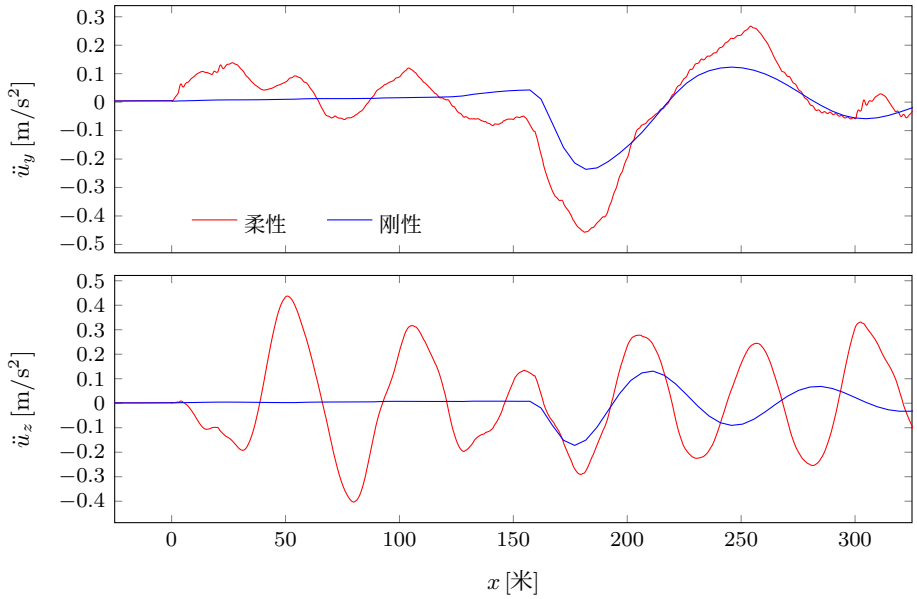


图21：H　　车辆车体质心处计算得到的横向 $\ddot{u}_y$ 和竖向 $\ddot{u}_z$ 加速度时程　　le.

最后，图22展示了桥面跨中截面的竖向和横向位移及加速度。这些时程是在背风侧轨道的中心轴处、轨顶位置计算得到的。

由于风作用在车辆进入桥梁之前就已施加，因此位移初始值不为零。然而，风的平稳性使桥面初始加速度为零。因此，加速度完全由车辆作用引起。

考虑到这里只分析了整列列车中的一节车厢，桥梁的横向和竖向位移都非常大，加速度也同样如此：桥梁柔度与实际情况不符。

6. 总结与结论

我们提出了一种方法，用于建立车辆与结构之间动力相互作用所需的运动学关系。为实现完全通用、适用于各种情况的方法，我们尽可能减少了假设。该方法以绝对坐标为基础，便于集成到现有的有限元和多体动力学软件中。它通过引入一组虚拟节点来描述与每个车辆轮对相关联的轨道截面。这些节点的位置和方向考虑了结构的变形，并允许对轨道几何（不平顺、欠超高等）进行更丰富的描述。所进行的数值测试证明了该方法的准确性，并有助于展望所提方法的能力和适用性。

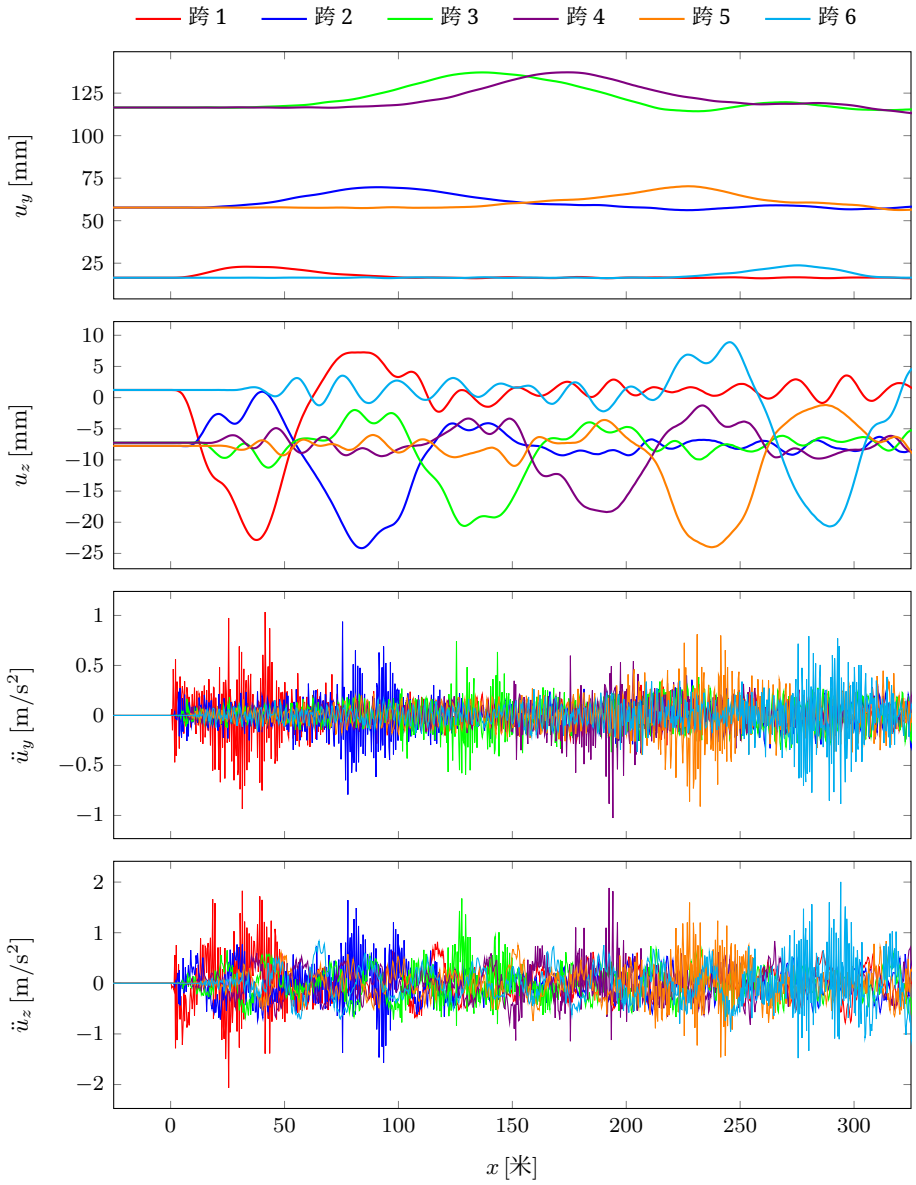


图22：在背风侧轨道的中心轴处、轨顶位置计算得到的桥面横向 u_y 和竖向 u_z 位移，以及横向 $\ddot{u}_y$ 和竖向 $\ddot{u}_z$ 加速度的时程。

附录A. 约束的线性化

本节中，在分别对附录 A.2 和附录 A.3 中的约束（17）和（25）进行线性化之前，先在附录 A.1 中介绍旋转张量以及旋转向量的线性化。

附录*A.1.* 转动张量与旋转场的变分

根据罗德里格斯公式，与旋转向量 $\boldsymbol{\phi}$ 相关联的转动张量 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left[\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right] = \cos|\boldsymbol{\phi}|\,\mathbf{1} + \frac{\sin|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|}\widehat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1-\cos|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\boldsymbol{\phi}\otimes\boldsymbol{\phi}\,, \tag{A.1}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中，$\boldsymbol{\phi}$ 是按如下方式定义的反对称张量：$\boldsymbol{\phi}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{a}$，$\mathbf{1}$ 是单位张量，而 $\otimes$ 是两个向量的并矢积。

另一方面，旋转场 $\boldsymbol{\phi}$ 的变分可写为

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi})\,\delta\boldsymbol{\theta} \tag{A.2}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}$ 为线性化转动的向量场。算子 $\boldsymbol{T}$ 可表示为（更多细节见 [60]）

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{|\boldsymbol{\phi}|\,\sin|\boldsymbol{\phi}|}{2\,(1-\cos|\boldsymbol{\phi}|)}\mathbf{1} - \frac{1}{2}\,\widehat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\,\left(1 - \frac{|\boldsymbol{\phi}|\,\sin|\boldsymbol{\phi}|}{2\,(1-\cos|\boldsymbol{\phi}|)}\right)\boldsymbol{\phi}\otimes\boldsymbol{\phi}\,. \tag{A.3}$$

相应的逆算子 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{T}^{-1}$ 使我们能够写出

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi})\,\delta\boldsymbol{\phi} \tag{A.4}$$

其中

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sin|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|}\,\mathbf{1} + \frac{1-\cos|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\,\widehat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\,\left(1 - \frac{\sin|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|}\right)\boldsymbol{\phi}\otimes\boldsymbol{\phi}\,. \tag{A.5}$$

附录 *A.2.* 移动节点与结构之间约束的线性化

下面详细说明第 3.1 节中引入的移动节点 m 与结构之间约束的线性化。转动约束 (15) 的变分为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_m)\,\delta\boldsymbol{\theta}_m = N_1(\zeta)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_1)\,\delta\boldsymbol{\theta}_1 + N_2(\zeta)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_2)\,\delta\boldsymbol{\theta}_2\,, \tag{A.6}$$

可重新整理为

$$\delta\boldsymbol{\theta}_m = N_1(\zeta)\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_1)\,\delta\boldsymbol{\theta}_1 + N_2(\zeta)\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_2)\,\delta\boldsymbol{\theta}_2\,, \tag{A.7}$$

即节点 m 的转动线性化，可表示为梁节点 $\delta\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta}_2$ 的线性化转动的线性组合。

另一方面，位移约束 (14) 的变分为

$$\delta\boldsymbol{u}_m = N_1(\zeta)\,\delta\boldsymbol{u}_1 + N_2(\zeta)\,\delta\boldsymbol{u}_2 + \delta\boldsymbol{\rho}_m\,, \tag{A.8}$$

其中 常向量 $\boldsymbol{X}_m$、$\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 的变分为零。根据 [60], , 变分 n

$\delta\boldsymbol{\rho}_m$ 为:

$$\delta\boldsymbol{\rho}_m = \widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_m}\,\boldsymbol{\rho}_m = -\widehat{\boldsymbol{\rho}_m}\,\delta\boldsymbol{\theta}_m\,, \tag{A.9}$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{\rho}_m}$如上所述，是一个反对称张量，例如 $\widehat{\boldsymbol{\rho}_m}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\rho}_m \times \boldsymbol{a}$。因此，根据式（A.7）和式（A.9），$\delta\boldsymbol{u}$ 可表示为变化量 $\delta\boldsymbol{u}_1$、$\delta\boldsymbol{u}_2$、$\delta\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta}_2$的线性组合:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{u}_m = N_1(\zeta)\;\delta\boldsymbol{u}_1 + N_2(\zeta)\;\delta\boldsymbol{u}_2 - N_1(\zeta)\;\widehat{\boldsymbol{\rho}_m}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m)\;\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_1)\;\delta\boldsymbol{\theta}_1 \\ - N_2(\zeta)\,\widehat{\boldsymbol{\rho}_m}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_2)\,\delta\boldsymbol{\theta}_2\,.\end{aligned} \tag{A.10}$$

附录 *A.3.* 移动节点与钢轨之间约束的线性化

本节介绍第 3.2 节中推导的移动节点 m和 r 之间的约束（两者分别指 r_1 和 r_2）的线性化。旋转约束（23）的线性化（更多详情见 [60]）

$$\widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_r}\boldsymbol{\Lambda}_r = \widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_m}\boldsymbol{\Lambda}_m\,\boldsymbol{\Lambda}_\Gamma\,, \tag{A.11}$$

其中假设对于给定的轨道位置 s，转动 Γ_θ 为常量，因此 $\delta\boldsymbol{\Lambda}_\Gamma = \boldsymbol{0}$。考虑到转动张量的正交性、$\boldsymbol{\Lambda}_r$ 的定义（式（23）），并将上述表达式右乘 $\boldsymbol{\Lambda}_r^{\mathrm{T}}$，可将其写为

$$\widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_r} = \widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_m}\,, \tag{A.12}$$

为相应的反对称向量

$$\delta\boldsymbol{\theta}_r = \delta\boldsymbol{\theta}_m\,. \tag{A.13}$$

另一方面，位移约束（式（22））的变分为

$$\delta\boldsymbol{u}_r = \delta\boldsymbol{u}_m + \delta\boldsymbol{\rho}_r \tag{A.14}$$

其中，常向量 $\boldsymbol{X}_m$ 和 $\boldsymbol{X}_r$ 的变分为零。最后，变分 $\delta\boldsymbol{\rho}_r$ 计算如下

$$\delta\boldsymbol{\rho}_r = \widehat{\delta\boldsymbol{\theta}_r}\,\boldsymbol{\rho}_r = -\widehat{\boldsymbol{\rho}_r}\,\delta\boldsymbol{\theta}_r = -\widehat{\boldsymbol{\rho}_r}\,\delta\boldsymbol{\theta}_m\,, \tag{A.15}$$

因此，位移约束的线性化表示为 $\delta\boldsymbol{u}$ 的线性组合 $_m$

以及 $\delta\boldsymbol{\theta}_m$:

$$\delta\boldsymbol{u}_r = \delta\boldsymbol{u}_m - \widehat{\boldsymbol{\rho}_r}\,\delta\boldsymbol{\theta}_m\,. \tag{A.16}$$

附录 B. 用于约束的 Abaqus 用户子程序

有限元软件 Abaqus 支持通过允许用户针对特定问题开发新例程来扩展其功能：即所谓的 Abaqus 用户子程序 [41]。在可用于扩展软件功能的方式中，Abaqus 提供了添加新定义的多点约束（MPC）的可能性。MPC 允许将单个节点（从节点）的自由度（位移和转动）建立为一组节点（主节点）的自由度和位置的函数，从而实现运动学约束。Abaqus 的这一功能非常适合实现本文提出的运动学约束。

因此，第一个约束（第 3.1 节）建立在节点 m （从节点）与定义结构和轨道的所有节点（主节点）之间。另一方面，对于第二个约束（第 3.2 节），节点 m是主节点，而节点 r （指 r_1 或 r_2）是从节点。

在此背景下，开发了两个用户子程序来实现这两种约束。它们的伪代码分别见算法 1 和 2。如前所述，第 3 节中详述的运动学约束针对车辆的每个轮对和每个车轮分别设置。因此，每个约束都必须调用这两个例程。为简洁起见，本文所列的伪代码算法仅描述了例程实现中最重要的细节。

两个子程序具有相同的接口：函数接收作为输入参数的所有相关节点在当前构形下的自由度数值、它们的初始位置以及一些常数值；作为输出，例程需要返回从节点自由度的新计算数值，以及约束相对于所有相关自由度（对应于从节点和主节点）的导数。更具体地说，两个子程序涉及的输入变量如下:

时间**：** 当前迭代的仿真时间。

速度**：** 车辆的速度 v （假定在整个仿真过程中保持不变）。

s0**：** 所有相关节点的初始纵向坐标（s）。 这是一个一维数组，其长度为 n[4]。

[4]Abaqus 接口中的多点约束子程序未将 `velocity` 和 `s0` 包含为变量：为简便起见，此处已将它们明确作为输入变量加入。不过，它们已被传递至接口，并打包到 Abaqus 提供的`field` 数组中（有关更多详细信息，请参阅 Abaqus 文档 [41] ）

X：所有节点的初始位置和方向。这是一个维度为 $6 \times$n 的二维数组（前三行对应位移，后三行对应旋转/方向）。

u：所有节点的自由度数值。它是一个二维数组，其维度和数组分布与 X 相同。

n：约束所涉及的节点总数。

该例程期望的输出变量为：

ue：从节点新计算得到的自由度数值。它是一个长度为 6 的一维数组（三个位移和三个转动）。

A：从节点自由度对所涉及自由度的导数。它是一个维度为 $6 \times 6 \times$ n 的三维数组，例如 A(i,j,k) 是从节点第 i 个自由度对第 k 个节点（可以是从节点或主节点）第 j 个自由度的导数。

算法 1 针对第 3.1 节所定义约束的 Abaqus MPC

对于 每个车辆轮对**执行**
  子程序 MPC(时间, 速度, s0, X, u, n, ue, A)
    sm $=$ s0(1) $+$速度 $*$ 时间
    求 n1 和 n2，使得 s1 $=$ s0(n1) $\leq$ sm $<$ s2 $=$ s0(n2)
    求 m1 和 m2，使得 s0(m1) $\leq$ s0(1) $<$ s0(m2)
    $\boldsymbol{X}_m =$ X(1:3,1)，$\boldsymbol{X}_1 =$ X(1:3,n1)，$\boldsymbol{X}_2 =$X(1:3,n2)
    $\boldsymbol{\Phi}_m =$ X(4:6,1)，$\boldsymbol{\Phi}_1^0 =$ X(4:6,m1)，$\boldsymbol{\Phi}_2^0 =$X(4:6,m2)
    $\boldsymbol{u}_1 =$u(1:3,n1)，$\boldsymbol{u}_2 =$u(1:3,n2)
    $\boldsymbol{\phi}_1 =$u(4:6,n1)，$\boldsymbol{\phi}_2 =$u(4:6,n2)
    $\zeta =$ (2 $*$ 秒 $-$ 秒1 $-$ 秒2)/(秒1 $-$ 秒2)，$N_1 = N_1(\zeta)$ 和 $N_2 = N_2(\zeta)$
    通过 $\boldsymbol{\Phi}_1^0$和 $\boldsymbol{\Phi}_2^0$计算 $\boldsymbol{E}_i^b (i = \{x, y, z\})$
    根据 (5) 和 (15) 计算 c_y^m, c_z^m和 $\boldsymbol{\phi}_m$
    根据 (7) 和 (11) 计算 $\boldsymbol{\rho}_m$
    ue(1:3)$= N_1 (\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{u}_1) + N_2 (\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{u}_2) + \boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{X}_m$
    ue(4:6)$= \boldsymbol{\phi}_m = N_1 \boldsymbol{\phi}_1 + N_2 \boldsymbol{\phi}_2$
    A(1:3,1:3,1) $= \mathbf{1}$ ， A(1:3,4:6,1) $= \mathbf{0}$
    A(4:6,1:3,1) $= \mathbf{0}$ ， A(4:6,4:6,1) $= \mathbf{1}$
    A(1:3,1:3,n1) $= -N_1 \mathbf{1}$， A(1:3,4:6,n1) $= N_1 \widehat{\boldsymbol{\rho}_m} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m) \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_1)$
    A(4:6,1:3,n1) $= \mathbf{0}$， A(4:6,4:6,n1) $= -N_1 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m) \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_1)$
    A(1:3,1:3,n2) $= -N_2 \mathbf{1}$， A(1:3,4:6,n2) $= N_2 \widehat{\boldsymbol{\rho}_m} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m) \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_2)$
    A(4:6,1:3,n2) $= \mathbf{0}$， A(4:6,4:6,n2) $= -N_2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}_m) \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}_2)$
    对于 $= 2 :$ n **do**
      如果 i $\neq$ n1 and i $\neq$n2 **那么**
        A(1:6,1:6,i) $= \mathbf{0}$
      结束 if
    结束 for
  结束子程序
结束 for

最后需要指出的是，如算法2所示，某一截面 s 处的轨道不平顺是通过对预加载查找表进行插值得到的。该表包含

算法 2 第 3.2 节中定义的约束的 Abaqus MPC

对于 每个车辆轮对以及 r_1 和 r_2 **执行**
  子程序 MPC(时间, 速度, s0, X, u, n, ue, A)
    sm $=$ s0(1) $+$ 速度 $*$时间
    根据预加载表计算不平顺 $I_y(s)$、 $I_z(s)$、 $I_\theta(s)$。
    $\boldsymbol{X}_r$ = X(1:3,1) , $\boldsymbol{X}_m$ =X(1:3,2), $\boldsymbol{\Phi}_r$ =X(4:6,2), $\boldsymbol{\Phi}_m$ = X(4:6,2)
    $\boldsymbol{u}_m$ =u(1:3,2), $\boldsymbol{\phi}_m$ =u(4:6,2)
    根据式（18）和（20）计算 c_y^r, c_z^r 和 $\boldsymbol{\rho}_r$
    ue(1:3)= $\boldsymbol{X}_m + \boldsymbol{u}_m + \boldsymbol{\rho}_r - \boldsymbol{X}_r$
    ue(4:6)= spurrier($\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\phi}_m)\,\boldsymbol{\Lambda}(\Gamma_\theta \boldsymbol{e}_x^r)$)
    A(1:3,1:3,1) $= \mathbf{1}$, A(1:3,4:6,1) $= \mathbf{0}$
    A(4:6,1:3,1) $= \mathbf{0}$, A(4:6,4:6,1) $= \mathbf{1}$
    A(1:3,1:3,2) $= -\mathbf{1}$, A(1:3,4:6,2) $= \widehat{\boldsymbol{\rho}_r}$
    A(4:6,1:3,2) $= \mathbf{0}$, A(4:6,4:6,2) $= -\mathbf{1}$
  结束子程序
结束循环

I_y、 I_z和 I_θ 的数值，涵盖相对于一组纵向坐标的两根钢轨。该表以逗号分隔值格式存储在外部文件中，并在仿真开始时通过正确实现 Abaqus 提供的 Uexternadb 子程序进行预加载（更多详情请参见 [41]）。

致谢

Pablo Antolin 感谢瑞士国家科学基金会通过项目 FLAS$_h$ （编号：200021 214987）提供的资金支持。

Khanh Nguyen 和 Jose M. Goicolea 感谢欧洲铁路联合事业在地平线欧洲计划研究与创新计划下根据拨款协议 No. 101121765（HORIZON-ER-JU-2022-ExplR-02）提供的资金。本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲铁路联合事业的观点。欧盟和拨款机构均不对此承担责任。

参考文献

[1] W. Zhai、Z. Han、Z. Chen、L. Ling、S. Zhu, 《车轨桥动力相互作用：最新进展综述》, Veh Syst Dyn 57 (2019) 984–1027。

[2] P. A. Montenegro、H. Carvalho、D. Ribeiro、R. Cal.cada、M. Tokunaga、M. Tanabe、W. Zhai, 《桥梁上列车运行安全评估：文献综述》, Eng Struct 241 (2021) 112425。

[3] L. Fr^yba, 《铁路桥梁动力学》, 第2版, Thomas Telford, 布拉格, 1996年 .

[4] Y.-B. Yang、J.-D. Yau、Y.-S. Wu, 《车桥相互作用动力学：在高速铁路中的应用》, World Scientific, 新加坡, 2004年。

[5] M . Tanabe, H. Wakui, N. Matsumoto, H. Okuda, M. Sogabe, S. Komiya, Computational Model

在铁路结构上运行的新干线列车及其工业应用，《材料加工技术杂志》140 (1-3) (2003年) 705–710。[6] H. Xia、N. Zhang、G. De Roeck，铰接列车作用下高速铁路桥梁的动力分析，《Comput Struct》81 (26-27) (2003年) 2467–2478。[7] Y. L. Xu、N. Zhang、H. Xia，横风作用下列车与斜拉桥耦合系统的振动，《Eng Struct》26 (10) (2004年) 1389–1406。[8] A. A. Shabana、K. E. Zaazaa、H. Sugiyama，《铁路车辆动力学：一种计算方法》，CRC出版社，博卡拉顿，2008年。[9] D.-V. Nguyen、K.-D. Kim、P. Warnitchai，使用线性化轮轨界面对车辆—子结构动力相互作用和车轮运动进行仿真的流程，《有限元分析与设计》45 (5) (2009年) 341–356。

[10] P. Antol´ín, J. M. Goicolea, J. Oliva, M. A. Astiz，在有限元框架内采用简化轮轨接触方法的非线性列车—桥梁横向相互作用，J Comput Nonlinear Dyn 7 (4) (2012) 041014。

[11] P. Antol´ın、N. Zhang、J. M. Goicolea、H. Xia、M. A. Astiz、J. Oliva，非线性轮轨接触力的考虑：高速铁路中车辆—桥梁动力相互作用，J Sound Vib 33 (5) (2013) 1231–1251。[12] W. Zhai、H. Xia、C. Cai、M. Gao、X. Li、X. Guo、N. Zhang、K. Wang，高速列车—轨道—桥梁动力相互作用——第 I 部分：理论模型与数值模拟，Int J Rail Transp 1 (1-2) (2013) 3–24。[13] H. Qiao、H. Xia、X. Du，采用子结构法对列车—桥梁—基础—土体整体系统进行动力分析，Int J Str Stab Dyn 18 (5 2018)。[14] X. Xiao、W. X. Ren，一种用于移动列车荷载作用下铁路桥梁动力分析的通用三维车辆—轨道—桥梁单元，Int J Str Stab Dyn 19 (4 2019)。[15] Y. Liu、Q. Gu，一种用于车—轨—桥系统动力分析的改进数值子结构法，Int J Str Stab Dyn 20 (11 2020)。[16] P. A. Montenegro、D. Ribeiro、M. Ortega、F. Millanes、J. M. Goicolea、W. Zhai、R. Cal¸cada，列车—轨道—桥梁系统特性对高速列车抵御横风运行性能的影响——第 I 部分：运行安全，J Wind Eng Ind Aerodyn 224 (2022) 104974。

[17] J. Pan、Q. Gu、W. Guo、H. Liu，采用统一双坐标模型对车—轨—桥系统进行高效建模与安全分析，Int J Str Stab Dyn (2024)。[18] N. Zhang、H. Xia、W. W. Guo，高速列车作用下的车桥相互作用分析，J Sound Vib 309 (3-5) (2008) 407–425。[19] M. Majka、M. Hartnett，速度、荷载和阻尼对铁路桥梁及车辆动力响应的影响，Comput Struct 86 (6) (2008) 556–572。[20] J. W. Kwark、E. S. Choi、Y. J. Kim、B. S. Kim、S. I. Kim，移动高速列车作用下两跨连续混凝土桥梁的动力行为，Comput Struct 82 (4-5) (2004) 463–474。[21] M.-K. Song、H.-C. Noh、C.-K. Choi，一种新的高速列车—桥梁相互作用三维有限元分析模型，Eng Struct 25 (13) (2003) 1611–1626。[22] J. Oliva、J. M. Goicolea、P. Antol´ın、M. A. Astiz，完整路面描述在车桥相互作用动力学中的重要性，Eng Struct 56 (2013) 466–476。[23] L. Kwasniewski、H. Li、J. Wekezer、J. Malachowski，车桥相互作用的有限元分析，Finite Elem in Anal Des 42 (11) (2006) 950–959。[24] K. Henchi、M. Fafard、M. Talbot、G. Dhatt，采用模态与物理分量耦合法对移动车辆作用下的桥梁进行动力分析的高效算法，J Sound Vib 212 (4) (1998) 663–683。[25] S. Neves、P. Montenegro、A. Azevedo、R. Cal¸cada，一种分析非线性车-结构相互作用的直接法，Eng Struct 69 (2014) 83–89。[26] N. Zhang、H. Xia、W. W. Guo、G. De Roeck，一种车桥线性相互作用模型及其验证，Int J Str Stab Dyn 10 (2) (2010) 335–361。[27] J. M. Olmos、M. A. Astiz，高速列车运行时高墩高架桥的横向动力响应分析，Eng Struct 56 (2013) 1384–1401。[28] P. Montenegro、S. Neves、R. Cal¸cada、M. Tanabe、M. Sogabe，用于分析列车-结构横向动力相互作用的轮轨接触公式，Comput Struct 152 (2015) 200–214。[29] E. G. Dimitrakopoulos、Q. Zeng，列车与曲线铁路桥梁相互作用的三维动力分析方案，Comput Struct 149 (2015) 43–60。[30] P. A. Montenegro、R. Cal¸cada，适用于铁路车辆-结构相互作用应用的轮轨接触模型：开发与验证，Railw Eng Sci 31 (2023) 181–206。

[31] G. Chen, W. Zhai，一种新的轮轨空间动力耦合模型及其验证，Veh Syst Dyn 41 (4) (2004年) 301–322。[32] J. Pombo, J. Ambr´osio, M. Silva，一种用于铁路动力学的新型轮轨接触模型，Veh Syst Dyn 45 (2) (2007) 165–189。[33] Y. Wu, Y. Yang, J. Yau，列车-轨道-桥梁相互作用问题的三维分析，Veh Syst Dyn 36 (2001) 1–35。[34] J.-D. Yau, Y.-B. Yang，高速列车通行斜拉桥时的减振，Finite Elem Anal Des 40 (3) (2004年) 341–359。[35] F. Yang, G. A. Fonder，桥梁-车辆系统动力响应的迭代求解方法，Earthquake Engng Struct Dyn 25 (2) (1996) 195–215。[36] A. A. Shabana, J. R. Sany，轨道车辆轨道仿真与柔性多体动力学综述，Nonlinear Dynamics 26 (2) (2001) 179–210。[37] I. Romero，转动插值及其在几何精确杆有限元模型中的应用，Comput Mech 34 (2) (2004年) 121–133。[38] M. A. Crisfield, G. Jeleni´c，几何精确三维梁理论中应变度量及其有限元实现的客观性，Proc R Soc Lond A 455 (1983) (1998年) 1125–1147。[39] H. Claus, W. Schiehlen，铁路转向架结构振动的建模与仿真，Vehe Syst Dyn 29 (1) (1997) 538–552。[40] R. A. Spurrier，关于“从方向余弦矩阵无奇异地提取四元数”的评论，J Spacecr Rockets 15 (4) (1978) 255。[41] 达索系统，Abaqus 2023，Abaqus统一有限元分析软件（2023）。.[42] H. Hertz，关于固体弹性体的接触及其硬度，Jorunal f¨ur reine und agewandte Mathematik 92 (1882) 157–171。[43] J. P. Pascal, G. Sauvage，将多接触轮轨问题简化为一个等效接触斑的新方法，Veh Syst Dyn 20 (sup1) (1992) 475–489。[44] J. Piotrowski, H. Chollet，包含多点接触的车辆系统动力学轮轨接触模型，Veh Syst Dyn 43 (6-7) (2005) 455–483。[45] K. L. Johnson，接触力学，剑桥大学出版社，剑桥，2000。[46] J.-B. Ayasse, H. Chollet, J. P. Pascal，干摩擦转向架的简化建模，技术报告，INRETS（1987）。

[47] W. Kik, J. Piotrowski，一种快速近似方法，用于计算滚动过程中车轮与钢轨接触处蠕滑力的法向载荷，载于：I. Zobory（编），第二届钢轨/车轮系统接触力学与磨损迷你会议论文集，布达佩斯，1996年。[48] C. Linder，具有不圆度的铁路车轮磨损，学位论文，ETH（1997）。[49] J. J. Kalker，赫兹蠕滑力定律表，载于：I. Zobory（编），第二届车轮/钢轨系统接触力学与磨损迷你会议，布达佩斯，1996年，第11–20页。[50] E. A. H. Vollebregt，CONTACT用户指南：Vollebregt与Kalker的滚动与滑动接触模型，技术报告，VORtech BV，代尔夫特，荷兰（2012）。[51] J. J. Kalker，接触问题的虚功原理及其对偶，Ing Arch 56 (6) (1986) 453–467。[52] J. J. Kalker，半空间弹性场的数值计算，Commun Appl Numer Methods 2 (1986) 401–410。[53] J. J. Kalker，滚动接触中的三维弹性体（固体力学及其应用），Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1990。[54]P. Shackleton, S. D. Iwnicki，车轮–钢轨接触基准，技术报告，曼彻斯特都会大学，曼彻斯特（2006年）。[55] P. Shackleton, S. D. Iwnicki，铁路车辆仿真用车轮–钢轨接触代码比较：曼彻斯特接触基准简介及初步结果，Veh Syst Dyn 46 (1-2) (2008年) 129–149。[56] 欧洲标准化委员会，铁路应用—空气动力学—第6部分：横风评估的要求和试验程序，EN14067-6，布鲁塞尔，2008年。[57] E. Simiu, R. H. Scanlan，风对结构的影响，第3版，John Wiley & Sons，纽约，1996。[58] 欧洲铁路局，关于泛欧洲高速铁路系统“机车车辆”子系统的互操作性技术规范，布鲁塞尔，2008年。[59] 国际铁路联盟，从动态行为、安全、轨道疲劳和运行行为角度对铁路车辆进行测试与批准，UIC 518号规程，2007年。[60] J. C. Sim´o, L. Vu-Quoc，大运动杆件的空间动力学——几何精确方法，Comput Meth Appl Mech Eng 66 (2) (1988) 125–161。