分类　　柔性 Kokotsakis 多面体与可约四边形

刘洋，中国科学院数学与系统科学研究院，中国科学院，中国

我们研究一类称为具有四边形底面的 Kokotsakis 多面体的机构。这些多面体是由 3×3 四边形网格构成的，其面为刚体，并通过公共边处的铰链相互连接。与现有研究不同，这些四边形面不一定必须是平面的。一般而言，这样的网格是刚性的。寻找并分类其中的柔性多面体是一个由来已久的问题，但迄今仍基本未获解决。可以看出，不同面之间二面角的正切值通过多项式代数相关。具体而言，本文讨论这些多项式可约的情形。我们探究可约性的条件，以刻画所有可能导致柔性多面体的形状约束。

附加关键词和短语：Kokotsakis 多面体、柔性网格、因式分解、结式、莫比乌斯变换、射影几何。

1 引言

科学与工程领域的许多学科都日益关注柔性或可展开结构。这些结构能够在不同形态状态之间连续变形，并广泛应用于机器人、太阳能电池、超材料和建筑等领域。

可展开或柔性结构可能包含非刚性部件。然而，本文仅讨论经典意义上的机构。它们由通过铰链连接的刚体构成。我们关注的是柔性四边形网格，其面为刚性面，并通过公共边处的铰链连接。众所周知，当且仅当任意一个 3×3 子网格都是柔性的（2×2 网格总是柔性的）时，这种四边形网格才是机构。Schief 等人在 [9], 的定理 3.2 中证明了这一点；他们针对平面面提出问题，但证明并未用到平面性。因此，确定所有柔性四边形网格的首要关键步骤是对所有柔性 3×3 四边形网格进行分类，这也是本文的主要贡献。

柔性多面体的问题可以追溯到上个世纪。Kokotsakis 提出了与本文研究对象非常相似的机构 [4]。他的机构具有一个中央平面面，但不一定是四边形，周围环绕着一圈平面面。这项工作启发了对这类结构的进一步研究 [12], ，尤其是聚焦于折纸方面的研究 [13–15]。

Izmestiev [2] 在这一领域取得了突破，他对具有平面面的柔性 3×3四边形网格进行了完整分类。然而，这些类型中哪些能够成为更大型柔性$n \times m$ 四边形网格的一部分，目前仍不得而知。Schief 等人[9] 将具有平面面的更大型柔性四边形网格作为离散可积系统，以及光滑曲面上共轭网的等距变形对应物进行了研究。他们的研究成果主要建立在二阶无穷小柔性的基础上。Sauer 的著作 [7]中收录了大量关于一阶无穷小柔性的研究成果。书中还详细研究了具有平面面、且属于机构的特殊四边形网格。这类网格分为两种。其中一种是所谓的 Voss 网格，它们是具有测地线共轭网的曲面的离散对应物，最早由 Voss [16] 描述（另见 [9]）。另一种是 T网，最早由 Graf 和 Sauer [8] 描述（近期的英文介绍见 [11]），它们是成型曲面的一种仿射推广的离散对应物。著名的三浦折纸结构 [5]就是 T网的一个特例。T网还能够形成管状柔性结构和可平折超材料 [10]。Izmestiev 等人 [3]近期研究了 T网及其光滑对应物的等距变形。

作者地址：刘洋，中国科学院数学与系统科学研究院，中国科学院，北京，中国，100000，yangrio@amss.ac.cn。

Sauer [7],提出了是否存在具有斜四边形面的柔性 Kokotsakis 多面体这一问题，但该问题长期未获解。Nawratil 于 2022 [6], 构造了这类多面体的首个非平凡实例，并建立了若干具有“等角型”的柔性网格。这意味着其扭曲面受到了一些特定形状约束。然而， [6] 的研究仅给出了少数特解，并未对等角网格进行系统分析。

本文将通过对等角型进行全面分析，并给出一种涵盖所有可能柔性等角网格的系统构造，来完成 Nawratil 的工作 [6] 。除此之外，我们还将介绍新的柔性成员——奇异类型及其相应的构造。这项工作将为一般柔性 3×3 扭曲面网格的完整分类奠定良好基础。

1.1 主要方法与贡献

本文研究的主要机构是图1左侧的柔性网格[1]，它由九个通过铰链连接的四边形组成，使相连的面能够转动。给定一个网格，便可唯一确定一个方程组，其解集就是该网格运动的轨迹。我们将证明，该轨迹通常是由一个多项式方程组描述的四维空间中的一条曲线

$$M:\{G^{(1)}(x_1,x_2)=G^{(2)}(x_2,x_3)=G^{(3)}(x_3,x_4)=G^{(4)}(x_4,x_1)=0\} \tag{1}$$

其中， $G^{(i)}$ 的显式形式将在定义 2.4 中给出。我们将方程组拆分为两个子系统 S_1：$\{G^{(1)}=G^{(2)}=0\}$和 S_2：$\{G^{(3)}=G^{(4)}=0\}$，因此 M的解集等于以下纤维积

$$\mathrm{Sol.}(M)=\mathrm{Sol.}(S_1)\underset{\{x_1,x_3\}}{\times}\mathrm{Sol.}(S_2):=\{(x_i)_{i=1}^4|(x_1,x_2,x_3)\in\mathrm{Sol.}(S_1),(x_3,x_4,x_1)\in\mathrm{Sol.}(S_2)\}. \tag{2}$$

通常，四个未知数的四个方程会产生有限多个解。然而，对于柔性网格，Sol.(M)包含无限多个解，这要求Sol.(S_1)和Sol.(S_2)的（x_1， x_3）投影相互重叠（而不仅仅是相交）。特别地，如果我们在 $\mathbb{C}^4$中寻找Sol.(M)，这等价于说，下面的结式具有公因子，即

$$\gcd(\mathrm{Res}(G^{(1)},G^{(2)};x_2),\mathrm{Res}(G^{(3)},G^{(4)};x_4))\neq 1.$$

在这方面，我们首先基于Sol.(S_i)的不可约分支（代数簇）研究 S_i。随后，我们讨论 S_1 和 S_2 的所有可能组合，使得方程（2）中的纤维积是一个无限集。最后，我们通过 M得到了柔性网格的分类与构造。

我们的主要贡献在于研究 S_i 均由可约多项式组成的网格。也就是说，所有 $G^{(i)}$ 都是可约的。我们研究具有此性质的 S_i，然后为 S_1 和 S_2的所有可能组合提供构造，以形成一个方程组 M，该方程组对应于一个柔性网格。然而，在第6节中，我们构造了一种所谓的**常值网格**，它可能包含不可约的 $G^{(i)}$。这种特殊类型比其他类型更容易构造。

请注意：本文的许多证明和论证都使用了符号计算。我们为读者提供 MapleTM 脚本[2]，以验证所有非平凡的计算结果。



图 1。左：3×3 四边形网格示意图，等价地，也可表示为具有四边形底面的 Kokotsakis 多面体；右：内角固定为 λ'_i、γ'_i、μ'_i、δ'_i 的平面面柔性网格。可动角 α_i 是中心面与附着面之间的二面角。这些角的严格定义见附录 A。

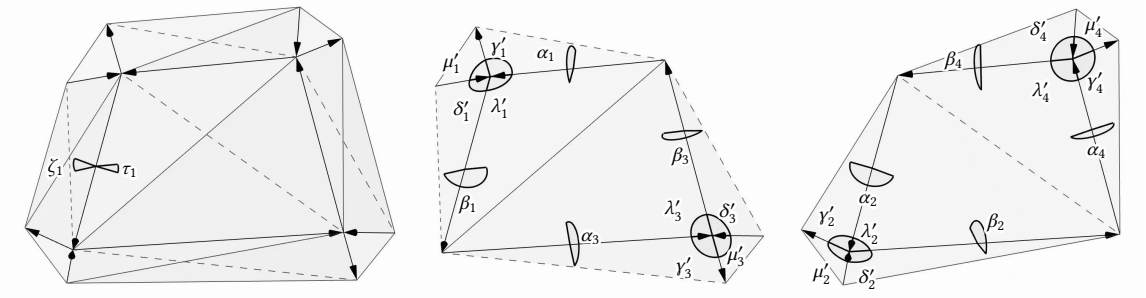

图 2。斜可动网格（左）及其分解（中、右）。(λ'_i、γ'_i、μ'_i、δ'_i) 是定向边之间的固定角；τ_i、ζ_i 分别是中心四面体与附着四面体沿各自公共边的固定二面角；α_i、β_i 是可动二面角（平面情形下为 $\alpha_{i+1} = \beta_i$）。所有角均可用类似方式定义（见附录 A）。

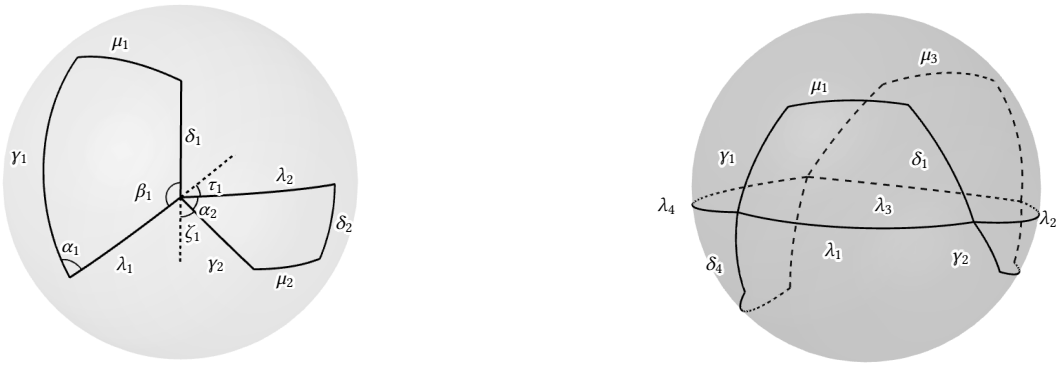

图3. 局部（左）和整体（右）的图2中网格的球面连杆机构，(λ_i, γ_i, μ_i, δ_i) 和 (λ'_i, γ'_i, μ'_i, δ'_i) 分别与 π互补分别，间隙 β_1和 α_2之间由 $\tau_1 + \zeta_1$造成。

2 基本设置

2.1 从 $\mathbb{R}^3$ 到球面

从图1左图可以明显看出，网格的柔性仅取决于中心四边形邻域的结构。因此，在不失一般性的情况下，我们可以裁剪网格，使其角面恰好都是三角形。图1右图展示了一个具有 9 个平面四边形的柔性网格。同样地，如果网格包含九个斜四边形，则每个四边形都可以视为一个刚性四面体（添加对角线后，斜四边形就变成了四面体）。因此，图1右图可以推广为图2左图所示的 3×3 四面体网格。

分析柔性的经典方法是，在中心面的每个顶点处考虑一个由定向边定义的球面四边形：在图2中，将所有向量收集到原点处，这些向量的方向与单位球面相交，并确定了网格的一个**球面连杆机构**，如图3右图所示，其中包含 4 个球面四边形。[3] 每个四边形的每条“边”都是一段大圆弧。特别地，连杆机构中的每个四边形，例如（$\lambda_1,\ \gamma_1,\ \mu_1,\ \delta_1$），都与图2中由（$\lambda_1',\ \gamma_1',\ \mu_1',\ \delta_1'$）围成的角相对应。不难看出，（$\lambda_i,\ \gamma_i,\ \mu_i,\ \delta_i$）和（$\lambda_i',\ \gamma_i',\ \mu_i',\ \delta_i'$）分别与 π 互为补角。角 $\tau_i,\ \zeta_i$ 是相应四面体中的（内部）二面角。所有这些角将在附录 A 中严格定义。总而言之，对于网格及其球面连杆机构，边之间的角被转换为四边形的圆弧，平面之间的角被转换为圆弧之间的角，相邻四边形的柔性铰链被转换为相邻圆弧的柔性关节。因此，网格的柔性等价于球面连杆机构在以下变形规则下的柔性：

- 每个四边形的所有弧长均已固定；
- 所有角 τ_i 在 λ_i 与 λ_{i+1} 之间均已固定；
- 所有角 ζ_i 在 δ_i 与 γ_{i+1} 之间均已固定。

2.2 从球面到多项式

根据图 3 左图，通过设定

$$x_i=\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right),\ y_i=\tan\left(\frac{\beta_i}{2}\right),\ f_i=\tan\left(\frac{\zeta_i+\tau_i}{4}\right) \tag{3}$$

我们得到 y_i 与 x_{i+1} 之间的可逆关系：$y_i=\frac{(1-f_i^2\ x_{i+1}+2f_i)}{1-f_i^2-2f_ix_{i+1}}$，或

$$h^{(i)}(y_i,x_{i+1})=(1-f_i^2)(y_i-x_{i+1})-2f_i(y_ix_{i+1}+1)=0,\ f_i\in(-1,1],$$

其中 $i=1$、2、3、4 和 $x_5=x_1$。

当 $\lambda_i,\ \gamma_i,\ \mu_i,\ \delta_i\in(0,\ \pi)$ 时，图 3 左侧四边形的弧长和角在变形过程中满足一个多项式方程。这意味着，当四边形改变形状，而所有弧仍贴合球面且长度保持不变时，内角 $\alpha_i,\ \beta_i$ 必须满足所谓的 Bricard 方程 [1]（证明也可见于[12]）。

$$\begin{cases} A_ix_i^2y_i^2+B_ix_i^2+C_iy_i^2+D_ix_iy_i+E_i=0,\ \text{or}\\ g^{(i)}(x_i,y_i):=a_ix_i^2y_i^2+b_ix_i^2+c_iy_i^2+x_iy_i+e_i=0\end{cases} \tag{4}$$

[1]本文中，默认情况下，“网格”始终指面不一定共面的四边形网格。[2] https://drive.google.com/file/d/1oYnGvNC10R-36iqErdaAw6CPUxRd3BBu/view?usp=sharing [3]为区别于欧几里得四边形，我们将球面四边形简称为四边形。

其中

$$\begin{cases} A_i = \cos(\lambda_i + \gamma_i + \delta_i) - \cos(\mu_i), \\ B_i = \cos(\lambda_i + \gamma_i - \delta_i) - \cos(\mu_i), \\ C_i = \cos(\lambda_i - \gamma_i + \delta_i) - \cos(\mu_i), \\ D_i = 4\sin(\gamma_i)\sin(\delta_i), \\ E_i = \cos(\lambda_i - \gamma_i - \delta_i) - \cos(\mu_i), \\ (a_i, b_i, c_i, e_i) = \left(\frac{A_i}{D_i}, \frac{B_i}{D_i}, \frac{C_i}{D_i}, \frac{E_i}{D_i}\right). \end{cases}$$

现在，所有可动角 α_i, β_i（亦称 x_i, y_i）由八个多项式方程$\{h^{(i)} = g^{(i)} = 0\}_{i=1}^{4}$相关联。然而，$y_i$ 在消元（通过结式）之后变得多余

$$\{G^{(i)}(x_i, x_{i+1}) := \mathrm{Res}(g^{(i)}, h^{(i)}; y_i) = 0\}_{i=1}^{4} \tag{5}$$

而上述 $G^{(i)}$ 正是我们在方程组 (1) 中所提到的。

2.3 四边形的形状限制

显然，单个四边形 Q_i通常是柔性的。在所有弧长 $\lambda_i, \gamma_i, \mu_i, \delta_i$固定的情况下，其形状能够连续变化。这里我们不考虑 0 或 π 作为其中一个长度的情形，这意味着图2中相应的四边形退化为一个三角形。因此，有理由认为

- General assumption: $\boxed{\lambda_i, \delta_i, \mu_i, \gamma_i \in (0, \pi), \forall i = 1, 2, 3, 4}$

因为它们可以由内积定义。因此，Bricard 方程 (4) 适用于网格的所有球面连杆机构。

本文特别关注两类球面四边形。这里沿用 [2] 中的定义。

定义 *2.1*。 弧长为 $(\lambda_i, \delta_i, \mu_i, \gamma_i)$ 的四边形 Q_i，若满足以下相应条件之一，则称为**（反）等角**或**（反）等腰图形**:

(i) $\lambda_i = \mu_i, \gamma_i = \delta_i$ (isogram); (ii) $\lambda_i + \mu_i = \gamma_i + \delta_i = \pi$ (antiisogram).

定义 *2.2*。 弧长为 $(\lambda_i, \delta_i, \mu_i, \gamma_i)$ 的四边形 Q_i，若满足以下相应条件之一，则称为**（反）鸢形**或**（反）风筝形**:

(iii) $\lambda_i = \gamma_i, \mu_i = \delta_i$ (deltoid); (iv) $\lambda_i + \gamma_i = \mu_i + \delta_i = \pi$ (antideltoid);
(v) $\lambda_i = \delta_i, \gamma_i = \mu_i$ (deltoid); (vi) $\lambda_i + \delta_i = \gamma_i + \mu_i = \pi$ (antideltoid).

通过简单计算可得以下结论。

引理 2.3。 在 *Bricard* 方程(4)中，（反）等边形和（反）风筝形的条件分别等价于:

(i) $\Leftrightarrow b_i = c_i = 0$; *(ii)* $\Leftrightarrow a_i = e_i = 0$; *(iii)* $\Leftrightarrow c_i = e_i = 0$;
(iv) $\Leftrightarrow a_i = b_i = 0$; *(v)* $\Leftrightarrow b_i = e_i = 0$; *(vi)* $\Leftrightarrow a_i = c_i = 0$.

2.4 代数中的重新表述

我们已经看到，给定的网格（图1左）如何逐步转化为多项式方程组(5)。基于如下事实，直接对其相应的多项式进行网格的柔性分析是自然的：该网格是柔性的 $\Leftrightarrow$ _____

方程组(5)有无穷多个解。[4] 因此，我们需要重新表述柔性问题，并以代数方式重申本文的目标。

以下记号最为重要，必须专门定义，并在全文中始终保持其含义不变。

定义 *2.4*。 $g^{(i)} \in \mathbb{R}[x_i, y_i]$ 是如下形式的多项式

$$g^{(i)}(x_i, y_i) := a_i x_i^2 y_i^2 + b_i x_i^2 + c_i y_i^2 + x_i y_i + e_i$$

其中系数满足

$$(1 - 4a_i e_i - 4b_i c_i)^2 > 64 a_i b_i c_i e_i,\ |b_i + c_i - a_i - e_i| < 1. \tag{6}$$

$h^{(i)} \in \mathbb{R}[y_i, x_{i+1}]$ 是由常数 $f_i \in (-1, 1]$,

$$h^{(i)}(y_i, x_{i+1}) := (1 - f_i^2)(y_i - x_{i+1}) - 2f_i(y_i x_{i+1} + 1).$$

最后， $G^{(i)} \in \mathbb{R}[x_i, x_{i+1}]$ 是结式

$$G^{(i)}(x_i, x_{i+1}) := \mathrm{Res}(g^{(i)}, h^{(i)}; y_i).$$

指标总是按模 4 考虑，例如 $x_5 = x_1$。

Corollary 2.5. *Every* $g^{(i)}$ *satisfies* $(b_i - a_i)(c_i - e_i) < \frac{1}{4}$ *and* $(c_i - a_i)(b_i - e_i) < \frac{1}{4}$.

证明。注意到 $|x + y| < 1 \Rightarrow xy < \frac{1}{4}$，而定义 2.4 要求

$$|b_i + c_i - a_i - e_i| = |(b_i - a_i) + (c_i - e_i)| = |(c_i - a_i) + (b_i - e_i)| < 1.$$

□

注 1 （根据系数恢复网格）。 不等式 (6)由方程 (4)导出，其中 $0 < \lambda_i,\ \gamma_i,\ \mu_i,\ \delta_i < \pi$。符号计算可以证明

$$(1 - 4a_i e_i - 4b_i c_i)^2 > 64 a_i b_i c_i e_i \Leftrightarrow (\sin(\lambda_i)\sin(\mu_i)\csc(\delta_i)\csc(\gamma_i))^2 > 0,$$
$$|b_i + c_i - a_i - e_i| < 1 \Leftrightarrow |\cos(\lambda_i)| < 1.$$

容易验证（请注意 $A_i = a_i D_i = 4a_i \sin(\gamma_i)\sin(\delta_i)$）

$$\begin{cases} \lambda_i = \cos^{-1}(b_i + c_i - a_i - e_i), \\ \gamma_i = \cot^{-1}(\frac{b_i - c_i - a_i + e_i}{\sin(\lambda_i)}), \\ \delta_i = \cot^{-1}(\frac{c_i + e_i - a_i - b_i}{\sin(\lambda_i)}), \\ \mu_i = \cos^{-1}(\cos(\lambda_i + \gamma_i + \delta_i) - A_i). \end{cases}$$

显然 除了 μ_i 之外，上述角始终取实数值。不过，符号计算可以证明

$$\sin^2(\mu_i) = \frac{[(1 - 4a_i e_i - 4b_i c_i)^2 - 64 a_i b_i c_i e_i][1 - (b_i + c_i - a_i - e_i)^2]}{[1 - 4(b_i - a_i)(c_i - e_i)][1 - 4(c_i - a_i)(b_i - e_i)]} > 0$$

根据推论 2.5， μ_i 也为实数。

另一方面，众所周知，每个斜四边形 $ABCD$ 由六个自由参数确定。然而，由于柔性在相似变换下保持不变，我们总可以假设 $|AB| = 1$。因此，我们只需[4]我们也接受复数解情形下的柔性。

用五个参数构造网格的中心面（λ_1', λ_2', λ_3', λ_4', τ_1），其中 $\lambda_i' = \pi - \lambda_i$（图 2），之后（$\tau_2$, τ_3, τ_4）已知。其余角可由 $\zeta_i = 4\tan^{-1}(f_i) - \tau_i$ 得到。

一般而言，无法保证 $g^{(i)} = 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中构成一条实曲线，例如 $\mu_i = \lambda_i + \gamma_i + \delta_i$。因此，我们将在不考虑实数性和嵌入欧几里得空间的情况下发展理论。

为方便起见，我们使用“理想”和“零点集”代替“方程组”和“解集”。

定义 *2.6*。形如

$$S = (g^{(i)}, h^{(i)}, g^{(i+1)}, h^{(i+1)}) \subset \mathbb{C}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, y_i, y_{i+1}]$$

称为**耦合**。形如

$$M = (G^{(1)}(x_1, x_2), G^{(2)}(x_2, x_3), G^{(3)}(x_3, x_4), G^{(4)}(x_4, x_1)) \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

称为**匹配**，如果零点集

$$Z(M) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{C}P^1)^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \forall f \in M\}.^5$$

是一个无限集（请注意 $(\mathbb{C}P^1)^n \neq \mathbb{C}P^n$）。

对于 $S_1 = (g^{(1)}, h^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)})$，显然 $G(1)\,G(2) \in S_1$，因此 $\{G(1) = G(2) = 0\}$ 的解集与 $Z(S_1)$ 在 (x_1, x_2, x_3) 上的投影重合，这呼应了我们在第 1.1 节提到的子系统。总之，已经证明每个网格都唯一确定一个理想 $M = (G(1)\,G(2)\,G(3)\,G(4))$，但只有对于柔性的网格，$M$ 才可能是一个匹配。最终目标是找出并分类所有匹配。我们从给定的耦合 S_1 出发，构造另一个耦合 $S_2 = (g^{(3)}, g^{(4)}, h^{(3)}, h^{(4)})$，使得 $Z(M)$ 是一个无限集。

3 $\mathbb{C}P^1$中的可约性与奇异性

在定义 2.6 中，我们考虑 $\mathbb{C}P^1$ 中的零点集，原因在于 x_i, y_j 实际上表示角的正切值（见方程（3）），因此它们可能取值为 ∞。$g^{(1)} = 0$ 意味着

$$a_i y_i^2 + b_i + c_i y_i^2 \bar{x}_i^2 - \bar{x}_i y_i + e_i \bar{x}_i^2 = 0,\ \bar{x}_i = \tan\left(\frac{\alpha_i + \pi}{2}\right) = -\frac{1}{x_1}. \tag{7}$$

当 $x_i = \infty$，即 $\bar{x}_i = 0$时，可以从 $a_i y_i^2 + b_i = 0$恢复 y_i的值。反过来，当 $a_i y_i^2 + b_i = 0$时，$x_i = \frac{c_i y_i^2 + e_i}{-y_i}$或 ∞。

例 3.1. 考虑一个多项式

$$g^{(1)} = c_1 y_1^2 + x_1 y_1 + e_1,\ c_1 e_1 \neq 0,$$

由于不可因式分解，因为如果可以，则 $g^{(1)} = f(y_1)h(x_1, y_1)$，并且对于满足 $f(c) = 0$ 的常数 $c \in \mathbb{C}$，$g^{(1)}(x_1, c) = f(c)h(x_1, c) \equiv 0 \in \mathbb{C}[x_1]$，这进一步意味着 $c = 0$ 和 $e_1 = 0$，矛盾！看来在 $Z(g^{(1)}) \subset (\mathbb{C}P^1)^2$,中，$x_1$的值由 $x_1 = \frac{c_1 y_1^2 + e_1}{-y_1}$唯一确定。然而，事实并非如此。引理 2.3 指的是一个满足 $\lambda_1 + \gamma_1 = \mu_1 + \delta_1 = \pi$ 的反德尔托形。如果反德尔托形的布局如图 4 所示，那么 y_1可以自由改变，而 x_1仍保持为 ∞。将 $g^{(1)}$ 重写为方程（7）的形式，也可以很容易地看出这一点。

[5]我们将要采用记号 $Z(\cdot)$ 考察不同的理想时，维数取决于理想所包含的变量个数，例如 $Z(S) \subset (\mathbb{C}P^1)^5$, $Z(g^{(i)}) \subset (\mathbb{C}P^1)^2$, 等.....

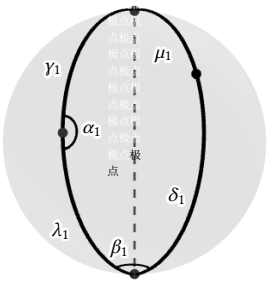

图 4. 当 (λ_1,∞ γ_1 μ_1 y_1 α_1 π $x_1 =$ = –)
位于同一大圆上，且 (, δ_1) 亦然时， β_1（即 ）可以自由变化，而保持不变（即 tan($\frac{\pi}{2}$)）。

上面的例子表明，即使 $g^{(1)}$ 是不可约的， $Z(g^{(1)})$ 仍可约，为两条曲线 $-x_1y_1 = c_1y_1^2 + e_1$和 $x_1 = \infty$的并。事实上，这种不一致性只会出现在反风筝形中，并将在第4节中得到修正，届时我们会将所有反德尔托形转换为鸢形。

定义 *3.1.* 设 P_i 为 $(\mathbb{C}P^1)^n$ 中第 i 个坐标的投影映射，并且 $Z \subset (\mathbb{C}P^1)^n$。若对某个 $c_0 \in \mathbb{C}P^1$， $P_i^{-1}(c_0) \cap Z$ 是一个无限集，则称 $P_i^{-1}(c_0) \cap Z$为 Z 的一个**常值分支** 或一个 c_0-**分支** 。

定义*3.2.* $g^{(i)}$（或 $G_{(i)}$）称为**奇异** ，若 $a_ie_i = b_ic_i = 0$；否则为**非奇异** 。类似地，一个耦合（或匹配）称为**奇异** ，若它包含一个奇异的 $g^{(i)}$（或 $G_{(i)}$）；否则为**非奇异** 。

由引理 2.3 可立即得知，每个奇异 $g^{(i)}$ 都对应一个（反）风筝形，反之亦然。

命题 3.3。 $g^{(i)}$ 是奇异的，当且仅当 Z（$g^{(i)}$） 有一个常值分支。

证明。回顾方程（3），其中我们令 $x_i = \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$， $y_i = \tan\left(\frac{\beta_i}{2}\right)$。因此， $g^{(i)} = 0$通过代换有四种等价表示

$$\bar{x}_i = \tan\left(\frac{\alpha_i + \pi}{2}\right) = -\frac{1}{x_1},\ \bar{y}_i = \tan\left(\frac{\beta_i + \pi}{2}\right) = -\frac{1}{y_1}.$$

$$g^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_ix_i^2y_i^2 + b_ix_i^2 + c_iy_i^2 + x_iy_i + e_i = 0, \\ -a_iy_i^2 - b_i - c_iy_i^2\bar{x}_i^2 + \bar{x}_iy_i - e_i\bar{x}_i^2 = 0, \\ -a_ix_i^2 - b_ix_i^2\bar{y}_i^2 - c_i + x_i\bar{y}_i - e_i\bar{y}_i^2 = 0, \\ a_i + b_i\bar{y}_i^2 + c_i\bar{x}_i^2 + \bar{x}_i\bar{y}_i + e_i\bar{x}_i^2\bar{y}_i^2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

对于引理 2.3 的条件 (iii)-(vi)，容易验证 $Z(g^{(i)})$ 要么有一个 0 分支，要么有一个 ∞ 分支，因此 $g^{(i)}$ 的奇异性保证 $Z(g^{(i)})$ 有一个常值分支。反过来，对于非奇异的 $g^{(i)}$，条件 (iii)-(vi) 均不成立。无论我们为 x_i 或 y_i（但不能同时为两者）赋予哪个常数值，上述四种表示都不可能恒等于 0，这意味着 $Z(g^{(i)})$ 没有常值分支。
□

3.1 非奇异性质

引理 3.4。 非奇异多项式 $g^{(i)}$ 可约，当且仅当 $a_i = e_i = 0$ 或 $b_i = c_i = 0$。此外，当 $g^{(i)}$ 可约时，其因式分解必为以下形式

$$g^{(i)} = \begin{cases} c_i(kx_i - y_i)(k'x_i - y_i) \ if \ a_i = e_i = 0, \\ a_i(x_iy_i - k)(x_iy_i - k') \ if \ b_i = c_i = 0, \end{cases}$$

其中 $\{k, k'\} \cap \{0, \pm 1\} = \emptyset$。

证明。首先，注意当 $a_i = e_i = 0$ 或 $b_i = c_i = 0$时， $g^{(i)}$ 可以按所述方式因式分解，而 $k, k' \neq 0$ 直接由 $g^{(i)}$ 的非奇异性得出。此外， $k, k' \neq \pm 1$，否则（6）的第二个不等式不成立。现在，若 $a_i = e_i = 0$ 和 $b_i = c_i = 0$ 均不成立，则 $g^{(i)}$ 必定不可约。我们用反证法证明这一点。假设 $g^{(i)}$ 可约，且 $a_i = e_i = 0$ 和 $b_i = c_i = 0$ 均不成立。命题 3.3 意味着 $g^{(i)}$ 在 $\mathbb{C}[x_i]$ 或 $\mathbb{C}[y_i]$ 中没有因子。因此， $g^{(i)}$ 的任意不可约因子必定具有以下形式

$$px_iy_i + qx_i - ry_i - s, p \neq 0 \text{ or } q \neq 0.$$

这意味着，将 x_i 视为未知数、将 y_i 视为参数时， $g^{(i)} = 0$ 有有理解 $x_i = \frac{ry_i + s}{py_i + q} \in \mathbb{C}(y_i)$。换言之，判别式

$$-4a_ic_iy_i^4 + (1 - 4a_ie_i - 4b_ic_i)y_i^2 - 4b_ie_i$$

是 $\mathbb{C}[y_i]$ 中的一个平方。根据这一信息，我们可以断言 $a_ic_i \neq 0$。否则，必有 $(1 - 4a_ie_i - 4b_ic_i) = 0$ 或 $b_ie_i = 0$。根据不等式 (6)，第一种情况不成立；而由于 $g^{(i)}$ 非奇异，第二种情况也不可能。因此，判别式可因式分解为 $-4a_ic_i(y_i^2 - l)(y_i^2 - l')$，其中 $l = l'$，因为它是一个平方。因此，

$$-4a_ic_iy_i^2 + (1 - 4a_ie_i - 4b_ic_i)y_i - 4b_ie_i = -4a_ic_i(y_i - l)^2$$

是 $\mathbb{C}[y_i]$ 中的一个平方，且判别式为零 $(1 - 4a_ie_i - 4b_ic_i)^2 - 64a_ib_ic_ie_i = 0$，这与不等式 (6) 矛盾。 □

结合引理 2.3 和 3.4，无需证明即可得出以下结论。

定理 3.5. 给定一个理想 $M = (G^{(1)}\, G^{(2)}\, G^{(3)}\, G^{(4)}) \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$，使得 $Z(M)$ 没有常值分支，则 M 是匹配当且仅当

$$\gcd(Res(G^{(1)}, G^{(2)}; x_2), Res(G^{(3)}, G^{(4)}; x_4)) \neq 1.$$

证明。令 $R_1 = \mathrm{Res}(G^{(1)}\, G^{(2)};\, x_2)$ $R_3 = \mathrm{Res}(G^{(3)}\, G^{(4)};\, x_4)$。由于 $Z(M)$ 没有常值分支，作为 $(\mathbb{C}P^1)^4$ 的子集， $Z(M)$ 是无限集当且仅当 $Z(M) \cap \mathbb{C}^4$ 是无限集。另一方面， $Z(G^{(1)}\, G^{(2)})$ 和 $Z(G^{(3)}\, G^{(4)})$ 的 (x_1, x_3) 投影分别属于 $Z(R_1)$ 和 $Z(R_3)$。因此，两条代数曲线 $R_1 = 0, R_3 = 0$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中有重叠分支，即 $\gcd(R_1, R_3) \neq 1$。
□

4 基本约化

本节旨在大幅简化后续的讨论。

定义 *4.1.* 令 P_4 为由 (1234) 生成的置换群，耦合

$$S_1 = (g^{(1)}, h^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)}),\ S_2 = (g^{(3)}, h^{(3)}, g^{(4)}, h^{(4)});$$
$$\tilde{S}_1 = (\tilde{g}^{(1)}, \tilde{h}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \tilde{h}^{(2)}),\ \tilde{S}_2 = (\tilde{g}^{(3)}, \tilde{h}^{(3)}, \tilde{g}^{(4)}, \tilde{h}^{(4)}).$$

$(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ 称为 (S_1, S_2) 的重新标记，若存在 $\exists\sigma \in P_4$，使得对于 $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$，$\tilde{g}^{(i)} \equiv g^{(\sigma(i))}$和 $\tilde{h}^{(i)} \equiv h^{(\sigma(i))}$ 在代换 $(x_{\sigma(i)}\ y_{\sigma(i)})$ 下 $=(x_i, y_i)$。换言之，通过将变量 $(x_{\sigma(i)}\ y_{\sigma(i)})$ 替换为 (x_i, y_i)，同时保留相应的系数 $(a_{\sigma(i)}\ b_{\sigma(i)}\ ...)$，即可得到 $\tilde{g}^{(i)}$（或 $\tilde{h}^{(i)}$），而 $g^{(\sigma(i))}$（或 $h^{(\sigma(i))}$）等亦然。

显然，重新标记不会影响给定纤维积的基数

$$Z(S_1) \underset{\{x_1,x_3\}}{\times} Z(S_2) \cong Z(g^{(2)}, h^{(2)}, g^{(3)}, h^{(3)}) \underset{\{x_2,x_4\}}{\times} Z(g^{(4)}, h^{(4)}, g^{(1)}, h^{(1)}).$$

重新标记只是重新排列多项式，以便更容易分析 $Z(S_i)$。

另一种约化针对反等腰图形和反德尔托形，其构造可以转化为相应的对偶图形。假设我们有一个带有反等腰图形的网格。经过重新标记，在其对应的匹配中 M 我们有 $a_1 = e_1 = 0$（引理 2.3）。令

$$M' := (g^{(1)}, h^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)}, g^{(3)}, h^{(3)}, g^{(4)}, h^{(4)}). \tag{9}$$

注意，由于双有理映射，$Z(M) \cong Z(M')$

$$\begin{aligned} &f:\ Z(M) \leftrightarrow Z(M');\\ &(x_1, ..., x_4) \leftrightarrow (x_1, y_1, ..., x_4, y_4) = \left(x_1, \tfrac{(1-f_1^2)x_2+2f_1}{1-f_1^2-2f_1x_2}, ..., x_4, \tfrac{(1-f_4^2)x_1+2f_4}{1-f_4^2-2f_4x_1}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Set

$$\bar{g}^{(1)}(x_1, \bar{y}_1) = \bar{a}_1x_1^2\bar{y}_1^2 + \bar{e}_1 + x_1\bar{y}_1,\ \bar{h}^{(1)}(\bar{y}_1, x_2) = (1 - \bar{f}_1^2)(\bar{y}_1 - x_2) - 2\bar{f}_1(\bar{y}_1x_2 + 1)$$

其中 $(\bar{a}_1,\ \bar{e}_1) = -(b_1,\ c_1)$，且当 $f_1 \preceq 0$ 时 $\underline{f_1} = \frac{f_1+1}{1-f_1}$，当 $f_1 > 0$ 时 $\underline{f_1} = \frac{f_1-1}{1+f_1}$。然后令

$$\bar{M} := (\bar{g}^{(1)}, \bar{h}^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)}, g^{(3)}, h^{(3)}, g^{(4)}, h^{(4)}).$$

方程 (8) 上方的代换在 $Z(M')$ 与 $Z(\bar{M})$ 之间诱导出一个双有理映射，从而 $Z(M) \cong Z(\bar{M})$。并且在 $\bar{M}$中，我们有 $\bar{g}^{(1)}$ 对应于一个等腰图形。如果还有更多反等腰图形，我们可以继续求出更多 $\bar{g}^{(i)}$。这一技巧显然也能将反风筝形转换为风筝形。

5 含等边形的非奇异柔性网格

本节所要处理的网格对应于**等角匹配**，它们由非奇异但可约的$g^{(i)}$（引理 2.3 和 3.4）组成。这种特殊类型的网格是有史以来构造出的第一个具有扭曲面的非平凡柔性网格 [6]。作者已经构造了若干“等角型”柔性网格，而在他之前，具有扭曲面的柔性网格是否存在尚属未知。在此，我们将通过给出所有可能的等角匹配的完整构造来完成他的工作。

定理 5.1。给定一个匹配 $M = (G_{(1)}G_{(2)}G_{(3)}G_{(4)})$，其中 $a_ie_i \neq 0$且 $b_i = c_i = 0$对 $i = 1$、2、3、4成立。设

$$k_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a_ie_i}}{2a_i},\ N_i = \begin{pmatrix} -2f_i & k_i(1 - f_i^2) \\ 1 - f_i^2 & 2k_if_i \end{pmatrix}.$$

考虑所有出现在 k_i中的符号组合，$\pm'$，当且仅当存在一种组合使得 $N_4N_3N_2N_1$ 是数量矩阵时，该网格才是柔性的。

有关此类柔性网格的可视化，请参见 [6] 。

证明。根据引理 3.4，相应的 $g^{(i)}$ 可以分解为

$$g^{(i)} = a_ix_i^2y_i^2 + x_iy_i + e_i = a_i(x_iy_i - k_i)(x_iy_i - k_i')$$

其中 $\{k_i,\ k_i'\} = \left\{\frac{-1\pm\sqrt{1-4a_ie_i}}{2a_i}\right\}$。考察耦合 $S_1 = (g^{(1)},\ h^{(1)},\ g^{(2)},\ h^{(2)})$，$Z(S_1)$ 有四个格式相同的分支，例如

$$W_1 := Z(x_1y_1 - k_1, h^{(1)}, x_2y_2 - k_2, h^{(2)}).$$

显然，W_1 是一条可由 $x_1 \in \mathbb{C}P^1$ 迭代参数化的曲线，

$$\begin{aligned}\omega(x_1) &= (x_1, y_1(x_1), x_2(y_1), y_2(x_2), x_3(y_2))\\ &= \left(x_1, \frac{k_1}{x_1}, \frac{(1-f_1^2)y_1 - 2f_1}{2f_1y_1 + 1 - f_1^2}, \frac{k_2}{x_2}, \frac{(1-f_2^2)y_2 - 2f_2}{2f_2y_2 + 1 - f_2^2}\right).\end{aligned}$$

若将上述关系形式化地写成矩阵形式

$$N = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} :\ \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1;\ x \mapsto N(x) := \frac{ux+v}{sx+t},\ ut - sv \neq 0,$$

这就是 $\mathbb{C}P^1$ 上所谓的莫比乌斯变换，它与矩阵乘法相容。例如，

$$x_{i+1} = \begin{pmatrix} 1-f_i^2 & -2f_i \\ 2f_i & 1-f_i^2 \end{pmatrix}(y_i) = \begin{pmatrix} 1-f_i^2 & -2f_i \\ 2f_i & 1-f_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x_i) = N_i(x_i).$$

因此我们有 $x_3 = N_2N_1(x_1)$。同样，在耦合 S_2 的一个分支 W_2 中，我们有 $x_1 = N_4N_3(x_3)$。由于 $Z(M) \cong Z(S_1) \times_{\{x_1,x_3\}} Z(S_2)$ 是一个无限集，因此必定存在 S_1, S_2 的分支 W_1, W_2，使得 $W_1 \times_{\{x_1,x_3\}} W_2$ 是一个无限集。因此，$\{x_3 = N_2N_1(x_1)\ x_1 = N_4N_3(x_3)\}$ 有无限多个解，换言之，$N_4N_3N_2N_1(x_1) = x_1$。

□

考虑 Bricard 方程 (4)，定理 5.1 中的 k_i 也可以表示为 $\frac{\text{正弦}(\gamma_i - \mu_i)}{\text{正弦}(\gamma_i) \pm \text{正弦}(\mu_i)}$，这种形式更便于进行网格构造。不过，根据注 1，一旦获得系数 $(a_i,\ b_i,\ c_i,\ e_i,\ f_i)$，生成网格的过程就很简单。因此，我们现在只关注确定系数，或等价地，确定匹配。

例5.1（等角匹配的一般情形）。令

$$(a_1, e_1, a_2, e_2, a_3, e_3, a_4, f_1, f_2) \tag{11}$$

作为自由参数，使得所有 $a_i,\ e_i$ 均非零，所有 $f_i \in (-1,\ 1]$。$(e_4,\ f_3,\ f_4)$ 待确定。对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，设 $k_i = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a_ie_i}}{2a_i}$；对于 $i = 1,\ 2$，设

$$N_i = \begin{pmatrix} -2f_i & k_i(1-f_i^2) \\ 1-f_i^2 & 2k_if_i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Let

$$A = \frac{2(us+vt)}{s^2+t^2-u^2-v^2} \text{ where } \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N_2N_1, \tag{13}$$

并令 $F_3 \in \mathbb{R}P^1, f_3 \in (-1, 1]$ 满足 $\frac{2F_3}{1-F_3^2} = A, \frac{2f_3}{1-f_3^2} = F_3$。然后令

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ s' & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-f_3^2 & -2f_3 \\ 2f_3 & 1-f_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix}, \tag{14}$$

并将 (k_4, F_4) 定义为 $(\ ^{v}, s, t, s)$（若 $s' \neq 0$），否则定义为 $(-\frac{u'}{t}, \infty)$，并令 $f_4 \in (-1, 1]$ 满足 $\frac{2f_4}{1-f_4^2} = F_4$。调整 a_4 的值，使得 $e_4 = -a_4 k_4^2 - k_4 \neq 0$。上述所有符号 '±' 均可自由选择。若不等式 (6) 对所有 i 均不成立，则重新开始。

命题 5.2. 例*5.1*包含所有等角匹配。

证明。请注意，例5.1中 k_i 与 N_i 的设定与定理 5.1中的设定一致。因此，只需证明例5.1给出了 $N_4N_3N_2N_1$ 为数量时的全部解。我们从任意系数（11）出发，证明若 $N_4N_3N_2N_1$ 为数量，则其余的（e_4, f_3, f_4）必须满足其确定条件。对于莫比乌斯变换，任何数量矩阵都是恒等映射

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}(x) = \frac{nx+0}{0x+n} = x, \forall n \neq 0.$$

因此，我们可以将 $N_i \in$ 视为PGL(2, $\mathbb{R}$)中的元素，而一个矩阵的逆，不计数量因子，正是其伴随矩阵。简单观察表明

$$N_i \in T := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} : uv = -st \right\},\ N_i^{-1} \in T' := \left\{ \begin{pmatrix} u' & v' \\ s' & t' \end{pmatrix} : u's' = -v't' \right\},$$

由此可得 $N_3N_2N_1 \in T'$，因为 $N_4N_3N_2N_1$ 被假定为数量。注意

$$f : (-1, 1] \to \mathbb{R}P^1;\ x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$$

在给定 $f(\tan(\alpha)) = \tan(2\alpha)$时是满射。因此，方程（13）下方的 f_3 确实存在。这等价于说，$\exists f_3 \in (-1, 1]$ 使得矩阵（14）属于 T'，即 $u's' + v't' = 0$，并且由于 N_i可逆，我们必须有 $s' \neq 0$ 或 $t' \neq 0$。因此，在PGL(2, $\mathbb{R}$)中，我们有

$$N_4 = \begin{pmatrix} t' & -v' \\ -s' & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t'}{s'} & \frac{v'}{s'} \\ 1 & -\frac{u'}{s'} \end{pmatrix} \text{ or } N_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{u'}{t'} \end{pmatrix}.$$

将 N_4 归一化为上述形式，是为了根据定理 5.1 中 N_4 的定义恢复 k_4 和 $F_4 = \frac{2f_4}{1-f_4^2}$ ~~的值~~：

$$N_4 = \begin{pmatrix} -2f_4 & k_4(1-f_4^2) \\ 1-f_4^2 & 2k_4 f_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -F_4 & k_4 \\ 1 & k_4 F_4 \end{pmatrix} \text{ if } f_4 \in (-1, 1), \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k_4 \end{pmatrix} \text{ if } f_4 = 1. \end{cases}$$

最后，$e_4 = -a_4 k_4^2 - k_4 \neq 0$，这是根据定理 5.1 中 k_i 的定义得出的。 □

6 具有常值分支的奇异柔性网格

对于奇异匹配，我们首先考虑最简单的情况，即**常值匹配**，这意味着 $Z(M)$ 具有常值分支（定义 3.1）。由于第4节的内容，无须考虑反德尔托形。

命题 6.1. 对于每个常值匹配$(G_{(1)}\, G_{(2)}\, G_{(3)}\, G_{(4)})$，存在 $G_{(i)}$和 $G_{(j)}$、 $i \neq j$，使得$b_i = e_i = 0$ 且 $c_j = e_j = 0$。

证明。由方程 (9) 和 (10) 可得 $Z(M) \cong Z(M')$，因此 $Z(M')$ 存在一个常值分支，记为 W。由对称性，不妨设 x_1 变化，而 x_2 在 W中为常数。因此，$y_1 = \frac{(1-f_1^2\ x_2+2f_1)}{1-f_1^2-2f_1x_2}$也为常数。~~这意味着~~

$Z(g^{(1)})$ 有一个常值分支。由于排除了反风筝形，根据命题 3.3，$g^{(1)}$ 必须满足引理 2.3 的条件 (v)，即 $b_1 = e_1 = 0$，因此 $y_1 \equiv 0$。现在，在 W 中，x_1 变化而 x_2 固定，因此存在 $j \in \{2,3,4\}$，使得 x_j 固定而 x_{j+1} 变化（$x_5 := x_1$）。同样的推理表明 $c_j = e_j = 0$。□

不失一般性，在常值分支中，我们总可以假设 x_1 变化而 x_2 固定；上述命题实际上揭示了一种系统构造方法。

例 6.1（常匹配的一般情形）。选择 $j \in \{2,3,4\}$，令 (b_1, e_1, c_j, e_j) 全部为 0，并令 $\{a_1, c_1, f_4, a_j, b_j\}$ 任意取值。对于 $i \notin \{1, j\}$，任意设定 $\{a_i, b_i, c_i, e_i, f_{i-1}\}$。令 $Y_1 = 0$，对于 $1 < k < j$，若 k 存在，则迭代地设定

$$X_k := \frac{(1 - f_{k-1}^2)Y_{k-1} - 2f_{k-1}}{1 - f_{k-1}^2 + 2f_{k-1}Y_{k-1}},\ Y_k := \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(a_kX_k^2 + c_k)(b_kX_k^2 + e_k)}}{2(a_kX_k^2 + c_k)}.^6$$

如果对于所有 i 不等式 (6) 都不成立，或者 Y_k 不是实数，则重新开始。最后，设定 $f_{j-1} \in (-1, 1)$ 使得 $\frac{2f_{j-1}}{1-f_{j-1}^2} = Y_{j-1}$。很容易验证，这个匹配有一个常值分支，其中对于所有 $2 \le k \le j$，$x_k \equiv X_k$。特别地，$x_j \equiv 0$。

7 具有非常分支的奇异柔性网格

尽管我们不必考虑反风筝形，一个奇异非常匹配仍可能包含一到四个满足引理 2.3 条件 (iii) 或 (v) 的奇异 $G_{(i)}$（其余 $G^{(i)}$ 满足 (i)），而这些异质 $G^{(i)}$ 的排列顺序也同样重要。对此类匹配的讨论似乎极为繁复。然而，$G^{(i)}$ 的大多数组合并不能构成匹配（$Z(M)$ 是一个有限集），而且值得注意的是，本质上只有两种主要情形！

7.1 准备工作

回顾方程 (9) 和 (10)，对于其中 $g^{(1)} = a_1x_1^2y_1^2 + b_1x_1^2 + x_1y_1 = x_1(a_1x_1y_1^2 + b_1x_1 + y_1)$ 的匹配 M，我们有

$$Z(M) \cong Z(g^{(1)}, h^{(1)}, \dots) = Z(x_1, h^{(1)}, \dots) \cup Z(a_1x_1y_1^2 + b_1x_1 + y_1, h^{(1)}, \dots). \tag{15}$$

由于常值分支现已不在考虑之列，我们只需研究最后一个分量。此外，我们可以假设 $a_1b_1 \neq 0$。理由如下。

- 如果 (a_1, b_1) 都为 0，那么 $Z(M) \cong Z(x_1, \dots) \cup Z(y_1, \dots)$ 只含常值分支，产生矛盾；
- 如果 (a_1, b_1) 中有一个为 0，那么 $Z(M)$ 的非常分支具有如下形式：$Z(kx_1 - y_1, \dots)$ 或 $Z(x_1y_1 - k, \dots)$，其中 $g_{(1)}$ 作为非奇异多项式起作用（引理 3.4）。

为此，我们在本节引入一些定制符号。

定义 *7.1*。所有不可约 $g^{(i)}$ 均记为 $g_0^{(i)}$。$g_1^{(i)}, g_3^{(i)}, g_5^{(i)} \in \mathbb{R}[x_i, y_i]$ 是如下形式的多项式

$$g_1^{(i)} := x_iy_i - k_i,\ g_3^{(i)} := a_ix_iy_i^2 + b_ix_i + y_i,\ g_5^{(i)} := a_ix_i^2y_i + c_iy_i + x_i$$

其中系数均非零，且满足

$$k_i \notin \{0, \pm 1\},\ |b_i - a_i| < 1,\ |c_i - a_i| < 1. \tag{16}$$

对于 $j \in \{0,1,3,5\}$，$G_j^{(i)} \in \mathbb{R}[x_i, x_{i+1}]$ 是结式

$$G_j^{(i)}(x_i, x_{i+1}) := \mathrm{Res}(g_j^{(i)}, h^{(i)}; y_i).$$

[6] 更准确地说，$y_k = Y_k$ 是 $g^{(k)}(X_k,\ y_k) = 0$ 的一个根（$a_k = c_k = 0$ 可能发生）。

索引 i 始终按模 4 计算，例如 $x_5 = x_1$。

读者应注意，当分别满足引理 2.3 的条件 (i)、(iii) 或 (v) 时，上文定义的 $j \in \{1、3、5\}$、$g_j^{(i)}$（或 $G_{(i)\,j}$）是 $g^{(i)}$（或 $G_{(i)}$）的素因子，而这些不等式由引理 3.4 和定义 2.4 推得。

定义 7.2。设 $S = (g^{(i)}、h^{(i)}、g^{(i+1)}、h^{(i+1)})$ 为一个耦合。S 的约化耦合 S' 具有如下形式

$$S' = (g_{j_i}^{(i)}, h^{(i)}, g_{j_{i+1}}^{(i+1)}, h^{(i+1)})$$

其中 j_i、$j_{i+1} \in \{0、1、3、5\}$、$g_{j_i}^{(i)}$、$g_{j_{i+1}}^{(i+1)}$ 分别是 $g^{(i)}$、$g^{(i+1)}$ 的素因子。进一步，令 $r_{S'} \in \mathbb{C}[x_i, y_{i+1}]$ 和 $R_{S'} \in \mathbb{C}[x_i, x_{i+2}]$ 为结式

$$r_{S'} := \mathrm{Res}(G_{j_i}^{(i)}, g_{j_{i+1}}^{(i+1)}; x_{i+1}),\ R_{S'} := \mathrm{Res}(G_{j_i}^{(i)}, G_{j_{i+1}}^{(i+1)}; x_{i+1}).$$

索引 i 始终按模 4 处理，例如 $x_5 = x_1$。

不难看出，$Z(S')$ 其实就是去掉其常值分支后的 $Z(S)$。因此，如果一个匹配具有非常分支，我们只需要两个约化耦合 S_1'，S_2' 使得 $Z(S_1') \times_{\{x_1, x_3\}} Z(S_2')$ 是一个无限集。这等价于说，根据定理 3.5，$\gcd(R_{S_1'}, R_{S_2'}) \neq 1$。为利用这一点，我们需要掌握一些相关知识，以分析 $R_{S_i'}$ 的因式分解。

定义 7.3。对于 $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$，分别令 $\deg_x(p)$ 和 $\deg_y(p)$ 表示 x和 y在 p 中的最高次数。$p(x, y)$ 的**双次数** 为

$$\deg_y^x(p) := (\deg_x(p), \deg_y(p)).$$

定义 7.4。$\mathrm{M}: \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[w, z]$ 称为**莫比乌斯映射**，如果存在矩阵 $\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} U & V \\ S & T \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$,

使得对于 $(m, n) = \deg_y^x(p)$,

$$\mathcal{M}(p(x, y)) = (sw + t)^m (Sz + T)^n p\left(\frac{uw + v}{sw + t}, \frac{Uz + V}{Sz + T}\right).$$

引理 7.5。设 $\mathcal{M}: \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[w, z]$ 是一个莫比乌斯映射。对于所有满足 p在 $\mathbb{C}[x]$ 或$\mathbb{C}[y]$中没有因子的 $p \in \mathbb{C}[x, y]$，$\mathcal{M}(p)$ 在 $\mathbb{C}[w]$ 或 $\mathbb{C}[z]$ 中没有因子，并且

$$deg_z^w(\mathcal{M}(p)) = deg_y^x(p).$$

证明。$\forall f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, $\forall g(w, y) \in \mathbb{C}[w, y]$, 定义

$$\mathcal{M}_1(f) := (sw + t)^{\deg_x(f)} f\left(\frac{uw + v}{sw + t}, y\right),\ \mathcal{M}_2(g) = (Sz + T)^{\deg_y(g)} g\left(w, \frac{Uz + V}{Sz + T}\right).$$

显然，我们有 $\mathrm{M} = \mathrm{M}_2 \circ \mathrm{M}_1$。设 $P = \mathrm{M}_1(p)$ $m = \deg_x(p)$，且 $m' = \deg_w(P)$。只需证明 $m = m'$和 P在 $\mathbb{C}[w]$中没有因子。$m' \leq m$显然成立。反过来，直接计算可得 $(u - sx)^m P\left(\frac{tx - v}{u - sx}, y\right) = (ut - sv)^m p(x, y)$。由于 $(u - sx)$ 不能是 p的因子，因此 $m' = m$成立。现在，若 P有一个因子 $f(w)$，则 $P = f(w) \cdot P'$，其中 $\deg_w(P') < m$。定义莫比乌斯映射

$$\mathcal{M}_1'(g(w, y)) = (u - sx)^{\deg_w(g)} g\left(\frac{tx - v}{u - sx}, y\right).$$

我们有 $\mathrm{M}_1'(P) = \mathrm{M}_1'(f) \cdot \mathrm{M}_1'(P') = (ut - sv)^m p(x, y)$，其中 $\mathrm{M}_1'(f) \in \mathbb{C}[x]$ 且 $\deg_x(\mathrm{M}_1'(P')) < m$。由于 p在 $\mathbb{C}[x]$ 中没有因子，$\mathrm{M}_1'(f)$ 必须是一个常数，从而 $\deg_x(\mathrm{M}_1'(P')) = \deg_x(p) = m$，这就产生了矛盾！□

j	0	1	3	5
$deg^{x_i}_{x_{i+1}}(G^{(i)}_j)$	(2, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)

引理 7.6。 在定义 *7.1* 中，我们有 $deg^{x_i}_{y_i}(g^{(i)}_j) = deg^{x_i}_{x_{i+1}}(G^{(i)}_j)$。特别地，

证明。设莫比乌斯映射

$$\mathcal{M}_i(g(x,y)) = (1-f_i^2-2f_ix_{i+1})^{\deg_y(g)}\, g\left(x, \frac{(1-f_i^2)x_{i+1}+2f_i}{1-f_i^2-2f_ix_{i+1}}\right). \tag{17}$$

将 $(x,\ y)$ 替换为 $(x_i,\ y_i)$，容易验证 $G_{(i)j} = \mathrm{M}_i(g^{(i)}_j)$。 □

定理 7.7。 设 $S' = (g^{(1)}_{j_1}, h^{(1)}, g^{(2)}_{j_2}, h^{(2)})$ 是一个约化耦合，其中 $deg^{x_1}_{x_2}(g^{(1)}_{j_1}) = (m_1, n_1)$, $deg^{x_2}_{x_3}(g^{(2)}_{j_2}) = (m_2, n_2)$。那么

$$deg^{x_1}_{y_2}(r_{S'}) = deg^{x_1}_{x_3}(R_{S'}) = (m_1m_2, n_1n_2).$$

此外，$r_{S'}$ 可约当且仅当 $R_{S'}$ 可约。

证明。首先注意，$r_{S'}$ 和 $R_{S'}$ 在 $\mathbb{C}[x_1]$，$\mathbb{C}[y_2]$ 或 $\mathbb{C}[x_3]$ 中都没有因子，否则，$Z(S')$ 将会有一个常值分支。令 $(m,\ n) = \deg^{x_1}_{y_2}(r_{S'})$，并设 $i = 2$ 为莫比乌斯映射 (17)，则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(r_{S'}(x_1,y_2)) &= (1-f_2^2-2f_2x_3)^n r_{S'}\left(x_1, \frac{(1-f_2^2)x_3+2f_2}{1-f_2^2-2f_2x_3}\right)\\
&= (1-f_2^2-2f_2x_3)^n \mathrm{Res}\left(G^{(1)}_{j_1}, g^{(2)}_{j_2}\left(x_2, \frac{(1-f_2^2)x_3+2f_2}{1-f_2^2-2f_2x_3}\right); x_2\right)\\
\text{Lemma 7.6 proof} \to &= (1-f_2^2-2f_2x_3)^n \mathrm{Res}\left(G^{(1)}_{j_1}, \frac{G^{(2)}_{j_2}}{(1-f_2^2-2f_2x_3)^{n_2}}; x_2\right)\\
&= (1-f_2^2-2f_2x_3)^{n-n_1n_2} \mathrm{Res}\left(G^{(1)}_{j_1}, G^{(2)}_{j_2}; x_2\right)\\
&= (1-f_2^2-2f_2x_3)^{n-n_1n_2} R_{S'} \in \mathbb{C}[x_1,x_3].
\end{aligned}$$

由引理 7.5，$\mathrm{M}_2(r_{S'})$ 在 $\mathbb{C}[x_3]$ 中没有因子，因此它必为 $n = n_1n_2$。从而，$\deg^{x_1}_{y_2}(R_{S'}) = \deg^{x_1}_{y_2}(r_{S'}) = (m, n_1n_2)$。为证明 $m = m_1m_2$，我们需要一个“辅助耦合” $\tilde{S}' = (h^{(0)}, g^{(1)}_{j_1}, h^{(1)}, g^{(2)}_{j_2})$，并对 $i = 1, 2$ 定义

$$\tilde{G}^{(i)}_j = \mathrm{Res}(g^{(i)}_{j_i}, h^{(i-1)}; x_i),\ \tilde{r}_{\tilde{S}'} = \mathrm{Res}(g^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}; y_1),\ \tilde{R}_{\tilde{S}'} = \mathrm{Res}(\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}; y_1).$$

现在 x_1 在 $(\tilde{r}_{\tilde{S}'},\ \tilde{R}_{\tilde{S}'})$ 中所起的作用与 y_2 在 $(r_{S'}, R_{S'})$ 中相同，并且显然 $\deg^{x_1}(r_{S'}) = \deg^{x_1}(\tilde{r}_{\tilde{S}'})$。因此，类似的论证可以证明 $m = m_1m_2$。

最后，显然，$r_{S'}$ 和 $R_{S'}$ 的因式分解通过莫比乌斯映射彼此诱导，因此它们具有相同的可约性。□

将定理 7.7 应用于引理 7.6，我们立即得到如下结果。

推论 7.8. 对于约化耦合 $S_1' = (g_{j_1}^{(1)}, h^{(1)}, g_{j_2}^{(2)}, h^{(2)})$ 和 $S_2' = (g_{j_3}^{(3)}, h^{(3)}, g_{j_4}^{(4)}, h^{(4)})$，$deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'})$ 和 $deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_2'})$ 如下。

$\{j_1, j_2\}/\{j_3, j_4\}$	{1, 1}	{1, 3}	{1, 5}	{3, 3}	{5,5}	{3,5}
$deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'})$	(1,1)	(1, 2)	(2, 1)	(1,4)	(4, 1)	(2, 2)
度$_{x_3}^{x_1}(R_{S_2'})$	(1,1)	(2, 1)	(1, 2)	(4, 1)	(1, 4)	(2, 2)

定理 7.9。 设 $S_1' = (g_{j_1}^{(1)}, h^{(1)}, g_{j_2}^{(2)}, h^{(2)})$ 和 $S_2' = (g_{j_3}^{(3)}, h^{(3)}, g_{j_4}^{(4)}, h^{(4)})$ 是约化耦合，且 $j_i \in \{1, 3, 5\}$。若 $Z(S_1') \times_{\{x_1, x_3\}} Z(S_2')$ 是一个无限集，则在重新标记后，$\{j_1, j_2\}$ 和 $\{j_3, j_4\}$ 必为以下组合之一。

$\{j_1, \quad j_2\}$	{1,3}	{3,5}
$\{j_3, j_4\}$	{1, 5}	{3,5}

证明。根据定理 3.5，我们有 $\gcd(R_{S_1'}, R_{S_2'}) \neq 1$。特别地，当 $\deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'}) = \deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_2'})$ 时，$R_{S_1'}$ 和 $R_{S_2'}$ 可能仅相差一个常数而完全相同。逐一考察推论 7.9，并在必要时重新标记多项式后，我们得到上表。至于 $\deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'}) \neq \deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_2'})$，请记住，$R_{S_i'}$ 在 $\mathbb{C}[x_1]$ 或 $\mathbb{C}[x_3]$ 中没有因子。因此，例如，当 $\deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'}) = (2,2)$ 时，$R_{S_1'}$ 没有双次数为 $(1,2)$ 的因子。所以，剩下唯一可能的组合是 $\{j_1, l_1\} = \{1,1\}$ 和 $\{j_2, l_2\} = \{3,5\}$，重新标记后它们还原为 $\{1,3\}$ 和 $\{1,5\}$。□

上述定理揭示了所有具有非常分支的可约奇异匹配类型。根据定理 7.7，考察 $r_{S'}$ 的可约性与考察 $R_{S'}$ 的可约性等价（且更简单），因此得到以下两个引理。

引理 7.10。 对于约化耦合 $S' = (g_3^{(1)}, h^{(1)}, g_5^{(2)}, h^{(2)})$，$r_{S'}$ 可约，当且仅当以下方程组之一成立。

- $\{b_1 = -a_1, c_2 = -a_2\}$;
- $\{a_1 c_2 = a_2 b_1, f_1 = 0\}$;
- $\{a_1 a_2 = b_1 c_2, f_1 = 1\}$.

特别地，$r_{S'}$ 的因式分解分别如下。

- $r_{S'} = -[2f_1(f_1^2 - 1)(4a_1a_2x_1y_2 + 1) + ((f_1^2 - 1)^2 - 4f_1^2)(a_1x_1 - a_2y_2)]^2$;
- $r_{S'} = k(a_1x_1 - a_2y_2)^2$ 其中 $k = b_1/a_1$;
- $r_{S'} = 16k(a_1x_1 + c_2y_2)^2$ 其中 $k = b_1/a_1$。

证明。一旦系数被适当地参数化，符号计算即可验证该因式分解。对每个方程组，分别令 $\{b_1 = -a_1, c_2 = -a_2\}$、$\{b_1 = ka_1, c_2 = ka_2, f_1 = 0\}$ 以及 $\{b_1 = ka_1, a_2 = kc_2, f_1 = 1\}$。

现假设 $r_{S'}$ 可约。由推论 7.8，我们有 $\deg_{y_2}^{x_1}(r_{S'}) = (2,2)$。将 y_2 视为未知量，符号计算表明 $r_{S'}$ 的判别式为

$$\Delta = C(1 - 4a_1b_1x_1^2)[(4f_1^2(a_1a_2 - b_1c_2) + (f_1^2 - 1)^2(a_2b_1 - a_1c_2))x_1 - 2f_1(f_1^2 - 1)(a_2 + c_2)]^2$$

其中 C 是一个正常数。由于 S' 没有常值分支，$r_{S'}$ 可约当且仅当 $r_{S'}$ 具有一个双次数为 $(1,1)$ 的因子，即 Δ 是 $\mathbb{C}[x_1]$ 中的一个平方。注意到 $(1 - 4a_1b_1x_1^2)$ 总是具有两个不同的根，因此我们必有

$$4f_1^2(a_1a_2 - b_1c_2) + (f_1^2 - 1)^2(a_2b_1 - a_1c_2) = 2f_1(f_1^2 - 1)(a_2 + c_2) = 0$$

以确保 Δ 是一个平方，从而得到引理中陈述的三个方程组。 □

引理 7.11。 对于约化耦合 $S' = (g_5^{(1)}, h^{(1)}, g_3^{(2)}, h^{(2)})$， $r_{S'}$ 可约当且仅当以下方程组之一成立。

- $\{a_1c_1 = a_2b_2, f_1 = 0\}$;
- $\{a_1c_1a_2b_2 = \frac{1}{16}, f_1 = 1\}$.

特别地，当 $\{a_1c_1 = a_2b_2, f_1 = 0\}$ 时， $r_{S'}$ 的因式分解如下 .

- $r_{S'} = (a_2y_2 - a_1x_1)\,(x_1y_2 - k)$ *where* $k = b_2/a_1$.

证明。系数经过适当参数化后，可通过符号计算验证该因式分解。对于各个方程组，分别令 $\{c_1 = ka_2,\ b_2 = ka_1, f_1 = 0\}$ 和 $\{c_1 = \frac{-k^2}{4a_1}, b_2 = \frac{-1}{4k^2a_2}, f_1 = 1\}$。

现在假设 $r_{S'}$ 可约。将 x_1, y_2 视为未知数，我们分别得到 $G(1)_5$ 和 $g_3^{(2)}$ 的判别式

$$\Delta_1 = 4(f_1^2 - a_1c_1(f_1^2-1)^2)x_2^2 + 4f_1(f_1^2-1)(1+4a_1c_1)x_2 + (f_1^2-1)^2 - 16a_1c_1f_1^2,$$
$$\Delta_2 = -4a_2b_2x_2^2 + 1.$$

另一方面，定理 7.7 告诉我们 $\deg^{x_1}_{y_2}(r_{S'}) = (2,2)$。由于 S' 没有常值分支， $r_{S'}$ 有一个因子 r，其形式为 $r = (sx_1 + t)y_2 - (ux_1 + v)$。注意，作为结式，$\{G(1)_5, r_{S'}\} \subset S'$，因此 $Z(S')$ 有一个形式如下的分支

$$W = Z(g_5^{(1)}, h^{(1)}, g_3^{(2)}, h^{(2)}, G_5^{(1)}, r).$$

显然，W是一条（1 维）曲线。选取 $p \in W$，使得 W可在其附近局部参数化为 $\gamma(x_2)$。特别地，存在有理函数 $P_i,\ Q_i \in \mathbb{C}(x_2)$，其中 $i = 1,\ 2$，使得 $x_1 = P_1 + Q_1\sqrt{\Delta_1}$ 且 $y_2 = P_2 + Q_2\sqrt{\Delta_2}$。此外，~~给定~~ $r|_W \equiv 0$，$y_2 = \frac{ux_1+v}{sx_1+t}$ 总是成立。这意味着 $\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \in \mathbb{C}[x_2]$，因此 $\Delta_1\Delta_2$ ~~必定~~是 $\mathbb{C}[x_2]$中的一个平方。由此，鉴于后者有两个不同的根， Δ_1 必定是 Δ_2 的倍数。这就得到

$$4f_1(f_1^2-1)(1+4a_1c_1) = 0,\ \frac{4(f_1^2 - a_1c_1(1-f_1^2)^2)}{-4a_2b_2} = \frac{(1-f_1^2)^2 - 16a_1c_1f_1^2}{1}.$$

Fin因此，得益于推论 2.5，我们有 $1 + 4a_1c_1 \neq 0$，所以引理中所述的方程组必有一个成立 d. □

注 2。 在引理 7.11 中，当 $\{a_1c_1a_2b_2 = \frac{1}{16},\ f_1 = 1\}$ 时，我们没有展示 $r_{S'}$ 的因式分解，因为它对网格构造毫无用处。为说明这一点，我们首先应注意到 a_1c_1 和 a_2b_2 均为正。原因是$16a_1c_1a_2b_2 = 1$ 可推出 a_1c_1 与 a_2b_2 同号，且它们要么为 $|4a_1c_1| \geq 1$，要么为 $|4a_2b_2| \geq 1$。根据推论 2.5，我们有 a_1c_1 和 a_2b_2 均为正。此外，$f_1 = 1$ 意味着 $\Delta_1/\Delta_2 < 0$。因此，在 $Z(S')$ 中， x_1 和 y_2 同时为实数的点至多只有有限个。这意味着相应的网格在 $\mathbb{R}^3$中并非柔性的。

7.2 含两个等边形的奇异柔性网格

这种类型源于定理 7.9 中的第一种组合，它自然地将相应的匹配分为两种情况：**相邻等角奇异匹配** ($j_2 = j_3 = 1$) 和**反向等角奇异匹配** ($j_1 = j_3 = 1$)。对于第一种情况，采用重新标记会更方便，其中 $j_3 = j_4 = 1$，从而根据推论 7.8，$\deg^{x_1}_{x_3}(R_{S_1'}) = (2,\ 2)$，且 $\deg^{x_1}_{x_3}(R_{S_2'}) = (1,\ 1)$。因此，如果 $\gcd(R_{S_1'},\ R_{S_2'}) \neq 1$，则 $R_{S_1'}$ 必须是可约的。

例7.1 （相邻等角奇异匹配的一般情况）。从以下四个方程组中选择一个，为 $i = 1,\ 2$ 确定 $\{f_i,\ a_i,\ b_i,\ c_i\}$。

- $\{b_1 = -a_1, c_2 = -a_2, c_1 = b_2 = 0\}$;
- $\{a_1c_2 = a_2b_1, f_1 = c_1 = b_2 = 0\}$;
- $\{a_1a_2 = b_1c_2, f_1 = 1, c_1 = b_2 = 0\}$;
- $\{a_1c_1 = a_2b_2, f_1 = b_1 = c_2 = 0\}$.

根据引理 7.10 和 7.11，选取 $r_{S'}$ 的一个因子，并将其表示为 $(px_1 + q)y_2 - (mx_1 + n)$ 的形式，其中 $(m,\ n,\ p,\ q)$ 是关于 $(f_i,\ a_i,\ b_i,\ c_i)$ 的表达式。令 $e_i = 0$ 对应 $i = 1,\ 2,\ b_i = c_i = 0$ 对应 $i = 3,\ 4$。令 $f_2 \in (-1,\ 1]$，以及 $(a_3,\ e_3,\ a_4)$

任意但非零，且 $k_3 = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a_3e_3}}{2a_3}$。令

$$N_1 = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 1-f_2^2 & -2f_2 \\ 2f_2 & 1-f_2^2 \end{pmatrix}.$$

现在，从方程 (13) 开始，按照例5.1中的所有步骤一直做到最后。

上述例子的思路与例5.1非常相似：要构造莫比乌斯变换 N_i such that$N_4N_3N_2N_1(x_1) = x_1$，请参见定理 5.1 的证明。

对于反向等角奇异匹配，其一般构造是通过技术性计算推导出来的。不过，思路很容易理解。我们强烈建议读者先接受所有计算结果，直到掌握核心思路，然后再通过符号计算高效地验证计算细节。

根据定理 7.9，我们可以假设 $S_1' = (g_1^{(1)},\ h^{(1)},\ g_3^{(2)},\ h^{(2)})$ 和 $S_2' = (g_1^{(3)},\ h^{(3)},\ g_5^{(4)},\ h^{(4)})$。显然，

$$Z(S_1') \underset{\{x_1,x_3\}}{\times} Z(S_2') = Z(\tilde{S}_1') \underset{\{x_4,y_4\}}{\times} Z(g_5^{(4)}) \tag{18}$$

其中 $\tilde{S}_1' = (h^{(4)},\ g_1^{(1)},\ h^{(1)},\ g_3^{(2)},\ h^{(2)},\ g_1^{(3)},\ h^{(3)})$。注意，除了 $g_3^{(2)}$ 之外，$\tilde{S}_1'$ 的每个生成元都会在其参数之间诱导一个莫比乌斯变换。因此，在 $Z(\tilde{S}_1')$ 中，我们有 $x_2 = \frac{uy_4+v}{sy_4+t}$ 和 $y_2 = \frac{Ux_4+V}{Sx_4+T}$。具体而言，

$$\frac{uy_4+v}{sy_4+t} = \frac{(k_1F_4-F_1)y_4+(F_1F_4+k_1)}{(k_1F_1F_4+1)y_4+(k_1F_1-F_4)},\quad \frac{Ux_4+V}{Sx_4+T} = \frac{(F_2-k_3F_3)x_4+(F_2F_3+k_3)}{(k_3F_2F_3+1)x_4+(F_3-k_3F_2)}, \tag{19}$$

其中 $F_i = \frac{2f_i}{1-f_i^2}(h^{(i)} = 0 \Leftrightarrow y_i = \frac{x_{i+1}+F_i}{1-F_ix_{i+1}})$。对应的莫比乌斯映射为

$$\mathcal{M}(g_3^{(2)}(x_2,y_2)) = (sy_4+t)(Sx_4+T)^2 g_3^{(2)}\left(\frac{uy_4+v}{sy_4+t}, \frac{Ux_4+V}{Sx_4+T}\right) \in \mathbb{C}[x_4,y_4].$$

我们自然有 $Z(\mathrm{M}(g_3^{(2)})$ 的 $(x_4,\ y_4)-$ 投影，其中 $Z(\tilde{S}_1')$。给定 $g_5^{(4)}$ 不可约，若纤维积 (18) 是无限集，则 $\mathrm{M}(g_3^{(2)})/g_5^{(4)}$ 必须是一个常数。将 $g_3^{(2)},\ g_5^{(4)}$ 写成矩阵形式：

$$g_3^{(2)} = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix},\ g_5^{(4)} = \begin{pmatrix} x_4^2 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & 1 \\ c_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此，$\mathrm{M}(g_3^{(2)})$ 可改写为 $\mathrm{M}(g_3^{(2)}) = (x_4^2,\ x_4,\ 1)M(y_4,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 其中

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^2 & SU & S^2 \\ 2UV & SV+UT & 2ST \\ V^2 & VT & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix}. \tag{20}$$

给定 $\mathrm{M}(g_3^{(2)})/g_5^{(4)} \in \mathbb{R}$，我们需要 $m_{12} = m_{21} = m_{32} = 0$。此外，由于莫比乌斯变换的矩阵是在 $\mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{R})$ 中考虑的，因此不妨假设

$$d := ut - sv,\ D := UT - SV,\ \{d, D\} \subset \{\pm 1\}.$$

因此，通过计算m_{ij}，我们得到

$$\begin{cases} (S^2b_2 + U^2a_2)v + SUt = 0, \\ (T^2b_2 + V^2a_2)v + VTt = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(STb_2 + UVa_2)u + (SV+TU)s = 0, \\ (tu - vs = d) \wedge (STb_2 = UVa_2), \end{cases} \tag{21}$$

一个关于（v，t）的线性系统和一个关于（u，s）的线性系统。最后一个方程 $STb_2 = UVa_2$ 确保（v，t）存在非零解，因此 $tu - vs = d$ 关于（u，s）是可解的。一般而言，对于预先给定的（U，V，S，T），只要满足 $UT - SV = D$ 和 $STb_2 = UVa_2$，方程组 (21) 就能给出可行的（u，v，s，t），使其具有 $m_{12} = m_{21} = m_{32} = 0$。因此，（$a_4$，$c_4$）可以由下式得到

$$\frac{a_4}{m_{11}} = \frac{1}{m_{22}} = \frac{c_4}{m_{31}}. \tag{22}$$

例 7.2（反向等角奇异匹配的一般情形）。令 d、$D \in \{\pm 1\}$ 非零，且 (a_1, a_2, b_2, a_3) 非零，$(b_1, c_1, c_2, e_2, b_3, c_3, b_4, e_4)$ 全部为 0。选取 U、V、S、T，使得 $UT - SV = D$ 和 $STb_2 = UVa_2$。因此，对于 (u, v, s, t)，方程组 (21) 可解：取 $n \neq 0$ 并令

$$(v, t) = n(-SU, S^2 b_2 + U^2 a_2),\ (u, s) = \left(\frac{d(SV + TU)}{nD(U^2 a_2 - S^2 b_2)}, \frac{2d(STb_2 + UVa_2)}{nD(S^2 b_2 - U^2 a_2)} \right).$$

令 (p, q) 满足

$$dp^2 + (u^2 + v^2 + s^2 + t^2)p + d = 0,\ Dq^2 + (U^2 + V^2 + S^2 + T^2)q + D = 0.$$

注意到 p, q 在给定 $(u^2 + v^2 + s^2 + t^2)^2 \geq 4|ut - sv|^2 = 4$ 等条件下为实数。为求解方程组 (19)，令

$$(k_1, k_3, F_1, F_2, F_3, F_4) = \left(p, q, -\frac{dp + u^2 + v^2}{su + tv}, \frac{Dq + U^2 + V^2}{SU + TV}, -\frac{Uq + T}{Vq - S}, \frac{up + t}{vp - s} \right).$$

使用 $F_i = \frac{2f_i}{1 - f_i^2}$ 恢复 $f_i \in (-1, 1]$；对于 $i = 1, 3$，调整 a_i 的值，使得 $e_i = -a_i k_i^2 - k_i \neq 0$。最后，计算矩阵 (20)，并根据方程 (22) 令 $(a_4, c_4) = \left(\frac{m_{11}}{m_{22}}, \frac{m_{31}}{m_{22}} \right)$。如果不等式 (16) 对所有 i 均不成立，则重新开始。

7.3 具有四个鸢形的奇异柔性网格

现在我们考虑定理 7.9 中的第二种组合。与此类网格对应的匹配称为**鸢形**匹配。具体而言，引理 7.10 和 7.11 的目的，是将此类型划分为**可约风筝形匹配**和**不可约风筝形匹配**。设 S_1'，S_2' 是鸢形匹配的约化耦合。根据推论 7.8，$\deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_1'}) = \deg_{x_3}^{x_1}(R_{S_2'}) = (2, 2)$。可约风筝形匹配要求 $R_{S_1'}$，$R_{S_2'}$ 具有一个双次数为 (1，1) 的公因子；不可约风筝形匹配要求 $R_{S_1'}$，$R_{S_2'}$ 均不可约，因此二者仅相差一个常数。

例7.3 （可约风筝形匹配的典型情形）。 按照例7.1进行，并在获得 (m, n, p, q) 后停止！令 $e_i = 0$，其中 $1 \leq i \leq 4$。现在，读者可以选择以下两种方案中的任意一种来构造其余系数。

操作1. 令 $\{a_3, a_4\}$ 非零，并令 $\{b_3, c_4\}$ 全为 0。令 $\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$，然后从方程 (13) 开始，按例5.1完成所有步骤，并在得到 (f_3, k_4, f_4) 时停止！然后更新数值 $f_2 \leftarrow f_3$ 和 $f_3 \leftarrow 0$。最后，令 $c_3 = k_4 a_4$ 和 $b_4 = k_4 a_3$。

操作2. 令 $c_3 = b_4 = 0$, $f_2, f_4 \in (-1, 1]$。令

$$\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_2^2 & -2f_2 \\ 2f_2 & 1 - f_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - f_4^2 & -2f_4 \\ 2f_4 & 1 - f_4^2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

如有必要，调整 f_2, f_4，使得存在一个实数 z 满足 $sv^4 z^4 + (4uvt - 2sv^2)z^2 + s = 0$。令

$$f_3 = \frac{-1 + \sqrt{z^2 v^2 + 1}}{zv},\ a_3 = -b_3 = \frac{zt}{1 - z^2 v^2},\ a_4 = -c_4 = \frac{s(z^2 v^2 - 1)}{4zvt}. \tag{24}$$

如果不等式 (6) 对所有 i均不成立，则重新开始。

图示： 可约三角匹配由约化耦合 (S_1', S_2') 构成，且 $({}^{r}S_1', {}^{r}S_2')$ 可约。具体而言，在 $W := Z(S_1') \times_{\{x_1,x_3\}} Z(S_2')$ 中，我们有

$$h^{(4)}(y_4, x_1) = r_{S_2'}(x_3, y_4) = h^{(2)}(y_2, x_3) = r_{S_1'}(x_1, y_2) = 0. \tag{25}$$

例7.3从一个含有因子（$px_1 + q$）$y_2 -$（$mx_1 + n$）的可约${}^{r}S_1'$开始。观察系数的设置，操作1考虑了引理 7.11 中含有因子（$x_3y_4 - k_4$）的${}^{r}S_2'$，因此方程（25）给出了连续的莫比乌斯变换

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1-f_4^2 & -2f_4 \\ 2f_4 & 1-f_4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-f_2^2 & -2f_2 \\ 2f_2 & 1-f_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}(x_1).$$

为了使W成为一个无限集，上述矩阵乘积应当得到一个数量矩阵。对于（f_2，f_4，k_4）的构造与例5.1中（f_3，f_4，k_4）的构造相同。另一方面，操作2考虑了引理 7.10 第一种情形中的${}^{r}S_2'$。注意，$h^{(4)} = h^{(2)} = 0$ 将方程（25）化简为

$$r_{S_2'}(x_3, y_4) = r_{S_1'}\left(\frac{(1-f_4^2)y_4 - 2f_4}{2f_4y_4 + 1 - f_4^2}, \frac{(1-f_2^2)x_3 + 2f_2}{1 - f_2^2 - 2f_2x_3}\right) = \frac{f(x_3, y_4)}{g(x_3, y_4)} = 0,$$

其中 f，$g \in \mathbb{C}[x_3, y_4]$。（23）中的一系列莫比乌斯变换将${}^{r}S_1'$的因子（$px_1 + q$）$y_2 -$（$mx_1 + n$）变为 f（x_3，y_4）的因子（$sy_4 + t$）$x_3 -$（$uy_4 + v$）。因此，为使W成为一个无限集，${}^{r}S_2'$也必须以（$sy_4 + t$）$x_3 -$（$uy_4 + v$）为因子。通过将方程（24）确定的系数代入，对${}^{r}S_2'$进行因式分解，即可通过符号计算验证操作2的正确性。

根据引理 7.10 和 7.11，尚未涵盖的唯一因子情形是 ${}^{r}S_2'(x_3 + ky_4)$。然而，令 $\bar{y}_4 = -\frac{1}{y_4}$，即可将其转化为 Op. 1，因为 $(x_3 + ky_4) = 0 \Leftrightarrow (x_3\bar{y}_4 - k) = 0$。这就是我们称例7.3为“典型情形”的原因。

命题7.12。 设 $S_1' = (g_3^{(1)}, h^{(1)}, g_5^{(2)}, h^{(2)})$和 $S_2' = (g_3^{(3)}, h^{(3)}, g_5^{(4)}, h^{(4)})$是对应于匹配 M 的两个约化耦合，使得 $Z(S_1') \times_{\{x_1,x_3\}} Z(S_2')$构成一个无限集。那么 M必定是可约的。

Pro。令 x_3 为未知数，经符号计算可得 $R_{S_1'}$ 与 $R_{S_2'}$的判别式之比 is

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{(1 - 4a_1b_1x_1^2)p^2}{4(f_4^2 - a_4c_4(1-f_4^2)^2)x_1^2 + 4f_4(f_4^2-1)(1+4a_4c_4)x_2 + (1-f_4^2)^2 - 16a_4c_4f_4^2}$$

其中 $p \in \mathbb{C}(x_1)$是 x_1的有理函数。由于 $Z(S_1') \times_{\{x_1,x_3\}} Z(S_2')$是一个无限集，因此$\gcd(R_{S_1'},\ R_{S_2'}) \neq 1$。假设 $R_{S_1'}$ 不可约，则 $R_{S_2'}$ 必为 $R_{S_1'}$的倍数，这意味着 $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \in \mathbb{C}$。考虑到 $1 - 4a_1b_1x_1^2$ 有两个不同的根，它必定是 $p \in \mathbb{C}$，并且

$$4f_4(f_4^2 - 1)(1 + 4a_4c_4) = 0,\ \frac{4(f_4^2 - a_4c_4(1-f_4^2)^2)}{-4a_1b_1} = \frac{(1-f_4^2)^2 - 16a_4c_4f_4^2}{1}. \tag{26}$$

令$\tilde{S}_1' = (g_5^{(4)},\ h^{(4)},\ g_3^{(1)},\ h^{(1)})$和$\tilde{S}_2' = (g_5^{(2)},\ h^{(2)},\ g_3^{(3)},\ h^{(3)})$。因此

$$Z(S_1') \underset{\{x_1,x_3\}}{\times} Z(S_2') = Z(\tilde{S}_1') \underset{\{x_2,x_4\}}{\times} Z(\tilde{S}_2').$$

回顾引理 7.11 证明的结尾，方程 (26) 表明 $r_{\tilde{S}'^1}$（因此 $R_{\tilde{S}_1'}$）是可约的。这意味着从重新标记的角度来看，M 始终是可约的。□

设 S_1', S_2' 是对应于不可约风筝形匹配的两个约化耦合。上述命题指出了唯一可能的情况：

$$S_1' = (g_5^{(1)}, h^{(1)}, g_3^{(2)}, h^{(2)}),\ S_2' = (g_3^{(3)}, h^{(3)}, g_5^{(4)}, h^{(4)}).$$

构造思路很简单。构造 S_1'，使得 $R_{S_1'}$ 不可约（通过避开引理 7.11 中的条件）；构造 S_2'，使得 $R_{S_2'}$ 和 $R_{S_1'}$ 仅相差一个常数倍。一旦在$\mathbb{R}$中求出 S_1' 的系数，利用数值方法求得 S_2' 便轻而易举，因为通过符号计算可以立即显式给出 $R_{S_2'}$。然而，要像我们处理此前所有情形那样求出一般解，则困难得多。事实上，这些系数必须满足

$$\begin{cases} \frac{a_1}{c_1} = \frac{4(a_4c_4(f_4^2-1)^2-f_4^2)}{16a_4c_4f_4^2-(f_4^2-1)^2},\ \frac{a_2}{b_2} = \frac{4(a_3b_3(f_2^2-1)^2-f_2^2)}{16a_3b_3f_2^2-(f_2^2-1)^2}, \\ \frac{f_1}{1-f_1^2} \in \left\{ \pm\frac{\sqrt{a_1c_1}-\sqrt{a_2b_2}}{4\sqrt{a_1c_1a_2b_2}+1}, \pm\frac{\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2b_2}}{4\sqrt{a_1c_1a_2b_2}-1} \right\}, \end{cases} \tag{27}$$

这要求 $a_1c_1 > 0$ 和 $a_2b_2 > 0$ 求出一个 $f_1 \in (-1,\ 1]$ 上述结果来自极其复杂的计算，这里不予展示。然而，只要能轻易检验结果的有效性，将其作为构造的提示并无妨。因此，本文仅给出不可约风筝形匹配的一个特殊情形，以证明其存在。

例 7.4（不可约鸢形匹配的特殊情形）。设

$$\{b_1, e_1, c_2, e_2, f_3, c_3, e_3, b_4, e_4\} = \{0\},\ f_2 = f_4 = \sqrt{2} - 1,$$

并令 $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 任意取值，但 $a_1a_2a_3^2 < 0$。根据方程 (27)，设 $c_1 = a_1,\ b_2 = a_2$，并令 $f_1 \in (-1,\ 1]$ 使得 $\frac{f_1}{1-f_1^2} = \frac{a_1+a_2}{4a_1a_2-1}$。调整 $(a_1,\ a_2)$ 的值，使其不满足引理 7.11 中的条件，从而 $r_{S_1'}$ 确为不可约。最后，设

$$b_3 = \frac{(a_1+a_2)(1-4a_1a_2)}{4a_1a_3(4a_2^2+1)},\ a_4 = \pm a_3\sqrt{-\frac{a_1(4a_2^2+1)}{a_2(4a_1^2+1)}},\ c_4 = -\frac{b_3a_4}{a_3}.$$

如果不等式 (6) 对所有 i 均不成立，则重新开始 .

注 3。令 $S_1' = (g_1^{(1)},\ h^{(1)},\ g_3^{(2)},\ h^{(2)})$ 和 $S_2' = (g_1^{(3)},\ h^{(3)},\ g_5^{(4)},\ h^{(4)})$ 为例 7.4 中构造的约化耦合。通过符号计算检验其正确性十分高效，只需证明 $R_{S_1'}/R_{S_2'}$ 是一个常数。此外，令 $\tilde{S}_1' = (g_5^{(4)},\ h^{(4)},\ g_3^{(1)},\ h^{(1)})$，推论 7.8 表明 $\deg_{x_2}^{x_4}(R_{\tilde{S}'^1}) = (4,\ 1)$。由于 $R_{\tilde{S}'^1}$ 在 $\mathbb{C}[x_4]$ 中没有因子，因此它自然是不可约的。这意味着无论如何标记这些多项式，该匹配确实都是不可约的。

8 总结与未来工作

本文对具有可约四边形的柔性网格进行了深入研究和分类。分类包括以下典型类别。

$$\begin{cases} \text{(Non-singular) isogonal}, \\ \text{(Singular) constant}, \\ \text{(Singular) non-constant} \begin{cases} \text{isogonal} \begin{cases} \text{adjacent}, \\ \text{opposite}, \end{cases} \\ \text{detoidal} \begin{cases} \text{reducible}, \\ \text{irreducible}. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \tag{28}$$

其他任何情况都可以通过第4节中的技巧转化为上述某种情况。此外，文中还给出了系统构造方法，用于恢复图（28）中每一类的所有可能网格，但由于计算复杂度较高，不包括不可约圆环网格。不过，我们仍发现了这类网格的一个特殊情形，可为读者提供丰富的柔性样例以供探索。

这项工作是具有扭曲面的3×3柔性四边形网格分类问题蓝图的第一块。鉴于其历史与难度，它也是一座里程碑：此类网格中的第一个，是在该问题提出 [6],数十年后才被发现的。后续工作分为两部分。

1. 具有不可约四边形的柔性网格；2. 具有混合（可约与不可约）四边形的柔性网格。

参考文献

[1] R. Bricard. 关于铰接八面体理论的论文. 纯粹与应用数学杂志, 3:113–148, 1897.[2] I. Izmestiev. 具有四边形底面的柔性 Kokotsakis 多面体的分类. 国际数学研究通讯, (3):715–808, 2017.[3] I. Izmestiev、A. Rasoulzadeh与J. Tervooren. 离散与光滑T曲面的等距变形. 计算几何, 122, 2024.[4] A. Kokotsakis. 论可动多面体. 数学年刊, 107:627–647, 1933.[5] K. Miura. 空间中大型薄膜的包装与展开方法. 载于第*31*届国际宇航联合会大会（东京*1980*）. 1980.[6] G. Nawratil. 等角型连续柔性Kokotsakis带的推广. 国际几何与图形学会议, 第115–126页, 2022年.[7] R. Sauer. 差分几何. Springer, 1970.[8] R. Sauer与H. Graf. 论与开敞分面曲面弯折相类比的曲面弯曲. 数学年刊, 105:499–535, 1931.[9] W. Schief、A. Bobenko与T. Hoffmann. 多面体曲面无穷小变形与有限变形的可积性. 载于A. Bobenko等编, 离散微分几何, *Oberwolfach*研讨班第38卷, 第67–93页. Springer, 2008.[10] K. Sharifmoghaddam、R. Maleczek与G. Nawratil. T面体型可刚性折叠管状结构的推广. 力学研究通讯, 2023. 待发表.[11] K. Sharifmoghaddam、G. Nawratil、A. Rasoulzadeh与J. Tervooren. 利用柔性梯形四边形曲面进行可变形设计. 载于*IASS*年度研讨会论文集, 2020/21.[12] H. Stachel. Kokotsakis网格的运动学方法. 计算机辅助几何设计, 27:428–437, 2010.[13] T. Tachi. 可刚性折叠四边形网格折纸的推广. 国际壳体与空间结构协会会刊, 50:173–179, 2009.[14] T. Tachi. 复合可刚性折叠曲面折纸结构. 载于F. Escrig与J. Sanchez编, 第一届可变形结构会议论文集, 共6页. Starbooks, 塞维利亚, 2013.[15] T. Tachi与G. Epps. 通过曲面折叠合理化设计建筑用单自由度机构. 载于Y. Ikeda编, *ALGODE*研讨会论文集, 共14页. 日本建筑学会, 东京, 2011. 光盘.[16] A. Voss. 论其上两族测地线构成共轭系的那些曲面. 巴伐利亚科学院会议报告，数学-自然科学类, 第95–102页, 1888.

角的定义

考虑图5左侧部分展示的一个平面网格。我们将所有向量的起点移至单位球面的球心，从而得到图5右侧的球面连杆机构。我们采用球面的统一取向，使表面法向量朝外。在四边形 Q_1 中：$(\lambda_1、\ \delta_1、\ \mu_1、\ \gamma_1)$，二面角 α_1、$\beta_1 \in [0, 2\pi)$ 由右手定则明确定义：从 λ_1 (或 δ_1) 到 γ_1 (或 λ_1) 的逆时针旋转角。α_2、$\beta_2 \in [0, 2\pi)$ 的定义方式类似。

对于扭曲网格（图2），我们将角的确定形式化如下。

令 $\boldsymbol{v_i}$ 为 Q_i 和 Q_{i+1}的公共顶点处的表面法向量。以图 3 为例，$Q_1 \cap Q_2$ 的邻域可通过立体投影（保角）映射到其切平面上（保持相同的定向，见图6）。令 T（$\boldsymbol{v_i}$）为表面法向量为 $\boldsymbol{v_i}$的定向切平面。 $-\lambda_i$ 和 $-\delta_i$分别是 λ_i和 δ_i 关于 $\boldsymbol{v_i}$的反射。引入算子

$$< \cdot, \cdot >_{\boldsymbol{v_i}} : T(\boldsymbol{v_i})^2 - \{\mathbf{0}\} \to [0, 2\pi);$$

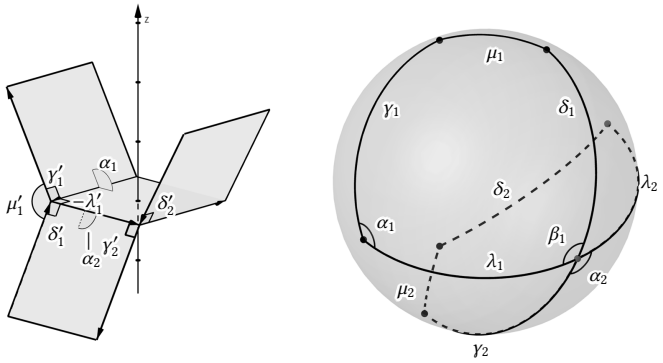

图 5。注意 $(\lambda_i, \gamma_i, \mu_i, \delta_i)$ 与 $(\lambda_i', \gamma_i', \mu_i', \delta_i')$ 分别与 π 互补。

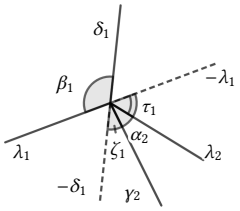

图 6. 图 3 左侧“$*$”附近邻域的立体投影。交点处的 $\boldsymbol{v_1}$ 是一个垂直于纸面并指向读者的向量。 $-\lambda_1$ 和 $-\delta_1$分别是 λ_1 和 δ_1 关于 $\boldsymbol{v_1}$的反射。

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >_{\boldsymbol{v_i}} := \text{The counterclockwise rotating angle from } \boldsymbol{x} \text{ to } \boldsymbol{y}.$$

$$\alpha_i := \begin{cases} < \lambda_i, \gamma_i >_{\boldsymbol{v_{i-1}}}, \ i \in \{1,3\}, \\ < \gamma_i, \lambda_i >_{\boldsymbol{v_{i-1}}}, \ i \in \{2,4\}, \end{cases} \quad \beta_i := \begin{cases} < \delta_i, \lambda_i >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{1,3\}, \\ < \lambda_i, \delta_i >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{2,4\}, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_4}$。此后，通过设定

$$\tau_i := \begin{cases} < \lambda_{i+1}, -\lambda_i >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{1,3\}, \\ < -\lambda_i, \lambda_{i+1} >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{2,4\}, \end{cases} \quad \zeta_i := \begin{cases} < -\delta_i, \gamma_{i+1} >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{1,3\}, \\ < \gamma_{i+1}, -\delta_i >_{\boldsymbol{v_i}}, \ i \in \{2,4\}, \end{cases}$$

我们有 $\beta_i \equiv \alpha_{i+1} + \tau_i + \zeta_i$ 模 2π，对所有 $i \in \{1,2,3,4\}$。例如，

$$\begin{aligned} \beta_2 =& < \lambda_2, \delta_2 >_{\boldsymbol{v_2}} = < -\lambda_2, -\delta_2 >_{\boldsymbol{v_2}} \\ \equiv& < -\lambda_2, \lambda_3 >_{\boldsymbol{v_2}} + < \lambda_3, \gamma_3 >_{\boldsymbol{v_2}} + < \gamma_3, -\delta_2 >_{\boldsymbol{v_2}} = \tau_2 + \alpha_3 + \zeta_2 \mod 2\pi. \end{aligned}$$