arXiv:2603.06241v1 [math.FA] 6 Mar 2026

测度空间对的不等式及其应用

P. D. Johnson、R. N. Mohapatra、Shankhadeep Mondal数学与统计学系，奥本大学，奥本，阿拉巴马州 *3684*；数学学院，佛罗里达中央大学，奥兰多，佛罗里达州 *32816*；数学学院，佛罗里达中央大学，奥兰多，佛罗里达州 *32816*

摘要

我们研究一类涉及定义在乘积域上的函数的测度空间对不等式。主要结果在一般乘积测度框架下建立了一个詹森型不等式，并将 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式等经典不等式作为特殊情形纳入其中。在附加凸性假设下，该不等式具有关于等号成立的精确刻画，并导出定量、变分和概率方面的改进。若干推论展示了幂平均、熵型和抗擦除不等式，以及其在卷积型算子和加权离散模型中的应用。

关键词：均匀超图、正测度空间、凸函数、严格凸性、詹森不等式。

*2010*年数学主题分类： 26D15, 42C15, 46E30, 05C50, 60E15.

1. 引言与背景

设k 为正整数。k-均匀超图 是一个有序对（V,E），其中V 是一个集合（由顶点组成），而E是由V的多重子集构成的多重集（其元素称为超边，简称边），每个多重子集的多重集基数均为k。

称 E 为多重集，意味着允许存在“重复的边”。称每个 $e \in E$ 是 V 的多重子集，意味着 V 中的元素可以在 e 中出现多次。对于 $e \in E$ 和 $v \in V$，令 M(v, e) 表示 v 在边 e 中出现的次数。M(v, e) 有时称为 v 在 e 上的重数。数组 $M = [M(v, e); v \in V, e \in E]$ 有时称为该超图的顶点-边关联矩阵。k-均匀性要求也可重述为：对于每个 $e \in E$，$\sum_{v \in V} M(v, e) = k$；换言之，M 的列和均等于 k。全文中，我们排除孤立顶点的存在，即对于满足 $M(v, e) = 0$ 的所有 $e \in E$ 的 $v \in V$。

如果$G = (V,E)$是一个超图（不一定是k-均匀的，其中k为某个值），其顶点-边关联矩阵为 M （一个$p \times q$ 矩阵，$p = |V|$,$q = |E|$），则顶点$v \in V$的度（或价，记为$d(v)$）是v 在超图各边中出现的次数：$d(v) =$

*通讯作者：ram.mohapatra@ucf.edu电子邮件地址：johnspd@auburn.edu（P. D. Johnson）、ram.mohapatra@ucf.edu（R. N. Mohapatra）、shankhadeep.mondal@ucf.edu（Shankhadeep Mondal）

$\sum_{e\in E} M(v,e)$。如果G的顶点的度都相等，则G是正则的。G的平均度，不出所料，是

$$\bar{d} = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v) = \frac{1}{p}\sum_{v\in V}\sum_{e\in E} M(v,e)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{e\in E}\sum_{v\in V} M(v,e).$$

如果G恰好是k-一致的，那么

$$\bar{d} = \frac{1}{p}|E|k = \frac{kq}{p}.$$

由于超图可以由其顶点-边关联矩阵完全描述，下面这个不涉及超图的定理，实际上给出了一族不可数的不等式，将相邻顶点（即至少共同属于一条边的顶点）的度与平均度联系起来。

定理1.1 ([5]). 设 $M = [m_{ij}]$ 是一个由实数构成的 $p \times q$ 矩阵，其列和为常数 c，行和为 $d_1,\ldots,d_p$。设 φ 是一个函数，使得 $f(x) = x\varphi(x)$ 在包含 $d_1,\ldots,d_p$ 的区间上为凸函数。令 $\bar{d} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_i (= \frac{qc}{p})$。则

$$\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} m_{ij}\varphi(d_i) \geq c\varphi(\bar{d}).$$

若 f 严格凸，则当且仅当 $d_1 = \cdots = d_p$ 时等号成立。

关于凸性和严格凸性的定义与基本结果，参见 [1], 第70–74页，或几乎任何一本实分析教材。

定理1.1的证明很简单：从所提出不等式的左边开始，改变求和顺序，注意到$d_i = \sum_{j=1}^{q} m_{ij}$，并利用$f$的凸性所允许的詹森不等式[1],。

人们最初关注这一结果，是因为它在一致超图中的应用。若M是k-均匀超图$G = (V,E)$的顶点-边关联矩阵，根据假设，M的常数列和为k，那么定理1.1表明，对于满足该定理假设的函数 φ，对各边上的G顶点度处函数值之和取算术平均（其中，j^{th} 边上的求和中，(d_i)出现m_{ij}次，即i^{th} 顶点出现在该边上的次数），该平均值大于或等于$\bar{\varphi}(d)$；并且，若$t\varphi(t)$在包含各顶点度的某个区间上严格凸，则当且仅当该超图是正则超图时，等号成立。

对于φ的某些选择，所得不等式颇为有趣。例如，取$\varphi(t) = lnt$。若$f(t) = tlnt$，则$f''(t) = \frac{1}{t} > 0$若$t > 0$，因此f在$(0,\infty)$上严格凸。将 $\varphi = ln$代入定理1.1的不等式，并用k替换c，再稍作整理，包括对两边取指数，我们得到

$$\left[\prod_{j=1}^{q}\left(\prod_{i=1}^{p} d_i^{m_{ij}}\right)^{1/k}\right]^{1/q} \geq \bar{d},$$

当且仅当$d_1,\ldots,d_p$相等时，等号成立。对于一个k均匀超图，这意味着：对边取几何平均后，各边上顶点度的几何平均大于等于顶点度的算术平均，

当且仅当超图是正则的，等号成立。

如果你对 $\varphi(t) = t^s$、$s > 0$随意摆弄，就会得到一个众所周知且对任意$d_1, ..., d_p > 0$以及任意$s > 0$都成立的不等式：

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_i^{s+1} \geq (\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_i)^{s+1}.$$

这是由$f(x) = x^{s+1}$在 $[0, \infty$上的凸性直接推出的；因此，定理1.1的证明所提供的稍复杂一些的证明并无意义。此外，这个不等式并不能有趣地解释为关于一致超图的陈述，而由$\varphi(x) = lnx$得到的不等式则可以。我们指出这一点，是想承认定理1.1所蕴含的无穷多不等式中，并非所有不等式都是新的和／或有趣的；或许大多数都不是。

这一主题的下一项进展由本文的合著者于 [4]取得。我们意识到，定理1.1可以通过给（均匀）超图的边附加权重来推广

，也就是说，$wt(e)$ 是赋予边 e 的权重，并定义 $d(v) = \sum_{e \in E(G)} M(v, e) wt(e)$，即 v 的加权度 。[注：在普通超图 $G = (V, E)$ 中，$wt(e) = 1$ 对所有 $e \in E$ 都成立。这就是定理1.1中的情形。术语提示：当 $wt(e) \in (0, 1]$ 对所有 $e \in E$ 都成立时，这些边称为模糊的。]

定理1.1推广为下文的定理 1.2；后者将[4] 中关于一致超图的结果推广到 [1]中的边加权均匀超图。但本文将不再讨论超图：我们关注定理 1.2 本身，而不是将超图作为推导分析不等式的手段。我们还打算将定理 1.2 从讨论某些矩阵推广到讨论某些测度空间的乘积。

定理 1.2 ([4])。 设 $M = [m_{ij}]$ 是一个列和为 c 的 $p \times q$ 实数矩阵。令 $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ 以及区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 满足

(i) $s = \sum_{i=1}^{q} x_i > 0$, *and*

(ii) *for each* $i \in \{1, \ldots, p\}$, $d_i = \sum_{j=1}^{q} m_{ij} x_j \in I$.

设 $\bar{d} = \frac{1}{p}\sum^{p}{}_{i=1} d_i$。

假设 φ 是定义在 I 上的实值函数，使得由 $f(t) = t\varphi(t)$定义的函数 f 在 I 上是凸函数。则

$$s^{-1}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} \varphi(d_i) m_{ij} x_j \geq c\varphi(\bar{d});$$

若 f 在 I 上严格凸，则仅当 $d_1 = \cdots = d_p$时等号成立。

将此结果应用于边加权一致超图时，c 表示每条边上的顶点数（重复计数），$p = |V|$，$q = |E|$，M 是顶点-边关联矩阵，$x_1, \ldots, x_q$ 是边权重，$d_1, \ldots, d_p$ 是顶点的加权度，而 $\bar{d}$ 是平均加权度。

如果不联系边加权一致超图，那么除非你是实解析不等式的爱好者，否则定理 1.2 很可能会显得晦涩难懂，毫无用处。如果你持这种看法，那么定理 2.1 更会让你难以接受。

我们并不认为数学中的深刻性全然是好事。一个陈述复杂的深刻结果可能意味着走进了死胡同：看似美好的前路最终通向一片无法穿越、荆棘丛生的密林。举例来说，维纳-陶伯定理（请自行查阅！）似乎预示着人们对陶伯定理的兴趣将告终，甚至可能正是它导致了这种局面。

另一方面，当偶然的数学发现出现后，又通过类比和推广扩展到不同的情境时，如果不尽可能深入地探究这些扩展，似乎就是一种罪过。维纳的陶伯型定理如今或许已成了毫无生气的博物馆藏品，但至少它作为一件非凡的博物馆藏品而留存下来——这是一个深刻的数学发现；如果陶伯没有偶然发现最初的陶伯型定理，并将其告知哈代和利特尔伍德，这一发现就绝不会出现。我们也不应认为数学博物馆藏品不可能重焕生机。想想从罗马时代晚期直到文艺复兴，古希腊数学沉寂了整整一千年。

2. 积测度空间上的主要不等式

以下定理确立了与广义度函数 $\delta(v)$相关的一条基本凸性不等式。该定理表明，在积空间 $V \times E$ 上的加权相互作用积分，可以由度函数的平均值控制。从本质上说，这是一个适用于上文所述测度-超图框架的詹森型不等式。它将涉及核 $M(v,e)$和权函数 $wt(e)$的加权双线性表达式，转化为一个仅依赖于平均度 δ的不等式。这一原理将作为核心工具，用于推导后续章节中的若干推论，包括与凸性、幂平均和熵型泛函相关的界。

定理 2.1. 设(V, μ) 和(E, τ) 是正测度空间，
$M : V \times E \to \mathbb{R}$ 是$(\mu \times \tau)$-可测函数，$wt : E \to \mathbb{R}$
是 τ-可测函数，
$I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 $f(t) = t\varphi(t)$ 在 I 上是凸函数。假设以下条件(i)-(vi)成立。

(i) $0 < \mu(V) < \infty$.
(ii) $0 < s = \int_E wt \, d\tau < \infty$.
(iii) $\int_{\text{顶点集}\times\text{与}} |M(v,e)| \, |wt(e)| d(\mu \times \tau) < \infty$。

(iv) 对于某个实数 c，

$$\int_V M(v,e) d\mu(v) = c$$

几乎处处对 $e \in E$。

(v) 几乎处处对 $v \in V$，

$$\delta(v) = \int_E M(v,e) wt(e) d\tau(e) \in I.$$

$\int_{V\times E} |\phi(\delta(v))| \, |M(v,e)| \, |wt(e)| \, d(\mu \times \tau) < \infty$。

按照(v)中的定义，令 $\bar{\delta} = \frac{1}{\mu(V)} \int_V \delta d\mu$。

Then

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\varphi(\delta(v))M(v,e)wt(e)d(\mu\times\tau)\geq c\varphi(\bar{\delta}).\qquad(*)$$

¯此外，如果f在I上严格凸，那么(∗)中等号成立，当且仅当 $\delta(v)=\delta$ 几乎处处成立(μ)。

注2.2. 我们已尽最大努力陈述定理 *2.1*，以揭示其源自定理*1.1*和定理*1.2*。具体而言：定理 *1.2* 讨论的是定理 *2.1* 的特殊情形，其中 V 与 E 为有限非空集（分别为定理 *1.2* 中矩阵M的行与列；当 M 为某超图的顶点-边关联矩阵时，V 与 E 分别为该超图的顶点集和边集），且μ,τ 分别是 V,E 上的计数测度。函数wt在定理 *2.1* 中的作用，在定理 *1.2* 中由$(x_1,\ldots,x_q)$承担，即 E 的一个加权 。如前所述，定理*1.1*即为特殊情形$(x_1,\ldots,x_q)=(1,\ldots,1)$下的定理 *1.2*。

定理 2.1 的问题与维纳-陶伯定理的问题相同，也与分析领域许多陈述比证明更长的定理的问题相同：它过于一般，可供选择的内容太多—— [两个测度空间、M、 φ,wt], ——而假设条件又太长，难以轻松记住。我们认为，这样的结果应当像向微积分学生讲授分部积分那样来介绍——不应把它当作定理，而应把它当作一种在特定情况下可以采用的技巧。我们将在定理 2.1 的证明之后给出一些例子。

定理 ***2.1*** 的证明。 首先，注意到

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \tfrac{1}{\mu(V)}\textstyle\int\delta(v)d\mu(v)=\tfrac{1}{\mu(V)}\int_V(\int_E M(v,e)wt(e)d\tau)d\mu\\ &=\tfrac{1}{\mu(V)}\textstyle\int_E(\int_V M(v,e)d\mu(v))wt(e)d\tau(e)\\ &=\tfrac{c}{\mu(V)}\textstyle\int_E wt(e)d\tau(e)=\tfrac{cs}{\mu(V)}.\end{aligned}$$

（根据 (iii)，积分次序的变换是合理的。）有鉴于此，

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{s}\textstyle\int_{V\times E}\int\varphi(\delta(v))M(v,e)wt(e)d(\mu\times\tau)\\ =\;&\tfrac{1}{s}\textstyle\int_V(\int_E M(v,e)wt(e)d\tau(e))\varphi(\delta(v))d\mu(v)\\ =\;&\tfrac{1}{s}\textstyle\int_V\delta(v)\varphi(\delta(v))d\mu(v)=\tfrac{1}{s}\int_V f(\delta(v))d\mu(v)\\ =\;&\tfrac{\mu(V)}{s}\tfrac{1}{\mu(v)}\textstyle\int_V f(\delta(v))d\mu(v)\\ \geq\;&\tfrac{\mu(V)}{s}f(\tfrac{\int\delta(v)d\mu(v)}{\mu(v))})=\tfrac{\mu(V)}{s}f(\bar{\delta})\\ =\;&\tfrac{\mu(V)}{s}\bar{\delta}\varphi(\bar{\delta})=\tfrac{\mu(V)}{s}\tfrac{cs}{\mu(V)}\varphi(\bar{\delta})=c\varphi(\bar{\delta})\end{aligned}$$

上面的不等式源于f的凸性，以及假设 (V,μ) 是一个正测度空间。f 严格凸时的等号成立条件可类似地得出。

上面变换积分次序的操作由 (vi) 允许。（注意，鉴于 (iii)，若 φ 在I上有界，则 (vi) 是多余的。） □

3. 定量与变分改进

回顾一下

$$f(t):=t\,\phi(t),\qquad \bar{\delta}:=\frac{1}{\mu(V)}\int_V\delta(v)\,d\mu(v)=\frac{cs}{\mu(V)},$$

并且有如下恒等式

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\phi(\delta(v))\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau)=\frac{1}{s}\int_{V}\delta(v)\phi(\delta(v))\,d\mu(v)=\frac{1}{s}\int_{V}f(\delta(v))\,d\mu(v).\quad(1)$$

此外，将詹森不等式应用于有限测度空间 (V,μ) 上的凸函数f。

下面的定量改进需要一个温和的一致凸性假设 。（如果在 δ 的值域上没有对f'' 的某种下界，则未必存在一致的二次间隙。）

定理 3.1. 假设定理 *2.1* 的假设条件成立。此外，设

(a) $f(t)=t\phi(t)$ 在 $(0,\infty)$上二阶连续可微；(b) 存在数 $0<m<M<\infty$，使得对μ-几乎处处的 $v\in V$，有 $m\le\delta(v)\le M$；(c) 对所有 $t\in[m,M$，都有 $f''(t)\ge\alpha>0$（在相关范围内一致凸）。

Then

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\phi(\delta(v))\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau)\ge c\,\phi(\bar{\delta})+\frac{\alpha}{2s}\int_{V}(\delta(v)-\bar{\delta})^2\,d\mu(v).$$

特别地，当且仅当对μ-几乎处处的 $v\in V$，$\delta(v)=\delta$ 时，等号成立。

证明。 由 **(1)** 可知，只需证明

$$\int_{V}f(\delta)\,d\mu\ \ge\ \mu(V)\,f(\bar{\delta})\ +\ \frac{\alpha}{2}\int_{V}(\delta-\bar{\delta})^2\,d\mu.$$

固定 $t\in[m、M]$。由于$f''\ge\alpha$ 在 $[m、M]$, 上，该函数

$$g_t(x):=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{\alpha}{2}(x-t)^2$$

满足 $g_t''(x)=f''(x)-\alpha\ge0$ 在 $[m、M]$, 上，因此 g_t 在此处是凸函数，并且对所有$x\in[m、M]$，$g_t(x)\ge g_t(t)=0$。因此，对所有 $x\in[m、M]$,

$$f(x)\ge f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{\alpha}{2}(x-t)^2.$$

令 $x=\delta(v)$ 和 $t=\bar{\delta}$ 应用此结果，在 V 上积分，并使用$\int_V(\delta-\bar{\delta})\,d\mu=0$:

$$\int_{V}f(\delta)\,d\mu\ge\mu(V)f(\bar{\delta})+f'(\bar{\delta})\int_{V}(\delta-\bar{\delta})\,d\mu+\frac{\alpha}{2}\int_{V}(\delta-\bar{\delta})^2\,d\mu=\mu(V)f(\bar{\delta})+\frac{\alpha}{2}\int_{V}(\delta-\bar{\delta})^2\,d\mu.$$

除以 s，并使用 $\mu(V)f(\delta)/s=(\mu(V)/s)\delta\phi(\delta)=c\phi(\delta)$，因为 $\delta=cs/\mu(V)$。等号成立迫使$\int_V(\delta-\bar{\delta})^2\,d\mu=0$，因此 $\delta=\bar{\delta}$ 几乎处处成立。 □

下面的命题表明，当生成函数$f(t)=t\phi(t)$为凹函数时，定理 2.1中的詹森型不等式反向成立。这给出了一个上界，并刻画了均匀度情形这一极值构型。

命题3.2。 设定理 *2.1*的所有假设均成立，并假设$f(t)=t\phi(t)$ 在$(0,\infty)$上为凹函数。则

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\phi(\delta(v))\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau)\le c\,\phi(\bar{\delta}).$$

若 f 严格凹，则当且仅当 $\delta(v)=\delta$ 对 μ-几乎处处的 $v\in V$ 时，等式成立。

证明。由 (1) 可得,

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\phi(\delta)\,M\,wt\,d(\mu\times\tau)=\frac{1}{s}\int_V f(\delta)\,d\mu.$$

由于 f 是凹函数，詹森不等式给出

$$\frac{1}{\mu(V)}\int_V f(\delta)\,d\mu\le f\!\left(\frac{1}{\mu(V)}\int_V \delta\,d\mu\right)=f(\bar\delta).$$

两边乘以 $\mu(V)/s$，得到

$$\frac{1}{s}\int_V f(\delta)\,d\mu\le\frac{\mu(V)}{s}f(\bar\delta)=\frac{\mu(V)}{s}\,\bar\delta\,\phi(\bar\delta)=c\,\phi(\bar\delta).$$

¯若f严格凹，则詹森不等式取等意味着 $\delta=\bar\delta$ 几乎处处成立。 □

3.1. 变分极值性

接下来，我们从变分的角度阐释定理 2.1。下面的命题表明，在严格凸性条件下，在固定总质量约束下，均匀度函数唯一地使相应的重构泛函达到最小值。

命题 3.3. 假设定理 *2.1* 的假设条件成立，且 $f(t)=t\phi(t)$ 严格凸。定义

$$\mathcal{F}(\delta)=\frac{1}{s}\int_{V\times E}\phi(\delta(v))\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau)=\frac{1}{s}\int_V f(\delta(v))\,d\mu(v),$$

满足约束条件 $\int_V\delta d\mu=cs$。当且仅当 $\mathcal{F}$ 对 $(v)=\bar\delta$ 在 μ-几乎处处的 $v\in V$ 上成立时，$\mathcal{F}$ 取得其全局最小值。

证明。任取可容许的 δ，满足 $\int_V\delta d\mu=cs$，因此其平均值等于 $\bar\delta$。由严格凸函数f的詹森不等式,

$$\frac{1}{\mu(V)}\int_V f(\delta)\,d\mu\ge f\!\left(\frac{1}{\mu(V)}\int_V\delta\,d\mu\right)=f(\bar\delta),$$

¯等号成立当且仅当 $\delta=\bar\delta$几乎处处成立。因此

$$\mathcal{F}(\delta)=\frac{1}{s}\int_V f(\delta)\,d\mu\ge\frac{\mu(V)}{s}f(\bar\delta)=\mathcal{F}(\bar\delta),$$

¯唯一极小化元是常值函数 $\delta\equiv\bar\delta$。 □

4. 幂、熵与均值型推论

引入由权重诱导的概率测度会很方便。在V 上定义有限测度为

$$d\rho(v):=\frac{\delta(v)}{cs}\,d\mu(v),\qquad\text{so that}\qquad\rho(V)=\frac{1}{cs}\int_V\delta\,d\mu=1.$$

然后，将 (1) 用于 $\phi(t)=t^{p-1}$，得到

$$\frac{1}{cs}\cdot\frac{1}{s}\int_{V\times E}\delta(v)^p\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau)=\int_V\delta(v)^{p-1}\,d\rho(v).$$

命题 4.1. 设 $p > q > 0$。在定理 *2.1* 的假设条件下，

$$\left(\frac{1}{s}\int_{V\times E}\delta(v)^p\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau)\right)^{1/p} \geq \left(\frac{1}{s}\int_{V\times E}\delta(v)^q\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau)\right)^{1/q}.$$

若 δ 在一个具有正μ-测度的集合上非常数，则该不等式严格成立。

证明。 设 ρ 为上述概率测度。对于$r > 0$，定义

$$A_r := \int_V \delta(v)^{r-1}\, d\rho(v).$$

如前所述，

$$A_r = \frac{1}{cs}\cdot\frac{1}{s}\int_{V\times E}\delta(v)^r\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau).$$

根据概率空间（V，ρ）上的 Lyapunov 不等式（或 Hölder 不等式），对于$p > q > 0$，有

$$\left(\int_V \delta^{p-1}\, d\rho\right)^{\frac{1}{p-1}} \geq \left(\int_V \delta^{q-1}\, d\rho\right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad \text{for } p,q \neq 1,$$

在$r = 1$ 处按自然的极限方式理解（此时$A_1 = \int 1 d\rho = 1$）。将其转换回原积分的形式，并吸收公共常数因子cs后，即得所需不等式。除非 δ 为 ρ-几乎处处常数（等价地，μ-几乎处处常数），否则不等式严格成立。 □

命题 4.2。 假设对于 μ-几乎处处的 $v \in V$，有 $\delta(v) > 0$，并定义

$$\mathcal{H}(\delta) = -\frac{1}{cs}\int_{V\times E}\delta(v)\ln\left(\frac{\delta(v)}{\bar{\delta}}\right) M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau),$$

其中 $\bar{\delta} = \overline{cs\,\mu(V)}$。那么 $\mathcal{H}(\delta) \leq 0$，当且仅当 $\delta(v) = \bar{\delta}$ 对于几乎处处的 v（相对于μ）满足 $\in V$ 时，等号成立。

证明。 将 (1) 中的 $\phi(t) = \ln(t/\delta)$ 代入，可得

$$\mathcal{H}(\delta) = -\frac{1}{cs}\int_V \delta(v)\ln\left(\frac{\delta(v)}{\bar{\delta}}\right) d\mu(v).$$

定义 V 上的一个概率测度 ρ，使得

$$d\rho(v) = \frac{\delta(v)}{cs}\, d\mu(v), \qquad \text{so that} \qquad \rho(V) = \frac{1}{cs}\int_V \delta\, d\mu = 1.$$

Then

$$\mathcal{H}(\delta) = -\int_V \ln\left(\frac{\delta(v)}{\bar{\delta}}\right) d\rho(v).$$

由于 ln 在 $(0,\infty)$ 上是凹函数，根据詹森不等式，在 (V,ρ) 上可得

$$\int_V \ln\left(\frac{\delta}{\bar{\delta}}\right) d\rho \leq \ln\left(\int_V \frac{\delta}{\bar{\delta}}\, d\rho\right).$$

现在计算 ρ-均值：

$$\int_V \frac{\delta}{\bar{\delta}}\, d\rho = \int_V \frac{\delta}{\bar{\delta}} \cdot \frac{\delta}{cs}\, d\mu = \frac{1}{\bar{\delta}\, cs} \int_V \delta^2\, d\mu,$$

通常情况下它并非常数。相反，我们对随机变量应用詹森不等式

$$X(v) := \frac{\bar{\delta}}{\delta(v)}.$$

事实上，根据 ρ 的定义，我们有

$$\int_V X\, d\rho = \int_V \frac{\bar{\delta}}{\delta} \cdot \frac{\delta}{cs}\, d\mu = \frac{\bar{\delta}}{cs}\, \mu(V) = 1.$$

对凹函数 $\ln$ 应用詹森不等式，得到

$$\int_V \ln X\, d\rho \le \ln\!\left(\int_V X\, d\rho \right) = \ln 1 = 0.$$

- ⁻但 $\ln X = \ln(\delta/\delta) = -\ln(\delta/\delta)$，因此

$$-\int_V \ln\!\left(\frac{\delta}{\bar{\delta}}\right) d\rho = \int_V \ln\!\left(\frac{\bar{\delta}}{\delta}\right) d\rho \le 0,$$

这表明 $\mathcal{H}(\delta) \le 0$。

⁻关于等号成立：对于凹函数 $\ln$，詹森不等式取等当且仅当 X 是常数 ρ-几乎处处，即 δ/δ 是常数 ρ-几乎处处。由于 $\int_V X d\rho = 1$，该常数必为 1，因此 $\delta = \bar{\delta}$ ρ-几乎处处成立，进而 μ- 几乎处处成立（因为 $d\rho = {}^{\delta}{}_{cs}\, d\mu$ 且 $\delta > 0$ 几乎处处）。 □

4.1. 擦除下的鲁棒性

现在我们考察擦除对乘积测度不等式的影响。以下命题表明，删除一个坐标的可测子集后，詹森型界仍然成立，从而证明该不等式在擦除下具有鲁棒性。

命题 4.3. 设 $E_0 \subseteq E$ 可测，且

$$s_{E_0} := \int_{E_0} wt(e)\, d\tau(e) > 0.$$

假设将 E 替换为 E_0 后，定理 *2.1* 的结构性假设仍然成立（V, μ, δ 保持不变，且采用受限核 $M|_{V\times E_0}$）。那么对于任意凸 ϕ，

$$\frac{1}{s_{E_0}} \int_{V\times E_0} \phi(\delta(v))\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau) \ge c_{E_0}\, \phi(\bar{\delta}_{E_0}),$$

其中

$$c_{E_0} := \int_{E_0} d\tau(e), \qquad \bar{\delta}_{E_0} := \frac{c_{E_0} s_{E_0}}{\mu(V)}.$$

⁻若 $f(t) = t\phi(t)$ 严格凸，则等式成立当且仅当 $\delta(v) = \delta_{E_0}$ 对 μ-几乎处处的 $v \in V$。

证明。 将定理 2.1 应用于限制直积空间 $V \times E_0$。定理 2.1 的证明仅使用 Fubini/Tonelli 定理以及确保

$$\int_{V\times E_0} \phi(\delta(v))\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau) = \int_V \delta(v)\phi(\delta(v))\, d\mu(v) \quad \text{up to the normalization by } s_{E_0}.$$

因此，在（V，μ）上应用詹森不等式可得

$$\frac{1}{s_{E_0}}\int_{V\times E_0} \phi(\delta(v))\, M(v,e)\, wt(e)\, d(\mu\times\tau) = \frac{1}{s_{E_0}}\int_V f(\delta(v))\, d\mu(v) \geq \frac{\mu(V)}{s_{E_0}} f(\bar{\delta}_{E_0}) = c_{E_0}\phi(\bar{\delta}_{E_0}),$$

¯使用 $\delta_{E_0} = c^{E_0} s_{E_0}/\mu(V)$。严格凸性情形可由詹森不等式的等号条件得出。

□

5. 一类特殊情形

设 $V = E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$，且 μ 和 τ 为加权计数测度：存在正序列 $(a_0, a_1, \dots)$、$(b_0, b_1, \dots)$，使得对所有 $S \subseteq \mathbb{N}$，

$$\mu(S) = \sum_{i\in S} a_i \text{ and } \tau(S) = \sum_{j\in S} b_j.$$

设 $wt\colon E = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为序列 $(w_0, w_1, \dots)$。我们可以允许 I 是几乎任意的实区间，但暂且不追求一般性，而取 $I = (0, \infty)$；此外，我们要求对每个 $j \in \mathbb{N}$，$w_j > 0$。暂且不对 $M = [m_{ij}]_{i,j\geq 0}$作限制，不过我们预计在大多数情形下，对所有 i、$j \in \mathbb{N}$，$m_{ij} \geq 0$。我们不对 φ 作具体说明。

那么，在这个特殊情形下，定理 2.1 中的假设要求如下。

(i) $\mu(V) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty$.

(ii) $s = \sum_{j=0}^{\infty} w_j b_j < \infty$.

(iii) $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |m_{ij}| w_j a_i b_j < \infty$。若对所有$i$、$j$均有$m_{ij} \geq 0$，则这可由 (ii) 和下一个要求推出。

(iv) 对某个常数c，对所有$j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i m_{ij} = c.$$

(v) 对每个$i \in \mathbb{N}$，$0 < \delta(i) = \sum_{j=0}^{\infty} m_{ij} w_j b_j < \infty$。

(vi) $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i |\varphi(\delta(i))|\, |m_{ij}| w_j b_j < \infty$.

则结论 $(*)$ 为

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j b_j\right)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} m_{ik} w_k b_k\right) m_{ij} w_j b_j$$

$$\geq c\varphi\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)^{-1} \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_t m_{tj} w_j b_j\right)$$

$$= c\varphi\left(\frac{cs}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}\right)$$

我们可以通过令 $w_j b_j = u_j$ 来稍作简化，对所有 $j \in N$。 [在定理 2.1 的一般设定中，若 τ 关于某个其他正测度 λ 绝对连续——即 $d\tau(y) = b(y)d\lambda(y)$，其中 b 为某个 λ-可测的非负实值函数——则我们可以用 λ 替换 τ，并用 u 替换 $wt \cdot b$。] 经过这一记号变更，$s = \sum_{j=0}^{\infty} u_j$。

让我们通过取M 为对角矩阵来检验这一结果，其中对所有$i \in \mathbb{N}$，有$m_{ii} = 1/a_i$。于是$c = 1$。我们留给读者去验证由定理 2.1导出的不等式为

$$s^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{u_i}{a_i}\right) u_i \geq \varphi\left(\frac{s}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}\right),$$

这一点根据假设$f(t) = t\varphi(t)$在$(0, \infty)$上为凸很容易验证——但如果我们没有沿着定理1.1和定理1.2所标示的路径走到定理 2.1，我们是否还会注意到这些不等式（由 φ、(u_i)和(a_i)的选取所索引）？

若取 $\varphi = \ln$，且(a_i)、(u_i)为正的可和序列，满足 $\sum_{i=0}^{\infty} u_i \left|\ln \frac{u_i}{a_i}\right| < \infty$，这在此情形下即要求(vi)，则定理 2.1蕴含

$$\prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{u_i}{a_i}\right)^{u_i} \geq \left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} u_i}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}\right]^{\sum_{j=0}^{\infty} u_j},$$

当且仅当$\frac{u_0}{a_0} = \frac{u_1}{a_1} = \cdots$时等号成立。在我们看来，这是一个有趣且并不显然的不等式！我们认为，通过取M 为上三角矩阵，或许可以发现更深刻的结果——难点在于作出能得到令人难忘的不等式的选择。我们将这些探索，以及V 与E 为实区间且μ与 τ为勒贝格测度的那一类情形，留待将来。

命题5.1. 设 $V = \{1, \ldots, p\}, E = \{1, \ldots, q\}$ 配备计数测度 μ, τ。设 $M = [m_{ij}]$是一个 $p \times q$ 矩阵，具有常数列和 c；设 $wt = (x_1, \ldots, x_q)$满足 $s = \sum_j x_j > 0$，并假设对所有 i，都有 $d_i = \sum_{j=1}^{q} m_{ij} x_j \in I$。则

$$s^{-1} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \varphi(d_i) m_{ij} x_j \geq c\varphi(\bar{d}),$$

其中 $\bar{d} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} d_i$。若 $f(t) = t\varphi(t)$ 在 I 上严格凸，则等号 $iff\, d_1 = \cdots = d_p$。

证明. 取 μ, τ 计数测度，并应用定理 2.1。所有积分都变为有限和，而定理 2.1 的假设条件恰好对应于定理 1.2 的离散假设。 □

推论 5.2. 假设定理 *2.1* 的假设条件成立，且 $\delta(v) > 0$ 几乎处处成立。令 $\varphi(t) = \ln t$（因此，$f(t) = t \ln t$ 在 $(0, \infty)$上严格凸）。那么

$$\exp\left(\frac{1}{s} \int_{V \times E} M(v, e) wt(e) \ln(\delta(v))\, d(\mu \times \tau)\right) \geq \bar{\delta},$$

其中 k 是任意归一化常数；若你更倾向于采用该形式，则它等于（几乎处处的）列积分 c

$$\left[\prod_{j \in E} \left(\prod_{v \in V} \delta(v)^{M(v,j)}\right)^{1/c}\right]^{1/s} \geq \bar{\delta}.$$

¯（严格凸情形下的）等号成立当且仅当 $\delta(v) = \delta$ 几乎处处。

证明概要。 对 $\varphi = \ln$ 应用定理 2.1，重新整理并对不等式两边取指数。关于等号成立的说明可由f的严格凸性推出。 □

推论 5.3。 假设定理 *2.1* 的假设条件成立，并设 $\delta(v) \geq 0$ 对于μ-几乎处处的 $v \in V$ 成立。令 $p \geq 1$，并设 $\phi(t) = t^{p-1}$，从而 $f(t) = t\phi(t) = t^p$ 在 $[0,\infty)$上是凸函数。于是

$$\frac{1}{s}\int_{V\times E}\delta(v)^{p-1}\,M(v,e)\,wt(e)\,d(\mu\times\tau) = \frac{1}{s}\int_V \delta(v)^p\,d\mu(v) \;\geq\; c\,\bar{\delta}^{\,p-1}, \tag{2}$$

其中 $s = \int_E wt\,d\tau$，且 $\bar{\delta} = \frac{1}{\mu(V)}\int_V \delta d\mu$。

¯特别地，利用 $\delta = \frac{}{cs}\mu(V)$，可得通常的幂平均不等式

$$\left(\frac{1}{\mu(V)}\int_V \delta(v)^p\,d\mu(v)\right)^{1/p} \geq \frac{1}{\mu(V)}\int_V \delta(v)\,d\mu(v). \tag{3}$$

¯此外，若 $p > 1$，则(3) 中等号成立，当且仅当 $\delta(v) = \delta$ 对于μ-几乎处处的 $v \in V$ 成立。

证明概要。 对 $\phi(t) = t^{p-1}$ 应用定理 2.1（因此当 $p \geq 1$时，$f(t) = t^p$ 是凸函数）。根据托内利-富比尼定理以及 $\delta(v) = \int_E M(v,e)wt(e)d\tau(e)$ 的定义，

$$\int_{V\times E}\delta(v)^{p-1}M(v,e)wt(e)\,d(\mu\times\tau) = \int_V \delta(v)^{p-1}\left(\int_E M(v,e)wt(e)\,d\tau(e)\right)d\mu(v) = \int_V \delta(v)^p\,d\mu(v).$$

¯因此，定理 2.1 得出 (2)。最后，利用恒等式 $\delta = \frac{}{cs}\mu(V)$（见定理 2.1 的证明）可将 (2) 转化为 (3)。等号成立的陈述由t^p 在$p > 1$ 时的严格凸性以及詹森不等式的等号情形得出。

□

推论 5.4。 设 $V = [a,b], E = [\alpha,\beta]$ 配备勒贝格测度，并假设 $M(v,e)$ 非负、可测，且满足 $\int_{b\,a} M(v,e)dv = c$，对几乎处处的 e 均成立。设 $wt(e) \geq 0$ 可积，且 $0 < s = \int_\alpha^\beta wt < \infty$，并假设 $\delta(v) = \int_\alpha^\beta M(v,e)wt(e)de$ 满足 $\delta(v) \in I$。那么，对于凸函数 $f(t) = t\varphi(t)$，有

$$\frac{1}{s}\int_a^b \varphi(\delta(v))\delta(v)\,dv \geq c\,\varphi(\bar{\delta}),$$

w ¯ith $\delta = \frac{1}{b-a}\int_a^b \delta(v)\,d^{v,}$ 一个 d equality characterizati 关于 un der strict 凸 ity as in Th 2 1

理 . . 证明思路。 当 μ, τ 是区间上的勒贝格测度时，这直接是定理 2.1 的一个特例；其假设条件归结为所述的可积性和列积分为常数的条件。

□

推论 5.5。 设 $E_0 \subseteq E$ 是表示擦除坐标的可测子集，并定义一个修正后的权函数

$$wt_{E_0}(e) = \begin{cases} 0, & e \in E_0, \\ wt(e), & e \in E \setminus E_0. \end{cases}$$

若定理 *2.1* 的条件 (i)–(vi) 在以 wt_{E_0} 替代 wt 后成立，则

$$\frac{1}{s_{E_0}}\int_{V\times E}\varphi(\delta_{E_0}(v))\,M(v,e)\,wt_{E_0}(e)\,d(\mu\times\tau) \;\geq\; c\,\varphi(\bar{\delta}_{E_0}),$$

其中，$s_{E_0} = \int_E wt_{E_0}\,d\tau$, $\delta_{E_0}(v) = \int_E M(v,e)wt_{E_0}(e)\,d\tau(e)$，且 $\bar{\delta}_{E_0} = \frac{1}{\mu(V)}\int_V \delta_{E_0}(v)\,d\mu(v)$。此外，若 $f(t) = t\varphi(t)$ 严格凸，则当且仅当 $\delta_{E_0}(v)$ 几乎处处为常数时，等号成立。

参考文献

[1] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. Pólya，《不等式》，剑桥大学出版社，剑桥，1934 年。[2] R. T. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970 年。[3] S. S. Dragomir，詹森不等式的若干改进，《数学分析与应用杂志》168 (1992)，518–522。[4] P. D. Johnson 和 R. N. Mohapatra，关于一类将边加权均匀超图中相邻节点的度与平均度联系起来的不等式，《国际数学与数学科学杂志》21 (2005)，3419–3426。[5] P. D. Johnson 和 R. L. Perry，关于将相邻顶点的度与平均度联系起来的不等式，《欧洲组合数学杂志》7 (1986)，237–241。[6] P. G. Casazza 和 G. Kutyniok，子空间框架，《当代数学》345 (2004)，87–113。[7] V. K. Goyal、M. Vetterli 和 N. T. Thao， $\mathbb{R}^N$中的量化超完备展开：分析、综合与算法，《IEEE信息论汇刊》44 (1998)，16–31。[8] J. A. Tropp，矩阵集中不等式导论，《机器学习基础与趋势》8 (2015)，1–230。[9] R. Vershynin，《高维概率：数据科学中的导论与应用》，剑桥大学出版社，剑桥，2018。[10] F. R. K. Chung，《谱图论》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[11] G. Kutyniok，压缩感知理论与应用，《GAMM通讯》36 (2013)，79–101。