arXiv:2603.06249v1 [math.DG] 6 Mar 2026

高阶Q-曲率方程的重心技术

SAIKAT MAZUMDAR 和 CHEIKH BIRAHIM NDIAYE

ABSTRACT. 设 $k \geq 1$ 为一个整数，且 (M, g) 是一个维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是一个维数为 $n \geq 2k+1$ 的局部共形平坦流形。运用 Bahri–Coron重心法，我们证明存在一个具有常数 Q-曲率的共形度量，其阶数为 $2k$；等价地，证明存在一个涉及 GJMS算子 P_g 的 $2k$ 阶Q-曲率方程的正解。我们只假设流形 P_g 上满足一个自然的保正性条件，并不对流形 P_g 的 $mass$ 的符号作任何假设。特别地，我们无需使用正质量定理即可得到存在性。

1. INTRODUCTION

令 $k \geq 1$ 为正整数，且 (M, g) 为维数为 $n \geq 2k+1$的闭光滑黎曼流形。我们考虑共形协变的 GJMS 算子，记为 P_g，由 Graham、Jenne、Mason 和 Sparling 在开创性著作 [34]中引入。 P_g 是一个椭圆自伴微分算子，其首项为 Δ_g^k，其中 $\Delta_g = -\mathrm{div}_g(\nabla \cdot)$ 是拉普拉斯–贝尔特拉米算子。算子P_g 是共形协变的，也就是说，定义 $\widehat{g} := u^{\frac{4}{n-2k}} g$ 对于 $u \in C^\infty(M)$ $u > 0$,—有如下关系

$$P_{\widehat{g}}(f) = u^{-\frac{n+2k}{n-2k}} P_g(uf) \quad \text{for all } f \in C^\infty(M). \tag{1.1}$$

P_g 的构造基于 Fefferman 和 Graham 环境度量[25,26]。当 $k = 1$, P_g 是共形拉普拉斯算子 $\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$，其中 S_g 表示 (M, g) 的标量曲率。对于 $k = 2$, P_g 是 Paneitz-Branson 算子 [8,63]。关于通过散射理论进行的相关构造，另见 Graham 和 Zworski [35] 。 P_g 的显式公式仅在一些低阶情形下已知，参见 Branson [8–10],Paneitz [63], Gover 和 Peterson [33], 以及 Juhl [46]。一般而言，Juhl [46] （另见 Fefferman 和 Graham [27]）得到了以二阶基本构件表示 P_g 的通用代数公式。然而，在爱因斯坦流形等特殊情形下， P_g 可因式分解为如下形式的二阶算子的乘积$\Delta_g + \gamma_{i,n} S_g$，其中 $\gamma_{i,n} = \frac{(n-2i)(n+2i-2)}{4n(n-1)}$， $1 \leq i \leq k$ （参见 Gover [32] 和 Fefferman-Graham [26]）。最近，Case 和 Malchiodi [19] 为特殊的爱因斯坦乘积流形得到了因式分解公式。

一种称为 Q阶 $2k$曲率的标量曲率量，记作 Q_g，与 GJMS 算子 P_g 相关，并通过 P_g 的零阶项定义为 $Q_g := \frac{2}{n-2k} P_g(1)$。当 $k = 1$、 $Q_g = S_g$ （相差一个正常数），且当 $k = 2$时， Q_g 是 Branson Q曲率（由 Branson 和 Ørsted[11]引入，并由 Branson [10]推广）。关于 Q曲率及其意义的更多细节，请参阅 Juhl [45], 、Case 和 Gover [18] 以及其中的参考文献。

Date: 2026年3月4日。

本文研究在（ Q_g ,M, g）上是否存在具有正常数正 $2k$阶 Q曲率的共形度量。根据共形变换律（1.1），这等价于证明下列阶曲率方程存在光滑正解：

$$P_g u = \lambda u^{\frac{n+2k}{n-2k}} \text{ in } M, \text{ for some constant } \lambda > 0. \tag{1.2}$$

因此若 $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ 满足方程 (1.2)，则 $Q_{u^{\frac{4}{n-2k}}g} \equiv$ 为常数 > 0。我们将相应的 Yamabe 不变量定义为

$$Y_k(M, g) := \inf_{\widehat{g} \in [g]} \frac{\int_M Q_{\widehat{g}}\, dv_{\widehat{g}}}{\mathrm{Vol}_{\widehat{g}}(M)^{\frac{n-2k}{n}}} = \inf_{\substack{u \in C^\infty(M), \\ u>0 \text{ in } M}} \frac{\int_M u P_g u\, dv_g}{\left(\int_M u^{2_k^*}\, dv_g\right)^{\frac{n-2k}{n}}}. \tag{1.3}$$

这里 $[g]$ 表示 g 的共形类，且 $2_k^* := 2n/(n-2k)$ 是临界 Sobolev 指数。由此可知 Y_k (M, g) 是共形不变的。

为了得到正解，我们将始终假设如下正性条件：

$$Y_k(M, g) > 0 \text{ and the Green's function } G_g \text{ of } P_g \text{ is positive in } M. \tag{1.4}$$

于是 P_g的格林函数是满足对所有 $x \in M$ 有 $P_g G_g(x, \cdot) = \delta_x$ 的唯一函数 $G_g \in C^\infty($ $M \times M \backslash \{x = y\})$，并且若对所有$x \neq y$有 $G_g(x, y) > 0$，则 G_g为正。假设 (1.4) 蕴含 P_g 是强制的并满足最大值原理，也就是说，若 $u \geq 0$ 在 M 中满足 $P_g u \geq 0$ ，则要么 $u > 0$ ，要么在 M中 $u \equiv 0$。条件 (1.4) 对标准圆球面 $\mathbb{S}^n$、其商空间以及具有正标量曲率的闭爱因斯坦流形成立。最近，Case和Malchiodi 在 [19] 中得到了特殊爱因斯坦乘积流形的例子，使得 P_g 的格林函数为正。对于情形 $k = 2$，关于 M、$Q_g \not\equiv 0$ 的假设$Y_1(M, g) > 0$和 $Q_g \geq 0$ 蕴含 $\mathrm{Ker}(P_g) = \{0\}$ 且格林函数 G_g 为正，如 Hang 和 Yang [39, 40] 以及 Gursky 和 Malchiodi [38]所示。另见 Gursky、Hang 和 Lin [37]。对于$k \geq 1$的一般情形， $Y_k(M, g) > 0$ 蕴含 $\mathrm{Ker}(P_g) = \{0\}$，但据我们所知，能保证条件 (1.4) 的关于 (M, g) 的几何假设仍然未知。

对于所有 $1 \leq k < n/2$，方程 (1.2) 的正光滑解的存在性已在 Mazumdar 和 V´etois [57] 中于假定正性条件 (1.4) 的前提下得到确立。此外，在 [57]中还假定了一个正质量型结果，以便在 $2k + 1 \leq n \leq 2k + 3$ 或 (M, g) 为局部共形平坦时得到存在性，这类似于 $k = 1$，2。可以把 $\xi \in M$ 处的质量视为$G_g(\xi, \cdot)$ 在 ξ 附近的共形正规坐标中展开式的常数项（见 (2.14)）。对一般的 $k \geq 1$ 证明正质量型定理，秉承 Schoen 和 Yau [70], 开创性工作的精神，仍然难以实现；而这一结果最近已在情形 $k = 2$ 下由 Avalos、Laurain 和 Lira [3], 以及 Gong、Kim 和 Wei [30]确立。在此方向上，针对情形 $k = 2$ 的较早结果由 Humbert 和 Raulot [44], 以及[38, 39]得到。在本文中，我们证明，要获得方程 (1.2) 的解的存在性，正质量型结果并非必要。我们的主要结果是如下定理。

定理 1.1。 设 $k \geq 1$ 为一个整数，且 (M, g) 为一个维数为 $2k + 1 \leq n \leq 2k + 3$ 的光滑闭黎曼流形，或 (M, g) 为局部共形平坦的。假设 $2k$阶 *GJMS*算子 P_g 满足正性条件(1.4)。则方程 (1.2) 对于某个 $\lambda > 0$存在光滑正解；或者等价地，存在一个与 g 共形的度量，使其具有常正的 Q阶曲率 $2k$。

注 1.1。请注意，我们并未对质量 P_g的符号作任何假设。定理*1.1* 所得的解或度量不一定是极小解。

秉承 Yamabe [74],Aubin [2]和 Schoen [69]针对 Yamabe 问题情形所引入的方法，我们试图证明相应能量泛函的极小化函数的存在性。现在，一个非紧极小化序列会在流形上的某一点形成一个球形气泡 M，因此，严格不等式 $Y_k(M,g) < Y_k(\mathbb{S}^n)$ 将意味着方程 (1.2) 的解存在。为证明该严格不等式，需要针对一族依赖于某个参数的适当试探函数推导能量展开。对于$n \leq 2k+3$ 或 (M,g) 局部共形平坦的情形，试探函数选为局部化在流形上的 Sobolev 极值函数，并通过该参数与格林函数拼接。质量正性随后保证严格不等式成立，从而证明存在性。对于一般的 $k \geq 1$，这一方案已在 [57],中实施，但据我们所知，质量正性仍然难以获得。为了在没有正质量型结果的情况下证明存在性，我们采用了 Bahri [4], Bahri 和 Coron [6], 所引入并率先发展的新技术；最近，Mayer 和 Ndiaye [52]也使用该技术解决了 Cherrier-Escobar 问题的剩余情形。关于 Yamabe 型问题的情形，另见 Bahri-Brezis [5] 。我们指出，当 (M,g) 局部共形平坦时，Qing 和 Raske [65], 首次在基本群的整体表示的 Poincar´é 指数 $\pi_1(M)$ 小于 $\frac{n-2k}{2}$ 的假设下，证明了方程 (1.2) 的存在性。Robert [66] 还给出了预设 Q 曲率问题的另一个存在性结果。

对于情形 $n = 2k$，其中涉及指数型非线性，Djadli 和 Malchiodi [23] 以及 Ndiaye [59] 针对情形 $k = 2$，并且 Ndiaye [60, 61] 针对所有$n = 2k$，通过极小极大技术、Morse 理论方法和代数拓扑论证，证明了给定共形类中常 Q-曲率度量的存在性。另请参见 Brendle [12]（通过梯度流给出证明）、Baird、Fardoun 和 Regbaoui [7], , 以及 Li、Li 和 Liu [49]。Ndiaye、Sire 和 Sun[62], 以及 Mayer 和 Ndiaye [53]利用 Bahri-Coron 重心技术，证明了 Poincar´é-Einstein 流形共形无穷远上的分数阶 Yamabe 问题也有类似的存在性结果。Bahri-Coron 方法成功应用的另一个问题是 CR Yamabe 问题的整体情形，Gamara [28] 以及 Gamara 和 Yacoub [29]对此作了证明。

现在我们简要讨论定理 1.1 的证明步骤。我们将重点放在主要思想上，并对记号作灵活处理。通过反证法，我们假设能量泛函

$$\left\{u \geq 0 \text{ a.e.} : \|u\|_{L^{2_k^*}} = 1\right\} \ni u \longmapsto \int_M u\, P_g u \, dv_g =: \mathcal{J}_{g,k}(u)$$

没有临界点（见第 2 节）。令 $\mathcal{W}_c := \{u : \mathcal{J}_{g,k}(u) \leq c\}$ 表示能量次水平集。考虑阶数为 $d \in \mathbb{N}$ 的重心 $\mathcal{B}_d(M)$，它由满足 $\xi_i \in M$、且针对 $1 \leq i \leq d$ 的狄拉克 δ δ_{ξ_i} 的凸组合构成。通过第 3 节定义的全局泡 $V_{\xi,\mu}$, $\xi \in M$, $\mu > 0$ 充分小时，我们将重心 $\mathcal{B}_d(M)$映射到能量次水平集 $\mathcal{W}_{c_d^\star}$，其中 $c_d^\star := (d+1)^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n)$，对所有 $d \in \mathbb{N}$ 均成立。根据 Struwe型分解，$\mathcal{J}_{g,k}$ 的 Palais-Smale序列可写为有限个满足特定构型的泡 $\sum V_{\xi_i,\mu_i}$ 之和，再加上一个小误差。能量水平的量子化意味着，对于每个 $d \geq 1$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，次水平集 $\mathcal{W}_{c_d^\star}$ 形变收缩到 $\mathcal{W}_{c_{d-1}^\star+\varepsilon}$。此外，我们可以将 $\mathcal{W}_{c_{d-1}^\star+\varepsilon} \setminus \mathcal{W}_{c_{d-1}^\star}$ 投影回 $\mathcal{B}_d(M)$。

由于 M 是一个闭流形，它具有非平凡拓扑（$\mathbb{Z}_2$ 同调）；利用代数拓扑论证，我们得知存在非平凡的同调 $\mathscr{B}_d(M)$。对于 $d=1$，这就是 M 的定向类。由此，利用锥结构，我们得到这对空间之间的映射

$$\mathscr{F}_d(\mu):\big(\mathscr{B}_d(M),\mathscr{B}_{d-1}(M)\big)\longrightarrow\big(\mathscr{W}_{c_d^\star},\mathscr{W}_{c_{d-1}^\star}\big)$$

对所有 $d\in\mathbb{N}$始终是同调非平凡的。该过程在第 6 节中进行了描述。我们指出，这部分论证通常适用于一大类性质相似的问题，并不依赖于具体方程、维数限制，甚至也不依赖于流形的几何。它所需的唯一要素是：变形引理、能量量子化现象，以及选择映射的存在性；在我们的情形下，后者是 Struwe型泡树分解的结果。

回到泡的问题，在第3 节中，我们对误差得到了一个精确估计：$P_gV_{\xi,\mu}-V_{\xi,\mu}^{2_k^*}$，利用 GJMS算子的 Juhl展开 P_g。随后，我们利用这一结果在第4节中得到了泡之间的相互作用估计。在第5节中，我们利用相互作用估计控制泡之和的能量，并证明存在一个足够大的 $d_\star$，使得

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d}V_{\xi_i,\mu_i}\Big)<d^{\,2k/n}\,Y_k(\mathbb{S}^n)\quad\text{for } d\geq d_\star.$$

这是本文的核心，这些估计本身也具有独立的研究价值。泡之间的相互作用会使泡之和的能量低于各泡能量之和，而要使相互作用现象发挥作用，我们需要全局定义的泡。但这意味着映射 $\mathscr{F}_d(\mu)$ 对于 $d\geq d_\star$在同调意义下是平凡的，这就导致矛盾。定理1.1 的证明在第6节完成。上述分析中，P_g 的格林函数起着关键作用，而我们利用非线性得到上述严格不等式。在这种方法中，我们利用非紧性得到一个拓扑矛盾。请注意，从上述不等式推出存在性，让人想起针对 $d=1$ 情形的 Aubin型判据。

一般1.2的 $k\geq 1$ 情形下，方程 [56]的紧性问题近期由Mazumdar和Premoselli [67,68] 进行了研究。一般而言，若无质量正性等额外假设，就无法消除非紧性。关于GJMS型算子的爆破分析，可参见Robert[67,68]；关于 [17] 上的开集内有限能量解的紧性结果，可参见Carletti和Premoselli即将发表的工作 $\mathbb{R}^n$。关于GJMS算子在共形类中极值化特征值的问题，Humbert、Petrides和Premoselli近期进行了研究 [43]。

本文结构安排如下。在第2节中，我们回顾变分设置以及证明所需的一些已知结果。在第3节中，我们定义泡并得到关键的误差估计。第4节中，我们计算相互作用估计，并在第5节中利用这些结果估计泡泡和的能量。在第6节中，我们介绍 Bahri 和 Coron 的拓扑论证，并完成定理1.1的证明。附录A 中给出了 [56]中得到的 GJMS 算子展开式。

2. Notations and preliminaries

记号：在本文中，C 表示依赖于 n，k 以及可能依赖于（M，g）的一般正常数。A $\lesssim$ B 等价地表示 A $=$ O(B)。关系 A $\approx$ B 表示量 A，B 同时满足 A $\lesssim$ B 与 B $\lesssim$ A。其他记号将在首次使用时引入。

在本节中，我们汇集证明本定理所需的分析要素。此处列出的结果或现已确立，或已在别处出现。

$H^k(M)$ 表示带有 L^2 内积的 k 阶索об列夫空间，也可以等价地定义为 $C^\infty(M)$ 关于以下范数的闭包：

$$\|u\|^2_{H^k(M)} := \sum_{\ell=0}^{k} \int_M |\Delta_g^{\ell/2} u|^2 \, dv_g.$$

当 ℓ 为奇数时，这里 $\Delta^{\ell/2}u := \nabla\Delta^{(\ell-1)/2}u$ 。由索об列夫嵌入定理$H^k(M) \hookrightarrow L^{2_k^*}(M)$，其中 $2_k^* := 2n/(n-2k)$ 是临界 Sobolev 指数，且下述能量泛函是良定义的。

$$\mathcal{J}_{g,k}(u) := \frac{\displaystyle\int_M u\, P_g u \, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |u|^{2_k^*} \, dv_g\right)^{2/2_k^*}} \quad \text{for } u \in H^k(M) \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

由此可知，方程 (1.2) 是变分的，并且相差一个常数倍后，$H^k(M)$ 中的非平凡解对应于 $\mathcal{J}_g$的临界点。为寻找正解，我们将采用以下表述：考虑 $H^k(M)$ 的巴拿赫子流形

$$\mathcal{M}_k^+ := \left\{ u \in H^k(M) : u \geq 0 \text{ a.e. and } \int_M u^{2_k^*} \, dv_g = 1 \right\}. \tag{2.2}$$

泛函$\mathcal{J}_{g,\,k}(u)$ 在 C^2 上是 $\mathcal{M}_k^+$，且正性条件 (1.4) 保证，u 作为$\mathcal{J}_{g,\,k}(u)$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 上的任一临界点都是方程 (1.2) 的光滑正解，其中某个 $\lambda > 0$。

命题 2.1. 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 为光滑闭黎曼流形，其维数为 $n \geq 2k+1$。假设 $2k$ 阶 *GJMS*算子 P_g 满足正性条件 (1.4)。则任一临界点 u （属于 $\mathcal{J}_{g,k}(u)$，定义在 $\mathcal{M}_k^+$ 上）是方程 (1.2) 对某个 $\lambda > 0$ 的光滑正解。

关于证明与细节，请读者参阅定理 1 与定理 3，见 [54]。另见 Andrade、K¨onig、Ratzkin 与 Wei [1]（第 3 节），以及 [54]（附录 A 中的命题 8.3 与第 6 节）。

我们如下定义中心位于 $x = 0$、高度为 $= 1$ 的典范泡。

$$B_0(x) := \left(1 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} |x|^2\right)^{\frac{2k-n}{2}} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \text{ where } \mathfrak{c}_{n,k} = \left[\prod_{j=-k}^{k-1} (n+2j)\right]^{1/k}. \tag{2.3}$$

设 $\Delta_0 = -\sum_{i=1}^n \partial_i^2$表示欧几里得拉普拉斯算子。由 Wei-Xu [73] 的分类结果可知，在不计平移与伸缩的意义下，B_0 是如下方程唯一的$C^{2k}(\mathbb{R}^n)$ 正解

$$\Delta_0^k B_0 = B_0^{2_k^*-1} \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Δ_0^k 在以 0 为中心的 $\mathbb{R}^n$ 中的基本解为 $G_0(x) = b_{n,\,k}|x|^{2k-n}$，其中

$$b_{n,k}^{-1} = 2^{k-1}\,(k-1)!\,(n-2)\,(n-4)\cdots(n-2k)\,\omega_{n-1}, \tag{2.5}$$

$_{n-2k}\omega_{n-1}$ 表示标准圆球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的体积。此外$\mathfrak{c}_{n\ ^2,\ k} = b_{n,\,k} \int_{\mathbb{R}^n} B_0^{2_k^*-1} dx$（例如，参见 Premoselli [64]）。

回顾 Sobolev不等式中的最佳常数

$$\frac{1}{K(n,k)} := \inf_{\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\Delta_0^k\varphi\,dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{2_k^*}\,dv_g\right)^{2/2_k^*}}. \tag{2.6}$$

根据 Lions [50] 和 Swanson [72]，上述 Sobolev不等式的极值函数是B_0的平移和伸缩的常数倍。由 GJMS算子的共形不变性可知，

$$Y_k(\mathbb{S}^n) := \inf_{\varphi\in C^\infty(\mathbb{S}^n)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^n} u\,P_{g_{\mathrm{rd}}}u\,dv_{g_{\mathrm{rd}}}}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{S}^n} |u|^{2_k^*}\,dv_{g_{\mathrm{rd}}}\right)^{2/2_k^*}} = \frac{1}{K(n,k)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} B_0^{2_k^*}\,dx\right)^{2k/n}. \tag{2.7}$$

这里， g_{rd} 表示 n维球面 $\mathbb{S}^n$上的标准圆度量。最佳常数 $K(n,\ k)$关于伽马函数的显式表达式可见 [72]。

下面回顾一些几何预备知识。令 S_g 表示标量曲率，Ric_g、W_g 分别表示$(M,\ g)$的 Ricci 曲率张量和 Weyl曲率张量。取$N\ >\ 2$ 充分大，根据 Lee-Parker [48] （另见 Cao [16], G¨unther [36]），存在$\Lambda\in C^\infty(M\times M)$，使得定义 $\Lambda_\xi := \Lambda(\xi,\ \cdot)$后，对所有 $\xi\in M$

$$\Lambda_\xi > 0,\ \Lambda_\xi(\xi) = 1 \text{ and } \nabla\Lambda_\xi(\xi) = 0, \tag{2.8}$$

[4]以及共形度量 $g_\xi :\ = \Lambda_\xi^{n-2k}\,g$满足

$$\det g_\xi\,(x) = 1 + \mathrm{O}(|x|^N) \tag{2.9}$$

在由关于度量 g_ξ 的指数映射 $\exp_\xi^{g_\xi}$ 在 ξ 处给出的测地法坐标中，0 附近。此外

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}_{g_\xi}\,(\xi) = 0,\ \nabla\,\mathrm{S}_{g_\xi}\,(\xi) = 0,\ \mathrm{Ric}_{g_\xi}\,(\xi) = 0,\ \Delta_{g_\xi}\,\mathrm{S}_{g_\xi}\,(\xi) = \frac{1}{6}\left|\mathrm{W}_{g_\xi}\,(\xi)\right|^2, \\ &\mathrm{Sym}\,\nabla\,\mathrm{Ric}_{g_\xi}\,(\xi) = 0,\ \mathrm{Sym}\left((\mathrm{Ric}_{g_\xi})_{ab;cd}\,(\xi) + \frac{2}{9}(\mathrm{W}_{g_\xi})_{eabf}\,(\xi)\,\mathrm{W}^{e}{}_{cd}{}^{f}\,(\xi)\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 Sym 表示对称部分。

在我们的论证中，需要 GJMS算子的精确展开。注意， P_g展开式中的首项为 Δ_g^k。固定 $\xi\in M$，Cartan 对 g 的展开在测地法坐标中给出

$$\begin{aligned} P_{\exp_\xi^*\,g}v(x) = \Delta_0^k\,v(x) &+ \mathrm{O}\left(|x|^2|\nabla^{2k}v(x)|_g\right) \\ &+ \mathrm{O}\left(|x||\nabla^{2k-1}v(x)|_g\right) + \mathrm{O}\left(\sum_{\ell=0}^{2k-2}|\nabla^\ell v(x)|_g\right),\ \text{ for } x\in\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.11}$$

且 O(·) 项中的常数与 ξ、x无关，见 Robert [67] 和[56]。最近在共形正规坐标中获得了 P_g 的更精确展开，见 [56] （命题 B.1）。为清晰和完整起见，我们在附录 A中证明该表达式。

格林函数 G_g 在 GJMS算子 P_g 的研究中将发挥关键作用。下文中我们始终假设正性条件（1.4）。格林函数

函数 P_g 是满足 $P_g G_g(x,\ \cdot) = \delta_x$ 的唯一正函数 $G_g \in C^\infty(M\times M\backslash\{x=y\})$，对所有 $x \in M$ 均成立。以下界对所有 $x \neq y \in M$ 均成立

$$\frac{1}{C} d_g(x,y)^{2k-n} \leq G_g(x,y) \leq C d_g(x,y)^{2k-n} \text{ and } \left|\nabla^\ell G_g(x,y)\right|_g \leq C_\ell d_g(x,y)^{2k-\ell-n}, \tag{2.12}$$

其中常数 C, C_ℓ 仅依赖于 $(M,\ g)$ 和 $n,\ k,\ \ell$。此外，对于任意 $\xi \in M$，有如下展开式

$$G_g\big(\exp_\xi^g(x), \exp_\xi^g(y)\big) = \frac{b_{n,k}}{|x-y|^{n-2k}}\Big(1 + \mathrm{O}^{(2k-1)}(|x-y|)\Big), \tag{2.13}$$

其中 $b_{n,k}$ 如 (2.5) 所示，$\mathrm{O}(\cdot)$ 项中的常数与 x, y 和 ξ 无关。记号 $f = \mathrm{O}^{(q)}(r^p)$ 表示 f 对所有 $0 \leq \ell \leq q$ 和 $x \neq 0$ 均满足 $|\nabla^\ell f(x)|_g \lesssim r^{p-\ell}$。详情及证明见 [67] 中的定理 C.1 和 [56] 中的附录 C。近期，[56]（命题 C.2）中给出了 GJMS算子 P_g 的格林函数 G_g 在共形正规坐标下、对所有 k 的一个涉及质量的展开式。

利用共形不变性性质（1.1），可得 P_g 对于任意 $\xi \in M$ 以及任意 $x \neq y$ 属于 M，有

$$G_{g_\xi}(x,y) = \Lambda_\xi(x)^{-1}\Lambda_\xi(y)^{-1} G_g(x,y),$$

[4]其中 $g_\xi := \Lambda_\xi^{n-2k} g$ 是满足（2.8）、（2.9）和（2.10）的共形度量。对于 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 或（$M,\ g$）局部共形平坦的情形，当 $x \to 0$ 时，有如下展开式

$$G_{g_\xi}\big(\exp_\xi^{g_\xi}(x), \xi\big) = \frac{b_{n,k}}{|x|^{n-2k}} + A_\xi + \mathrm{O}^{(2k-1)}(|x|), \tag{2.14}$$

其中 $A_\xi \in \mathbb{R}$ 称为算子 P_{g_ξ} 在点 ξ 处的质量，并且与前面一样，常数 $b_{n,\ k}$ 由（2.5）给出，$\mathrm{O}(\cdot)$ 项中的常数与 x、y 和 ξ 无关。关于 $k=1$，参见 Lee 和 Parker [48]；关于 $k=2$，参见 Gursky 和 Malchiodi [38]，、Hang 和 Yang [40] 以及 Gong、Kim 和 Wei [30]；关于 $k=3$，参见 Chen- Hou [21]；关于 $k \geq 2$，参见 Michel [58]。注意，质量的符号在共形变换下不变。若对于所有 $\xi \in M$，上述展开式中均有 $A_\xi > 0$，则称 P_g 在每一点处具有正质量。

3. Bubbles and Error estimate

令 $\chi\colon [0,+\infty) \to [0,1]$ 为一个光滑的截断函数，使得 $\chi \equiv 1$ 在 $[0,1]$ 且 $\chi \equiv 0$ 在 $[2,+\infty)$。固定 $\xi \in M$，$0 < \delta < 1$ 并考虑共形度量 $g_\xi := \Lambda_\xi^{n-2k} g$ 满足 (2.8)、(2.9) 和 (2.10)。定义

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{\xi,\mu}(x) &:= \chi_{\xi,\delta}(x)\, B_{\xi,\mu}(x), \text{ where } \chi_{\xi,\delta}(x) := \chi\left(\delta^{-1} d_{g_\xi}(x,\xi)\right) \\ \text{and } B_{\xi,\mu}(x) &:= \frac{\mu^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\, d_{g_\xi}(x,\xi)^2)^{\frac{n-2k}{2}}} \quad \forall x \in M. \end{aligned} \tag{3.1}$$

这里 d_{g_ξ} 是关于度量 g_ξ 的测地距离，且 $\mathfrak{c}_{n,\ k}$ 由 (2.3) 给出。接下来定义

$$\widetilde{V}_{\xi,\mu}(x) = \widetilde{U}_{\xi,\mu}(x) + \mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}\, b_{n,k}^{-1}\, \mu^{\frac{n-2k}{2}}\, (1 - \chi_{\xi,\delta}(x))\, G_{g_\xi}(x,\xi), \tag{3.2}$$

其中 $b_{n,k}$ 由式（2.5）给出。接着，我们定义以 ξ 为中心的泡函数：

$$V_{\xi,\mu}(x) := \Lambda_\xi(x) \widetilde{V}_{\xi,\mu}(x). \tag{3.3}$$

注意，我们的泡函数是 C^∞ 函数，也是 Schoen-Brendle 泡函数的 k 阶版本（Brendle [13]中的式（203））。另见 [57] 中的式（3.4），其中给出了一个类似的泡函数，并添加了质量项。关于我们选择这些泡函数的更多说明，见能量展开部分中的注释 5.1 。

我们首先得到如下关键的误差估计，并可直接将其与Yamabe情形（$k=1$）在 [13]（推论 B.2.）中的结果，以及Paneitz情形（$k=2$）在Gong、Lee和Wei [31]（第5节）中的结果进行比较。

命题3.1. 设 $k \geq 1$ 为整数，且（M， g）为维数 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或（M， g）为局部共形平坦。假设*GJMS*算子 P_g 满足（1.4）。固定 $\xi \in M$，$0<\delta<1$，并选取 μ充分小，如下：

(i) $0<\mu<\left(\mathfrak{c}_{n,k}^{-1/2}\,\delta\right)^3$ *when* $2k+1 \leq n \leq 2k+3$.

(ii) $0<\mu<\left(\mathfrak{c}_{n,k}^{-1/2}\,\delta\right)^{n/2}$ *when* (M,g) *is locally conformally flat.*

常数$\mathfrak{c}_{n,\,k}$ 在（2.3）中定义。则如下估计对所有$x \in M$成立

$$\left|\left(P_g V_{\xi,\mu}-V_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\right)(x)\right| \lesssim \left(\frac{\mu^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{n-4}}\right)\mathbb{1}_{\{d_{g_\xi}(x,\xi)\leq 2\delta\}} + \mu^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\mathbb{1}_{\{\delta\leq d_{g_\xi}(x,\xi)\leq 2\delta\}} + \left(\frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{n+2k}}\right)\mathbb{1}_{\{\delta\leq d_{g_\xi}(x,\xi)\}}, \tag{3.4}$$

其中 $\lesssim$ 中的常数仅依赖于 n、k 以及（M， g）。

证明。 由共形不变性性质（1.1），我们有 $P_g V_{\xi,\,\mu}-V_{\xi}^{2_k^*-1}{}_{,\,\mu} = \Lambda_\xi^{\frac{n+2k}{n-2k}}\left(P_{g_\xi}\widetilde{V}_{\xi,\,\mu}-\widetilde{V}_{\xi\,\mu}^{2_k^*-1}{}_{,}\right)$，并记为

$$\widetilde{V}_{\xi,\mu}(x)=\chi_{\xi,\delta}(x)\left(B_{\xi,\mu}(x)-\mu^{\frac{n-2k}{2}}\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}\,b_{n,k}^{-1}G_{g_\xi}(x,\xi)\right)+\mu^{\frac{n-2k}{2}}\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}b_{n,k}^{-1}G_{g_\xi}(x,\xi).$$

我们用对易子关系 $P_{g_\xi}[u,v]:=P_{g_\xi}(uv)-uP_{g_\xi}v$ 来表示该表达式。

$$\begin{aligned}P_{g_\xi}\widetilde{V}_{\xi,\mu} &= P_{g_\xi}\left(\chi_{\xi,\delta}\left(B_{\xi,\mu}-\mu^{\frac{n-2k}{2}}\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}b_{n,k}^{-1}G_{g_\xi}(\cdot,\xi)\right)\right)\\ &= P_{g_\xi}\left[\chi_{\xi,\delta},\left(B_{\xi,\mu}-\mu^{\frac{n-2k}{2}}\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}b_{n,k}^{-1}G_{g_\xi}(\cdot,\xi)\right)\right]+\chi_{\xi,\delta}P_{g_\xi}\,B_{\xi,\mu}.\end{aligned}$$

注意，对于 $\mu<\mathfrak{c}_{n}^{-3/2}{}_{,\,k}\;\delta^3$

$$\left|\nabla^j\left(\left(\mu^2+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\,|x|^2\right)^{\frac{2k-n}{2}}-\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}|x|^2\right)\right|\lesssim\delta^{-j}\quad\text{in } B(0,9\delta/4)\setminus B(0,3\delta/4).$$

利用格林函数的展开式（2.14），我们进而得到。

$$\left|P_{g_\xi}\left[\chi_{\xi,\delta},\left(B_{\xi,\mu}-\mu^{\frac{n-2k}{2}}\mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}b_{n,k}^{-1}G_{g_\xi}(\cdot,\xi)\right)\right]\right|\lesssim\mu^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\mathbb{1}_{\{\delta\leq d_{g_\xi}(x,\xi)\leq 2\delta\}},$$

这意味着

$$\left|\left(P_{g_\xi}\widetilde{V}_{\xi,\mu}-\chi_{\xi,\delta}P_{g_\xi}B_{\xi,\mu}\right)(x)\right|\lesssim\mu^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\mathbb{1}_{\{\delta\leq d_{g_\xi}(x,\xi)\leq 2\delta\}}. \tag{3.5}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\left|P_{g_\xi}\widetilde{V}_{\xi,\mu}-\widetilde{V}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\right| \lesssim \chi_{\xi,\delta}|P_{g_\xi}B_{\xi,\mu}-B_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}|+\mu^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\mathbb{1}_{\{\delta\leq d_{g_\xi}(x,\xi)\leq 2\delta\}}\\ +\chi_{\xi,\delta}\left(1-\chi_{\xi,\delta}^{2_k^*-2}\right)B_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}+|\widetilde{U}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}-\widetilde{V}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}|.\end{aligned}$$

由 GJMS 算子展开式 P_{g_ξ} 在共形坐标下（A.1）可得

$$\chi_{\xi,\delta}\big|P_{g_\xi}B_{\xi,\mu}-B_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\big|\lesssim \mu^{\frac{n-2k}{2}}(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi))^{4-n}\mathbb{1}_{\{d_{g_\xi}(x,\xi)\le 2\delta\}}. \tag{3.6}$$

另见 [56]中的式 (4.5)。对于含非线性的最后一项，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{U}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}-\widetilde{V}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\right| = \left|\big(\widetilde{U}_{\xi,\mu}+\mathfrak{c}_{n,k}\,b_{n,k}^{-1}\,\mu^{\frac{n-2k}{2}}\,\big(1-\chi_{\xi,\delta}(x)\big)G_{g_\xi}(x,\xi)\big)^{2_k^*-1}-\widetilde{U}_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\right|\\
&\lesssim \Big[\mu^{\frac{n-2k}{2}}\widetilde{U}_{\xi,\mu}^{2_k^*-2}\,G_{g_\xi}(x,\xi)+\big(\mu^{\frac{n-2k}{2}}G_{g_\xi}(x,\xi)\big)^{2_k^*-1}\Big]\mathbb{1}_{\{\delta\le d_{g_\xi}(x,\xi)\}}\\
&\lesssim \frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi))^{4k}}\,d_{g_\xi}(x,\xi)^{2k-n}\mathbb{1}_{\{\delta\le d_{g_\xi}(x,\xi)\}}+\frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{d_{g_\xi}(x,\xi)^{(n+2k)}}\mathbb{1}_{\{\delta\le d_{g_\xi}(x,\xi)\}}\\
&\lesssim \left(\frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{\big(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi)\big)^{n+2k}}\right)\mathbb{1}_{\{\delta\le d_{g_\xi}(x,\xi)\}}.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Note $\chi_{\xi,\delta}\big(1-\chi_{\xi,\delta}^{2_k^*-2}\big)B_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\lesssim\left(\frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{\big(\mu+d_{g_\xi}(x,\xi)\big)^{n+2k}}\right)\mathbb{1}_{\{\delta\le d_{g_\xi}(x,\xi)\}}$. Combining the last two estimates gives us (3.4). □

注 3.1. 注意，如果(3.4) 是局部共形平坦的，则展开式中的第一项不存在。类似地，最后两项来自 $V_{\xi,\mu}$ 中格林函数的贡献。

4. Interaction estimates

本节中，我们估计泡之间的相互作用。首先计算自相互作用。

引理 4.1. 设 $k\ge 1$ 为整数，且 (M,g) 为维数为 $2k+1\le n\le 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M,g) 为局部共形平坦流形。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 (1.4)。固定 $\xi\in M$, $0<\delta<1$ 并选取 $0<\mu<\delta$ 充分小，且使误差估计 (3.4) 成立。于是有以下结论。

$$\left|\int_M (P_gV_{\xi,\mu}-V_{\xi,\mu}^{2_k^*-1})V_{\xi,\mu}\,dv_g\right|\lesssim \mu^4\,\delta^{4+2k-n}+\mu^{n-2k}+\mu^n\delta^{-n}, \tag{4.1}$$

其中，$\lesssim$ 中的常数仅取决于 n、k 和$(M$、$g)$。

证明。 利用误差估计（3.4）以及格林函数的界（2.12），可得

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_M (P_g V_{\xi,\mu} - V_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}) V_{\xi,\mu}\, dv_g \right| \lesssim \int_{B_{g_\xi}(\xi,2\delta)} \frac{\mu^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu + d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{n-4}} \widetilde{V}_{\xi,\mu}\, dv_{g_\xi} + \\
&\mu^{\frac{n-2k}{2}} \delta^{-2k} \int_{B_{g_\xi}(\xi,2\delta)\setminus B_{g_\xi}(\xi,\delta)} \widetilde{V}_{\xi,\mu}\, dv_{g_\xi} + \int_{M\setminus B_{g_\xi}(\xi,\delta)} \frac{\mu^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu + d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{n+2k}} \widetilde{V}_{\xi,\mu}\, dv_{g_\xi} \\
\lesssim &\int_{B_{g_\xi}(\xi,2\delta)} \frac{\mu^{n-2k}}{\left(\mu + d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{2n-4-2k}}\, dv_{g_\xi} + \frac{\mu^{n-2k}}{\delta^{\,2k}} \int_{B_{g_\xi}(\xi,2\delta)\setminus B_{g_\xi}(\xi,\delta)} d_{g_\xi}(x,\xi)^{2k-n}\, dv_{g_\xi} \\
&+ \mu^n \int_{M\setminus B_{g_\xi}(\xi,\delta)} \frac{1}{\left(\mu + d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{2n}}\, dv_{g_\xi} \\
\lesssim &\int_{B(0,2\delta)} \frac{\mu^{n-2k}}{\left(\mu + |x|\right)^{2n-4-2k}}\, dx + \mu^{n-2k}\delta^{-2k} \int_{B(0,2\delta)\setminus B(0,\delta)} |x|^{2k-n}\, dx \\
&+ \mu^n \int_{B(0,2\delta)\setminus B(0,\delta)} |x|^{-2n}\, dx + \mu^n \delta^{-n}. \\
\lesssim &\mu^4\, \delta^{4+2k-n} + \mu^{n-2k} + \mu^n \delta^{-n}.
\end{aligned}
$$

□

注 4.1. 再次注意，若(M,g)是局部共形平坦的，则(4.1) 中的第一项不存在。同样，最后两项来自格林函数在$V_{\xi,\mu}$中的贡献。

接下来，我们估计非线性项之差。

引理 4.2. 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M,g) 为维数 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形 或(M,g) 为局部共形平坦。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足 (1.4)。固定 $\xi \in M$, $0 < \delta < 1$。当$0 < \mu < \delta$ 充分小时，以下结论成立。

$$
\left| \int_M (V_{\xi,\mu}^{2_k^*} - B_{\xi,\mu}^{2_k^*})\, dv_g \right| \lesssim \left(\frac{\mu}{\delta}\right)^n, \tag{4.2}
$$

其中 $\lesssim$中的常数仅依赖于 n, k和(M, g)。

证明。我们有

$$
\begin{aligned}
|V_{\xi,\mu}^{2_k^*} - B_{\xi,\mu}^{2_k^*}| = &\left| \left[\chi_{\xi,\delta} B_{\xi,\mu} + \mathfrak{c}_{n,k}\, b_{n,k}^{-1}\, \mu^{\frac{n-2k}{2}}\, (1-\chi_{\xi,\delta}(x))\, G_{g_\xi}(x,\xi)\right]^{2_k^*} \right. \\
&\left. - \left(\chi_{\xi,\delta} B_{\xi,\mu} + (1-\chi_{\xi,\delta} B_{\xi,\mu})\right)^{2_k^*} \right| \\
\lesssim &\left[\mu^{\frac{n-2k}{2}} B_{\xi,\mu}^{2_k^*-1}\, G_{g_\xi}(x,\xi) + \left(\mu^{\frac{n-2k}{2}} G_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{2_k^*} + B_{\xi,\mu}^{2_k^*}\right] \mathbb{1}_{\{\delta \leq d_{g_\xi}(x,\xi)\}} \\
\lesssim &\mu^n d_{g_\xi}(x,\xi)^{-2n} \mathbb{1}_{\{\delta \leq d_{g_\xi}(x,\xi)\}}.
\end{aligned}
$$

Then

$$
\left| \int_M (V_{\xi,\mu}^{2_k^*} - B_{\xi,\mu}^{2_k^*})\, dv_g \right| \lesssim \left| \int_{M\setminus B_{g_\xi}(\xi,\delta)} (V_{\xi,\mu}^{2_k^*} - B_{\xi,\mu}^{2_k^*})\, dv_g \right| \lesssim \left(\frac{\mu}{\delta}\right)^n.
$$

□

现在我们计算两个不同泡之间的相互作用。当 $k = 1$时，这一结果已在 [13], 中的引理 B.5 以及最近的 [31] （第 5 节）中针对情形 $k = 2$得到。

引理 4.3。设 $k \geq 1$ 为一个整数，(M, g) 为一个维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者(M, g) 为局部共形平坦流形。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足 (1.4) 并固定 $0 < \delta < 1$。那么对于所有ξ_i、$\xi_j \in M$ 以及 $0 < \mu_i$，$\mu_j < \delta$ 只要足够小且误差估计(3.4) 成立，我们就得到以下相互作用估计。

$$\left| \int_M (P_g V_{\xi_i,\mu_i} - V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1}) V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_g \right| \lesssim \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} + \frac{d_g(\xi_i,\xi_j)}{\mu_i \mu_j} \right)^{\frac{2k-n}{2}} \left(\mu_i^4 + \delta^{n-2k} + \left(\frac{\mu_i}{\delta} \right)^{2k} \right), \tag{4.3}$$

其中 $\lesssim$ 中的常数仅取决于 n、k 和 $(M$、$g)$。

证明。利用误差估计（3.4），我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\int_M (P_g V_{\xi_i,\mu_i} - V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1}) V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_g = \int_M (P_{g_{\xi_i}} \widetilde{V}_{\xi_i,\mu_i} - \widetilde{V}_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1}) \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu_i + d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n-4}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_{g_{\xi_i}} \\
&+ \mu_i^{\frac{n-2k}{2}} \delta^{-2k} \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta) \setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_{g_{\xi_i}} \\
&+ \int_{M \setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i + d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_{g_{\xi_i}} := \mathscr{I}_{\mathrm{C}} + \mathscr{I}_{\mathrm{N}} + \mathscr{I}_{\mathrm{E}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

我们逐项进行估计。注意到

$$V_{\xi,\mu} \lesssim \left(\frac{\mu^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu + d_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{n-2k}} \right) \mathbb{1}_{\{d_{g_\xi}(x,\xi) \leq 2\delta\}} + b_{n,k}^{-1} \, \mu^{\frac{n-2k}{2}} G_{g_\xi}(x,\xi) \mathbb{1}_{\{\delta \leq d_{g_\xi}(x,\xi)\}}.$$

我们先考虑“核心区域”中的项。写作

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{C}} &= \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu_i + d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n-4}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j} \, dv_{g_{\xi_i}} \\
&\leq \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta) \cap B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,2\delta)} + \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta) \setminus B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)} := \mathscr{I}_{\mathrm{C}}^a + \mathscr{I}_{\mathrm{C}}^b.
\end{aligned}$$

首先假设 $d_{g_{\xi_i}}(\xi_i, \xi_j) \leq 3\delta$。这使我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\mathscr{I}_{\mathrm{C}}^a \leq \\
&\int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta) \cap B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,2\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1} \Lambda_{\xi_j} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu_i + d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_j^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \, d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)^2)^{\frac{n-2k}{2}}} \, dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \int_{B(0,2\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1} \Lambda_{\xi_j}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(x)) \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_i + |x|)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_j^2 + \, d_{g_{\xi_j}}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(x), \xi_j)^2)^{\frac{n-2k}{2}}} \, dx \\
&\lesssim \int_{B(0,2\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_i + |x|)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_j^2 + |x - \Theta_{\xi_i\xi_j}|^2)^{\frac{n-2k}{2}}} \, dx.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里 $\Theta_{\xi_i\xi_j} := (\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}})^{-1}(\xi_j)$，根据度量等价，$|\Theta_{\xi_i\xi_j}| = d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\ \xi_j) \approx d_g(\xi_i,\ \xi_j)$。因此

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{C}}^a &\lesssim \int_{B(0,2\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_i+|x|)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_j^2+|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}|^2)^{\frac{n-2k}{2}}}\,dx \\
&\lesssim \int_{\{2|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}|\geq \mu_i+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|\}\cap B(0,2\delta)} + \int_{\{2|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}|\leq \mu_i+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|\}\cap B(0,2\delta)} \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \int_{B(0,2\delta)} \frac{1}{(\mu_i+|x|)^{n-4}}\,dx \\
&+ \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \int_{B(\Theta_{\xi_i\xi_j},(\mu_i+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|)/2)} \frac{\left(\mu_i+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|\right)^{4-2k}}{\left(\mu_j^2+|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}|^2\right)^{\frac{n-2k}{2}}}\,dx \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\delta^4+\left(\mu_i+|\Theta_{\xi_i\xi_j}|\right)^4\right) \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\mu_i^4+\delta^4\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

接下来，仍假设 $d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\ \xi_j) \leq 3\delta$，我们可以写出

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{C}}^b &\leq \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1}\Lambda_{\xi_j} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)\right)^{n-2k}}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \int_{B(0,2\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_i+|x|)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}|^{n-2k}}\,dx \lesssim (\mu_i\mu_j)^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{2k+4-n} \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \delta^4.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于 $d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\ \xi_j) \geq 3\delta$，我们同样有

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{C}} &\leq \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1}\Lambda_{\xi_j} \frac{\mu_i^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n-4}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)\right)^{n-2k}}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \delta^4.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此我们得到了

$$\mathscr{I}_{\mathrm{C}} \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} (\mu_i^4+\delta^4). \tag{4.9}$$

接下来，我们估计相互作用中“外部区域”的各项。

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{E}} &= \int_{M\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&\leq \int_{B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} + \int_{M\setminus(B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)\cup B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta))} := \mathscr{I}_{\mathrm{E}}^a + \mathscr{I}_{\mathrm{E}}^b.
\end{aligned}$$

再次假设 $d_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\ \xi_j) \le 3\delta$ 且令 $\Theta_{\xi_j\xi_i} := (\exp_{\xi_j}^{g_{\xi_j}})^{-1}(\xi_i)$。那么我们可以写成

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{E}}^{a} &\lesssim \int_{B(0,2\delta)\setminus B(\Theta_{\xi_j\xi_i},\delta/2)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+|x-\Theta_{\xi_j\xi_i}|\right)^{n+2k}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{(\mu_j^2+|x|^2)^{\frac{n-2k}{2}}}\,dx \\
&\lesssim \int_{\{4|x|\ge \mu_i+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|\}\cap B(0,2\delta)\setminus B(\Theta_{\xi_j\xi_i},\delta/2)} + \int_{\{4|x|\le \mu_i+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|\}\cap B(0,2\delta)\setminus B(\Theta_{\xi_j\xi_i},\delta/2)} \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \int_{B(\Theta_{\xi_j\xi_i},6\delta)\setminus B(\Theta_{\xi_j\xi_i},\delta/2)} \frac{\mu_i^{2k}}{\left(\mu_i+|x-\Theta_{\xi_j\xi_i}|\right)^{n+2k}}\,dx \\
&\quad + \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \mu_i^{2k} \int_{B(0,(\mu_i+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|)/2)} \frac{\left(\mu_i+|\Theta_{\xi_j\xi_i}|\right)^{-4k}}{\left(\mu_j^2+|x|^2\right)^{\frac{n-2k}{2}}}\,dx \\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

并且，在仍假设 $d_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\ \xi_j) \le 3\delta$ 的情况下，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{E}}^{b} &= \int_{M\setminus(B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)\cup B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta))} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j}\ dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \int_{M\setminus(B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)\cup B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta))} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{\left(d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)\right)^{n-2k}}\ dv_{g_{\xi_i}}. \\
&\lesssim \mu_j^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{2k-n} \int_{M\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta/2)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim \mu_j^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{2k-n}\left[\frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\delta^{2k}} + \mu_i^{\frac{n+2k}{2}}\right] \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

对于 $d_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j) \ge 3\delta$，我们按如下方式进行。

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{E}} &= \int_{M\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \Lambda_{\xi_i}^{-1} V_{\xi_j,\mu_j}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&= \int_{B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} + \int_{M\setminus(B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)\cup B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta))} \\
&\lesssim \int_{B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j^2+d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} dv_{g_{\xi_j}} \\
&+ \int_{M\setminus(B_{g_{\xi_j}}(\xi_j,\delta)\cup B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta))} \frac{\mu_i^{\frac{n+2k}{2}}}{\left(\mu_i+d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)\right)^{n+2k}} \frac{\mu_j^{\frac{n-2k}{2}}}{d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)^{n-2k}}\,dv_{g_{\xi_i}} \\
&\lesssim (\mu_i\mu_j)^{\frac{n-2k}{2}} \frac{\mu_i^{2k}}{d_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)^{n+2k}}\delta^{2k} + (\mu_i\mu_j)^{\frac{n-2k}{2}}\mu_j^{2k}\left[1+\frac{\delta^{-2k}}{d_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)^{n-2k}}\right]. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{I}_{\mathrm{E}} \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}. \tag{4.13}$$

在“颈部区域”中，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_{\mathrm{N}} &= \mu_i^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \Lambda_{\xi_i}^{-1}V_{\xi_j,\mu_j}\,dv_{g_{\xi_i}}\\
&\lesssim (\mu_i\mu_j)^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{-2k}\int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,2\delta)\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} d_{g_{\xi_j}}(x,\xi_j)^{2k-n}\,dv_{g_{\xi_i}}\\
&\lesssim (\mu_i\mu_j)^{\frac{n-2k}{2}}\mathbb{1}_{\{d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\xi_j)\le 3\delta\}} + \left(\frac{\mu_i\mu_j}{d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{n-2k}\mathbb{1}_{\{d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\xi_j)\ge 3\delta\}}\\
&\lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}}\delta^{n-2k}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

因此我们得到

$$\int_M |P_gV_{\xi_i,\mu_i} - V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1}|V_{\xi_j,\mu_j}\,dv_g \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2+d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}}\left[(\mu_i^4+\delta^4)+\delta^{n-2k}+\left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}\right].$$

□

注释 4.2. 与前面的估计一样，(4.3) 中的第一项在(M,g) 是局部共形平坦时不存在。同样地

$$\left|\int_M (P_gU_{\xi_i,\mu_i} - U_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1})U_{\xi_j,\mu_j}\,dv_g\right| \lesssim \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}+\frac{d_g(\xi_i,\xi_j)}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\left(\mu_i^4+\delta^4\right).$$

考虑一个由 $d\in\mathbb{N}$ 个点组成的集合 $\xi_i\in M$, $1\le i\le d$，以及 $d\in\mathbb{N}$ 个尺度 $0<\mu_i<\delta$, $1\le i\le d$，使得误差估计（3.4）成立。在进一步讨论之前，我们先为 $i\neq j$定义以下量。

$$\mathfrak{L}_{ij} := \int_M V_{\xi_j,\mu_j}\,P_gV_{\xi_i,\mu_i}\,dv_g,\quad \mathcal{Q}_{ij} := \int_M V_{\xi_i\mu_i}^{2_k^*-1}\,V_{\xi_j,\mu_j}\,dv_g \quad\text{and}$$

$$\varepsilon_{ij} := \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}+\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{(b_{n,k}^{-1}G_g(\xi_i,\xi_j))^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}, \tag{4.15}$$

约定 $G_g(\xi,\xi)^{2/2k-n} := 0$。注意到 $\mathfrak{L}_{ji}=\mathfrak{L}_{ij}$ （由 P_g的自伴性）以及 $\varepsilon_{ji}=\varepsilon_{ij}$（由格林函数的对称性）。此外，由格林函数的界（2.12），可得

$$\varepsilon_{ij} \approx \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}+\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{d_g(\xi_i,\xi_j)^2}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}.$$

我们首先注意到以下事实。

推论 4.1. 设 $k\ge 1$ 为整数，且(M,g) 为维数为 $2k+1\le n\le 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者(M,g) 为局部共形平坦。假设 *GJMS*算子 P_g 满足(1.4)，并固定 $0<\delta<1$。那么对所有

ξ_i，$\xi_j \in M$ 以及 $0 < \mu_j \le \mu_i < \delta$ 充分小，且误差估计(3.4) 成立时，我们得到以下关系。

$$\mathfrak{L}_{ij} = \mathcal{Q}_{ij} + \varepsilon_{ij}\,\mathrm{O}\left(\mu_i^4 + \delta^{n-2k} + \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}\right), \tag{4.16}$$

其中，$\mathrm{O}(\cdot)$ 中的常数仅依赖于 n、k 和 (M, g)。
证明。 我们写作：我们有 $\mathfrak{L}_{ij} = \int_M (P_g V_{\xi_i,\mu_i} - V_{\xi_i\,\mu_i}^{2_k^*-1}) V_{\xi_j,\mu_j}\, dv_g + \mathcal{Q}_{ij}$。由 (4.3)
.....且由于 $\mu_j \le \mu_i$，我们有

$$\begin{aligned} |\,\mathfrak{L}_{ij} - \mathcal{Q}_{ij}| &\lesssim \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} + \frac{d_g(\xi_i,\xi_j)}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} \left(\mu_i^4 + \delta^{n-2k} + \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}\right) \\ &\lesssim \varepsilon_{ij}\left(\mu_i^4 + \delta^{n-2k} + \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}\right). \end{aligned}$$

□

接下来，我们得到相互作用量之间的以下关键关系。

引理 4.4。 设 $k \ge 1$ 为整数，且 (M, g) 为维数为 $2k+1 \le n \le 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或 (M, g) 为局部共形平坦流形。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 (1.4)，并设 $0 < \delta < 1$。那么，对所有$\xi_i, \xi_j \in M$ 以及 $0 < \mu_i \le \mu_j < \delta$ 充分小且满足误差估计 (3.4) 的情形，当 $\varepsilon_{ij} \to 0$ 时，对于 $i \ne j$，有如下估计。

$$\mathcal{Q}_{ij} = \varepsilon_{ij}\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\left(\varepsilon_{ij}^{\frac{2}{n-2k}} + \varepsilon_{ij}^{\frac{2}{n-2k}} \log \varepsilon_{ij}^{-1}\, \mathbb{1}_{\{k=1\}}\right) + \delta + \mu_j^2\,\delta^{-2}\right), \tag{4.17}$$

其中 $\mathrm{O}(\cdot)$ 中的常数仅依赖于 n，k 以及 $(M,\ g)$。这里 B_0 是 (2.3)中定义的标准泡。

证明。记

$$\mathcal{Q}_{ij} := \int_M V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1} V_{\xi_j,\mu_j}\, dv_g = \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} + \int_{M\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)}$$

取 δ 足够小，我们可以用格林函数将泡改写为:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{\xi,\mu}(x) &= \chi_{\xi,\delta}(x)\left(\frac{\mu}{\mu^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}\right)^{\frac{n-2k}{2}} (1 + \mathrm{O}(\delta)), \\ \widetilde{V}_{\xi,\mu}(x) &= \left(\frac{\mu}{\mu^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_\xi}(x,\xi)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(1 + \mathrm{O}(\delta) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu^2}{\delta^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

对于外项，按照 (4.13) 中的方法进行计算，可得

$$\int_{M\setminus B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1} V_{\xi_j,\mu_j}\, dv_g \lesssim \left(\frac{\mu_i\mu_j}{\mu_i^2 + d_g(\xi_i,\xi_j)^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}. \tag{4.19}$$

对于主项，我们写作

$$\int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} V_{\xi_i,\mu_i}^{2_k^*-1} V_{\xi_j,\mu_j}\, dv_g = \left(1 + \mathrm{O}(\delta) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_j^2}{\delta^2}\right)\right) \mathscr{I}_{ij},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{ij} &:= \int_{B_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\delta)} \frac{\Lambda_{\xi_j}(x)}{\Lambda_{\xi_i}(x)} \left(\frac{\mu_i}{\mu_i^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} d_{g_{\xi_i}}(x,\xi_i)^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} \\ &\qquad \times \left(\frac{\mu_j}{\mu_j^2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(x,,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}\right)^{\frac{n-2k}{2}} dv_{g_{\xi_i}} \\ &= \int_{B(0,\delta/\mu_i)} \frac{\Lambda_{\xi_j}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x))}{\Lambda_{\xi_i}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x))} \left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} \\ &\qquad \times \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}\left(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x), \xi_j\right)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} dx.\end{aligned} \tag{4.20}$$

为方便起见，令 $\mathscr{K}_{ji}(x) := \left(b_n^{-1}{}_{,k} G_{g_{\xi_j}}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(x)\ \xi_j)\right)^{2/(2k-n)}$。由格林函数的展开式（2.13）可得，对 $\xi_i \neq \xi_j$

$$\begin{aligned}\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}\left(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x), \xi_j\right)\right)^{\frac{2}{2k-n}} &= \left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}} \\ &\quad + \mu_i \langle \nabla \mathscr{K}_{ji}(0), x\rangle + \mathrm{O}\left(\mu_i^2 |x|^2 \underbrace{|\nabla^2 \mathscr{K}_{ji}(\mu_i x)|}_{\leq 1 \text{ a.e}}\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

注意，由（2.12）可知，确有 $\left(b_n^{-1}{}_{,k} G_{g_\xi}\left(\exp_\xi^{g_\xi}(\mu x)\ \xi\right)\right)^{\frac{2}{2k-n}} = \mathrm{O}((\mu^2|x|^2)$，且 $|\nabla \mathscr{K}_{ji}(0)| \lesssim \left(b_n^{-1}{}_{,k} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{1}{2k-n}}$ 对于 $\xi_i \neq \xi_j$。于是

$$\begin{aligned}\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}\left(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x), \xi_j\right)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j} &= \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\langle \nabla \mathscr{K}_{ji}(0), x/\mu_j\rangle + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}|x|^2\right)}{\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}}\right).\end{aligned}$$

固定较小的 $\epsilon > 0$，并令 $\mathcal{T}_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n :\ |x| \leq \epsilon \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(b_n^{-1}{}_{,k} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i\ \xi_j)\right)^{\frac{1}{2k-n}}}{\mu_i}\right)\right\}$。然后对 $x \in \mathcal{T}_\epsilon$ 进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}\left(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x), \xi_j\right)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} = \\ &\left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} \left(1 + \frac{\langle \nabla \mathscr{K}_{ji}(0), x/\mu_j\rangle + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}|x|^2\right)}{\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{\left(b_{n,k}^{-1} G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i \mu_j}}\right).\end{aligned} \tag{4.22}$$

现在我们将积分拆分如下:

$$\mathscr{I}_{ij}=\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}+\int_{B(0,\delta/\mu_i)\setminus\mathcal{T}_\epsilon}:=\mathscr{I}_{ij}^{a}+\mathscr{I}_{ij}^{b}.$$

由（4.22）可得

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{a}}=\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\frac{\Lambda_{\xi_j}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x))}{\Lambda_{\xi_i}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x))}$$
$$\times\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}\left(1+\frac{\langle\nabla\mathscr{K}_{ji}(0),x/\mu_j\rangle+\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}|x|^2\right)}{\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}}\right)dx.$$

利用（2.8）可得

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{a}}=\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\Lambda_{\xi_j}(\xi_i)\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\left(1+\mathrm{O}(\mu_i|x|)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}\left(1+\frac{\langle\nabla\mathscr{K}_{ji}(0),x/\mu_j\rangle+\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}|x|^2\right)}{\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}}\right)dx$$
$$=\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\Lambda_{\xi_j}(\xi_i)\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}\times$$
$$\left(1+\frac{\langle\nabla\mathscr{K}_{ji}(0),x/\mu_j\rangle+\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}|x|^2\right)}{\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}}\right)dx+\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}$$
$$\times\mathrm{O}\left(\mu_i\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\frac{|x|}{\left(1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2\right)^{\frac{n+2k}{2}}}\right).\tag{4.23}$$

我们对上述各项分别进行估计。

$$\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}dx=\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}+\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^{2k}}{\delta^{2k}}\right)$$
$$+\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-k}\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^k}{\mu_j^k}\right).$$

由对称性

$$\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon}\langle\nabla\mathscr{K}_{ji}(0),x/\mu_j\rangle\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}dx=0.$$

And

$$\int_{B(0,\delta/\mu_i)\cap\mathcal{T}_\epsilon} \frac{|x|^2}{\left(1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2\right)^{\frac{n+2k}{2}}}\,dx \lesssim \begin{cases} 1 & \text{for } k\geq 2,\\ \log\left(2\left(\dfrac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\dfrac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)\right) & \text{for } k=1. \end{cases}$$

将上述估计代入（4.23）可得

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{a}} = \left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\left[\Lambda_{\xi_j}(\xi_i)\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}+\mathrm{O}(\mu_i)+\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^{2k}}{\delta^{2k}}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-k}\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^k}{\mu_j^k}\right)+\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i\,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-1}$$
$$\left.\times\left(\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k\geq 2\}}+\log\left(2\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)\right)\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k=1\}}\right)\right]. \tag{4.24}$$

我们现在处理 $\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{b}}$ 项。对于情形$d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\xi_j)\geq 2\delta$，利用格林函数的界（2.12）以及度量等价，我们得到

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{b}} \lesssim \int_{B(0,\delta/\mu_i)\setminus\mathcal{T}_\epsilon}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} \times\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x),\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}dx$$
$$\lesssim\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\int_{B(0,\delta/\mu_i)\setminus\mathcal{T}_\epsilon}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}$$
$$\lesssim\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-n/2}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^k.$$

现在假设 $d_{g_{\xi_i}}(\xi_i,\xi_j)\leq 2\delta$。记 $\rho_{ji}:=\left(\dfrac{\mu_j}{\mu_i}+\dfrac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i\ \xi_j)\right)^{\frac{1}{2k-n}}}{\mu_i}\right)$，和 $\Theta_{\xi_i\xi_j}:=(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}})^{-1}(\xi_j)$。对于适当选取的较大常数 $C>0$，我们

得到

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{b}} \lesssim \int_{B(0,\delta/\mu_i)\setminus\mathcal{T}_\epsilon} \left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}} \times \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x),\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} dx$$

$$\lesssim \int_{\{\epsilon\rho_{ji}\le|x|\le 2C\rho_{ji}\}\cap B(0,\delta/\mu_i)} + \int_{\{|x|\ge C\rho_{ji}\}\cap B(0,\delta/\mu_i)}$$

$$\lesssim (\epsilon\rho_{ji})^{-(n+2k)} \int_{\{|x-\Theta_{\xi_i\xi_j}/\mu_i|\le 4C\rho_{ji}\}} \left(\frac{\mu_j/\mu_i}{\mu_j^2/\mu_i^2 + \left|x-\frac{\Theta_{\xi_i\xi_j}}{\mu_i}\right|^2}\right)^{\frac{n-2k}{2}} + \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} \int_{|x|\ge C\rho_{ji}} \frac{1}{\left(1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2\right)^{\frac{n+2k}{2}}} dx$$

$$\lesssim (\epsilon\rho_{ji})^{-n}\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}\right)^{\frac{n-2k}{2}} + \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} \rho_{ji}^{-2k}$$

$$\lesssim \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-n/2}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^k.$$

Thus

$$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{b}} \lesssim \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-n/2}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^k. \tag{4.25}$$

结合（4.24）和（4.25），可得

$$\mathscr{I}_{ij} = \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}} \left[\Lambda_{\xi_j}(\xi_i)\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} + \mathrm{O}(\mu_i) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^{2k}}{\delta^{2k}}\right)\right.$$
$$+ \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-k}\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^k}{\mu_j^k}\right) + \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i\,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-1}$$
$$\left.\times\left(\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k\ge 2\}} + \log\left(2\left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)\right)\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k=1\}}\right)\right]. \tag{4.26}$$

因此

$$\mathcal{Q}_{ij} = \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}\Bigg[\Lambda_{\xi_j}(\xi_i)\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} + \mathrm{O}(\mu_i)$$
$$+\mathrm{O}(\delta) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_j^2}{\delta^2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^{2k}}{\delta^{2k}}\right) + \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-k}\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^k}{\mu_j^k}\right)$$
$$+\left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i\,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)^{-1}\Bigg(\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k\geq 2\}} +$$
$$\log\left(2\left(\frac{\mu_j}{\mu_i}\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}\frac{\left(b_{n,k}^{-1}G_{g_{\xi_j}}(\xi_i,\xi_j)\right)^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu_i\mu_j}\right)\right)\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k=1\}}\Bigg)\Bigg]. \tag{4.27}$$

当 $\varepsilon_{ij}\to 0$ 时，我们便得到

$$\mathcal{Q}_{ij} = \varepsilon_{ij}\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}\Bigg[1 + \varepsilon_{ij}^{\frac{2}{n-2k}}\,\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right) - \varepsilon_{ij}^{\frac{2}{n-2k}}\log\varepsilon_{ij}\,\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)\mathbb{1}_{\{k=1\}}$$
$$+\varepsilon_{ij}^{\frac{2k}{n-2k}}\,\mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^k}{\mu_j^k}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_i^{2k}}{\delta^{2k}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{\mu_j^2}{\delta^2}\right) + \mathrm{O}(\delta)\Bigg].$$

注意到（4.27）给出

$$\mathcal{Q}_{ij}/\varepsilon_{ij} \leq C,$$

对于某个仅依赖于 n、k和（M、g）的常数。由（4.20）以及度量的等价性，对于 δ 充分小时

$$\mathcal{Q}_{ij} \gtrsim \int_{B(0,1)}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}\left(\frac{\mu_j}{\mu_i} + \frac{\left(d_{g_{\xi_i}}\left(\exp_{\xi_i}^{g_{\xi_i}}(\mu_i x),\xi_j\right)\right)^2}{\mu_i\mu_j}\right)^{\frac{2k-n}{2}}dx$$
$$\mathcal{Q}_{ij} \gtrsim \varepsilon_{ij}\int_{B(0,1)}\left(\frac{1}{1+\mathfrak{c}_{n,k}^{-1}|x|^2}\right)^{\frac{n+2k}{2}}dx.$$

因此，我们总有

$$\mathcal{Q}_{ij} \approx \varepsilon_{ij} \tag{4.28}$$

□

下列相互作用估计可由 [53]中的引理 3.4 的证明得到。

引理 *4.5.* 设 $k\geq 1$ 为整数，且 (M,g) 是维数为 $2k+1\leq n\leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M,g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 *(1.4)*，并令 $0<\delta<1$。设 $p,q>1$ 满足 $p+q=2_k^*$。对于所有充分小的 $\xi_i,\xi_j\in M$，$0<\mu_i,\mu_j<\delta$，且误差估计 *(3.4)* 成立时，我们有关于$i\neq j$的以下相互作用估计。

$$\int_M V_{\xi_i\mu_i}^p V_{\xi_j,\mu_j}^q\,dv_g \lesssim \begin{cases}\varepsilon_{ij}^{\frac{n}{n-2k}}\log\left(\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right) & \text{if } p=q,\\ \varepsilon_{ij}^q & \text{if } p>2_k^*/2>q,\end{cases} \tag{4.29}$$

其中，$\lesssim$中的常数仅依赖于 n、k、$(M$、$g)$和 $|p-q|$。

这些估计现已成为标准结果，我们也请感兴趣的读者参阅 [53] 中关于欧几里得泡之间相互作用的引理 3.1。这些结果体现了 Bahri [4]的相互作用估计的思想。

结合（4.16）、（4.17）和（4.28），我们由此得到了（4.15）中定义的各个相互作用量之间的以下关系。这些关系在接下来的能量展开中会更有用。不过，首先引入以下记号：$\mathsf{b} = \mathrm{o}_\beta(1)$ 表示当参数 $\beta \to 0$ 趋于 $=$ 时 $\mathsf{b} = \mathrm{o}(1)$；$\mathsf{A} = \mathrm{O}_{\zeta_1,\dots,\zeta_k}(\mathsf{B})$ 表示 $\mathsf{A} = \mathrm{O}(\mathsf{B})$ 关于量 $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ 一致成立。类似地，$\mathsf{b} = \mathrm{o}_{\zeta_1,\dots,\zeta_k;\beta}(1)$ 表示当参数 $\beta \to 0$ 趋于 $=$ 时，$\mathsf{b} = \mathrm{o}(1)$ 关于量 $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ 一致成立。

命题 *4.1.* 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 是一个维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 *(1.4)*，并固定 $0 < \delta < 1$。设 $d \in \mathbb{N}$, $\Xi_d := (\xi_1, \dots, \xi_d) \in M^d$，且对所有 $1 \leq i \leq d$，$\mu_i = \mu \in (0, \delta)$ 充分小，并且误差估计 *(3.4)* 成立。那么以下结论成立。

- 存在 $C > 0$，使得对所有 d、Ξ_d 和 μ，我们对所有 $i \neq j$都有
$$C^{-1} \leq \mathcal{Q}_{ij}/\varepsilon_{ij} \leq C. \tag{4.30}$$
- *As* $\mu \to 0$ *we have for all* $1 \leq i \leq d$
$$\int_M V_{\xi_i,\mu} P_g V_{\xi_i,\mu} \, dv_g = \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*} \, dv_g \left(1 + \mathrm{o}_{\xi_i,\mu}(1)\right). \tag{4.31}$$
- 由于 $\mu \to 0$，当 $1 \leq i \neq j \leq d$时有
$$\mathfrak{L}_{ij} = \mathcal{Q}_{ij} + \varepsilon_{ij} \, \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\mu_i^4 + \delta^{n-2k} + \left(\frac{\mu_i}{\delta}\right)^{2k}\right), \text{ or}$$
$$\mathfrak{L}_{ij} = \mathcal{Q}_{ij}\left[1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\right]. \tag{4.32}$$
- 对于 $1 \leq i \neq j \leq d$，当 $\varepsilon_{ij} \to 0$时有
$$\mathcal{Q}_{ij} = \varepsilon_{ij} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \left[1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right]. \tag{4.33}$$
- 对于 $1 \leq i \neq j \leq d$，当 $\varepsilon_{ij} \to 0$时有
$$\mathfrak{L}_{ij} = \varepsilon_{ij} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \left[1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right]. \tag{4.34}$$

这里，$\mathrm{O}(\cdot)$ 中的常数仅依赖于 n、k 和(M, g)，并且 B_0 是(2.3)中定义的典范泡。

命题*4.1* 中的估计将有助于我们接下来得到能量展开。

5. Energy expansion

本节的目标是利用相互作用估计泡泡和的能量。回顾能量

$$\mathcal{J}_{g,k}(u) := \frac{\displaystyle\int_M u \, P_g u \, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |u|^{2_k^*} \, dv_g\right)^{2/2_k^*}}.$$

利用 (4.1) 和 (4.2) 进行直接计算，可得泡的能量满足以下估计。

引理 5.1。设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 为维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或 (M, g) 为局部共形平坦流形。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足 (1.4)。固定 $\xi \in M$, $0 < \delta < 1$ 并选取 $0 < \mu < \delta$ 充分小，使得误差估计 (3.4) 成立。则有

$$\mathcal{J}_{g,k}(V_{\xi,\mu}) = Y_k(\mathbb{S}^n)\left(1 + \mathrm{O}\left(\mu^{n-2k} + \delta^{4+2k-n}\mu^{n-2k} + \left(\frac{\mu}{\delta}\right)^n\right)\right). \tag{5.1}$$

我们省略上述引理的证明，感兴趣的读者可参见 [57]，其中给出了泡的能量及其质量的表达式。

注记5.1。展开式(5.1) 是一个粗略估计，且$\mathrm{O}(\mu^{n-2k})$ 项前的(5.1) 常数并未明确给出；如P_g 中附录*B*的命题*B.3*对 [13] 情形所示，该常数可以用 $k = 1$ 的质量来表示。由于我们不假设 P_g 的质量具有任何符号信息，并且为了使计算简洁，我们将 $\mathrm{O}(\mu^{n-2k})$ 项前的常数简单地记作一个实数。

本文的一个关键结果是以下关于由 d个泡组成的和的能量展开，其中所有泡具有相同的高度 $1/\mu \to +\infty$。

命题 *5.1.* 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 是一个维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足（*1.4*）。设 $d \in \mathbb{N}$，且对$1 \leq i \leq d$， $\mu \in (0, \delta)$ 充分小的 $\xi_i \in M$，并满足误差估计（*3.4*）。存在 $\varepsilon_0 > 0$、 $\mu_0 > 0$ 以及充分小的 $\delta > 0$，使得对每个正整数d $d \geq 2$，若 $\sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij} < \varepsilon_0$ 且 $0 < \mu < \mu_0$，则有如下能量展开。

$$\mathcal{J}_{g,k}\left(\sum_{i=1}^{d} V_{\xi_i,\mu}\right) \leq d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n)\left(1 - \left(\mathfrak{m}_g + (d-1)\,\mathfrak{b}_{n,k} \min_{x \neq y} G_g(x,y)\right)\mu^{n-2k}\right), \tag{5.2}$$

对于某个常数 $\mathfrak{m}_g \in \mathbb{R}$， $\mathfrak{b}_{n,k} = \dfrac{\kappa_{2_k^*} - 1}{4d} \dfrac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \mathfrak{c}_n^{\frac{n-2k}{2}}$，$k$ b_n^{-1}，$k > 0$ 对于某个常数 $\kappa_{2_k^*} > 1$，且 B_0 是定义于 (2.3)中的典范泡。

上述能量展开的证明包含在命题 5.2中的表达式（5.6）中。

令 $(a_1, \ldots, a_d) \in (0, +\infty)^d$，并考虑由 $= \sum a_i V_{\xi_i \mu}$ 给出的、带有d权重 a_i 的 $d \in \mathbb{N}$ 个泡之和，其中 $\xi_i \in M$、 $1 \leq i \leq d$。现在我们估计带权重的泡泡和的$i=1$能量。这是本文的主要结果之一，使得下一节中的拓扑论证得以成立。

命题 *5.2.* 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 是维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS*算子 P_g 满足（*1.4*），并令 $d \in \mathbb{N}$。设 $\xi_1, \cdots, \xi_d \in M$和 $\mu \in$足够小（$0, \delta$），且误差估计（*3.4*）成立。对于由 $d \in \mathbb{N}$个 d泡 $\sum a_i V_{\xi_i \mu}$组成的和，其权重为 $a_1, \ldots, a_d \in$ $(0, +\infty)$，能量满足以下估计。$i=1$

(1) 存在 $\mu_*, \delta_* > 0$，使得对所有 $0 < \mu \le \mu_*$, $0 < \delta \le \delta_*$，以下能量界对所有 $d \ge 2$均成立。

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu_i}\Big) \le (d+1/2)^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n). \tag{5.3}$$

(2) 对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 和 $d \ge 2$，存在 $\mu_*(\varepsilon, d)$ $\delta_*(\varepsilon, d) > 0$，使得对于所有 $0 < \mu \le \mu_*(\varepsilon, d)$、$0 < \delta \le \delta_*(\varepsilon, d)$，若 $\sum_{1 \le i \ne j \le d} \varepsilon_{ij} > \varepsilon$，我们有：

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i \mu}\Big) < d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n). \tag{5.4}$$

(3) 对于任意 $\tau > 1$、$\varepsilon > 0$（充分小）和 $d \ge 2$，存在 $\mu = \mu_*(\tau, \varepsilon, d)$ $\delta_*(\tau, \varepsilon, d) > 0$，使得对于所有 $0 < \mu \le \mu_*(\varepsilon, d, \tau)$、$0 < \delta \le \delta_*(\varepsilon, d, \tau)$，若对于某个 $i_0 \ne j_0$ 和 $\sum_{1 \le i \ne j \le d} \varepsilon_{ij} \le \varepsilon$，有 $\frac{a_{i_0}}{a_{j_0}} > \tau$，则我们有：

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i \mu_i}\Big) < d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n). \tag{5.5}$$

(4) 存在一个接近 1 的 $\tau_* > 1$，$\varepsilon_* > 0$、$\mu_* > 0$ 和一个足够小的 $\delta_* > 0$，使得对于所有 $d \ge 2$，若对所有 $i \ne j$ 和 $\sum_{1 \le i \ne j \le d} \varepsilon_{ij} < \varepsilon_*$ 均有 $\frac{a_i}{a_j} \le \tau_*$，则对于所有 $0 < \mu \le \mu_*$、$0 < \delta \le \delta_*$，我们有以下能量展开。

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 - \left(\mathfrak{m}_g + (d-1)\,\mathfrak{b}_{n,k} \min_{x \ne y} G_g(x,y)\right) \mu^{n-2k}\right], \tag{5.6}$$

for some constant $\mathfrak{m}_g \in \mathbb{R}$ *and* $\mathfrak{b}_{n,k} := \dfrac{\kappa_\#}{4} \dfrac{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}\, b_{n,k}^{-1} > 0$ *for some constant* $\kappa_\# > 0$.

证明。 我们沿用 Bahri-Brezis [5] 和 Mayer-Ndiaye [52]中的策略。我们写作

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) = \frac{\displaystyle\int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) P_g\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}\Big)\, dv_g}{\displaystyle\left(\int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)^{2_k^*} dv_g\right)^{2/2_k^*}} := \frac{\mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)}{\mathcal{D}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)}.$$

（证明5.4）： 我们首先利用命题4.1中得到的估计来控制分子，如下所示。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) = \int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) P_g\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}\Big)\, dv_g \\
&= \int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\Big)\, dv_g + \sum_{i,j=1}^{d} a_i a_j \int_M V_{\xi_i,\mu}\Big(P_g V_{\xi_j,\mu} - V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\Big)\, dv_g \\
&= \big(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\big) \int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\Big)\, dv_g \\
&= \big(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\big) \int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)^2 \Big[\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)^{-1}\Big]\, dv_g \\
&\le \big(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\big)\, \mathcal{D}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \left[\int_M \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}}\right)^{n/2k} dv_g\right]^{2k/n}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

因此，

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le \big(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\big) \left[\int_M \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}}\right)^{n/2k} dv_g\right]^{2k/n}. \tag{5.8}$$

接下来我们估计该项

$$\int_M \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}}\right)^{n/2k} dv_g = \int_M \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{a_j V_{\xi_j,\mu}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-2}\right)^{n/2k} dv_g.$$

由$x \mapsto x^{n/2k}$的凸性，并且由于 $2_k^*-2 = \frac{2k}{n}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}}\right)^{n/2k} dv_g \le \sum_{j=1}^{d} \int_M \frac{a_j V_{\xi_j,\mu}}{\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\, dv_g \\
&\le \sum_{j=1}^{d} \int_M \frac{a_j V_{\xi_j,\mu}}{a_j V_{\xi_j,\mu} + \sum_{i\neq j}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\, dv_g \\
&\le \sum_{j=1}^{d} \int_M V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\, dv_g - \int_M \frac{a_{\mathfrak{i}} V_{\xi_{\mathfrak{i}},\mu}}{a_{\mathfrak{j}} V_{\xi_{\mathfrak{j}},\mu} + a_{\mathfrak{i}} V_{\xi_{\mathfrak{i}},\mu}} V_{\xi_{\mathfrak{j}},\mu}^{2_k^*}\, dv_g \quad \text{for some fixed } \mathfrak{i} \neq \mathfrak{j}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

由对称性，我们可以假设 $a_j \le a_i$。固定 $\theta > 0$ 并令

$$\mathcal{R}_{i,j} := \{x \in M : a_i V_{\xi_j,\mu}(x) \ge \theta\,(a_j V_{\xi_j,\mu}(x) + a_i V_{\xi_i,\mu}(x))\}\,.$$

于是，对于某个固定的 $i \neq j$，我们得到如下下界估计。

$$\begin{aligned}
&\int_M \frac{a_i V_{\xi_i,\mu}}{a_j V_{\xi_j,\mu} + a_i V_{\xi_i,\mu}} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\,dv_g \ge \int_{\mathcal{R}_{i,j}} \frac{a_i V_{\xi_i,\mu}}{a_j V_{\xi_j,\mu} + a_i V_{\xi_i,\mu}} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\,dv_g \\
&\ge \theta \int_{\mathcal{R}_{i,j}} V_{\xi_i,\mu}\, V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\,dv_g \ge \theta \left[\mathcal{Q}_{ji} - \int_{M\setminus\mathcal{R}_{i,j}} V_{\xi_i,\mu} V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}\,dv_g\right] \\
&\ge \theta \left[\mathcal{Q}_{ji} - \theta^{2_k^*-2} \int_{M\setminus\mathcal{R}_{i,j}} \left(\frac{a_j}{a_i} V_{\xi_j,\mu} + V_{\xi_i,\mu}\right)^{2_k^*-2} V_{\xi_i,\mu} V_{\xi_j,\mu}\,dv_g\right] \\
&\ge \theta \left[\mathcal{Q}_{ji} - \widetilde{C}\theta^{2_k^*-2} \int_M \left[\left(\frac{a_j}{a_i} V_{\xi_j,\mu}\right)^{2_k^*-2} + V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*-2}\right] V_{\xi_i,\mu} V_{\xi_j,\mu}\,dv_g\right] \quad \text{for some } \widetilde{C} > 0 \\
&\ge \theta \left[\mathcal{Q}_{ji} - \widetilde{C}\theta^{2_k^*-2}\,(\mathcal{Q}_{ji} + \mathcal{Q}_{ij})\right] \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

因此，对任意 $i \neq j$，由（5.9）和（5.10），取 θ 充分小，并利用命题 **4.1**中的（4.30），可得对于某个 $\theta_\sharp > 0$

$$\begin{aligned}
\int_M \left(\frac{\sum_{j=1}^d a_j V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*-1}}{\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu}}\right)^{n/2k} dv_g &\le \sum_{j=1}^d \int_M V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\,dv_g - \theta\left[\mathcal{Q}_{ji} - \widetilde{C}\theta^{2_k^*-2}\,(\mathcal{Q}_{ji} + \mathcal{Q}_{ij})\right] \\
&\le \sum_{j=1}^d \int_M V_{\xi_j,\mu}^{2_k^*}\,dv_g - \theta_\sharp \varepsilon_{ij}. \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

回到（5.8），于是我们得到，对于某个 $\theta_\sharp > 0$（必要时可进一步减小），对任意 $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le\ & d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n) \\
&\times \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) - \frac{\theta_\sharp}{d\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}}\varepsilon_{ij}\right)^{2k/n} \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

取 μ和 δ 充分小，可得（5.3）。

$$\mathcal{J}_{g,k}\left(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu_i}\right) \le \left(d + \frac{1}{2}\right)^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n).$$

此外，在 $\sum_{1\le i\neq j\le d} \varepsilon_{ij} > \varepsilon$的情形下，（5.12）意味着，对于某个较小的常数 $\theta_\sharp > 0$（略微滥用记号），有

$$\mathcal{J}_{g,k}\left(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu_i}\right) \le d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n)\left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}\left(\delta^{n-2k}\right) - \frac{\theta_\sharp}{d^2(d-1)}\varepsilon\right). \qquad (5.13)$$

取 μ 和 δ 充分小（取决于 d 和 ε）即可得到（5.4）。 □

（证明5.5）： 现在考虑相互作用之和 $\sum \quad \varepsilon_{ij}{}^{1\le i\neq j\le d}$较小的情形。我们有

$$\mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu_i}\Big) = \sum_{i}^{d} a_i^2 \int_M V_{\xi_i,\mu}\, P_g V_{\xi_i,\mu}\, dv_g + \sum_{i\neq j}^{d} a_i a_j \mathfrak{L}_{ij}$$
$$= \sum_{i}^{d} a_i^2 \mathcal{J}_{g,k}(V_{\xi_i,\mu})\mathcal{D}(V_{\xi_i,\mu}) + \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \sum_{1\le i\neq j\le d} a_i a_j\, \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right). \tag{5.14}$$

下面的不等式以直接的方式给出了涉及这些相互作用的分母的一个下界。此外，由此得到的估计关于 d（泡的个数）是一致的。

固定 $p > 2$。存在 $\kappa_p > 1$，使得对任意正整数 d 以及 X_1， X_2，……， $X_d \ge 0$，我们有

$$\Big(\sum_{i=1}^{d} X_i\Big)^p \ge \sum_{i=1}^{d} X_i{}^p + \frac{p}{2}\kappa_p \sum_{1\le j\neq i\le d} X_i^{p-1} X_j. \tag{5.15}$$

例如，参见引理 A2，载于 [5]。

然后，结合（4.33），该不等式意味着

$$\left[\mathcal{D}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)\right]^{2_k^*/2} = \int_M \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big)^{2_k^*} dv_g$$
$$\ge \sum_{i=1}^{d} a_i{}^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g + \frac{2_k^*}{2}\kappa_{2_k^*} \sum_{1\le i\neq j\le d} a_i^{2_k^*-1} a_j \int_M V_{\xi_j,\mu}\, V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*-1}\, dv_g$$
$$\ge \sum_{i=1}^{d} a_i{}^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g + \frac{2_k^*}{2}\kappa_{2_k^*} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \sum_{1\le i\neq j\le d} a_i^{2_k^*-1}\, a_j\, \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right). \tag{5.16}$$

结合分子和分母的估计，我们得到如下能量界：对所有 $d \geq 2$，当 ε_{ij} 足够小时均成立。 $\sum_{1\leq i\neq j\leq d}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \leq & \left[\sum_{i}^{d} a_i^2 \mathcal{J}_{g,k}(V_{\xi_i,\mu})\mathcal{D}(V_{\xi_i,\mu}) + \sum_{1\leq i\neq j\leq d} a_i a_j \varepsilon_{ij} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \right. \\
& \left. \times \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\right] \left[\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \mathcal{D}\left(V_{\xi_i,\mu}\right)^{\frac{2_k^*}{2}}\Big)^{-2/2_k^*} \right. \\
& \left. - \kappa_{2_k^*} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \frac{\sum_{1\leq i\neq j\leq d} a_j\, a_i^{2_k^*-1} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g\right)^{\frac{2_k^*+2}{2_k^*}}} \right] \\
\leq & \frac{\sum_{i}^{d} a_i^2 \mathcal{J}_{g,k}(V_{\xi_i,\mu})\mathcal{D}(V_{\xi_i,\mu})}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \mathcal{D}\left(V_{\xi_i,\mu}\right)^{\frac{2_k^*}{2}}\right)^{2/2_k^*}} + \frac{\sum_{1\leq i\neq j\leq d} a_i a_j \varepsilon_{ij} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g\right)^{2/2_k^*}} \\
& - \kappa_{2_k^*} \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*} \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i^2\Big) \frac{\sum_{1\leq i\neq j\leq d} a_j\, a_i^{2_k^*-1} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g\right)^{\frac{2_k^*+2}{2_k^*}}}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

在最后一行中，我们使用了关于 $\mathcal{N}(V_{\xi_i,\ \mu})$ 的估计。重新整理各项，并同时使用关于 $\mathcal{D}(V_{\xi_i,\ \mu})$ 的估计，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \leq & \max_{1\leq i\leq d} J_g(V_{\xi_i,\mu}) \frac{\sum_{i}^{d} a_i^2\, \mathcal{D}(V_{\xi_i,\mu})}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \mathcal{D}\left(V_{\xi_i,\mu}\right)^{\frac{2_k^*}{2}}\right)^{2/2_k^*}} + \|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1} \\
& \times \sum_{1\leq i\neq j\leq d} \left(1 - \kappa_{2_k^*} \frac{a_i^{2_k^*-2}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i^2\Big)}{\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*}}\right) a_i a_j \varepsilon_{ij} \frac{\left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*} \int_M V_{\xi_i,\mu}^{2_k^*}\, dv_g\right)^{2/2_k^*}}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

这里 $\kappa_{2_k^*} > 1$。利用关于 $\mathcal{J}_{g,\,k}(V_{\xi_i,\,\mu})$ 和 $\mathcal{D}(V_{\xi_i,\,\mu})$ 的估计，我们可以得到能量的如下界。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) &\le Y_k(\mathbb{S}^n)\left(1+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k})\right)\frac{\sum\limits_{i}^{d} a_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*}\right)^{2/2_k^*}} + \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \\ &\quad\times \sum_{1\le i\ne j\le d} \frac{a_i a_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*}\right)^{2/2_k^*}}\left(1+\mathrm{o}_{\Xi_d;\xi,\mu}(1)+\mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1)+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\varepsilon_{ij} \\ &\le \frac{\sum\limits_{i}^{d} a_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*}\right)^{2/2_k^*}} Y_k(\mathbb{S}^n)\Bigg[1+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) + \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \\ &\quad\times \sum_{1\le i\ne j\le d} \frac{a_i a_j}{\sum\limits_{i}^{d} a_i^2}\varepsilon_{ij}\left(1+\mathrm{o}_{\Xi_d,\mu}(1)+\mathrm{o}_{\Xi_d\varepsilon_{ij}}(1)+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.19}$$

如果 $\dfrac{a_{i_0}}{a_{j_0}} > \tau > 1$ 对于某个 $i_0 \ne j_0$，那么 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} a_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} a_i^{2_k^*}\right)^{2/2_k^*}} \le d^{2k/n}\left(1-\dfrac{\theta_\tau}{d}\right)$

对于某个$\theta_\tau > 0$ （例如，参见 [5]中的引理 A4）。于是，该不等式推出能量满足以下界。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) &\le d^{2k/n}\, Y_k(\mathbb{S}^n)\Bigg[1+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) - \frac{\theta_\tau}{d} \\ &\quad + \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \sum_{1\le i\ne j\le d} \varepsilon_{ij}\left(1+\mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1)+\mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1)+\mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.20}$$

结合（5.5），取 μ 和 δ 充分小（取决于 d， ε 以及τ），再结合（5.4），即可得到 （□

证明 (5.6)**：** 我们再次假设 $d \ge 2$ 且 $\sum \varepsilon_{ij}$ 足够小。此外，我们假设 $\left|1-\dfrac{a_i}{a_j}\right| \le \hat{\tau}$对所有 $i \ne j$ 满足 $\hat{\tau}$都足够小。由（5.18），我们便可

推出以下结论。

$$\mathcal{J}_g\Big(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le \frac{\sum_i^d a_i^2}{\Big(\sum_{i=1}^d a_i^{2_k^*}\Big)^{2/2_k^*}} Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) + \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}}\right.$$
$$\left. \times \sum_{1\le i\ne j\le d} \left(1 - \kappa_{2_k^*} \frac{a_i^{2_k^*-2}\Big(\sum_{i=1}^d a_i^2\Big)}{\sum_{i=1}^d a_i^{2_k^*}}\right) \frac{a_i a_j}{\sum_i^d a_i^2} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\right]$$
$$\le d^{2k/n}\, Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) + \left(1 - \kappa_{2_k^*}\left(\frac{1-\widehat{\tau}}{1+\widehat{\tau}}\right)^{2_k^*}\right) \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}}\right.$$
$$\left. \times \sum_{1\le i\ne j\le d} \frac{a_i a_j}{\sum_i^d a_i^2} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\right]$$
$$\le d^{2k/n}\, Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 + \mathrm{O}(\mu^{n-2k}) + \left(1 - \kappa_{2_k^*}\left(\frac{1-\widehat{\tau}}{1+\widehat{\tau}}\right)^{2_k^*}\right)\left(\frac{1-\widehat{\tau}}{1+\widehat{\tau}}\right)^2\right.$$
$$\left. \times \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{d\,\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \sum_{1\le i\ne j\le d} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\right]. \tag{5.21}$$

这里我们用到了 $\frac{\sum_i^d a_i^2}{\Big(\sum_{i=1}^d a_i^{2_k^*}\Big)^{2/2_k^*}} \le d^{2k/n}$。因此，取 $\widehat{\tau}$ 充分接近 $\mathbf{0}$，

我们得到对所有 $d \ge 1$，能量满足以下界。

$$\mathcal{J}_g\Big(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le d^{2k/n}\, Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\mu^{n-2k}) - \kappa_{\#} \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{d\,\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}}\right.$$
$$\left. \times \sum_{1\le i\ne j\le d} \varepsilon_{ij} \left(1 + \mathrm{o}_{\Xi_d;\mu}(1) + \mathrm{o}_{\Xi_d;\varepsilon_{ij}}(1) + \mathrm{O}_{\Xi_d}(\delta)\right)\right], \tag{5.22}$$

对于某个常数 $\kappa_{\#} > 0$。取 μ，$\delta > 0$ 充分小，我们于是得到

$$\mathcal{J}_g\Big(\sum_{i=1}^d a_i V_{\xi_i,\mu}\Big) \le d^{2k/n}\, Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 - \mathfrak{m}_g \mu^{n-2k} - \kappa_{\#} \frac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{2d\,\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \sum_{1\le i\ne j\le d} \varepsilon_{ij}\right], \tag{5.23}$$

对于某个常数 $\mathfrak{m}_g \in \mathbb{R}$。回顾

$$\varepsilon_{ij} = \left(2 + \mathfrak{c}_{n,k}^{-1} \frac{(b_{n,k}^{-1} G_g(\xi_i,\xi_j))^{\frac{2}{2k-n}}}{\mu^2}\right)^{\frac{2k-n}{2}} = \mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}}\, b_{n,k}^{-1} G_g(\xi_i,\xi_j)\, \mu^{n-2k} \left(1 + \mathrm{o}_{\varepsilon_{ij}}(1)\right).$$

$_d$因此，当 $\sum \varepsilon_{ij}$ 充分小时，有$_{i\neq j}$

$$\sum_{i\neq j}^{d} \varepsilon_{ij} \geq \frac{1}{2} d(d-1) \mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}} \, b_{n,k}^{-1} \min_{x\neq y} G_g(x,y) \, \mu^{n-2k}. \tag{5.24}$$

这给出了对所有 $d \geq 2$而言，以格林函数表示的所需能量界（5.6）。

$$\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} V_{\xi_i,\mu}\Big) \leq d^{2k/n} \, Y_k(\mathbb{S}^n) \left[1 - \left(\mathfrak{m}_g + (d-1)\, \mathfrak{b}_{n,k} \min_{x\neq y} G_g(x,y)\right) \mu^{n-2k}\right],$$

with $\mathfrak{b}_{n,k} := \dfrac{\kappa_\#}{4} \dfrac{\|B_0\|_{2_k^*-1}^{2_k^*-1}}{\|B_0\|_{2_k^*}^{2_k^*}} \mathfrak{c}_{n,k}^{\frac{n-2k}{2}} \, b_{n,k}^{-1} > 0$ and some constant $\mathfrak{m}_g \in \mathbb{R}$. □

这就完成了命题5.2的证明。 □

命题 5.2 及格林函数的正性（1.4）直接推出以下关于泡泡和的能量的界，这表明在能量展开的极高能量水平下，相互作用压过了质量的贡献。

推论 *5.1.* 设 $k \geq 1$ 为整数，且 (M, g) 是维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 *(1.4)*，并令 $d \in \mathbb{N}$。令 $\xi_1, \cdots, \xi_d \in M$ 和 $\mu \in (0, \delta)$ 足够小，使得误差估计 *(3.4)* 成立。存在足够大的 $d_\star \in N$ 以及足够小的 $\mu_\star, \delta_\star > 0$，使得对于所有 $0 < \mu \leq \mu_\star$, $0 < \delta \leq \delta_\star$, $_d$，由 d 个泡组成、权重为 $a_1, \ldots, a_d \in (0, +\infty)_{i=1}$的和的能量满足：

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu_i}\Big) \leq (d+1/2)^{2k/n} \, Y_k(\mathbb{S}^n) \ \textit{for } d \geq 1, \\ &\mathcal{J}_{g,k}\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu_i}\Big) < d^{2k/n} \, Y_k(\mathbb{S}^n) \quad \textit{for } d \geq d_\star. \end{aligned} \tag{5.25}$$

6. Existence via the Bahri-Coron technique

方程（1.2）的解是能量泛函$\mathcal{J}_{g,\ k}$（定义见（2.1））在$\mathcal{M}_k^+$（定义见（2.2））上的临界点。为证明定理 1.1，我们采用反证法，假设方程（1.2）没有光滑正解；等价地，根据命题 2.1，泛函 $\mathcal{J}_{g,\ k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点。识别临界点的一种标准方法是使用与（2.1）相关的（伪）梯度流。然而，我们的问题是非紧的，且流会产生泡。

Bahri 提出并开创的技术 [4], Bahri-Coron [6] 利用这种非紧性，将 M 的重心映射到$\mathcal{J}_{g\text{的能量次水平集}k}$，并以一种拓扑上非平凡的方式实现这一点。随后，我们将利用第 5节中的能量展开导出矛盾。因此，我们大量借鉴他们的工作，并请读者参阅 [4], [6], [5], [52]，其中给出了这些在此背景下已得到充分确立并被广泛使用的论证的证明。我们还请读者参阅 Dold 的著作 [24]和

Chang [20]，以了解代数拓扑、巴拿赫流形和变形引理。

正如最初在 [4,6] 中引入、最近又在 [52], 中使用的那样，我们将能量泛函$\mathcal{J}_{g,\,k}$ 中非紧流线或无穷远临界点的邻域定义为 $d \in \mathbb{N}$ 个泡之和的邻域，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，具体如下。

$$\mathcal{V}(d,\varepsilon) := \Big\{ u \in H^k(M),\, u \geq 0 \text{ a.e.} : \exists (\xi_1,\dots,\xi_d) \in M^d,\, (\mu_1,\dots,\mu_d) \in (0,\varepsilon)^d, \\ \text{with } \Big\| u - \sum_{i=1}^{d} V_{\xi_i,\mu_i} \Big\|_{H^k(M)} \leq \varepsilon \ \text{ and } \sum_{1\leq i\neq j\leq d} \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon \Big\}. \tag{6.1}$$

相互作用 ε_{ij} 由式（4.15）定义，而泡$V_{\xi,\,\mu_i}$ 由式（3.3）定义，其中 $\delta > 0$ 取充分小，使得误差估计（3.4）对所有$1 \leq i \leq d$成立。我们有现已经典的轮廓分解或泡树分解。

命题 6.1（Struwe 型分解）。设 $k \geq 1$ 为整数，且（M，g）为维数 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$的光滑闭黎曼流形，或者（M，g）为局部共形平坦流形。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足（1.4）。

设 $(u_\alpha)_\alpha$ 是 $\mathcal{M}_k^+$ 中的一个序列，使得 $\mathcal{J}_{g,k}(u_\alpha)$ 有界，$\nabla_{\mathcal{M}_k^+}\mathcal{J}_{g,k}(u_\alpha) \to 0$（当 $\alpha \to +\infty$ 时），并假设泛函 $\mathcal{J}_{g,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点。那么存在 $d \in \mathbb{N}$ 和一个序列 $(\varepsilon_\alpha)_\alpha$，满足 $\varepsilon_\alpha > 0$ 对所有 α 都成立，且当$\alpha \to +\infty$ 时 $\varepsilon_\alpha \to 0$，使得经过取子列后，$u_\alpha \in \mathcal{V}(d,\varepsilon_\alpha)$。注意，当 $\alpha \to +\infty$ 时，$\mathcal{J}_{g,k}(u_\alpha) \to d^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n)$。

对于 $k=1$ 以及 中的区域 $\mathbb{R}^n$，这是 Struwe 的开创性成果 [71]。另请参见 [6] 以及 Brezis 和 Coron 的成果 [15]，关于 H-系统。关于较近期的书籍形式论述，可参见 Hebey [41]（第3章）。对于 $k=2$，Hebey 和 Robert 在 [42]中得到了这一结果。关于这一方向其他相关工作的参考文献，例如可见 [55]。

对于一般的 $k \geq 1$，上述命题的证明可由 [55]，中的定理1.3 得出，只需作如下修改：由于$\|V_{\xi,\mu} - V_{\xi,\mu}\|_{H^k(M)} \to 0$ 如 $\mu \to 0$，我们可以交换 $V_{\xi,\mu}$ 和 $U_{\xi,\mu}$。上述命题的证明还蕴含了如下意义下分解的唯一性（相差一个置换）。

设 $d \in \mathbb{N}$，令 $(\varepsilon_\alpha)_\alpha$ 为正数列，且 $\varepsilon_\alpha \to 0$ 如 $\alpha \to +\infty$，再令 $d \sum_{i=1}^{d} a_{i,\alpha} V_{\xi_{i,\alpha},\mu_{i,\alpha}}, \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_{i,\alpha} V_{\tilde{\xi}_{i,\alpha},\tilde{\mu}_{i,\alpha}} \in \mathcal{V}(d,\varepsilon_\alpha)$ 为两个数列，使得

$$\Big\| \sum_{i=1}^{d} a_{i,\alpha} V_{\xi_{i,\alpha},\,\mu_{i,\alpha}} - \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_{i,\alpha} V_{\tilde{\xi}_{i,\alpha},\,\tilde{\mu}_{i,\alpha}} \Big\|_{H^k(M)} = \mathrm{o}(1) \ \text{ as } \alpha \to +\infty.$$

那么，相差一个置换，对于所有 $1 \leq i \leq d$

$$|a_{i,\alpha} - \tilde{a}_{i,\alpha}| = \mathrm{o}(1),\ \frac{\tilde{\mu}_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}} = 1 + \mathrm{o}(1),\ \frac{d_g(\tilde{\xi}_{i,\alpha},\,\xi_{i,\alpha})^2}{\tilde{\mu}_{i,\alpha}\,\mu_{i,\alpha}} = \mathrm{o}(1).$$

参见 [6]，中的引理 A.1、[5]，中的引理 11，或 [41] 中的引理 3.12。利用这一分解的唯一性，以及极小化子所蕴含的正交条件，我们可以如 [6] 中的命题 7（另见 [5] 中的第 6 节）那样对集合 $\mathcal{V}(d,\varepsilon)$ 进行参数化，并得到以下引理。为简洁起见，略去证明，因为证明过程类似，只需作少许修改。这里 σ_d 表示含有 d 个元素的置换群。

引理 6.1（选择映射）。设 $k \geq 1$ 为一个整数，且 (M,g) 是一个维数为 $2k+1 \leq n \leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M,g) 是局部

共形平坦。假设 *GJMS*算子 P_g 满足 (1.4)，并且泛函 $\mathcal{J}_{g,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点。

那么，对每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在 $\varepsilon_* = \varepsilon_*(d) > 0$, $\widehat{\varepsilon}_* = \widehat{\varepsilon}_*(d) > 0$，使得对所有满足 $\varepsilon < \varepsilon_*$ 的 $u \in \mathscr{V}(d, \varepsilon)$，极小化问题

$$\min_{\mathscr{R}(d,\widehat{\varepsilon}_*)} \left\| u - \sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu_i} \right\|_{H^k(M)}$$

有一个解，且除置换 σ_d 外该解唯一，其中

$$\mathscr{R}(d,\widehat{\varepsilon}_*) := \Big\{ (\xi_1,\dots,\xi_d) \in M^d,\, (\mu_1,\dots,\mu_d) \in (0,\widehat{\varepsilon}_*)^d \, (a_1,\dots,a_d) \in (0,+\infty)^d : \frac{a_i}{a_j} \le 2, \text{ and } \varepsilon_{ij} \le \widehat{\varepsilon}_* \text{ for } 1 \le i \ne j \le d. \Big\}.$$

将上述极小化问题的唯一解记为 $\mathfrak{s}_d(u)$，定义**选择映射** $\mathfrak{s}\colon \mathscr{V}(d,\varepsilon) \to M^d/\sigma_d$ 为 $u \mapsto \left(\xi_1^u,\dots,\xi_d^u\right)$，其中 $\mathfrak{s}_d(u) = \sum_{i=1}^{d} a_i^u V_{\xi_i^u,\mu_i^u}$.

接下来，我们定义 $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的能量次水平集

$$\mathscr{W}^d := \left\{ u \in \mathcal{M}_k^+ : \mathcal{J}_{g,k}(u) \le (d+1)^{2k/n} Y_k(\mathbb{S}^n) \right\}. \tag{6.2}$$

通过调整经典变形引理以考虑气泡现象，正如 [6] 中的命题6和 [5], 第9节所述，可得到如下变形引理。我们指出，正性条件（1.4）保证$\{u \in H^k(M) : u \ge 0$ 几乎处处$\}$ 在与 $-\nabla\mathcal{J}_g$相关的流下保持不变，$_k$例如，可通过 Brezis-Martin 型条件得到: Brezis [14]（针对有限维空间）、Martin [51], 中的定理5.2、Deimling [22]中的定理6.3以及 Chang [20]。

命题 6.2（变形引理）。设 $k \ge 1$ 为整数，(M, g) 是维数为 $2k+1 \le n \le 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 (M, g) 是局部共形平坦的。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足 （1.4）。

假设泛函 $\mathcal{J}_{g,\,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点。那么对于所有 $d \ge 1$，只要 $\varepsilon > 0$ 足够小，$(\mathscr{W}^d, \mathscr{W}^{d-1})$ 就形变收缩到 $(\mathscr{W}^{d-1} \cup \mathscr{O}_{d,\,\varepsilon}, \mathscr{W}^{d-1})$，其中 $\mathscr{V}(d,\widetilde{\varepsilon}) \subset \mathscr{O}_{d,\,\varepsilon} \subset \mathscr{V}(d,\varepsilon)$，且 $\widetilde{\varepsilon} > 0$ 充分小。

对于拓扑空间 X，我们用 $\mathscr{H}_*(X)$ 表示其奇异同调，用$\mathscr{H}^*(X)$ 表示其上同调，系数为 $\mathbb{Z}_2$。类似地，对于给定的拓扑空间 X 和 Y，$\mathscr{H}_*(X, Y)$ 表示相对同调。对于映射 $f: X \to Y$，其中 X 和 Y 是拓扑空间，我们用 f_* 表示同调中的诱导映射，用 f^* 表示上同调中的诱导映射。注意，M 是 $\mathbb{Z}_2$ 可定向的，即其顶维同调非零；并且当 M 连通时，$\mathscr{H}_n(M) \cong \mathbb{Z}_2$。换言之，$M$ 具有非平凡的基本类，即定向类 $[M]_* \in \mathscr{H}_n(M)$。庞加莱对偶通过与基本类的帽积，将 M 的同调和上同调联系起来：$\beta \in \mathscr{H}^k(M) \longmapsto \beta \frown [M]_* \in \mathscr{H}_{n-k}(M)$，由此得到 $\mathscr{H}^\ell(M) \cong \mathscr{H}_{n-\ell}(M)$。

下文中，令 d 为正整数。我们将具有 d 个顶点的标准（$d-1$）维单纯形记为

$$\Delta_{d-1} := \left\{ (a_1,\dots,a_d) \in \mathbb{R}^d : a_i \ge 0 \text{ for } 1 \le i \le d \text{ with } \sum_{i=1}^{d} a_i = 1 \right\}. \tag{6.3}$$

将位于 $\xi \in M$ 处的狄拉克δ记为 δ_ξ，我们将 M 的 $d \in N$ 阶形式重心集合定义如下：

$$\mathscr{B}_d(M) := \Big\{ \sum_{i=1}^{d} a_i \delta_{\xi_i} : \xi_i \in M,\, a_i \geq 0 \ \text{ for } 1 \leq i \leq d \ \text{ with } \sum_{i=1}^{d} a_i = 1 \Big\}, \tag{6.4}$$

并令 $\mathscr{B}_0(M) = \emptyset$。 $\mathscr{B}_d(M)$ 赋予测度的弱拓扑，并可识别为商空间 $M^d \times \Delta_{d-1}$。关于重心空间的同伦型的详细研究，参见 Kallel 和 Karoui [47]$_{\sigma_d}$。

存在一种自然的方法，可将上同调定向类 $[M]^* \neq 0 \in \mathscr{H}^n(M)$ 转移为 $\mathscr{H}^n(M^d/\sigma_d)$ 中的一个非平凡元素。下面简要概述这一构造。令 $\sigma_1 \times \sigma_{d-1}$ 为 σ_d 的子群，由满足$1 \mapsto 1$的元素组成。于是我们有如下等价关系

$$M^d/\sigma_d \cong M^d/(\sigma_1 \times \sigma_{d-1}) \Big/ (\sigma_d/\sigma_1 \times \sigma_{d-1})$$

以及相应的投影 $\mathfrak{q}\colon M^d/(\sigma_1 \times \sigma_{d-1}) \to M^d/\sigma_d$。

$$\begin{array}{ccc} M^d/(\sigma_1 \times \sigma_{d-1}) & \xrightarrow{\ \pi\ } & M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{q}} & & \\ M^d/\sigma_d & & \end{array}$$

然后我们使用转移映射（见 [5,6,29,52]），它是 $\mathfrak{q}$ 的变换函数。

$$tr : \mathscr{H}^*(M^d/(\sigma_1 \times \sigma_{d-1})) \to \mathscr{H}^*(M^d/\sigma_d). \tag{6.5}$$

那么， $\mho_d^* := tr \circ \pi^*([M]^*)$ 是 $\mathscr{H}^n(M^d/\sigma_d)$ 的非平凡元素。

另一方面，众所周知，对于所有 $d \in \mathbb{N}$，都存在非平凡的定向类

$$\Omega_d \in \mathscr{H}_{d\,n+d-1}\left(\mathscr{B}_d(M), \mathscr{B}_{d-1}(M)\right) \ \text{ for all } d \geq 1. \tag{6.6}$$

帽积和边界算子的作用如下

$$\begin{aligned} &\mathscr{H}^\ell(M^d/\sigma_d) \times \mathscr{H}_i\left(\mathscr{B}_d(M), \mathscr{B}_{d-1}(M)\right) \frown \mathscr{H}_{i-\ell}\left(\mathscr{B}_d(M), \mathscr{B}_{d-1}(M)\right) \\ &\xrightarrow{\partial} \mathscr{H}_{i-\ell-1}\left(\mathscr{B}_d(M), \mathscr{B}_{d-1}(M)\right). \end{aligned}$$

此外，类 Ω_d 之间存在如下关系

$$\Omega_{d-1} = \partial\left(\mho_d^* \frown \Omega_d\right). \tag{6.7}$$

参见 [5,6,29,52]。

$\widetilde{\ }$我们定义 $\widetilde{\mathscr{F}}_d(\mu) = \mathscr{P}_{2_k^*} \circ \mathscr{F}_d(\mu)$，其中 $\mathscr{P}_{2_k^*}\colon u \to u/\|u\|_{L^{2_k^*}}$, $u \not\equiv 0$，且 $\mathscr{F}_d(\mu) : \mathscr{B}_d(M) \to \{u \in H^k(M) : u \geq 0 \text{ a.e.}\}$ 由下式给出

$$\widetilde{\mathscr{F}}_d(\mu) : \sum_{i=1}^{d} a_i \delta_{\xi_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{d} a_i V_{\xi_i,\mu}.$$

这里 $V_{\xi_i,\ \mu}$ 在（3.3）中定义，而 μ，$\delta > 0$ 如推论5.1所述，取充分小。于是有 $\mathscr{F}_d(\mu) : \mathscr{B}_d(M) \to \mathscr{W}^d$ 对所有 $d \geq 1$均成立。为进行拓扑论证，我们将 $\mathscr{F}_d(\mu)$ 视为一个对映射，即

$$\mathscr{F}_d(\mu) : (\mathscr{B}_d(M), \mathscr{B}_{d-1}(M)) \longrightarrow (\mathscr{W}^d, \mathscr{W}^{d-1}).$$

我们将证明，如果泛函 $\mathcal{J}_{g,\,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点，那么对于 μ足够小的情形，映射 $\mathscr{F}_1(\mu)$ 以非平凡的方式将背景流形 M 映射到 $(\mathscr{W}^1,\ \mathscr{W}^0)$。接着，利用关系式（6.7）和归纳法，我们证明对所有 $\mathscr{F}_d(\mu)_* \not\equiv 0,\ d\in\mathbb{N}$ 均成立。另一方面，由命题5.2 中的相互作用估计可知，当 μ 足够小时，映射 $\mathscr{F}_d(\mu)$ 在同调意义下是平凡的，这就产生了矛盾。

命题 6.3。设 $k\geq 1$ 为一个整数，且 $(M,\ g)$ 是一个维数为 $2k+1\leq n\leq 2k+3$ 的光滑闭黎曼流形，或者 $(M,\ g)$ 是局部共形平坦的。假设 *GJMS* 算子 P_g 满足 (1.4) 并且泛函 $\mathcal{J}_{g,\,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点。选取由推论 *5.1*给出的 $0<\mu\leq\mu_\star$，映射

$$\mathscr{F}_d(\mu):(\mathscr{B}_d(M),\mathscr{B}_{d-1}(M))\longrightarrow(\mathscr{W}^d,\mathscr{W}^{d-1})$$

对所有 $d\in\mathbb{N}$均有良好定义。此外，$\mathscr{F}_d(\mu)_*(\Omega_d)\neq 0$ 属于 $\mathscr{H}_{d\,n+d-1}(\mathscr{W}^d,\ \mathscr{W}^{d-1})$ 对所有 $d\geq 1$均成立。这里 $\Omega_d\in\mathscr{H}_{d\,n+d-1}(\mathscr{B}_d(M)\ \mathscr{B}_{d-1}(M))$ 由 (6.6) 给出，且非平凡。

证明。 定义和命题 5.2 给出以下交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{H}_*\left(\mathscr{B}_d(M),\,\mathscr{B}_{d-1}(M)\right) & \xrightarrow{\ \mathscr{F}_d(\mu)_*\ } & \mathscr{H}_*\left(\mathscr{W}^d,\,\mathscr{W}^{d-1}\right)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\partial}\\ \mathscr{H}_{*-1}\left(\mathscr{B}_{d-1}(M),\,\mathscr{B}_{d-2}(M)\right) & \xrightarrow{\mathscr{F}_{d-1}(\mu)_*} & \mathscr{H}_{*-1}\left(\mathscr{W}^{d-1},\,\mathscr{W}^{d-2}\right).\end{array}\tag{6.8}$$

这里 ∂ 表示连接同态。

如 [5, 6, 52], 所示，$\mho_d^*=\mathscr{F}_d(\mu)^*(\mathfrak{s}_d^*(\mho_d^*))$。回顾关系 $\Omega_{d-1}=\partial(\mho_d^*\frown\Omega_d)$，由上述交换图可得。

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_{d-1}(\mu)_*(\Omega_{d-1})=\mathscr{F}_{d-1}(\mu)_*\left(\partial\left(\mho_d^*\frown\Omega_d\right)\right)\\&=\partial\Big(\mathscr{F}_d(\mu)_*\big(\ \mathscr{F}_d(\mu)^*(\mathfrak{s}_d^*(\mho_d^*))\frown\Omega_d\big)\Big)=\partial\left(\mathfrak{s}_d^*(\mho_d^*)\frown\mathscr{F}_d(\mu)_*(\Omega_d)\right).\end{aligned}\tag{6.9}$$

因此，对于 $d\geq 2$，$\mathscr{F}_{d-1}(\mu)_*(\Omega_{d-1})\neq 0$ 属于 $\mathscr{H}_{(d-1)(n+1)-1}(\mathscr{W}^{d-1},\mathscr{W}^{d-2})$，意味着当 ε 充分小时，根据变形引理 6.2，$\mathscr{F}_d(\mu)_*(\Omega_d)\neq 0$ 属于 $\mathscr{H}_{d(n+1)-1}(\mathscr{W}^{d-1}\cup\mathscr{O}_{d,\varepsilon},\mathscr{W}^{d-1})$ $\simeq\mathscr{H}_{d(n+1)-1}(\mathscr{W}^d,\mathscr{W}^{d-1})$。因此，$\mathscr{F}_{d-1}(\mu)_*(\Omega_{d-1})\neq 0$ 意味着$\mathscr{F}_d(\mu)_*(\Omega_d)\neq 0$，对于 $d\geq 2$。

接下来我们证明，在假设 $\mathcal{J}_{g,k}$ 在 $\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点的情况下，映射 $\mathscr{F}_1(\mu):(\mathscr{B}_1(M)\ \mathscr{B}_0(M))$ $\longrightarrow(\mathscr{W}^1,\mathscr{W}^0)$ 满足 $\mathscr{F}_1(\mu)_*(\Omega_1)\neq 0$ in $\mathscr{H}_n(\mathscr{W}^1,\mathscr{W}^0)$。由此通过归纳法完成命题 6.3 的证明。

注意，$\mathscr{W}^0=\emptyset$ 由于 $\inf_{\mathcal{M}_k^+}\mathcal{J}_g(u)=Y_k(\mathbb{S}^n)$，且下确界未能取到，在我们的情形下。由命题 6.2 可知，对于某个足够小的 δ，次水平集 $\mathscr{W}^1$ $\tilde{}$ $\tilde{}$形变收缩到 $\mathscr{O}_{1,\delta}$，其中 $\mathscr{V}(1,\delta)\subset\mathscr{O}_{1,\delta}\subset\mathscr{V}(1,\delta)$，某个 δ 足够小。对于足够小的 μ 和 $\hat{}\varepsilon$，有 $\mathscr{F}_1(\mu):\ M\to\mathscr{V}(1,\hat{}\varepsilon)$，并且满足 $\mathfrak{s}\circ\mathscr{F}_1(\mu)=\mathbb{1}_M$。这里 $\mathfrak{s}$ 是命题 6.1 中的选择映射。因此

$$\begin{array}{ccccccc}\mathscr{V}(1,\hat{\varepsilon}) & \xleftarrow{\mathscr{F}_1(\mu)} & M & \xrightarrow{\mathscr{F}_1(\mu)} & \mathscr{W}^1 & \xrightarrow{\ \mathfrak{r}\ } & \mathscr{O}_{1,\delta}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\mathfrak{i}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Id}_M} & & & \swarrow{\scriptstyle\mathfrak{i}} & \\ \mathscr{V}(1,\delta) & \xrightarrow{\ \mathfrak{s}_1\ } & M & \xleftarrow{\ \mathfrak{s}_1\ } & \mathscr{V}(1,\delta) & & \end{array}\tag{6.10}$$

这里 $\mathfrak{i}$ 是含入映射，而 $\mathfrak{r}$ 是命题6.2给出的收缩映射。这告诉我们 $\mathfrak{s}_1\circ\mathfrak{i}\circ\mathfrak{r}\circ\mathscr{F}_1(\mu)=\mathrm{Id}_M$。对同调取映射后，我们得到 $(\mathfrak{s}_1)_*\circ\mathfrak{i}_*\circ\mathfrak{r}_*\circ\mathscr{F}_1(\mu)_*(\Omega_1)\neq 0$ 在 $\mathscr{H}_n(\mathscr{W}^1)=\mathscr{H}_n(\mathscr{W}^1,\mathscr{W}^0)$。注意，该命题意味着

对所有 $d \in \mathbb{N}$，只要取 ε和 μ足够小，映射 $\mathscr{F}_d(\mu) : (\mathscr{B}_d(M) \ \mathscr{B}_{d-1}(M)) \longrightarrow (\mathscr{W}^d, \mathscr{W}^{d-1})$ 就不与常数映射同伦。□

定理1.1的证明：我们采用反证法，因此假设方程（1.2）不存在正的光滑解。因此，泛函$\mathcal{J}_{g,\ k}$ 在$\mathcal{M}_k^+$ 中没有临界点，见命题2.1。

推论5.1 表明，存在一个足够大的 $d_\star \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{F}_d(\mu)\,(\mathscr{B}_d(M)) \subset \mathscr{W}^{d-1}$ 对所有 $d \geq d_\star$均成立，因此 $\mathscr{F}_d(\mu)$在（$\mathscr{W}^d$, $\mathscr{W}^{d-1}$）中同伦于一个常值映射。然而，这与命题6.3 对 $d \geq d_*$所示的非平凡性矛盾，从而完成证明。□

Appendix A. An expansion of the GJMS operator

我们给出在共形正规坐标下 P_g 的展开式，该展开式由 [56]（命题 B.2）得到，沿用先前的工作 [57]。这基于 Juhl 对 GJMS 算子的公式 [46]。

我们采用第2 节的记号，并回顾 $g_\xi :\, = \Lambda_\xi^{n-2k} g$ 是满足（2.8）、（2.9）和（2.10）的共形度量。对于光滑径向函数 v（x）$\,= v$（r），我们有，当 $r = |x| \to 0$

$$
\begin{aligned}
P_{(\exp_\xi^{g_\xi})^* g_\xi} v(x) = \ & \Delta_0^k v(x) + \big(C_{1,2k-2}\, \mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi) + \psi^{(3)}_{2k-2}\big)\Delta_0^{k-1} v(x) - \Big(C_{2,2k-2} \times \\
& \sum_{i,j} \mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\, \mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi) \frac{x^a x^b x^c x^d}{r^2} + \frac{\psi^{(5)}_{2k-2}}{r^2}\Big)\partial_r^2 \Delta_0^{k-2} v(x) + \Big(C_{1,2k-3} \times \\
& \sum_{i,j} \mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\, \mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi) \frac{x^a x^b x^c x^d}{r^3} - C_{2,2k-3}\, \mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi) \frac{x^a x^b}{r} + \frac{\psi^{(5)}_{2k-3}}{r^3}\Big) \times \\
& \partial_r \Delta_0^{k-2} v(x) - \Big(C_{3,2k-3} \sum_{i,j} \mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\, \mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi) \frac{x^a x^b x^c x^d}{r^3} + C_{4,2k-3} \times \\
& \mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi) \frac{x^a x^b}{r}\Big)\partial_r^3 \Delta_0^{k-3} v(x) - \Big(C_{1,2k-4} |\, \mathrm{W}_{g_\xi}\, |^2 + \psi^{(1)}_{2k-4}\Big)\Delta_0^{k-2} v(x) - \Big(C_{2,2k-4} \times \\
& |\, \mathrm{W}_{g_\xi}\, |^2 + C_{3,2k-4} \Delta_{g_\xi}\, \mathrm{Ric}_{g_\xi,ab}(\xi) \frac{x^a x^b}{r^2} + C_{4,2k-4}\, \mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi) \frac{x^a x^b}{r^2} - C_{5,2k-4} \times \\
& \sum_{i,j} \mathrm{W}_{g_\xi,abj}(\xi)\, \mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi) \frac{x^a x^b x^c x^d}{r^4} + \frac{\psi^{(3)}_{2k-4}}{r^2}\Big)\partial_r^2 \Delta_0^{k-3} v(x) - \Big(C_{6,2k-4}\, \mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi) \\
& \times \frac{x^a x^b}{r^2} + C_{7,2k-4} \sum_{i,j} \mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\, \mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi) \frac{x^a x^b x^c x^d}{r^4} + \frac{\psi^{(5)}_{2k-4}}{r^2}\Big)\partial_r^4 \Delta_0^{k-4} v(x) +
\end{aligned}
$$

$$\Big(C_{1,2k-5}|\,\mathrm{W}_{g_\xi}\,|^2+C_{2,2k-5}\Delta_{g_\xi}\,\mathrm{Ric}_{g_\xi,ab}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}+C_{3,2k-5}\,\mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}+\frac{\psi^{(3)}_{2k-5}}{r^2}\Big)$$
$$\times\,\frac{\partial_r\Delta_0^{k-3}v(x)}{r}+\Big(C_{2,2k-5}|\,\mathrm{W}_{g_\xi}\,|^2-C_{3,2k-5}\Delta_g\,\mathrm{Ric}_{g_{\xi,ab}}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}+C_{4,2k-5}\,\mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi)$$
$$\times\,\frac{x^ax^b}{r^2}+C_{5,2k-5}\sum_{i,j}\mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\,\mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi)\frac{x^ax^bx^cx^d}{r^4}+\frac{\psi^{(5)}_{2k-5}}{r^2}\Big)\frac{\partial_r^3\Delta_0^{k-4}v(x)}{r}+$$
$$\Big(C_{1,2k-6}|\,\mathrm{W}_{g_\xi}\,|^2+C_{2,2k-6}\Delta_g\,\mathrm{Ric}_{g_{\xi,ab}}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}-C_{3,2k-6}\,\mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}-C_{4,2k-6}$$
$$\times\sum_{i,j}\mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\,\mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi)\frac{x^ax^bx^cx^d}{r^4}+\frac{\psi^{(3)}_{2k-6}}{r^2}\Big)\frac{\partial_r^2\Delta_0^{k-4}v(x)}{r^2}+\Big(C_{1,2k-7}\times$$
$$|\,\mathrm{W}_{g_\xi}\,|^2-C_{2,2k-7}\Delta_g\,\mathrm{Ric}_{g_{\xi,ab}}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}+C_{3,2k-7}\,\mathrm{S}_{g_\xi;ab}(\xi)\frac{x^ax^b}{r^2}+$$
$$C_{4,2k-7}\sum_{i,j}\mathrm{W}_{g_\xi,iabj}(\xi)\,\mathrm{W}_{g_\xi,icdj}(\xi)\frac{x^ax^bx^cx^d}{r^4}+\frac{\psi^{(5)}_{2k-7}}{r^2}\Big)\frac{\partial_r\Delta_0^{k-4}v(x)}{r^3}+$$
$$\mathrm{O}\Big(\sum_{j=0}^{3}r^{4-j}|\nabla^{2k-2-j}v(x)|\Big)+\mathrm{O}\Big(\sum_{j=0}^{2k-6}|\nabla^jv(x)|\Big)+$$
$$\sum_{p=0}^{2k-6}\sum_{q=0}^{\left[\frac{2k-5}{2}\right]}\frac{\psi_q^{(2k-5-2q)}(x)}{r^{2k-5-2q+p}}\partial_r^{2k-5-p}v(x)+\mathrm{O}\left(r^N|\nabla^{2k-1}v(x)|\right). \tag{A.1}$$

系数$C_{i,\,2k-j}$为正，是 n、k 的有理函数，而 $\psi_\ell^{(i)}$ 是齐次的、次数为 $i\geq 1$ 的多项式，变元为 $\mathbb{R}^n$，其系数仅依赖于g_ξ。进一步的细节及证明见 [56]中的附录B。

致谢： S. Mazumdar 衷心感谢印度科学与工程研究委员会（现为 ANRF）MATRICS 项目资助 MTR/2022/000447 的支持。本工作的一部分是在 S. Mazumdar 访问霍华德大学期间完成的，S. Mazumdar 对所获得的支持与款待深表感谢。S. Mazumdar 还要感谢 Fr´ed´eric Robert 和 K. Sandeep 在数年前向他介绍 Bahri 的工作以及 Bahri–Coron 论文，并感谢他们进行的许多宝贵讨论。

C.B. Ndiaye 部分受美国国家科学基金会资助 DMS–2000164 以及美国数学学会 2025–2026 年 Claytor-Gilmer 研究奖学金的支持。

References

[1] Jo˜ao Henrique Andrade、Tobias Konig、木再·拉特斯金和Juncheng Wei，*Quantitative stability of the total Q-curvature near minimizing metrics*，2024，2407.06934，arXiv。[2] 蒂埃里·奥宾，*Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*，9，**55**，1976，296，《纯粹与应用数学杂志》（）（），第3期，269–。[3] 罗德里戈·阿瓦洛斯、保罗·洛兰和豪尔赫·H·利拉，*A positive energy theorem for fourth-order gravity*，**61**，2022，2，48，33，《变分法与偏微分方程》（），第期，论文编号。[4] Abbas Bahri，*Critical points at infinity in some variational problems*，《皮特曼数学研究笔记丛书》，第182卷，朗文科技出版社，哈洛；美国联合出版方为约翰·威立父子公司，纽约，1989年。[5] Abbas Bahri和Haım Brezis，*Non-linear elliptic equations on Riemannian manifolds with the Sobolev critical exponent*，《几何学专题》，《非线性微分方程及其应用进展》第20卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，MA，1996年，第1–100页。

[6] Abbas Bahri和Jean-Michel Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain* **41** ，《纯粹与应用数学通讯》（1988年），第3期，253–294。[7] Paul Baird，Ali Fardoun和Rachid Regbaoui, *Prescribed Q-curvature on manifolds of even dimension* **59** 2009 233 ，《几何物理学杂志》（），第2期，221–。[8] Thomas P. Branson, *Differential operators canonically associated to a conformal structure*，《斯堪的纳维亚数学杂志》 **57** 1985 2, 293 345 0832360（），第–期。MR, [9] *Group representations arising from Lorentz conformal geometry*，《泛函分析杂志》74（1987年），第2期，199–291。[10] ， *Sharp inequalities*， *the functional determinant*， *and the complementary series*，《美国数学会汇刊》 **347** 1995 10, 3671 3742 1316845（），第–期。MR Thomas P. Branson和Bent Ørsted, [11] *Explicit functional determinants in four dimensions*，《美国数学会会刊》113（1991年），第3期，669–682。[12] Simon Brendle, *Global existence and convergence for a higher order flow in conformal geometry* 2 **158** 2003 1, 323 343 ，《数学年刊》（）（），第–期。[13] ， *Convergence of the Yamabe flow for arbitrary initial energy*，《微分几何杂志》69（2005年），第2期，217–278。[14] Ha¨ım Brezis, *On a characterization of flow-invariant sets*，《纯粹与应用数学通讯》23（1970年），261–263。[15] Ha¨ ı m Brezis和Jean-Michel Coron, *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles* **89** 1985 56 ，《有理力学与分析档案》（），第1期，21–。[16] Jian Guo Cao, *The existence of generalized isothermal coordinates for higher dimensional Riemannian manifolds* **324** 1991 2, 901 920 ，《美国数学会汇刊》（），第–期。[17] Lorenzo Carletti和Bruno Premoselli, *A priori bounds for energy-bounded solutions of critical polyharmonic equations on open sets* 2026 （）。准备中。[18] Jeffrey S. Case和A. Rod Gover, *The GJMS operators in geometry*， *analysis and physics*，《伦敦数学会杂志》（第2辑）113（2026年），第1期，论文编号e70375，21。[19] Jeffrey S. Case和Andrea Malchiodi, *A factorization of the GJMS operators of special Einstein products and applications* 2 **110** 2024 5, ，《伦敦数学会杂志》（）（），论文编号e70023，17。[20]Kung-ching Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*，《非线性微分方程及其应用进展》第6卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，1993年。[21] Xuezhang Chen和Fei Hou, *Remarks on GJMS operator of order six*，《太平洋数学杂志》289（2017年），第1期，35–70。[22] Klaus Deimling, *Ordinary differential equations in Banach spaces*，《数学讲义》第596卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1977年。MR0463601[23] Zindine Djadli和Andrea Malchiodi, *Existence of conformal metrics with constant Q-curvature* 2 **168** 2008 858 ，《数学年刊》（）（），第3期，813–。[24] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*，《数学经典》，Springer-Verlag，柏林，1995年。1972年版重印。[25] Charles Fefferman和C. Robin Graham, *Conformal invariants*，《阿斯特里斯克》（1985年），95–116。《数学遗产：´Elie Cartan》（里昂，1984年）。[26] ， *The ambient metric*，《数学年刊研究》第178卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2012年。[27] ， *Juhl's formulae for GJMS operators and Q-curvatures*，《美国数学会杂志》26（2013年），第4期，1191–1207。[28] Najoua Gamara, *The CR Yamabe conjecture—the case $n = 1$*，《欧洲数学会杂志》3（2001年），第2期，105–137。[29] Najoua Gamara和Ridha Yacoub, *CR Yamabe conjecture—the conformally flat case*，《太平洋数学杂志》201（2001年），第1期，121–175。[30] Liuwei Gong、Seunghyeok Kim和Juncheng Wei, *Compactness and non-compactness theorems of the fourth- and sixth-order constant Q-curvature problems* 2025 2502 14237（）。arXiv:。。[31] Liuwei Gong、Sanghoon Lee和Juncheng Wei, *Global Convergence of the Gursky-Malchiodi Q-curvature Flow* 2026 2602 04267 （）。arXiv:。。[32] A. Rod Gover, *Laplacian operators and Q-curvature on conformally Einstein manifolds*，《数学年鉴》336（2006年），第2期，311–334。[33] A. Rod Gover和Lawrence J. Peterson, *Conformally invariant powers of the Laplacian, Q-curvature and tractor calculus* **235** 2003 2, 339 378 ，《数学物理通讯》（），第–期。[34] C. Robin Graham、Ralph Jenne、Lionel J. Mason和George A. J. Sparling, *Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence* 2 **46** 1992 ，《伦敦数学会杂志》（）（），第3期，557 565–。

[35] C. Robin Graham 和 Maciej Zworski, *Scattering matrix in conformal geometry*, 《数学发明》152（2003），第1期，89–118页。[36] Matthias G ¨ *Conformal normal coordinates* **11** 1993 2, unther, ，《全球分析与几何年刊》（），第–期。[37] Matthew J. Gursky、Fengbo Hang 和 Yueh-Ju Lin, *Riemannian manifolds with positive Yamabe invariant and Paneitz operator* **5** 2016 1348 1367 ，《国际数学研究通知》（），–。[38] Matthew J. Gursky 和 Andrea Malchiodi, *A strong maximum principle for the Paneitz operator and a non-local flow for the Q-curvature* **17** 2015 ，《欧洲数学会杂志》（），第9期，2137–2173页。[39] Fengbo Hang 和 Paul C. Yang, *Sign of Green's function of Paneitz operators and the Q curvature* **19** 2015 9775 9791 ，《国际数学研究通知》（），–。[40] , *Q-curvature on a class of manifolds with dimension at least 5*, 《纯粹与应用数学通讯》69（2016），第8期，1452–1491页。[41] Emmanuel Hebey, *Compactness and stability for nonlinear elliptic equations*, 苏黎世高等数学讲义，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2014年。[42] Emmanuel Hebey 和 Fr ´ ´ *Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz* ederic Robert, ，*type operators with constant coefficients* **13** 2001 《变分法与偏微分方程》（），第4期，491–517页。[43] Emmanuel Humbert、Romain Petrides 和 Bruno Premoselli, *GJMS operators in a fixed conformal class* 2025 2505 08280 （）。arXiv：。。[44] Emmanuel Humbert 和 Simon Raulot, *Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator* **36** 2009 4, 525 531 ，《变分法与偏微分方程》（），第–期。[45] Andreas Juhl, *Families of conformally covariant differential operators Q-curvature and* ，数学进展，卷。*holography* 275, ¨ 2009 2521913 Birkhauser Verlag，巴塞尔，。MR[46] , *Explicit formulas for GJMS-operators and Q-curvatures*, 《几何与泛函分析》23（ [47] 2013 4, 1278 1370 3077914 ），第–期。MR Sadok Kallel 和 Rym Karoui, *Symmetric joins and weighted barycenters*, 《非线性研究进展》11（2011），第1期，117–143页。[48] John M. Lee 和 Thomas H. Parker, *The Yamabe problem*, 《美国数学会通报》（N.S.）17（1987），第1期，37–91页。[49] Jiayu Li、Yuxiang Li 和 Pan Liu, *The Q-curvature on a 4-dimensional Riemannian manifold M g with* $\int_M QdV_g = 8\pi^2$ **231** 2012 3 4, 2194 2223 （，），《数学进展》（），第–期。[50] Pierre-Louis Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations.* ，《伊比利亚美洲数学评论》（），第–期。[51] Robert H. Martin Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, 《美国数学会汇刊》179（1973），399–414页。[52] Martin Mayer 和 Cheikh Birahim Ndiaye, *Barycenter technique and the Riemann mapping problem of Cherrier-Escobar* **107** 2017 3, 519 560 ，《微分几何杂志》（），第–期。[53] , *Fractional Yamabe problem on locally flat conformal infinities of Poincaré-Einstein manifolds* **3** 2024 2561 2621 ，《国际数学研究通知》（），–。[54] Saikat Mazumdar, *GJMS-type operators on a compact Riemannian manifold: best constants and Coron-type solutions* **261** 2016 9, 4997 5034 ，《微分方程杂志》（），第–期。[55] , *Struwe's decomposition for a polyharmonic operator on a compact Riemannian manifold with or without boundary* **16** 2017 1, 311 330 ，《纯粹与应用分析通讯》（），第–期。[56] Saikat Mazumdar 和 Bruno Premoselli, *Compactness of conformal metrics with constant Q-curvature of higher order* 2025 2510 00888 （）。arXiv：。。[57] Saikat Mazumdar 和 J ´ ´ *Existence results for the higher-order Q-curvature* erˆome Vetois, ，*equation* **63** 2024 6, 151, 29 《变分法与偏微分方程》（），论文编号。[58] Benoˆıt Michel, *Masse des opérateurs GJMS* （2010）。arXiv：1012.4414。[59] Cheikh Birahim Ndiaye, *Constant Q-curvature metrics in arbitrary dimension*, 《泛函分析杂志》251（2007），第1期，1–58页。[60] , *Algebraic topological methods for the supercritical Q-curvature problem*, 《数学进展》277（2015），56–99页。[61] *Topological methods for the resonant Q-curvature problem in arbitrary even dimension* **140** 2019 178 213 ，《几何物理杂志》（），–。[62] Cheikh Birahim Ndiaye、Yannick Sire 和 Liming Sun, *Uniformization theorems: between Yamabe and Paneitz* **314** 2021 159 ，《太平洋数学杂志》（），第1期，115–页。[63] Stephen M. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary)* ，《SIGMA：对称性、可积性、几何与方法及其应用》4（2008），论文036，3。MR2393291[64] Bruno Premoselli, *A priori estimates for finite energy sign-changing blowing-up solutions of critical elliptic equations* **6** 2024 5212 5273 ，《国际数学研究通知》（），–。

[65] Jie Qing 和 David Raske, *On positive solutions to semilinear conformally invariant equations on locally conformally flat manifolds* 2006 94172, 20 , 《国际数学研究通知》（），

文章编号。[66] Fr ´ ´ *Admissible Q-curvatures under isometries for the conformal GJMS opera-* ederic *tors* Robert, , 《非线性椭圆偏微分方程》，当代数学，第540卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年，第241–259页。[67] , *Localization of bubbling for high order nonlinear equations*（2024年）。arXiv: 2501.00531。[68] , *Sharp multiscale control for high order nonlinear equations*（2025年）。arXiv: 2509.07517。[69] Richard Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature* **20** 1984 2, 479 495 , 《微分几何杂志》（），第–期。[70] Richard Schoen 和 Shing Tung Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity* **65** 1979 1, 45 76 , 《数学物理通讯》（），第–期。[71] Michael Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities* **187** 1984 4, 511 517 ,

《数学杂志》（），第–期。[72] Charles A. Swanson, *The best Sobolev constant*, 《应用分析》**47**（1992），第4期，227–239页。[73] Juncheng Wei 和 Xingwang Xu, *Classification of solutions of higher order conformally invariant equations* **313** 1999 2, 207 228 , 《数学年刊》（），第–期。

[74] Hidehiko Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, 《大阪数学杂志》**12**（1960），21–37页。

Saikat Mazumdar, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology,Bombay, Powai, Mumbai, Maharashtra 400076, India*Email address*: saikat.mazumdar@iitb.ac.in, saikat@math.iitb.ac.in

Cheikh Birahim Ndiaye, Department of Mathematics, Howard University, Annex 3, Graduate School of Arts and Sciences DC 20059 Washington, USA*Email address*: cheikh.ndiaye@howard.edu