arXiv:2603.06259v1 [math.RT] 6 Mar 2026

代数群作用的协变表示及其应用

YVANN GAUDILLOT-ESTRADA

Abstract. 若 G 是作用于仿射簇 X上的仿射代数群，则对于这一对（G, X）存在一种自然的协变表示概念。本文将 Mackey 机器推广到这一代数情形，从而对任意这样的群簇对的不可约协变表示进行分类。接下来，我们将介绍其在运动群于巴拿赫空间上的连续表示以及其他相关例子中的应用。

Introduction

Mackey 归纳理论的一个基本应用是对形如 $K \ltimes V$的半直积的酉不可约表示进行分类，其中 K 是紧群， V是阿贝尔群。用现代术语来说，Mackey 机器之所以适用于这一例子，是因为存在如下自然对应： $K \ltimes V$ 的酉表示与 C*-动力系统（$C^*(V)$ K）的协变表示 [25, 29] 相对应，其中 $C^*(V)$表示 V的极大群C*-代数。借助这一对应，可以根据 $C^*(V)$的谱的轨道结构描述 $K \ltimes V$ 的酉对偶；该谱可与 V 的庞特里亚金对偶等同。当 K 是紧李群且 V 是实向量空间时，可以证明，这一对应可推广到 $K \ltimes V$的容许Banach表示，前提是将 C*-动力系统（$C^*(V)$ K）替换为仿射代数群（ K的复化）在多项式代数（ $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$的对称代数）上的作用。受此例启发，本文旨在研究与仿射代数群作用相关的协变表示，先从抽象层面进行探讨，再联系李理论中出现的具体例子。

设 G 是定义在代数闭域 k 上的仿射群， X 是配备了 G 的代数作用的仿射簇。我们将 (G, X) 称为一个仿射作用对。我们将 G 的表示简称为 G 的表示，指由其有理子表示之和构成的表示。我们用 τ 表示 G 在正则函数代数 $k[X]$ 上的平移作用。我们关注以下类型的表示。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14L30,20G05, 22E46.*Key words and phrases.* 协变表示、代数群作用、诱导表示、运动群、对称空间。本研究得到 *Agence Nationale de la Recherche* 的 OpART（ANR-23-CE40-0016）和 CroCQG（ANR-25-CE40-5010）项目资助。本研究基于 COST 行动 CaLISTA CA21109 的工作，并得到 COST（欧洲科学与技术合作）的支持。

定义 1. (G, X) 的协变表示是指 G 在一个 $k[X]$-模 M 上的表示 ρ，满足

$$\rho(g)f\psi = (\tau_g f)\rho(g)\psi \qquad (g \in G, f \in k[X], \psi \in M).$$

本文对 k 特征为零时仿射作用对的不可约共变表示进行了分类（第 2 节）。我们将看到，这一问题可归结为传递情形，在这种情形下，我们可以运用 [22] 的主定理。我们将采用更初等的方法，为后者给出新的证明。

如上所述，我们的主要动机之一是说明，对于半直积的非酉巴拿赫表示，仍可运用非本原性论证。作为对不可约共变表示这一描述的应用，我们在第 3 节对一大类半直积群的拓扑完全不可约表示进行了分类。具体而言，我们给出了 Champetier–Delorme 对嘉当运动群 [7] 的不可约容许表示所作分类的一种简明证明。值得注意的是，这一结果此前仅针对与有限中心的半单李群相关联的运动群得到证明。接下来，我们将验证，该结果可推广至任意实约化群的嘉当运动群。

另一方面，从麦基类比的角度来看，我们近期的工作表明，实半单量子群的嘉当运动群类比应当是如下形式的仿射作用对（,），其中是一个单连通复半单群，而是与的某个实形式相关联的复化嘉当对合。在第 4 节中，我们明确给出这些作用对的不可约协变表示的分类。为此，我们证明了关于上-双不变正则函数的 Chevalley 限制定理类比。

1. 预备知识

我们的首要目标是概述代数几何中的一些内容，主要来自代数群理论，这些内容将在后文中用到。前三个小节中，我们固定一个代数闭域，并考虑定义在其上的簇，这些簇不一定不可约。若是一个簇，我们用表示它的结构层，并用表示上的正则函数代数。

1.1. 正则函数环上的模。 设 X 为一个仿射簇。我们用 Sh 表示将一个 $k[X]$-模对应到其相应的拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的函子。对任意 $k[X]$-模 M 以及任意 $f \in k[X]$，我们将 U_f 记为 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$，并用 M_f 表示 M 关于 $\{f^n$ 的局部化：$n \geq 0\}$。我们回顾，自然映射 $M_f \to \mathrm{Sh}M(U_f)$ 是一个同构。特别地，我们总有 $\mathrm{Sh}M(X) = M$。

对任意 $x \in X$，我们用 e_x 表示由在 x 处求值所定义的 $k[X]$ 的特征。若 M 是任意 $k[X]$-模且 $x \in X$，我们记 $M|_x = k \otimes_{e_x} M$，而自然映射 $M \to M|_x$，$m \mapsto m|_x = 1 \otimes m$ 称为 M 在 x 处的求值。注意 $k[X]$-模的正合序列

$$0 \to xM \to M \to M|_x \to 0$$

在 M 中是函子性的。下面我们将使用以下引理。

引理 2。 设 M 是一个有限生成的 $k[X]$-模。若映射 $x \mapsto$ 维数$_k M|_x$在 X 上局部常值，则 $\mathrm{Sh}M$ 是局部自由的。

证明。假设 $x \mapsto \dim_k M|_x$ 是局部常值的。固定 $y \in X$，并考虑 M 中的一族元素 $(m_i)_i$，使得 $(m_i|_y)_i$ 是 $M|_y$的一个基。由于 M 是有限生成的，存在一个开子集 $U \subset X$，使得 $(m_{i|U})_i$生成 $\mathrm{Sh}M_{|U}$，参见 [9, (3.3.15)]。如有必要，将 U 限制到更小的范围后，可假设 $x \mapsto \dim_k M|_x$ 在 U上为常数。于是，对所有 $x \in U$，$(m_i|_x)_i$都是 $M|_x$的一个基。对于 U的任意开子集V以及 $k[V]$中的任意一族元素 $(f_i)_i$，若 $\sum_i f_i(m_{i|V}) = 0$，则对每个$x \in V$，都有 $\sum_i f_i(x)(m_i|_x) = 0$，因此对每个 i，都有 $f_i = 0$。这证明了 $(m_{i|U})_i$是 $\mathrm{Sh}M_{|U}$的一个基。由此可知，$\mathrm{Sh}M$ 是局部自由的。□

1.2. **代数群的作用**。设 G 是一个代数群，X 是一个G-簇。按照 [5, II.6.3] 的意义，称 X 关于 G 的商为<stype id='10'>几何的，并记为 $G\backslash X$。它在同构意义下唯一。设 $x \in X$，并令 G^x 为其稳定子。将 G 映到子簇 $Gx \subset X$ 上的轨道态射 $g \mapsto gx$ 是 G 关于 G^x 的商（对于右平移作用），当且仅当它是可分的 [5, II.6.7]，；若 k 的特征为零，这一点自动成立。我们回顾一下，X 总是包含一个闭轨道 [5, I.1.8]。还要指出，如果 G 是仿射的，且 H 是 G 的闭子群，那么 G/H 总是存在 [5, II.6.8]。

从现在起，我们假设 G与 X 均为仿射的。当 X 上 G-不变正则函数所成的代数 $k[X]^G$有限生成时，其极大谱定义一个仿射簇，我们记之为 $G\!\!\setminus\!\!\setminus X$，并称之为 X 关于 G的仿射范畴商 。由构造可知，若几何商 $G\backslash X$ 存在且为仿射的，则 $G\!\!\setminus\!\!\setminus X$ 是良定义的，并且与 $G\backslash X$重合。

假设 G 是约化的。则 $k[X]^G$ 总是有限生成的，从而$G\!\!\setminus\!\!\setminus X$ 总是良定义的。此外，由包含映射 $k[X]^G \subset k[X]$ 诱导的态射 $X \to G\!\!\setminus\!\!\setminus X$ 是满射，且其每个纤维都包含唯一一条闭轨道。若每条轨道都是闭的（特别地，若 G有限），则 $G\!\!\setminus\!\!\setminus X$ 与 X 关于 G的几何商重合。更多信息请参阅 [21, 第3章§3]。

1.3. **仿射群表示的诱导**。 本文所考虑的代数群表示总被假定为其（有限维）有理子表示之和。它们通常是无限维的。设 G 为一个仿射群。按定义，G 的群运算在 $k[G]$上诱导一个霍普夫代数结构，参见 [5, 第I章§1.5]。于是，G 的表示范畴 $\mathrm{Rep}(G)$等价于 $k[G]$-余模范畴。

固定一个闭子群 H of G。若 V 是 H的任意表示，则记 $(k[G] \otimes_k V)^H$ 为张量积表示 $k[G]\otimes_k V$的 H-不变向量空间，其中 $k[G]$ 视为 H 的一个表示，其作用为右平移。G 通过左平移在 $k[G]$ 上的作用诱导出 $(k[G]\otimes_k V)^H$上的 G 表示。后者记作 $I^G(V)$，称为的表示，由 V诱导而来。

函子 $I^G : \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(G)$ 是限制函子 $R_H : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(H)$ 的右伴随。更准确地说，若 W 是 G 的一个表示，且 $\delta_W : W \to k[G] \otimes_k W$ 表示相应的余模映射，则自然双射 $\mathrm{Hom}_H(R_H(W), V) \to \mathrm{Hom}_G(W, I^G(V))$ 定义为 $\phi \mapsto (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \delta_W$，其逆映射则由 $e_1 \otimes \mathrm{id}_V$的后复合给出。这个自然双射称为诱导的泛性质。

由构造可知，还要注意，只要初始有向系统由单射态射构成，I^G 就与直极限可交换。换言之，对于任意

Rep(H) 中由单射态射构成的有向系统 $(V_i \hookrightarrow V_j)_{i\leq j}$，我们有

$$I^G\left(\varinjlim V_i\right) = \varinjlim I^G(V_i).$$

我们称 I^G 与严格归纳极限可交换。

映射 $e_1 \otimes \mathrm{id}_V\colon I^G(V) \subset k[G]\otimes_k V \to V$是否为满射，对我们的研究至关重要。最后，简要介绍一下这个问题。若上述映射对 H的每个表示 V 都是满射，则称子群 H 是可观测的。根据诱导的泛性质以及 I^G 与严格归纳极限可交换这一事实，H 可观测，当且仅当 H 的每个有限维表示都是 G的某个有限维表示的 H-同态像。考虑对偶表示可知，这又等价于以下性质： H 的每个有限维表示都可以扩张为 G 的一个有限维表示。 [3] 的主要结果之一是， H 可观测，当且仅当 G/H 是准仿射的，即某个仿射簇的开子簇。我们只需要以下较弱的陈述。

定理 3。 如果 G/H 是仿射的，那么 H 是可观测的。

证明，基于 [3]。我们称 H 的任意（代数）特征为可扩张的，如果它可以扩张为 G 的一个表示。由 [3, 定理 1], 给出的 H可观测性的一个基本判据如下：如果H的任意可扩张特征 χ的对偶特征 χ^{-1} 也可扩张，那么 H 是可观测的。

假设 G/H 是仿射的。这意味着， G上右 H-不变正则函数构成的代数 $k[G]^H$ 是有限生成的，且其极大谱为G/H。设 H的一个可扩张特征为 χ 。令 G 在 $k[G]$ 上的表示为 τ，其作用由右平移给出。设 G 上的一个正则函数为 f，满足 $f(1) \neq 0$且对每个 $h \in H$ 都有 $\tau_h f = \chi(h)f$ （考虑 G 的一个表示中适当的矩阵系数，该表示扩张了 χ）。由于商态射 $\pi : G \to G/H$ 是开映射，且 f 的零点集右 H-不变，因此 $\pi(f^{-1}(0))$在 G/H 中是闭的，且不包含 $\pi(1)$。所以存在一个在 f 的零点集上消失的 $\varphi \in k[G]^H$ ，使得 $\varphi(1) \neq 0$ （这里用到 G/H 是仿射的）。根据希尔伯特零点定理， φ 属于由 f生成的 $k[G]$ 的理想的根基；也就是说，存在一个非零的 $\psi \in k[G]$ 和 $n \in \mathbb{N}$ ，使得 $\varphi^n = \psi f$。接下来，对所有 $h \in H$，我们有 $\tau_h\psi = \chi^{-1}(h)\psi$ ，这证明了 χ^{-1} 是可扩张的，因为它可以实现为$(k[G], \tau)$的一个子表示。根据第一段中的判据，我们得出 H 是可观测的。□

2. Irreducible covariant representations

设 G 是一个仿射群， X 是一个仿射右 G-簇。为避免可分性问题，我们假设 k 的特征为零。特别地，如果$x \in X$，那么 Gx 与 G/G^x 作为 G-簇同构。本节的目标是对 (G, X) 的不可约协变表示进行分类。

我们先介绍一些术语。设 M 是 (G, X) 的协变表示。 M 的一个 子表示是 M 的一个 $k[X]$-子模，并且在 G 的作用下保持不变。若零子空间是其唯一的真子表示，我们称 M 为不可约。如果作为协变表示，它由一个有限子集生成，我们就称它为有限生成。这等价于它作为 $k[X]$-模有限生成，因为假设 M 上 G 的表示是有理张成的。如果 N

若 G 是 (G, X) 的另一个协变表示，则称 $M \to N$ 是一个 (G, X)-同态，如果它与 G 的作用相交织。(G, X) 的协变表示范畴记作 $\mathrm{Rep}(G, X)$。

下面的引理基本上将分类问题归结为 G 在 X 上传递作用的情形。

引理 4. 设 M 是一个协变表示 (G, X)，且 I 是它在 $k[X]$ 中的湮灭子。若 M 不可约，则存在一个闭轨道 $Y \subset X$，使得 I 是由在 Y 上取值为零的函数构成的理想。

证明。 M 的不可约性意味着它是有限生成的，因此它是一个有限生成的 $k[X]$-模。若 J 是 $k[X]$ 中一个严格包含 I 的 G-不变理想，那么 JM 是 M 的一个非零协变子表示，因此 $JM = M$；应用中山引理可得 $(1 + J) \cap I \neq \emptyset$，从而 $J = k[X]$。这表明 I 是 $k[X]$ 的一个极大真 G-不变理想。因此，它的零点集 Z 是一个极小的闭 G- 不变子集，并且 $I = \sqrt{I} = \{f \in k[X] : f_{|Z} = 0\}$。由于 Z 至少包含一个闭 G-轨道，它本身就是一个闭轨道。□

2.1. **分类**。现在我们需要构造足够多的协变表示。为此，我们使用从 X 中各点的稳定子群出发的归纳。

设 $x \in X$ 和 V 是 G^x 的一个表示。态射 $\varphi_x \colon g \in G \mapsto gx \in X$ 在 $k[G]$ 上诱导出一个 $k[X]$-代数结构。结合 G 通过左平移给出的表示，这会在 $k[G] \otimes_k V$ 上诱导出 (G, X) 的一个协变表示。于是 $I^G(V)$ 是 $k[G] \otimes_k V$ 的一个协变子表示，我们将其记为 $I_x(V)$。

我们将一组 诱导数据 定义为一对 (x, V)，其中 x 是 G 中生成一个闭轨道的元素，而 V 是 G^x 的一个不可约表示。若存在 $g \in G$ 使得 $x' = gx$，且存在一个线性同构 $T \colon V \to V'$ 使得，则称两组诱导数据 (x, V) 和 (x', V') 等价。

$$T(h \cdot v) = (ghg^{-1}) \cdot T(v) \qquad (v \in V, h \in G^x). \tag{1}$$

我们现在可以如下对(G, X)的不可约共变表示进行分类。

定理 5. 对任意诱导数据(x, V)，协变表示 $I_x(V)$是不可约的。反之，任一不可约协变表示都同构于这种形式之一。此外，对于给定的一对诱导数据(x, V) 与(x', V')，共变表示 $I_x(V)$ 与 $I_{x'}(V')$ 同构当且仅当(x, V)等价于(x', V')。

我们首先说明如何将证明归结为 X 为传递的情形。后一情形中该定理的证明推迟到本节末尾。

假定该定理在传递情形下成立时的证明。 若 Y 是 X的闭轨道，则包含映射 $Y \subset X$ 的余态射在(G, Y)的每一个协变表示上诱导出(G, X)的协变表示结构。由此建立了范畴$\mathrm{Rep}(G, Y)$与$\mathrm{Rep}(G, X)$中由那些在 $k[X]$ 中的湮灭子为在 Y上消失的正则函数理想的共变表示所组成的满子范畴之间的等价。

假设对于 G 的传递作用，该定理成立。若 (x, V) 是一组诱导数据，则 $I_x(V)$ 作为 (G, Gx) 的协变表示是不可约的，因此作为 (G, X) 的协变表示也是不可约的。定理的第二个结论由引理 4 得出。对于最后一个结论，只需注意，两个

(G, X) 的同构协变表示在 $k[X]$ 中具有相同的湮灭子。

□

2.2. **传递情形。** 从现在起，我们假设 G 在 X上作用传递。若 $x \in X$ 和 M 是（G, X）的协变表示，则 G^x 在M 上的作用会诱导出 G^x 在 $M|_x$上的一个表示。分类定理将是以下结果的推论。

定理 6. 假设 G 在 X上作用传递。取 X 中的一个点 x，并将函子ev_x（即从$\mathrm{Rep}(G, X)$ 到 $\mathrm{Rep}(G^x)$的函子 $M \mapsto M|_x$）记作如此。则ev_x与 $I_x : \mathrm{Rep}(G^x) \to \mathrm{Rep}(G, X)$ 是互逆函子。

尽管该定理并未以完全相同的表述出现，但它已在[22]中出现，其证明依赖于[6]的结果。我们提出一种新的、更初等的证明，重点考察诱导模的局部结构。

还要强调的是，关于 k 的特征零假设仅用于确保态射 $\varphi_x : g \in G \mapsto gx \in Gx$ 是可分的，因此 G 是 G^x 的几何商（见第1.2节）。

我们先给出一系列引理。固定 $x \in X$，并记 $H = G^x$。下文中，W 表示 H 的任意有限维表示。为简便起见，我们用 φ_x^* 同时表示包含映射 $I_x(W) \hookrightarrow k[G] \otimes_k W$ 以及由 φ_x诱导的余态射$k[X] \hookrightarrow k[G]$ 。

引理7. 层 $U \mapsto (k[\varphi_x^{-1}(U)] \otimes_k W)^H$恰好是与 $I_x(W)$相关联的拟相干$\mathscr{O}_X$-模。

证明. 只需验证，对于任意 $f \in k[X]$，$k[U_f]$-线性映射

$$I_x(W)_f = \left\{(k[G] \otimes_k W)^H\right\}_f \longrightarrow (k[\varphi_x^{-1}(U_f)] \otimes_k W)^H, \tag{2}$$

由 φ_x^* 以及对 U_f 的限制所诱导，是一个同构。利用 $k[\varphi_x^{-1}(U_f)] = k[U_{\varphi_x^* f}] = k[G]_f$，很容易验证 (2) 的满射性。此外，作为一个 $k[U_f]$-模，$k[\varphi_x^{-1}(U_f)] \otimes_k W$ 可识别为 $(k[G] \otimes_k W)_f$。由于局部化是一个正合函子，因此 (2) 也是单射的。□

对于任意 $g \in G$，自由 $k[G]$-模 $k[G] \otimes_k W$ 在 g 处的求值映射为 $e_g \otimes \mathrm{id}_W$: $k[G] \otimes_k W \to W$。因此，对于任意 $g \in G$ 和 $w \in k[G] \otimes_k W$，我们记作 $w|_g = (e_g \otimes \mathrm{id}_W)(w)$。

引理 8. 设 $g \in G$。如果 $(\xi_i)_i$ 是 $I_x(W)$ 中的一组元素，且$(\varphi_x^* \xi_i|_g)_i$ 是 W 的一组基，那么存在 X 的一个开子集 U，使得

(i) $(\xi_{i|U})_i$ 是 $\{\mathrm{Sh}\ I_x(W)\}_{|U}$ 的一组基，*(ii)* $(\varphi_x^* \xi_i|_{g'})_i$ 对每个 $g' \in \varphi_x^{-1}(U)$ 都是 W 的一组基。

证明。设 $(b_j)_j$ 是 $k[G] \otimes_k W$的一个 $k[G]$-基。记 a 为满足以下条件的 $k[G]$值矩阵：对所有 i，$\varphi_x^* \xi_i = \sum_j a_{ij} b_j$ 。由于 $(\varphi_x^* \xi_i|_g)_i$ 和 $(b_j|_g)_j$ 都是 W的基，它们的基数相同，因此我们可以假设 a 是一个方阵。若 $D = U_{\det(a)}$，则矩阵 $a_{|D} = (a_{ij|D})_{i,j}$ 可逆，这意味着 $(\varphi_x^* \xi_{i|D})_i$ 是 $k[D] \otimes_k W$的一个 $k[D]$-基。现在，D 是右 H-饱和的，这是因为 ξ_i的 H-等变性。因此，对于 $U = \varphi_x^{-1}(D)$，条件 (ii) 得以满足。对于条件 (i)，只需注意，若 $\psi \in I_x(W)$ 且 $(\varphi_x^* \psi)_{|D} = \sum_i f_i (\varphi_x^* \xi_i)_{|D}$，其中 $f_i \in k[D]$，则 ξ_i 的 H-等变性意味着 f_i 是右 H-不变的。□

多亏了定理 3，对于 $g=1$，总存在如上引理所述的族 $(\xi_i)_i$ 。将该族通过 G的作用平移后，我们立即可知，对每个 $g\in G$，结论同样成立。因此得到如下结论。

命题 9. $\mathscr{O}_X$-模 $\mathrm{Sh}\ I_x(W)$ 是局部自由的。此外，对于任意 $g\in G$，复合映射

$$I_x(W)\xrightarrow{\varphi_x^*} k[G]\otimes_k W\xrightarrow{|_g} W \tag{3}$$

与 $I_x(W)$ 在 gx 处的求值相同。

这已经表明，将 $\mathsf{ev}_x\circ I_x$ 限制在 H的有限维表示上时，它与恒等函子同构。我们需要的最后一个引理如下。

引理 10. 设 M 是(G,X)的有限生成表示。那么$\mathrm{Sh}M$ 是局部自由的，由 $m\mapsto(m|_y)_{y\in X}$ 定义的映射 $M\to\prod_{y\in X}M|_y$ 是单射；并且若$M_x=0$ ，则 $M=0$。

证明. 任意 $g\in G$在 M上的作用都会诱导一个 k-线性同构 $M|_x\to M|_{gx}$。由于 G 在 X上传递地作用， $M|_x$ 的维数因此与 x无关。于是，由引理 2 可知，$\mathsf{Sh}M$ 是局部自由的。

若 $m\in M$ 满足对所有 $y\in X$ 都有 $m|_y=0$ ，则由于 $\mathsf{Sh}M$ 的局部自由性，m 在局部消失，因此 $m=0$。于是 $M\to\prod_{y\in X}M|_y$ 是单射。特别地，由于 $M|_y$ 的维数与 y 无关，条件 $M|_x=0$ 意味着 $\prod_{y\in X}M|_y=0$ 和 $M=0$。□

定理 *6* 的证明。我们首先证明 $\mathsf{ev}_x\circ I_x$ 与恒等函子同构。设 W 是 G 的任意表示。记 $W=\varinjlim W_i$，其中 $(W_i)_i$ 是 W 的所有有限生成子表示构成的有向系统。由于归纳与严格归纳极限相交换，我们有 $I_x(W)=\varinjlim I_x(W_i)$。我们在上文已证明，将 $\mathsf{ev}_x\circ I_x$ 限制在 H 的有限维表示上时，它与恒等函子同构（见命题 9）。由于 ev_x 与余极限相交换，因此可得 $I_x(W)|_x=\varinjlim I_x(W_i)|_x=\varinjlim W_i=W$。

现在，我们来证明 $I_x\circ\mathsf{ev}_x$ 与恒等函子同构。设 M 是 (G,X) 的一个表示。给定 H固定 xM，存在唯一一个 H在 $M|_x$上的表示，使得求值映射 $M\mapsto M|_x$ 是 H-等变的。根据诱导的泛性质，后者导出一个 G-等变映射ι_M：$M\to I^G(M|_x)=I_x(M|_x)$。利用 $M\mapsto M|_x$ 是 $k[X]$-线性的这一点（将 $M|_x$ 视为通过在 x 处求值而得到的 $k[X]$ 模），再结合 G-等变性，很容易验证 ι_M 也是 $k[X]$-线性的。我们的目标是证明 ι_M 是一个同构。

先假设 M 是有限生成的。设 m 是 M中的一个元素，满足 $\iota_M(m)=0$。几乎根据定义，我们便有 $(gm)|_x=0$，因此对所有 $g\in G$，都有$m|_{g^{-1}x}=0$。由引理 10 的单射性结论可得 $m=0$。这证明了 ι_M是单射。另一方面，由 ι_M诱导的 k-线性映射$M|_x\to I_x(M|_x)|_x=M|_x$正是恒等映射，因此根据 ev_x的右正合性，$\{I_x(M|_x)/M\}|_x=0$。于是，引理 10 的最后一个结论表明 ι_M 是满射。

为完成证明，我们来检验对于任意 M， ι_M 都是一个同构。我们可以将 M 表示为其有限生成子表示 M_i 的直极限 $\varinjlim M_i$。由于 I_x 和 ev_x 是有限生成对象上的互逆函子，ev_x

保持 (G, X) 的有限生成协变表示之间态射的核。特别地，有向系统 $(M_i|_x \to M_j|_x : i \leq j)$ 由单射 态射构成。由于 I_x 与严格归纳极限可交换，我们有

$$I_x\left(\varinjlim M_i|_x\right) = \varinjlim I_x(M_i|_x).$$

后者通过同构 ι_{M_i} 与 $M = \varinjlim M_i$ 相识别。由于 ev_x 与余极限交换，我们有 $M|_x = \varinjlim M_i|_x$。最终，我们通过 ι_M 得到 $I_x(M|_x)$ 与 M 的一个识别。□

传递情形下定理 5 的证明。 分类的前两条结论由定理 6 得出。只需验证最后一条。设 (x, V) 和 (x', V') 是两组诱导数据。先假设它们等价，因此存在 $g \in G$，使得 $x' = gx$，以及一个线性同构 $T\colon V \to V'$ 满足 (1)。若 ρ 表示 G 通过右平移在 $k[G]$ 上的作用，则映射

$$\begin{array}{ccc} k[G] \otimes_k V & \longrightarrow & k[G] \otimes_k V' \\ f \otimes v & \longmapsto & \rho_g f \otimes T(v) \end{array}$$

诱导一个 (G, X)-同构 $I_x(V) \to I_{x'}(V')$。

反过来，假设 $I_{x'}(V')$ 与 $I_x(V)$ 同构。根据上述内容，不失一般性，我们可以假设 $x = x'$。那么根据定理 6，V 与 V' 同构。□

3. Application to motion groups

我们的目标是将上一节的分类定理应用于运动群的无限维表示论，也就是研究形如 $K \ltimes \mathfrak{p}$ 的李群半直积，其中 $\mathfrak{p}$ 是实向量空间，K 是一个紧李群，它通过共轭作用在线性地作用于 $\mathfrak{p}$。为此，我们首先回顾紧李群与复约化群之间的对应关系，以及运动群表示论的一般性质。

3.1. 紧李群与复约化群。本节以及下一节中，我们将频繁地隐式使用紧李群与复约化群之间的对应关系。下面回顾这种对应关系的主要性质，更多信息请参见 [23, 第 5] 章。设G 是一个复约化群。若 U 是 G 的一个紧子群（相对于解析拓扑），则当且仅当它在 G 的所有紧子群中极大时，它在 G 中 Zariski稠密。我们称这样的 U 为 G 的极大紧子群。若 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{u}$ 分别表示 G 和 U 的李代数，则有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$。此外，映射 $U \times \mathfrak{u} \to G, (u, X) \mapsto ue^{iX}$ 是双射；我们称之为相对于 U 的 G *Cartan* 分解。存在唯一一个固定 U 的 G 的对合反全纯自同构 τ，其定义如下：

$$\tau(ue^{iX}) = ue^{-iX} \qquad (u \in U, X \in \mathfrak{u}).$$

称这一对 (U, τ) 为 G 的紧实实形式。若 K 是 U 的闭子群，则其扎里斯基闭包 K 是约化的且由 τ 稳定，其紧实实形式为 $(K, \tau_{|K})$。反之，若 H 是 G 的 τ-稳定扎里斯基闭子群，则它是约化的，其紧实实形式为 $(H \cap U, \tau_{|H})$。

3.2. 运动群的一般表示论。 设 $G_0 = K \ltimes \mathfrak{p}$ 是一个运动群。我们采用与 [28, §4.2] 相同的术语，关于下文内容的更多细节请参阅该处。

若连续表示 π of G_0 在巴拿赫空间 E 上满足： $\{\pi(g) : g \in G_0\}$ 的线性张成空间相对于强算子拓扑在 E 上的有界算子空间中稠密，则称其为 拓扑完全不可约。 G_0 的拓扑完全不可约表示必然是拓扑不可约的。对于希尔伯特空间上的酉表示，这两个概念是一致的。若连续巴拿赫表示 G_0 的限制到 K 相对于 K 的任意不可约表示都具有有限重数，则称其为 容许表示，参见例如 [2, 定义 8]。根据戈德芒的结果 [28, 定理 4.5.2.1], , G_0 的拓扑完全不可约表示必然是容许表示。鉴于 [28, 命题 4.2.1.5], , G_0 在巴拿赫空间上的连续表示是拓扑完全不可约的，当且仅当它既是容许表示又是拓扑不可约的。为简便起见， G_0 的此类表示称为 不可约容许表示。此外，若 G_0 的两个不可约容许表示（π, E_π）和（ρ, E_ρ）存在一个单射稠密定义算子 T: $E_\pi \to E_\rho$ ，使其图是（$\pi \times \rho, E_\pi \times E_\rho$）的闭子表示，则称二者为 奈马克等价。这是一个等价关系，见 [28, 定理 4.2.1.6], ；对于 G_0 的不可约酉表示，该关系与酉等价一致。

在许多方面，对 G_0 的容许表示的研究可归结为对（$\mathfrak{g}_0$， K）-模的研究（定义见 [2, 定义 7]）。以下标准事实可参见 [28, §4.5.5]。设 E 是 G_0 的一个容许表示，并记 E_K 为 E 中由 K-有限向量组成的子空间。 E_K 中的元素相对于 G_0的作用都是光滑的，因此 E_K 自然继承了一个（$\mathfrak{g}_0$， K）-模结构。此外， E 是拓扑不可约的，当且仅当E_K 是一个简单的（$\mathfrak{g}_0$， K）-模。在这种情况下，若 E' 是 G_0的另一个不可约容许表示，则 E 与 E' 奈马克等价，当且仅当 E_K 与E'_K 作为（$\mathfrak{g}_0$，K）-模同构。

3.3. 一般运动群的不可约容许表示。 设$K_{\mathbb{C}}$ 是 K的复化。它是 $\mathbb{C}$上的一个仿射约化群。 K 在 $\mathfrak{p}$ 上的作用通过复化诱导出 $K_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$上的一个表示。更一般地， K 在一个复向量空间上的每个连续局部有限表示，都唯一延拓为 $K_{\mathbb{C}}$ 在同一向量空间上的一个表示。因此，任意（$\mathfrak{g}_0$， K）-模 E 都继承了 $K_{\mathbb{C}}$的一个表示；此外， $\mathfrak{p}$ 的作用在 E 上诱导出一个 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$的对称代数上的模结构。后者与仿射簇 $\mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$ 上的正则函数代数相同，因此任意（$\mathfrak{g}_0$， K）-模都可以赋予（$K_{\mathbb{C}}$， $\mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$）的一个典范共变表示，其中 $K_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$ 上的作用是 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$上的作用的对偶。这建立了Rep（$K_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$）与（$\mathfrak{g}_0$， K）-模范畴之间的范畴等价。因此，定理 5描述了简单的（$\mathfrak{g}_0$， K）-模的等价类。

现在来说明如何推导出 G_0 的不可约容许表示的分类。我们将一对 (λ, π) 定义为一个具体数据，其中 λ 是 $\mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$ 的一个元素，它生成一个闭的 $K_{\mathbb{C}}$-轨道，并且 K^λ 是 $K^\lambda_{\mathbb{C}}$ 的极大紧子群（根据松岛准则， $K^\lambda_{\mathbb{C}}$ 是约化的），而 π 是 K^λ 的一个不可约酉表示。任意具体数据 (λ, π) 都定义了一个与 $(K_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}})$ 相关联的诱导数据 $(\lambda, \tilde{\pi})$，其中 $\tilde{\pi}$ 是.....的唯一扩张

π 到 $K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ 在同一向量空间上的一个表示。我们称关联的诱导数据等价的两个具体数据为等价。

设我们固定一个实诱导数据 (λ, π)，并用 V 表示 π 的底向量空间。设 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 为平方可积函数 $f\colon K \to V$ 的希尔伯特空间，使得

$$\pi(\gamma) f(k\gamma) = f(k) \qquad (k \in K, \gamma \in K^{\lambda}).$$

我们赋予它 K 的左正则作用以及由下式定义的 $\mathfrak{p}$ 的线性作用

$$(x \cdot f)(k) = e^{\langle k\lambda, x\rangle} f(k) \qquad (x \in \mathfrak{p}, f \in \mathcal{H}(\lambda, \pi), k \in K).$$

这两种作用的组合给出 G_0 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 上的一个连续表示。

定理11. 对任意具体数据 (λ, π)，表示 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 是不可约容许的。此外，G_0 的任意不可约容许表示都具有这种形式。最后，两个表示 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 与 $\mathcal{H}(\lambda', \pi')$ 是 *Naimark*等价的，当且仅当 (λ, π) 与 (λ', π') 是等价具体数据。

证明. 设 (λ, π) 为一个具体数据，并设 V 为 π 的底向量空间。$\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 到 K 的限制是 $L^2(K) \otimes_{\mathbb{C}} V$ 的一个子表示，其中 K 在第二个因子上平凡地作用。因此，由 Peter-Weyl定理可知，$\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 是容许的。设 $(\lambda, \tilde{\pi})$ 为与 (λ, π) 相关联的诱导数据。到 K 的限制定义了 $\mathbb{C}[K_{\mathbb{C}}]$ 到 K 上连续K-有限函数代数的一个同构，进而在与 V 作张量后，诱导出一个线性嵌入 $I_{\lambda}(\tilde{\pi}) \to \mathcal{H}(\lambda, \pi)$。利用 K^{λ} 是$K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$的一个极大紧子群，可以验证该嵌入的像恰好是 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 的 K-有限向量空间 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)_K$。若我们通过本小节开头所述的范畴等价将 $I_{\lambda}(\tilde{\pi})$ 视为一个 $(\mathfrak{g}_0, K)$-模，则该嵌入显然定义了 $(\mathfrak{g}_0, K)$-模的一个同构 $I_{\lambda}(\tilde{\pi}) \to \mathcal{H}(\lambda, \pi)_K$。由于 $I_{\lambda}(\tilde{\pi})$ 是单的，我们得出 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 是拓扑不可约的。

设 E 是 G_0 的不可约容许表示。与之关联的由 K-有限向量构成的 $(\mathfrak{g}_0, K)$-模 E_K 是简单的。因此，它等价于某个诱导数据 (λ, V) 所对应的 $I_{\lambda}(V)$，其中该诱导数据属于对 $(K_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^*)$。鉴于 $K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ 的每个极大紧子群都可以扩展为 $K_{\mathbb{C}}$ 的一个极大紧子群，并且 $K_{\mathbb{C}}$ 的极大紧子群彼此共轭，存在 $k \in K_{\mathbb{C}}$ 使得 $k^{-1}Kk \cap K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ 是 $K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ 的极大紧子群。于是，$K^{k\lambda}$ 是 $K_{\mathbb{C}}^{k\lambda}$ 的极大紧子群。因此，如有必要，通过考虑等价的诱导数据，我们不妨设 K^{λ} 是 $K_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ 的极大紧子群。若 π 表示 V 在 K 上的限制，则 $(\mathfrak{g}_0, K)$- 模 $\mathcal{H}(\lambda, \pi)_K$ 与 $I_{\lambda}(V)$ 同构。由此可知，$\mathcal{H}(\lambda, \pi)$ 与 E 奈马克等价。

最后一个结论也可直接由以下事实得出：G_0 的两个不可约容许表示当且仅当其对应的 $(\mathfrak{g}_0, K)$-模同构时，它们奈马克等价。□

注 12. 上述证明揭示了两个非平凡的事实。首先，G_0 在希尔伯特空间上的不可约容许表示穷尽了其容许对偶。其次，每个简单的（$\mathfrak{g}_0$，K）-模都可以积分为 G_0 的一个不可约容许表示。

3.4. 嘉当运动群的情形。 从现在起，我们聚焦于这样的情形： G_0 是具有 Cartan 分解$Ke^{\mathfrak{p}}$的实约化群 G 的运动群。当 G 为半单时， G_0 的不可约容许表示已经得到明确分类 [7, 24]。这里我们证明，按照 [14, 第七章§2]的定义，同样的分类也适用于约化的 G 。我们采用的方法新颖且简单得多：它依赖于对闭轨道的描述、稳定子群的性质以及定理11。

由于 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 作为 $K_{\mathbb{C}}$的表示是自对偶的，我们同样可以将$(\mathfrak{g}_0, K)$-模视为$(K_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$的协变表示，其中 $K_{\mathbb{C}}$ 通过伴随表示作用于 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 。设 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 为极大阿贝尔子空间。Chevalley限制定理的一个版本 [27, §3.1.2] 断言，限制态射$\mathbb{C}[\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]$ 诱导出代数同构

$$\mathbb{C}[\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}]^{K_{\mathbb{C}}} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W},$$

其中 W 表示与 $\mathfrak{a}$相关的限制Weyl群。换言之，我们有仿射簇的同构 $W\backslash\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}\backslash\backslash\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$。另一方面，由[15, 定理1、命题 16], 可知， $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ 中的每个元素都生成一个闭 $K_{\mathbb{C}}$-轨道。由于典范态射 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}\backslash\backslash\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 的每个纤维都包含唯一的闭轨道，我们得到如下结论。

命题13. $K_{\mathbb{C}}$的闭轨道恰好是与 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$相交的 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 轨道。此外， $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ 中的两个元素属于同一个 $K_{\mathbb{C}}$轨道，当且仅当它们可由 W中的某个元素相互关联。

现在，关于稳定子群，有如下结论。

命题14. 若 $x \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ ，则 K^x 是 $K_{\mathbb{C}}^x$的一个极大紧子群。

为了给出证明，我们首先需要引入一些记号和术语。若拓扑群 H 的子群与 H 的每个连通分支都有交集，则称其为满子群。我们用 θ 表示 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的复化嘉当对合，并用 τ 表示 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上唯一满足$\tau|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$的反线性对合自同构。若 H 是伴随群Int$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$（其中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ）的任意子群，且 σ 是GL$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$中的任意元素，则记 $H^{\sigma} = \{h \in H : \ \sigma h = h\sigma\}$。令 $L = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\theta}$、$U = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\tau\theta}$ ，以及 $F = \{a \in \exp[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})]: \ a^2 = 1\}$。由于 G 属于内型，伴随作用定义了复群之间的开同态 $\delta: \ K_{\mathbb{C}} \to L$。最后，注意 δ 将 K 映到 U，后者是Int$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$的一个极大紧子群。这意味着 δ 保持Cartan分解：若 σ_K 和 σ_U 分别表示与 K和 U 相对应的 $K_{\mathbb{C}}$和Int$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$上的反全纯对合自同构，则有 $\delta \circ \sigma_K = \sigma_U \circ \delta$。

证明。 元素 $y \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 与 x 对易，当且仅当 $\tau(y)$ 也如此。将 y 展开为根向量即可轻易证明这一点，参见 [15, §I.6] 开头。因此， $K_{\mathbb{C}}^x$ 的李代数是 K^x的李代数的复化。为证明该命题，只需证明 K^x 是 $K_{\mathbb{C}}^x$的全子群。

首先，我们证明 F 是 L中 x的中心化子 L^x 的全子群。设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^x$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中 x 的中心化子，设 Z_x 是 L^x中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^x$ 的中心化子。 [15, 引理 10] 的证明表明， FZ_x 是 L^x的全子群。此外， Z_x包含于 L中 $a_{\mathbb{C}}$ 的中心化子 M 内，而根据 [15, 引理 20], 后者将 F 作为全子群包含其中。由于 $M \subset L^x$，因此 F 是 L^x 的全子群。

现在我们来总结。利用 $\delta: \ K_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 保持 Cartan 分解这一点，我们得到 $\delta(K_{\mathbb{C}})^{\tau} = \delta(K)$，以及 $\ker\delta = K\exp(i\mathfrak{k} \cap \ker\ \delta_*)$，其中 δ_* 是

δ诱导的李代数态射。这两个事实分别意味着$\delta(K_{\mathbb{C}}^x)^\tau = \delta(K^x)$，以及 $K \cap \ker\delta$ 是 $\ker\delta$的全子群。由 $\delta(K_{\mathbb{C}}^x)^\tau$ 包含 F这一事实可得， $\delta(K^x)$是 $\delta(K_{\mathbb{C}}^x)$的全子群。由于 K^x包含 $K \cap \ker\delta$，因此 K^x 是 $K_{\mathbb{C}}^x$的全子群。□

令 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$上某个 K不变内积下 $\mathfrak{a}$ 的正交补。我们将 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 认作 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上线性形式所成的空间，这些线性形式在$\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$上为零。上述命题表明， $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$中任一元素在余伴随作用下于 $K_{\mathbb{C}}$ 中的稳定子，等于其在 K中的稳定子的复化。因此，对于每个 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 以及 K^λ的每个不可约酉表示 π，有序对（λ， π）是具体数据，且可考虑 G_0的不可约容许表示 $\mathcal{H}$（λ， π）。于是，根据以上所有分析及定理11，我们得到如下分类。

定理15。 每个 G_0 的拓扑完全不可约表示都奈马克等价于形如 $\mathcal{H}$（λ， π）的表示，其中 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 为某个对象，且 π是 K^λ的不可约酉表示。两个这样的表示 $\mathcal{H}$（λ， π） 和 $\mathcal{H}$（λ'， π'）奈马克等价，当且仅当（λ， π） 与（λ'， π'） 由外尔群 W中的某个元素联系起来。

4. Quantum analogues of Cartan motion groups and their irreducible representations

实半单量子群由 De Commer 引入 [8] （简要概述另见 [10, §1] ）。它们是复半单量子群的一种推广（参见专著 [26]）。正如可由半单李群对应的对称对定义赫克代数一样，也可以为每个实半单量子群关联一个近似有幺代数。该代数上的非退化模被视为 Harish Chandra 的（$\mathfrak{g}$， K）-模的类似物。在经典情形下，简单（$\mathfrak{g}$， K）-模的同构类与简单（$\mathfrak{g}_0$， K）-模的同构类（其中（$\mathfrak{g}_0$， K）是嘉当运动群的对）共享一种自然的共同参数化，称为麦基双射 [1]。正如一个小例子所示 [10], ，对于实半单量子群，也可能存在类似的对应关系，前提是将对[1] （$\mathfrak{g}_0$， K）替换为形如（G^θ， G/G^θ）的仿射作用对，其中 G 是单连通复半单群， θ 是 G 的一个对合。受这些考量启发，本节旨在对这类作用对的不可约协变表示作出简明描述。这或许能为实半单量子群的表示论带来一些认识，而这一领域目前总体上仍完全未知。

第3.1小节的内容将在本节中贯穿使用。在本节余下部分，我们固定一个单连通半单复代数群G 和一个 G的对合自同构 θ 。我们还考虑 G 的一个紧实实形式（U， τ），使得 τ与 θ可交换（这样的紧实实形式总是存在：将 G的李代数视为实李代数，并对其应用 [14, 定理 6。16] ）。令 H表示 G中被 θ固定的元素所构成的子群。显然， H 是扎里斯基闭的，且在 τ作用下稳定，因此它是约化的。由于 U是单连通的， $K = U \cap H$也是连通的 [4, 第48页，定理1，c）], ，因此 H 也如此。我们关注仿射作用对（H， G/H）的表示论。定理 5 已经给出了

[1]或者更确切地说，仿射作用对（$K_{\mathbb{C}}$， $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^*$），参见上一节。

不可约表示的抽象分类，但我们的目标是通过给出 G/H的闭 H-轨道的简单参数化，使这一分类变得明确。

4.1. 紧型对称空间理论背景。为实现上述目标，我们首先重新表述关于对称空间 U/K的一些结果，相关内容参见 [12, 第VII章] 和 [11, 第V章4]。

设 $A \subset G$ 是一个 τ-稳定的环面，且在包含于

$$\{g \in G : \theta(g) = g^{-1}\}.$$

固定一个包含 A的 G 的极大环面 T，它在 θ 和 τ作用下保持不变。将 A的二阶元子群记为 F，注意到

$$F = A \cap H \subset K.$$

设$(X^*(T)\ \Phi, X_*(T)\ \Phi^\vee)$是与这对$(G,T)$相关联的根数据。由于$G$ 是单连通的，余权格 $X_*(T)$由余根集合 $\Phi^\vee$作为 $\mathbb{Z}$-模生成。限制根集合 $\Phi_{|A} \setminus \{0\}$ 记为 Σ。回忆一下，$(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X^*(A)\ \Sigma)$是一个根系，其外尔群 W 通过 $N_K(A)$在 A 上的共轭作用，与 $N_K(A)/Z_K(A)$相同；后者是 K 中 A 的正规化子对其在 K中的中心化子取商所得。设$(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}} X_*(A)\ \Sigma^\vee)$是 Σ的对偶根系。由 [12, 定理8.5], 可知， $X_*(A)$ =由$\mathbb{Z}(\Sigma^\vee)$生成；特别地，$(X^*(A)\ \Sigma, X_*(A)\ \Sigma^\vee)$构成一个根数据。下文中，我们分别固定 Φ和 Σ的正根系 Φ^+和 Σ^+，使得$(\Phi^+)_{|A} \subset \{0\} \cup \Sigma^+$。我们在 $X^*(A)$上赋予如下定义的序

$$\lambda \leq \lambda' \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \Sigma^+,\ \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq \langle \lambda', \alpha^\vee \rangle,$$

其中，对任意 $\alpha \in \Sigma^+$，我们用 $\alpha^\vee$ 表示相应的余根。支配权的集合记作 $X^*(A)^+$，对应于关于该序的非负权集合。

若 G 的表示 V 的 H-不变向量子空间 V^H 非零，则称该表示为球表示。此时， V^H 的每个非零元素称为球向量。 G 的不可约球表示的刻画归功于 Helgason [11, V，推论 4.2]。设 T_H 是 H 的一个极大 τ-稳定环面，且包含于 T 中。 G 的最高权为 λ 的不可约表示是球表示，当且仅当 λ 在 T_H 上平凡，且对所有 $\alpha \in \Sigma$ 有 $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in 2\mathbb{Z}$ 。最后一个条件等价于 $\lambda_{|A} \in 2X^*(A)$，或等价地， λ 在 F 上平凡。由于$T \cap H = T_H F$，我们得到如下陈述。

命题 16 (Helgason)。 G 的不可约表示是球表示，当且仅当其最高权在 $T \cap H$ 上平凡。

包含映射 $A \subset T$ 诱导出同构 $A/F \to T/H \cap T$，因此每个权 $\lambda \in 2X^*(A)$ 都有唯一扩张 $\lambda^T \in X^*(T)$，且该扩张在 $T \cap H$ 上平凡。最后，关于 G的不可约球表示的球向量，以下结论是已知的。

命题 17。 设 $\lambda \in 2X^*(A)^+$，并设 V 是 G 的一个不可约球表示，其最高权为 λ^T。令 $\Pi(V)$ 表示 V 的 A-权集合。则有：

- λ 是 V 的最高 A-权，且相应的特征空间是一维的，
- V^H 是一维的，

- 如果 $v = \sum_{\omega \in \Pi(V)} v_\omega$ 是 A-权球向量 v在 V中的展开，那么 $v_\lambda \neq 0$。

证明参见 [16, §41]开头。

4.2.**限制定理与闭轨道的参数化**。我们首先要对 G/H 的 H-轨道进行参数化，为此需要证明Chevalley限制定理的一个整体版本。令 G带有 $H \times H$ 通过左乘和右乘给出的代数作用。W 在 A 上的自然作用保持 F，因此 A/F 继承了 W的作用。

定理 18. 包含映射 $A \subset G$ 诱导出仿射簇之间的同构

$$W \backslash A / F \to (H \times H) /\!\!/ G.$$

证明。我们的目标是证明，限制到 A 会诱导出一个同构$\mathbb{C}[G]^{H\times H} \to \mathbb{C}[A]^{W\times F}$。由于 F包含于 H，且 W通过 $K \subset H$中元素的共轭作用于 A，后一个态射是良定义的。它是单射：根据 [12, 定理 67], ，有 $U \subset KAK$，因此 HAH 在 G中Zariski稠密。剩下要证明满射性。

如果把 A 的权 λ 视为 A上的正则函数，而不是代数群态射 $A \to \mathbb{C}^*$，我们就用 e^λ 来表示它。这样，$\lambda \mapsto e^\lambda$定义了一个群态射 $X^*(A) \to \mathbb{C}[A]^\times$。我们回顾$(e^\lambda)_{\lambda \in X^*(A)}$ 是 $\mathbb{C}[A]$的一个基。A 上 F-不变正则函数的代数是 $a \in A \mapsto a^2 \in A$的余态射的像。后者把任意 $\lambda \in X^*(A)$的 e^λ 映到 $e^{2\lambda}$，因此$(e^\lambda)_{\lambda \in 2X^*(A)}$ 是 $\mathbb{C}[A]^F$的一个基。由于 $X^*(A)$的每个 W-轨道都与 $X^*(A)^+$相交，我们由上述事实推出这些元素

$$\langle e^\lambda \rangle_W = |W|^{-1} \sum_{w \in W} e^{w(\lambda)},$$

当 λ遍历 $2X^*(A)^+$时，张成 $\mathbb{C}[A]^{W\times F}$。因此，为了完成证明，只需证明对每个 $\lambda \in 2X^*(A)^+$，存在 G上的一个 H-双不变正则函数，它在 A上的限制为 $\langle e^\lambda \rangle_W$。我们用归纳法证明这一点。

令 $\lambda \in 2X^*(A)^+$。假设对于每个满足 $\omega < \lambda$的 $\omega \in 2X^*(A)^+$，我们都可以将 $\langle e^\omega \rangle_W$提升为 G 上的一个 H-双不变正则函数。令 V 为 G 的一个不可约表示，其最高权为 λ^T （见下文命题 16）。V 及其对偶表示 V^* 都是球表示。令 $\phi \in V^*$ 和 $v \in V$ 为球向量。我们将它们在 A-权向量上的展开分别记作 $v = \sum_\omega v_\omega$ 和 $\phi = \sum_\omega \phi_\omega$。令 $c_{\phi,\, v}$ 为 G 上由下式定义的正则 H-双不变正则函数

$$c_{\phi,v}(g) = \langle \phi, gv \rangle \qquad (g \in G).$$

于是我们有 $(c_{\phi,v})_{|A} = \sum_\omega \langle \phi_{-\omega}, v_\omega \rangle e^\omega$，其中求和遍历 V 的 A-权。由于 $(c_{\phi,v})_{|A}$ 在 F 和 W 的作用下不变，因此当 $w \notin 2X^*(A)$ 时有 $\langle \phi_{-\omega}, v_\omega \rangle = 0$，而当 $\omega' \in W\omega$ 时有 $\langle \phi_{-\omega}, v_\omega \rangle = \langle \phi_{-\omega'}, v_{\omega'} \rangle$。因此，存在一组 V 的 A-权 S，它包含 λ，且包含于 $2X^*(A)^+$，使得 $(c_{\phi,v})_{|A} = \sum_{\sigma \in S} \langle \phi_{-\sigma}, v_\sigma \rangle \langle e^\sigma \rangle_W$。由于对每个 $\sigma \in S$ 都有 $\sigma \leq \lambda$，归纳假设表明，$\sum_{\sigma \neq \lambda} \langle \phi_{-\sigma}, v_\sigma \rangle \langle e^\sigma \rangle_W$ 可提升为 G 上的 $H \times H$-不变正则函数。由命题 17 可知，$\langle \phi_{-\lambda}, v_\lambda \rangle \neq 0$，因此 $\langle e^\lambda \rangle_W$ 也可以提升。
□

令 π 表示商态射 $G \to G/H$。通过后者，我们将 $\pi(A) \subset G/H$ 与 A/F 认同。G/H 在 H 作用下的闭轨道可按如下方式参数化。

命题 19. A/F 中的每个元素都生成 G/H的一个闭 H-轨道。反过来，G/H 的每个闭 H-轨道都与 A/F相交。若 A/F中的两个元素为 a 和 a'，则 a属于 a'的 H-轨道，当且仅当 $a \in Wa'$。

证明。首先，我们来验证 G/H 的每个闭轨道都与 A/F相交。这可由 Matsuki–Oshima 的工作 [19]推出。令 $\varphi\colon\ G \to G$ 为如下定义的映射:

$$\varphi(g) = g\theta(g)^{-1} \qquad (g \in G).$$

Matsuki 和 Oshima 证明，$\varphi(G)$ 是 G的闭嵌入子流形，并且它诱导出一个微分同胚 $\tilde{\varphi}: G/H \to \varphi(G)$。若赋予 $\varphi(G)$以 H 的共轭作用，则 $\tilde{\varphi}$ 是 H-等变的。由 [19, 命题 2 的 (ii)], 可知，$\varphi(G)$ 的每个解析闭轨道都包含一个半单元素。根据 [19, 推论 (ii) p.412], ，$\varphi(G)$ 中的每个半单元素都与 $\varphi(G)$ 中 A 的中心化子 $Z_{\varphi(G)}(A)$ 内的某个元素 H-共轭。现在，由[19, 引理 8], 可得 $A = Z_{\varphi(G)}(A)$。总之，若 G/H的一个闭 H-轨道为 O，则 $\varphi(G)$ 的一个解析闭轨道为 $\tilde{\varphi}(O)$，因此 $A \cap \tilde{\varphi}(O) \neq \emptyset$。由于$A = \varphi(A) = \tilde{\varphi}(A/F)$，可知 O与 A/F相交。

现在证明 $A/F = \pi(A)$ 中的任意元素都会生成一个闭轨道。固定 $a \in A$，并将包含 a 的态射 $G \to (H\times H)\backslash\backslash G$ 的纤维记为 S_a。如第 1.2 小节所述，S_a 中存在唯一的闭 $H\times H$-轨道O。由于 π 是开集，且 O 是右 H-饱和的，因此 $\pi(O)$ 是G/H的一个闭 H-轨道。由上文可知，我们有 $\pi(O) \cap \pi(A) \neq \emptyset$，因此 $O \cap A \neq \emptyset$。现在，$O \cap A$ 中的任意元素在 $(H \times H)\backslash\backslash G$ 中的像都与 a 相同，因此根据定理 18，它们在 $W\backslash A/F$ 中的像也相同。这证明了 $W(Fa)$ 与 O 相交。由于 $F \subset H$ 和 W 通过 H 的元素的共轭作用作用于 A，因此有 $a \in O$，这就证明了 $\pi(a)$ 生成闭轨道 $\pi(O)$。

a 和 a' 属于 A/F 的同一个 H-轨道，当且仅当它们在 π 下的原像都属于同一个（闭）$H \times H$-轨道。由于态射$G \to (H \times H)\backslash\backslash G$ 的每个纤维都包含唯一的闭轨道，根据定理 18可知，a 和a' 属于同一个 H-轨道，当且仅当它们属于同一个 W-轨道。□

总之，由定理 5可得，$(H,\ G/H)$的不可约协变表示可描述如下。

定理 20。$(H, G/H)$ 的任意不可约协变表示都同构于 $I_a(V)$，其中 $a \in A/F$ 是某个对象，V 是 H^a的不可约表示。两个这样的不可约表示 $I_a(V)$ 和 $I_{a'}(V')$ 同构，当且仅当(a, V)和(a', V') 由 W中的某个元素联系起来。

References

[1] A. Afgoustidis,*On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups: The Mackey-Higson bijection* **9**, **3** 2021 551 575 ，《剑桥数学杂志》**第( )**, –。[2] M. W. Baldoni, *General representation theory of real reductive Lie groups*, 表示论与自守形式（爱丁堡，1996），《纯数学研讨会论文集》，第61卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年，第61–72页。[3] A. Bialynicki-Birula、G. Hochschild和G. D. Mostow, *Extensions of Representations of Algebraic Linear Groups* **85**, **1** 1963 131 144 ，《美国数学杂志》**第( )**, -。

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie: Chapitre 9 Groupes de Lie réels compacts*, Springer, 柏林、海德堡, 2007年。[5] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 纽约州纽约, 1991年。[6] E. Cline、B. Parshall和L. Scott, *Induced Modules and Affine Quotients*, Mathematische Annalen 230（1977）, 1-14。[7] C. Champetier和P. Delorme, *Sur les représentations des groupes de déplacements de Cartan* **43** 1981 258 279 , Journal of Functional Analysis（）, -。[8] K. De Commer, *Quantisation of semisimple real Lie groups*, Archivum Mathematicum 060, 第5期（2024）, 285–310。[9] A. Ducros, *Introduction à la théorie des schémas*。arXiv:1401.0959。[10] Y. Gaudillot–Estrada, *The smallest quantum Mackey analogy*。arXiv:2602.23222。[11] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis: Integral Geometry Invariant Differential Operators and Spherical Functions*, 《数学调查与专著》, 第83卷, 美国数学会, 2000年。[12] , *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, 《数学研究生教材》, 第34卷, 美国数学会, 2001年。[13] N. Higson, *The Mackey analogy and K-theory*, 《群表示、遍历理论与数学物理：献给George W. Mackey的纪念文集》, 《当代数学》, 第449卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2008年, 第149–172页。[14] A. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkh¨auser, 马萨诸塞州波士顿, 1996年。[15] B. Kostant和S. Rallis, *Orbits and Representations Associated with Symmetric Spaces*, 《美国数学杂志》93, 第3期（1971）, 第753-809页。[16] B. Kr¨otz、J. J. Kuit和H Schlichtkrull, , arXiv:。。[17] George W. Mackey, *On Harish-Chandra's Plancherel theorem for Riemannian symmetric spaces* 2409 08113 *Imprimitivity for Representations of Locally Compact Groups I*, 《美国国家科学院院刊》35, 第9期（1949）, 537-545。[18] *On the analogy between semisimple Lie groups and certain related semidirect product groups* , 《李群及其表示》（布达佩斯, 1971年, Bolyai János数学学会暑期学校论文集）, Halsted, 纽约, 1975年, 第339–363页。[19] T. Matsuki和T. Oshima, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups* **32**, **2** 1980 399 414 , 《日本数学会杂志》第期（）, -。[20] A. Monk和C. Voigt, *Complex quantum groups and a deformation of the Baum–Connes assembly map* , 《美国数学会会刊》（）, –。[21] P. E. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, 塔塔基础研究所, Narosa, 2012年。[22] B. Parshall和L. Scott, *An imprimitivity theorem for algebraic groups*, Indagationes Mathematicae（论文集）83, 第1期（1980）, 39-47。[23] A. L. Onishchik和E. B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*, 《苏联数学丛书》, Springer, 柏林、海德堡, 1990年。[24] C. Rader, *Spherical Functions on Cartan Motion Groups*, 《美国数学会会刊》310, 第1期（1988）, 1-45。[25] I. Raeburn, *Induced C*-algebras and a symmetric imprimitivity theorem*, Mathematische Annalen 280（1988）, 369-387。[26] C. Voigt和R. Yuncken, *Complex Semisimple Quantum Groups and Representation Theory*, 《数学讲义》, 第2264卷, Springer, Cham, 2020年。[27] N. Wallach, *Real reductive groups I*, Academic Press, 1988年。[28] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, Springer, 柏林、海德堡, 1972年。[29] D. P. Williams, *Crossed products of C*-algebras*, 《数学调查与专著》, 第134卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2007年。

Université de Lorraine, CNRS, IECL, F-57000 Metz, France
Email address: yvann.gaudillot-estrada@univ-lorraine.fr