arXiv:2603.06262v1 [math.CV] 6 Mar 2026

双曲分支边界上的三次多项式实层状结构

YUEYANG WANG

Abstract. Milnor 将所有有界三次多项式双曲分支分为（A）、（B）、（C）和（D）四种类型。本文刻画了所有（A）、（B）或（C）型有界双曲分支的驯服边界上的三次多项式实层状结构。对于这类映射，我们证明，实层状结构是包含双曲分支中映射的实层状结构以及由一个特征等价类生成的等价关系的最小层状结构。作为应用，我们证明，除（D）型外，每个双曲三次多项式都不是组合刚性的。

1. 背景与主要结果

1.1. 多项式与层叠。 三次多项式映射的动力学在过去40年中得到了深入研究。继 Branner 和 Hubbard 的著名论文[11, 12]之后，我们研究带有一个标记临界点、具有 Branner-Hubbard 标准形的首一中心化三次多项式空间

$$f_{\mathbf{a}}(z) = z^3 - 3c^2 z + (2c^3 + v), \qquad \mathbf{a} = (c, v) \in \mathbb{C}^2.$$

它们构成空间 $\mathcal{P}_3 \simeq \mathbb{C}^2$。每一个三次多项式都可通过仿射映射共轭到 Branner-Hubbard 标准形中的一个多项式。

每一个 $f_{\mathbf{a}} \in \mathcal{P}_3$ 都有标记临界点 $\pm c(\mathbf{a}) = \pm c$。令 $K_{\mathbf{a}} := \{z \in \mathbb{C} : \{f_{\mathbf{a}}^n(z)\}$ 有界$\}$ 为其填充朱利亚集，且 $J_{\mathbf{a}} := \partial K_{\mathbf{a}}$ 为其朱利亚集。填充朱利亚集的补集 $\Omega_{\mathbf{a}} := \mathbb{C} \setminus K_{\mathbf{a}}$ 是无穷远吸引盆。

根据 Douady 和 Hubbard [16], , 研究多项式动力学的一个有用工具是 B¨ottcher 映射以及 $\Omega_{\mathbf{a}}$ 中的外射线 。令 $\varphi_{\mathbf{a}}$ 为在 ∞ 附近定义的唯一 B¨ottcher 映射，满足 $\varphi_{\mathbf{a}}(\infty) = \infty$ 以及如下性质

$$\varphi_{\mathbf{a}}(f_{\mathbf{a}}(z)) = (\varphi_{\mathbf{a}}(z))^3, \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi_{\mathbf{a}}(z)}{z} = 1.$$

若 $K_{\mathbf{a}}$ 连通，则逆映射 $\psi_{\mathbf{a}} := \varphi_{\mathbf{a}}^{-1}$可延拓为共形映射 $\psi_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus K_{\mathbf{a}}$。对于 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，角度为 θ的外射线 定义为

$$R_{\mathbf{a}}(\theta) := \psi_{\mathbf{a}}((1, +\infty)e^{2\pi i\theta}).$$

对于 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，如果外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 有定义，且 $\lim_{s\to 1} \psi_{\mathbf{a}}(se^{2\pi i\theta}) = z$，那么我们称外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 落在 z上。众所周知，如果 $K_{\mathbf{a}}$ 连通，那么每条角度为有理数 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 都落在一个排斥或抛物预周期点上

Date: 2026年3月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号37F20；次分类号37F46、37F44。*Key words and phrases.*双曲分支，三次多项式，层状结构，周期切片。由中央高校基本科研业务费资助。

仿照 McMullen [27], , 我们考虑等价关系 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a})$, 它编码了这些具有有理角的外射线的落点模式。也就是说, $(\theta,\ \theta')\ \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a})$ 当且仅当 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 落在同一个公共点上。这个等价关系 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a})$ 称为 $f_{\mathbf{a}}$的有理叶状结构。

此外, 若 J_a 局部连通, 则由卡拉泰´奥多里定理, $\psi_{\mathbf{a}}$可延拓为一个连续映射 $\partial\mathbb{D}\to J_{\mathbf{a}}$。因此, 每条外射线都着陆于 $J_{\mathbf{a}}$中的一点。于是, 我们可以定义实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})\ \subset \mathbb{S}\times\mathbb{S}$ （ $f_{\mathbf{a}}$ 的）, 使得$(\theta,\theta')\ \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$当且仅当 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$着陆于一个公共点。在此情形下, 朱利亚集具有拓扑模型 $J_{\mathbf{a}}\simeq\mathbb{S}/\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$。而且, 我们有

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{S} & \xrightarrow{\tau_d} & \mathbb{S}\\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathbf{a}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathbf{a}}}\\ J_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{f_{\mathbf{a}}} & J_{\mathbf{a}}.\end{array}$$

因此, $J_{\mathbf{a}}$ 上动力学的组合性质与拓扑性质编码在其实层状结构中。次数为$d\geq 2$的多项式的有理层状结构与实层状结构由Kiwi [21, 22, 23, 24]研究。

在参数空间 $\mathbb{C}^2$中, 所有$\mathbf{a}\in\mathbb{C}^2$ （满足 $K_{\mathbf{a}}$ 连通）构成连通轨迹 $\mathcal{C}_3$。三次连通轨迹的组合结构及相关课题由Blokh小组在 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]中加以研究。

本文研究双曲分支边界上的三次多项式的层状结构。如果映射 $f_{\mathbf{a}}$ 中 $\pm c$（$\mathbf{a}$）的轨道收敛到吸引周期, 则称其为双曲映射。具有 $f_{\mathbf{a}}$ 双曲性的参数$\mathbf{a}$ 构成双曲轨迹。其连通分支称为双曲分支。连通轨迹中的双曲分支称为有界双曲分支。Milnor [29] 根据两个有限临界点的轨道将它们分为四种类型。

(A) 两个有限临界点属于同一个 Fatou 分支。(B) 两个有限临界点属于同一吸引周期的不同 Fatou 分支。(C) 只有一个有限临界点属于某个吸引周期的直接吸引盆。另一个有限临界点属于该吸引周期的吸引盆, 但不属于直接吸引盆。(D) 两个有限临界点分别被不同的吸引周期吸引。

其中, (D)型双曲分支是例外情形。对于(D)型双曲分支中的参数$\mathbf{a}$, $f_{\mathbf{a}}$ 的动力学可分解为两个“互不相交”的二次多项式。以下讨论中, 我们排除这种情形。

设 $\mathcal{H}$ 是 (A)、(B)或(C)型的有界双曲分支。众所周知, 对于<style id='3>a $\in\mathcal{H}$, $J_{\mathbf{a}}$ 是局部连通的。根据 Man´e-Sud-Sullivan[26], , 实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{H}$ 上取常值 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。

边界上的映射动力学更难理解。根据 Peterson-Tan [33], 的分类, 有界双曲分支的边界分为两部分: 驯服部分 $\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$, 由具有吸引周期的边界点组成, 以及它的补集——野性部分 $\partial_{\mathrm{w}}\mathcal{H}$。根据 Roesch [36] 和 X.Wang [39], 的结果, $f_{\mathbf{a}}$ 的动力学对于一个 $\in\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$ 而言如今已不再那么神秘。无损一般性地, 我们假设临界点 c （$\mathbf{a}$）位于直接吸引盆 $B_{\mathbf{a}}$中。吸引˜盆记为 $B_{\mathbf{a}}$。根据 [39, 35] （定理 4.6 和命题 4.18）, $\mathbf{a}\in\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$ 可分为两种情形:

- **抛物情形**：在 $\partial B_{\mathbf{a}}$上附着着一个抛物周期轨道；~
- **非抛物情形**： $-c$**(a)** 位于 B 中某个分支的边界上。

特别地，在这两种情形下， $J_{\mathbf{a}}$ 都是局部连通的。因此，对于每个 $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$，实层状结构$\lambda_{\mathbb{R}}$**(a)** 都是有意义的。（这也是我们排除 (D)型情形的另一个原因，因为 (D)型双曲分支中的边界映射可能不具有局部连通的朱利亚集。）

下面列出了各种边界映射示例的图片。图 1 是一个临界无穷（非抛物）示例，对应于一个 $\in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}_0$，其中 $\mathcal{H}_0$ 是包含 $z \mapsto z^3$的中心双曲分支。图 2 和图 3 是具有吸引不动点的类型（C）分支边界点的非抛物示例。图 2 是临界无穷示例，而图 3 是临界有限示例。图 4 是类型（A）双曲分支与类型（C）双曲分支的一个交点的临界有限示例。图 5 和图 6 是抛物示例。图 5 表示 $\mathcal{H}_0$的一个边界点，该点不在任何其他双曲分支的边界上；而图 6 表示类型（A）双曲分支与类型（B）双曲分支的一个交点。

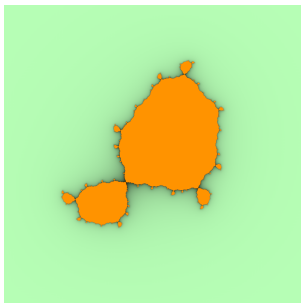


FIGURE 1.

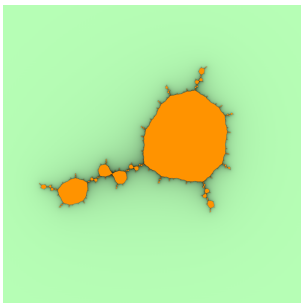


FIGURE 2.

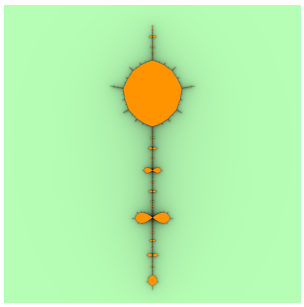


FIGURE 3.

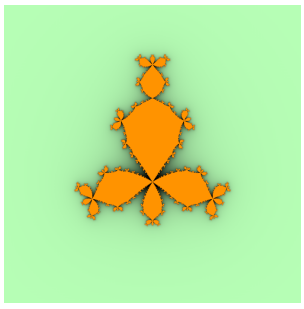


FIGURE 4.

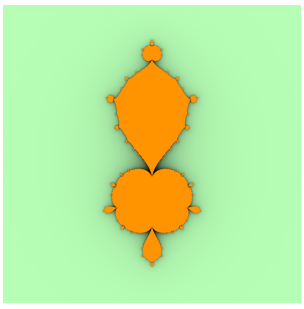


FIGURE 5.

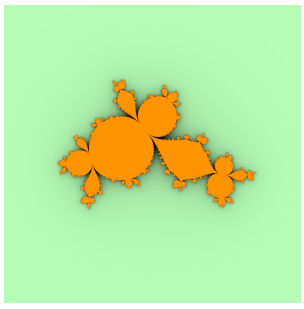


FIGURE 6.

除了动力系统之外，有界双曲分支的闭包本身的拓扑结构和几何结构也是一个重要课题，并且在 [30, 32, 36, 39, 13, 14, 15, 25, 18] 中得到了深入研究。

1.2. **主要结果**。本文旨在刻画双曲分支 $\mathcal{H}$ 中三次多项式的实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$与其驯服边界上映射的实层状结构之间的关系。我们将证明，任意一**个** $\in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$ 的实层状结构$\lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}$）都包含 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$，而额外部分非常“微小”。为了精确描述“微小”这一表述，我们需要引入以下术语。

若一个等价关系 $\Lambda \subset \mathbb{S}\times\mathbb{S}$ 满足： τ_3 将 Λ 的一个等价类映射到 Λ的一个等价类，则称其为 τ_3-不变。若存在 Λ的一个等价类 E^* ，使得每个非单点集等价类 E 在 τ_3作用下最终都映射到 E^* ，则称 τ_3-不变等价关系 Λ 为极小。这里， E^* 称为 Λ的生成元。

对于 $L \subset \mathbb{S}\times\mathbb{S}$，令 $\langle L\rangle$ 表示 $\mathbb{S}$ 上包含L的最小等价关系。本文的主要结果如下。

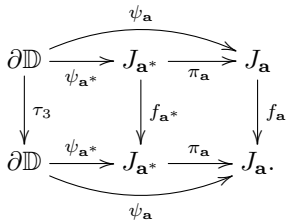
定理 1.1 (驯服边界上的映射的层状结构)。 设 $\mathcal{H}$ 是一个有界的双曲分支，类型为(A)、(B) 或(C)。对于任意$\mathbf{a} \in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$，存在一个极小$\tau_3$-不变等价关系 $\Lambda(\mathbf{a}) \subset \mathbb{S}\times\mathbb{S}$，使得

$$\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}) = \langle \Lambda(\mathbf{a}) \cup \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\rangle.$$

特别地，我们有 $\lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathcal{H}$） $\subsetneq \lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}$）。

令$\mathbf{a}^* \in \mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 中唯一的后临界有限映射。根据定理 1.1，我们推导出以下半共轭结论。

推论 1.2 （半共轭）。对于任意$\mathbf{a} \in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$，存在一个非单射连续半共轭 $\pi_{\mathbf{a}}$：$J_{\mathbf{a}^*} \to J_{\mathbf{a}}$，使得



据作者所知，尚不清楚命题$\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \subset \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$是否对$\mathbf{a} \in \partial_{\mathrm{w}}\mathcal{H}$ 成立，其中 $\mathcal{H}$ 属于类型（A）、（B）或（C）。然而，对于$\mathbf{a}$ $\in \partial_{\mathrm{w}}\mathcal{H}$ ，当 $\mathcal{H}$ 属于(D)型时，已经构造出了反例。详见 [20, 例 8.5、例 8.6] 。推测对于类型（A）、（B）和（C）的双曲分支的野边界，也可以构造出此类反例。

由于我们关注的是驯边界映射 $\mathbf{a} \in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$，我们可以假设 $f_{\mathbf{a}}$ 所拥有的吸引周期的周期为 p。通过手术改变p 吸引周期的乘子（命题 4.18），我们可以假设 p 吸引周期是超吸引的。这使我们能够将讨论限制在 Milnor 的周期超吸引切片中

$$\mathcal{S}_p := \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^2 : c(\mathbf{a}) \text{ is a } p\text{-periodic point of } f_{\mathbf{a}}\right\}.$$

它最初由 Milnor [29], 引入，并为许多人所研究，参见 [36, 17, 10,1, 39]。 $\mathcal{S}_p$ 在 $p = 1$, 2，3 时的图像见图 7 至图 9。

设 $\mathcal{H}$ 是 (A)、(B) 或 (C) 型的双曲分支，则 $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$ 在 $\mathcal{S}_p$ 中构成一个有界双曲分支。定理 1.1 是通过仔细研究 $\partial\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$ 中三次多项式的实层状结构得出的。

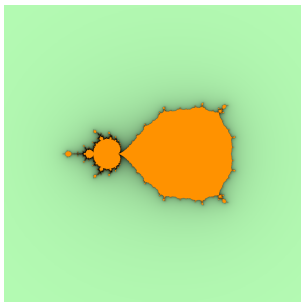


FIGURE 7. $\mathcal{S}_1$

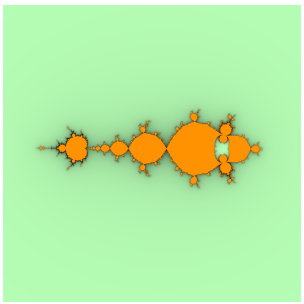


FIGURE 8. $\mathcal{S}_2$

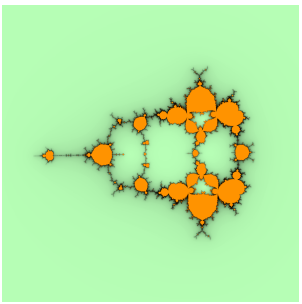


FIGURE 9. $\mathcal{S}_3$

作为一项应用，我们利用所得结果研究三次多项式的组合刚性。许多人研究过多项式的组合刚性，参见 [27, 19, 2]。若一个次数为 d 的多项式 $f_{\mathbf{a}_0}$ 没有非双曲周期环，则称其为 组合刚性的；如果对每个同样没有非双曲周期环且满足 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}) = \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$ 的多项式 $f_{\mathbf{a}}$，B¨ottcher 映射的复合 $\psi_{\mathbf{a}} \circ \varphi_{\mathbf{a}_0}$ 都能延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的 $\widehat{\ }$ 拟共形映射。

对于每个次数 $d \geq 2$，人们曾猜想：每一个不含中性周期的多项式都是组合刚性的。这被称为组合刚性猜想。在次数 $d = 2$ 下，组合刚性猜想蕴含双曲性稠密猜想。已知组合刚性对每一个非无限可重整化的二次多项式成立。但一般而言，它仍然是未解决的。

在次数 $d = 3$ 下，Henriksen [19] 构造了一个反例，并证明组合刚性猜想在次数 3 时不成立。他的反例涉及具有非局部连通朱利亚集的无限可重整化多项式。利用定理 1.1，我们得到如下结果。

定理1.3（三次多项式的组合刚性）。 每一个非类型 (D) 的双曲三次多项式都不是组合刚性的。

1.3. 文章结构与证明策略。 定理 1.1 的证明策略如下。我们讨论的主要部分位于超吸引切片 $\mathcal{S}_p$。我们的想法是试图观察当参数趋近边界时，实层状结构如何以及为何发生变化。

在第3节中，我们针对类型（A）、(B)或(C)的双曲分支 $\mathcal{H}$ 中的双曲映射 $O \times \mathbb{S}$ 的模型空间 $O \times \mathbb{S}$，发展了一套关于非光滑广义内射线˜的新理论。这里 O 表示超吸引˜周期的全轨道 O。众所周知，对于每个 $(v,\ t) \in O \times \mathbb{S}$，我们可以定义规范的B¨ottcher内部弧，直到它碰到临界点$-c$的一个迭代原像 $\omega(\mathbf{a})$。我们所做的是穿过 $\omega(\mathbf{a})$，并继续进行规范延拓，直至到达边界。我们得到的若尔当弧称为广义内部射线。每当（无论一次还是无穷多次）我们穿过一个前临界点时，都有两个方向 $\iota \in \{L, R\}$（分别表示向左或向右的转向）。因此，我们可以根据其在每个前临界点处的转向方式，定义各种广义内部射线。其中有两种特殊的广义内部射线

称为左内部射线和右内部射线。它们在每个前临界点处都沿特定方向（向左或向右）转向。

左右内部射线的落点性质有助于我们猜测边界映射的层状结构。正如我们在计算机生成图像中所观察到的，由一对左右内部射线连接的外射线，随着参数沿某条典范参数射线趋近$\mathbf{a}_0 \in \partial\mathcal{H}$，被拉伸得越来越近。于是，一个新的但简单的不变等价关系 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$出现在我们的视野中。因此，通过将 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$添加到 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$，我们称 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) := \langle \Lambda(\mathbf{a}_0) \cup \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \rangle$ 为$\mathbf{a}_0$的视觉层状结构 。这一定义纯粹是组合的。为此，令人惊讶的是，我们仅利用组合定义、而无需证明它是某个三次多项式的实层状结构，便能证明视觉层状结构确实是一种层状结构（命题 4.5）。

从第 4.3 小节出发，证明视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$确实是$\mathbf{a}_0$的实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。这一验证是本文的一个难点。我们运用拼图技术及其扰动理论。证明中的另一个关键要素是 Peterson 和 Zakeri 关于外射线趋近抛物参数时的豪斯多夫极限的结果 [34] 。这一点在第 2.4 小节中有仔细讨论。

最后，拟共形手术使我们能够将 $\mathcal{S}_p$ 中的结果转移到 $\mathcal{H}$的驯服边界。这在第 4.6 小节中完成，其中证明了主要定理。

2. External Rays and Laminations

2.1. **记号**。设 $\mathbb{C}$ 表示复平面。该黎曼球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{C}$的一点紧化。记 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$。

记 $\mathbb{S} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 设 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ 为自然投影映射。 $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n \in \mathbb{S}$ 称为处于**正向循环顺序**，如果存在 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\pi(\theta_k) = \theta_k$ 对 $1 \le k \le n$ 成立，并且

$$\tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2 < \cdots < \tilde{\theta}_n < \tilde{\theta}_1 + 1.$$

对任意 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，**正向开区间** 定义为

$$(\theta_1, \theta_2)_+ := \{\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \theta_1, \theta, \theta_2 \text{ are in positive cyclic order}\}.$$

区间（θ_1，θ_2）的长度+ 定义为 Δ（θ_1，θ_2）+ : $= \theta_2 - \theta_1$，其中 θ_1，θ_2是 θ_1，θ_2的代表元，且满足 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 1$。类似地，可以在 $\mathbb{S}$上定义其他类型的区间。这些区间的长度均定义为 Δ（θ_1，θ_2）+。设 $E \subset \mathbb{S}$ 为一个有限集，定义

$$\Delta E := \min\{\Delta(\theta, \theta')_+ : \theta, \theta' \in E\}.$$

对于 $d \ge 2$，令 τ_d： $\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 为映射 $\theta \mapsto d\theta$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{S}$上诱导的映射。

2.2. **多项式的外射线**。设 $\mathcal{A}$为复流形。若全纯映射 f： $\mathcal{A} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，（$\mathbf{a}$ z）$\mapsto f_{\mathbf{a}}$（z）称为次数为 $d \ge 2$ 的多项式全纯族，则对任意$\mathbf{a} \in \mathcal{A}$，$f_{\mathbf{a}}$ 都是次数为 d的多项式映射。通常将其记为 $\mathcal{F} = \{f_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}}$。令 Crit（$\mathbf{a}$）表示 $f_{\mathbf{a}}$的临界点集。

对于 一个 $\in \mathcal{A}$，∞ 是 $f_{\mathbf{a}}$ 的一个不动临界点，重数为 d。令 $K_{\mathbf{a}} := \{z \in \mathbb{C} : \{f_{\mathbf{a}}^n(z)\}$ 有界}，表示填充朱利亚集，$J_{\mathbf{a}} := \partial K_{\mathbf{a}}$ 表示

朱利亚集。那么 $\Omega_{\mathbf{a}} := \mathbb{C} \setminus K_{\mathbf{a}}$ 是 ∞的吸引盆。 $f_{\mathbf{a}}$ 的格林函数$G_{\mathbf{a}}: \mathbb{C} \to [0, +\infty)$定义为

$$G_{\mathbf{a}}(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log_+ |f_{\mathbf{a}}^n(z)|$$

其中 $\log_+ := \max\{\log\ 0\}$。对于任意 $s > 1$，定义 $\Omega_{\mathbf{a}}(s) := \{z \in \Omega_{\mathbf{a}} : \exp \circ G_{\mathbf{a}}(z) > s\}$。令 $s_{\mathbf{a}} := \max\{\exp \circ G_{\mathbf{a}}(c) : c \in \Omega_{\mathbf{a}} \cap 临界点(\mathbf{a})\}$. 令 $\mathscr{B} := \{(\mathbf{a}\ z) \in \mathcal{A} \times \mathbb{C} : z \in \widehat{\Omega_{\mathbf{a}}(s_{\mathbf{a}})}\}$。存在一个全纯映射 $\varphi : \mathscr{B} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $(\mathbf{a}\ z) \mapsto \varphi_{\mathbf{a}}(z)$，使得对于任意 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ 和 $z \in \Omega_{\mathbf{a}}(s_{\mathbf{a}})$，我们有

$$\varphi_{\mathbf{a}}(f_{\mathbf{a}}(z)) = (\varphi_{\mathbf{a}}(z))^d, \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi_{\mathbf{a}}(z)}{z} = 1. \tag{1}$$

固定 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$，映射 $\varphi_{\mathbf{a}}$ 称为 $f_{\mathbf{a}}$ 关于 ∞ 的 *B¨ottcher* 映射。记$\psi_{\mathbf{a}}$ 为 $\varphi_{\mathbf{a}}$的逆映射。由 (1)，我们有

$$f_{\mathbf{a}} \circ \psi_{\mathbf{a}}(w) = \psi_{\mathbf{a}}(w^d), \tag{2}$$

根据 [16]，，存在唯一的 $s_{\mathbf{a}}(\theta) \in [1, s_{\mathbf{a}}]$，使得 $\psi_{\mathbf{a}}$ 具有一个规范的（即 (2) 仍然成立）光滑延拓至 $(s_{\mathbf{a}}(\theta)\ +\infty)e^{2\pi i\theta}$，且不与临界点的任何迭代原像相交。如果 $s_{\mathbf{a}}(\theta) = 1$，我们定义角度为 θ 的外射线为

$$R_{\mathbf{a}}(\theta) := \psi_{\mathbf{a}}((1, +\infty)e^{2\pi i\theta}).$$

若 $\lim_{s\to 1} \psi_{\mathbf{a}}(se^{2\pi i\theta})$ 存在，则称外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 着陆于 $z_\theta(\mathbf{a}) := \psi_{\mathbf{a}}(e^{2\pi i\theta})$。若 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 与 $s_{\mathbf{a}}(\theta) = 1$，则 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 着陆于一个最终排斥或抛物周期点。若 $K_{\mathbf{a}}$ 连通，则对任一最终排斥或抛物周期点 z，至少存在一个且至多存在有限多个 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，使得 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 着陆于 z。

设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 着陆于同一公共点，将 $(\theta, \theta')_+$ 的相应扇形 $S_{\mathbf{a}}(\theta, \theta')_+$ 定义为 $\mathbb{C} \setminus (R_{\mathbf{a}}(\theta) \cup R_{\mathbf{a}}(\theta'))$ 的连通分支。则下列各项等价。

(1) 角宽 $\Delta(\theta, \theta')_+ < 1/d$，且 $\Delta(\tau_d(\theta)\ \tau_d(\theta'))_+ = d\Delta(\theta, \theta')_+$。(2) 扇形 $S_{\mathbf{a}}(\theta, \theta')_+$ 不含 $f_{\mathbf{a}}$ 的任何临界点。(3) 映射 $f_{\mathbf{a}}: S_{\mathbf{a}}(\theta, \theta')_+ \to S_{\mathbf{a}}(\tau_d(\theta)\ \tau_d(\theta'))_+$ 是共形映射。

我们还需要 Roesch-Yin 关于填充朱利亚集相对于有界Fatou分支的肢结构的刻画。

定理 2.1 (Roesch-Yin [37]). 设 $f_{\mathbf{a}}$ 是次数为 d 且朱利亚集连通的多项式，B 是 $f_{\mathbf{a}}$的一个有界*Fatou*分支。对每个 $x \in \partial B$，存在紧连通集 $L_x \subset K_{\mathbf{a}} \setminus B$，使得$L_x \cap B = \{x\}$ 且

$$K_{\mathbf{a}} = B \cup \left(\bigsqcup_{x\in\partial B} L_x \right).$$

此外，下列结论成立。

(1) 如果 $L_x = \{x\}$，那么存在唯一一条着陆于 x 的外射线。(2) 如果 $L_x \neq \{x\}$，那么存在两条外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta^-)$、$R_{\mathbf{a}}(\theta^+)$ 着陆于 x，它们与其公共着陆点一起将 L_x 与 B 分隔开。如果 B 是 $f_{\mathbf{a}}$ 的一个不动 *Fatou* 连通分支，那么存在 n，使得 L_{x_n} 包含 $f_{\mathbf{a}}$ 的一个临界点，其中 $x_n := f_{\mathbf{a}}^n(x)$。

2.3. 层状结构。 本节将简要概述层状结构理论。完整介绍请参见 [21, 23]。

按照 Kiwi 的说法，对于在 τ_d 下不变的 $X \subset \mathbb{S}$，τ_d 不变层状结构$\lambda \subset X \times X$ 是 X 上满足以下条件的等价关系。

(R1) λ 在 $X \times X$ 中是闭的。(R2) 每个 λ-等价类都是有限集。(R3) 若 E 是一个 λ-等价类，则 $\tau_d(E)$ 也是一个 λ-等价类。(R4) $\tau_d : E \to \tau_d(E)$ 是 保持连续性的，即对于 $\mathbb{S} \setminus E$ 的任一分支 $(\theta, \theta')_+$，$(\tau_d(\theta)\ \tau_d(\theta'))_+$ 是 $\mathbb{S} \setminus \tau_d(E)$ 的一个分支。(R5) λ-等价类两两不相连，即对于任意两个等价类 $E \neq E'$、E，E 包含在 $\mathbb{S} \setminus E'$ 的某个补弧中。

这些性质称为层状结构公理。下文将简要地把 τ_d-不变层状结构称为层状结构。

回顾一下，若 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个次数为 d 且朱利亚集连通的多项式，则有理叶状结构 定义为

$$\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}) := \{(\theta, \theta') \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 : R_{\mathbf{a}}(\theta), R_{\mathbf{a}}(\theta') \text{ land at a common point}\}.$$

此外，若 $J_{\mathbf{a}}$ 局部连通，则实层状结构 定义为

$$\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}) := \{(\theta, \theta') \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} : R_{\mathbf{a}}(\theta), R_{\mathbf{a}}(\theta') \text{ land at a common point}\}.$$

我们或许会好奇，有理叶状结构和实层状结构是否确实是（τ_d-不变的）层状结构? Kiwi 得到了以下结果。

定理 2.2 (Kiwi [21, 23])。设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个朱利亚集连通且局部连通的多项式。以下结论成立。

- 有理叶状结构 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a})$ 是一个层状结构。
- 若 $f_{\mathbf{a}}$ 没有无理中性周期，则 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$ 是一个层状结构。
- 若 $f_{\mathbf{a}}$ 的任何具有无限轨道的临界点都不在 *Fatou* 分支的边界上，则 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$ 是包含 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a})$ 的最小闭等价关系。

2.4.外射线的豪斯多夫极限。 本节简要介绍 Peterson-Zakeri 关于外射线的豪斯多夫极限的理论。

令 $\mathcal{K}$ 为所有非空紧子集构成的度量空间 $\widehat{\mathbb{C}}$ 配备豪斯多夫距离，其定义为

$$\text{dist.}(K_1, K_2) := \inf\{\rho > 0 : K_1 \subset U_\rho(K_2) \text{ and } K_2 \subset U_\rho(K_1)\}.$$

其中 $U_\rho(K) := \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) < \rho\}$ 是 K 的 ρ-邻域。众所周知，$\mathcal{K}$ 是一个紧度量空间。

如果 dist.$(K_n, K) \to 0$as $n \to \infty$，则称 $\{K_n\} \subset \mathcal{K}$ 在豪斯多夫距离下收敛到 $K \in \mathcal{K}$。K 称为 $\{K_n\}$的豪斯多夫极限 。可以验证，当且仅当对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 n_0，使得对于 $n > n_0$，我们有 $K_n \subset U_\epsilon(K)$ 和 $K \subset U_\epsilon(K_n)$，$K_n \to K$在豪斯多夫极限下收敛。

Peterson 和 Zakeri 研究多项式的周期外射线的豪斯多夫极限。设 $\mathcal{F} = \{f_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的多项式族。假设 $\{\mathbf{a}_n\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$ 收敛于 $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$，且 $\theta \in \mathbb{S}$ 在 τ_d 下的周期为 p。取子序列后，不妨设 $\{z_\theta(\mathbf{a}_n)\}$ 收敛于 z_∞（其可能不等于 $z_\theta(\mathbf{a}_0)$），且 $R_{\mathbf{a}_n}(\theta)$ 在豪斯多夫距离下收敛于 $L(\theta)$。

引理 2.3。豪斯多夫极限集 $L(\theta)$ 是 $f_{\mathbf{a}_0}^p$ 的紧致连通不变集，其中包含 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 和 z_∞。

根据 [16], ，我们得到了落在排斥周期轨道上的外射线扰动的稳定性。

引理 2.4（落在排斥轨道上的外射线的连续性）。设$R_{\mathbf{a}_0}$（θ）落在排斥周期点或预周期点 z_0上。

(1) 存在一个 $\mathcal{U}$ 的邻域，使得对于任意 $a \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$，$s_{\mathbf{a}}(\theta) = 1$，且 $z_\theta(a)$也最终是排斥的。映射 $\xi : (\mathcal{U} \cap \mathcal{C}) \times [1, +\infty) \to \mathbb{C}$，$(a\ s) \mapsto \psi_{\mathbf{a}}(se^{2\pi i\theta})$是连续的。

(2) 如果 z_0 的正向轨道不包含任何临界点，那么存在$a0$的一个邻域 $\mathcal{U}$，$s_{\mathbf{a}}(\theta) = 1$，且 $z_\theta(a)$也最终是排斥的。映射 $\xi : \mathcal{U} \times [1, +\infty) \to \mathbb{C}$，$(a\ s) \mapsto \psi_{\mathbf{a}}(se^{2\pi i\theta})$是连续的。固定$s \geq 1$，映射$a \mapsto \psi_{\mathbf{a}}(se^{2\pi i\theta})$在 $\mathcal{U}$上是全纯的。

因此立即可得推论：若 $\{\mathbf{a}_n\} \subset \mathcal{C}$，$\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}_0$, 且 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 落在一个排斥预周期点 z_0 上，那么 $R_{\mathbf{a}_n}(\theta)$ 的豪斯多夫极限恰为 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$。对于 z_0 为抛物的情形，我们将介绍 Peterson–Zakeri 的以下结果 [34]，它将在证明命题 2.9 时发挥重要作用。

定理 2.5 (Peterson–Zakeri [34])。豪斯多夫极限集 $L(\theta)$ 是路径连通的。设 $z \in L(\theta)$。若 z 位于朱利亚集内，则它是 $f_{\mathbf{a}}^p$ 的不动点。若 z 位于 *Fatou* 集内，则 z 位于抛物盆中。

设 $\mathcal{F} = \{f_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a}\in\mathcal{A}}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的多项式族。设 $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ 是满足以下条件的$\mathbf{a}$集合：$f_{\mathbf{a}}$ 只有一个抛物周期，且其直接吸引盆只包含 $f_{\mathbf{a}}$ 的一个临界点。

引理 2.6。设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个次数为 $d \geq 2$的多项式，且 U、V 是同一周期中的两个周期为二的 *Fatou*分支，它们具有公共边界点 z_0，则 z_0 是 $f_{\mathbf{a}}$的周期点。如果 $f_{\mathbf{a}}^q(U) = V$，则 ${f^q}_{\mathbf{a}}(z_0) = z_0$。

证明。设 p表示包含 U，V的周期的周期。由于 $f_{\mathbf{a}}^p(U) = U$且${f^p}_{\mathbf{a}}(V) = V$，我们看到 $f_{\mathbf{a}}^p(z_0)$ 也是 U和 V的公共边界点。因此 $f_{\mathbf{a}}^p(z_0) = z_0$。所以 z_0是周期的。

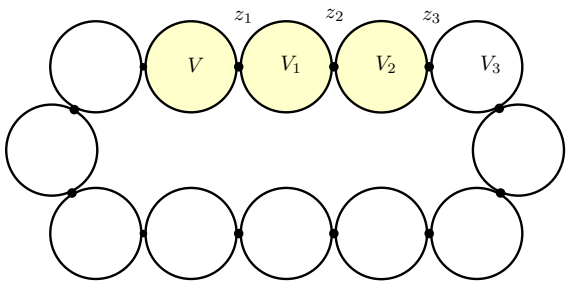


FIGURE 10.

现在假设 ${f^q}_{\mathbf{a}}(U) = V$，我们通过矛盾证明 $f_{\mathbf{a}}^q(z_0) = z_0$。假设 $z_1 = {f^q}_{\mathbf{a}}(z_0) \neq z_0$, 那么 $V_1 := f_{\mathbf{a}}^q(V) \neq V$且 $\partial V \cap \partial V_1 = \{z_1\}$。递归应用

$f^q_{\mathbf{a}}$，我们得到一列 Fatou 分支 $V_n := f^{nq}_{\mathbf{a}}(V)$ 和 $z_n := f^n_{\mathbf{a}}(z)$，满足 $\partial V_n \cap \partial V_{n+1} = \{z_{n+1}\}$。由于 V是周期的，存在 $m \le p$使得 $V_m = V$。由此可知，在 $K_{\mathbf{a}}$中有有限多个 Fatou 分支依次相连并形成一个圆。这是不可能的。

□

引理 2.7。设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个次数为 $d \ge 2$ 的多项式，且 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 在 τ_d 下具有周期 p，并且 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 落在抛物点 z 上。设 B 是 z 的一个抛物 *Fatou* 分支。那么，B 是一个精确周期为 p 的周期*Fatou*分支。

证明。由于 $f_{\mathbf{a}}$ 在每个抛物点附近都是局部保定向的，B的周期 q整除 p。另一方面，$f^q_{\mathbf{a}}(z)$ 是 ∂B上的一个抛物周期点。因此，$B = f^q_{\mathbf{a}}(B)$ 既是 z的抛物基盆，也是 $f^q_{\mathbf{a}}(z)$。由此可得，$f^q_{\mathbf{a}}(z) = z$。再次利用保定向性质，可知 $f^q_{\mathbf{a}}(R_{\mathbf{a}}(\theta)) = R_{\mathbf{a}}(\theta)$。因此，$p$也整除 p，即 $p = q$。

□

引理 2.8。设 B 是一个不动吸引分支或抛物分支。如果 $f_{\mathbf{a}}|_B$ 的次数为2，那么 ∂B 上存在唯一的 $f_{\mathbf{a}}$ 不动点。

证明。对于吸引情形，通过拟共形手术，我们可以假设 B是超吸引的，且 $f_{\mathbf{a}}$ 在 B 中有唯一临界点 c。因此，c 附近的B¨ottcher映射 ϕ 可以延拓为一个共形映射 $\phi : B \to \mathbb{D}$。由于 ∂B 是一条Jordan曲线，ϕ 可延拓到 ∂B，并构成 $\partial\mathbb{D}$上连接 $f_{\mathbf{a}}|_{\partial B}$ 与 $z \mapsto z^2$ 的共轭。因此，$f_{\mathbf{a}}$ 在 ∂B上存在唯一不动点。

对于抛物情形，设 c 为 $f_{\mathbf{a}}$ 在 B中的唯一临界点。根据 [31], , 存在黎曼映射 $\phi : B \to \mathbb{D}$，使得 $\phi(c) = 0$ 且

$$g := \phi \circ f_{\mathbf{a}} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3}.$$

根据 [31, 注记 1], , 存在连续映射 ψ： $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$，使得$\psi \circ g \circ \psi^{-1}(z) = (\psi \circ \phi) \circ f \circ (\psi \circ \phi)^{-1}(z) = z^2$。因此，我们同样得出 $f_{\mathbf{a}}$ 在 ∂B上存在唯一不动点。□

命题 2.9（落点的连续性）。设 $\{\mathbf{a}_n\} \subset \mathcal{C}$，且 $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}_0$。那么对于任意在 τ_d 下为周期的 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，有 $z_\theta(\mathbf{a}_n) \to z_\theta(\mathbf{a}_0)$。

命题 *2.9* 的证明。设 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，则 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 的着陆点 $z_\theta(\mathbf{a}_0)$ 要么最终为排斥的，要么为抛物的。因此，存在两种情形。

排斥情形： 假设 $z_\theta(\mathbf{a}_0)$ 是一个排斥周期点。根据引理 2.4，存在一个邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$，使得 $\xi : \mathcal{U} \times [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ 是连续的。由此可得，$z_\theta(\mathbf{a}_n) = \xi(\mathbf{a}_n, 1)$ 以及 $z_\theta(\mathbf{a}_0) = z_\infty$ 对充分大的 n 成立。因此，命题 2.9 的结论成立。

抛物情形：为简化记号，记 $z_0 := z_\theta(\mathbf{a}_0)$，$z_n := z_\theta(\mathbf{a}_n)$。假设 z_0 是一个抛物周期点。令 $B_1, B_2, \ldots, B_q$为所有边界包含 z_0的抛物分支。由于 $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}_0$，这些 B_k 属于同一个周期循环。我们断言，对每个 B_k，z_0 都是 B_k 的抛物点。注意，至少有一个 B_k必须是 z_0的抛物盆；不失一般性，假设它是 B_1。对每个 B_k，存在 n_k 使得 $f^{n_k}(B_1) = B_k$。由此可得，$f^{n_k}(z_0)$ 是 B_k的抛物点。根据引理 2.6，有 $f^{n_k}(z_0) = z_0$。z_0是 B_k的抛物点。根据引理 2.7，每个 B_k 在 $f_{\mathbf{a}}$下的周期为 p。由于 $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}_0$，因此 B_k 的正向轨道恰好包含一个临界点。由此可得

因此， $f_{\mathbf{a}}^p|_{B_k}$是一个次数为 2 的正规映射。根据引理 2.8， z_0是 $f_{\mathbf{a}}^p$ 在 ∂B_k上的唯一不动点。

现在我们用反证法证明 $z_0 = z_\infty$ 。注意， z_0 和 z_∞ 都是 $f_{\mathbf{a}_0}^p$的不动点。令 $L(\theta)$为 $R_{\mathbf{a}_n}(\theta)$的豪斯多夫极限。根据定理 2.5，我们可以找到连接 z_0 和 z_∞的路径 $\gamma \subset L(\theta)$。这条路径 γ 不可能完全包含在朱利亚集中，因为 $J_{\mathbf{a}_0} \cap L(\theta)$中的每个点都是 $f_{\mathbf{a}_0}^p$的不动点。因此，对于某个 k，有 $\gamma \cap B_k \neq \emptyset$ 。我们断言 $\gamma \subset B_k \cup \{z_0\}$。否则，我们可以在 $\gamma \cap \partial B$上找到 $f_{\mathbf{a}_0}^p$ 的另一个不动点。这与 z_0是 ∂B_k上 $f_{\mathbf{a}}^p$ 的唯一不动点这一事实矛盾。因此，我们得到 $z_n \to z_0$ ，如 $n \to \infty$所示。

□

因此，我们得到引理 2.4 的一个抛物版本作为直接推论。

事实 2.10 （落在抛物点上的外射线）。 假设$\mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}_0$，且 z_0 是一个抛物不动点，它是同一周期中的恰好 p个抛物分支的公共边界点。对于足够接近$\mathbf{a}_0$ 且使所有周期都排斥的$\mathbf{a}$ ，抛物不动点 z_0 分岔为一个排斥不动点 z_0（$\mathbf{a}$）和一个 p周期排斥周期。若 $R_{\mathbf{a}_0}$（θ）落在 z_0上，则 $R_{\mathbf{a}}$（θ）要么落在 z_0（$\mathbf{a}$）上，要么落在该 p周期中的某个点上。

证明。 由于 z_0 是一个抛物不动点，且有 p个抛物分支在 z_0处连接成同一周期。因此可知 z_0 必须满足

$$f'_{\mathbf{a}_0}(z_0) = e^{2\pi i \frac{p}{q}}, \qquad f_{\mathbf{a}_0}^p(z) - z_0 = z + a_2 z^{p+1} + o(z^{p+1}).$$

对于足够接近$\mathbf{a}_0$ 且使所有周期都排斥的$\mathbf{a}$ ，由于 z_0 是 $f_{\mathbf{a}_0}^p$ 的一个重数为 p的不动点，因此 z_0 分岔为 $f_{\mathbf{a}}^p$的 $p+1$ 个排斥不动点。由于 z_0是不动点，这些 $p+1$ 中有一个是$f_{\mathbf{a}}$对应的固定点 z_0（$\mathbf{a}$）。注意到 $f'_{\mathbf{a}_0}(z_0) = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$，可知其余 p个点必定属于一个 p 周期循环。

□

令 $\mathbb{Q}_p$ 为所有在 τ_d 下具有周期性的周期 $\theta \in \mathbb{Q}$ 的集合。该集合在 τ_d 下保持不变。因此，对于 $\in \mathcal{C}$，我们可以在 $\mathbb{Q}_p$ 上定义层状结构 $\lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a})$。根据命题 2.9 的推论，我们得出关于 $\mathbb{Q}_p$ 上层状结构半连续性的以下结果。

推论 2.11 （周期层叠的连续性）。 假设 $\{\mathbf{a}_n\} \subset \mathcal{C}$ 收敛于 $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{C}_0$，则有 $\limsup_n \lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_n) \subset \lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_0)$。

证明。假设 $(\theta, \theta') \in \limsup_n \lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_n)$，则存在一个子序列 $\mathbf{a}_{n_k}$，使得 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_{n_k})$。因此，$R_{\mathbf{a}_k}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}_k}(\theta')$ 落在同一个公共点上，即对于每个 k，都有 $z_\theta(\mathbf{a}_{n_k}) = z_{\theta'}(\mathbf{a}_{n_k})$。根据命题 2.9，由于 $\mathbf{a}_{n_k} \to \mathbf{a}_0$ 随 $k \to \infty$ 而变化，我们有 $z_\theta(\mathbf{a}_0) = z_{\theta'}(\mathbf{a}_0)$。因此 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_0)$。

□

3. Cubic Polynomials and Generalized Internal Rays

3.1. 映射方案与B¨ottcher映射。 回顾一下，我们用如下的Branner-Hubbard 标准形对三次多项式进行参数化

$$f_{\mathbf{a}}(z) = z^3 - 3c^2 z + (2c^3 + v), \qquad \mathbf{a} = (c, v) \in \mathbb{C}^2.$$

于是临界点$(\mathbf{a}) = \{\pm c(\mathbf{a})\}$。回顾三次多项式的有界双曲分支分为4种类型，即(A)、(B)、(C)和(D)。设 $\mathcal{H}$ 为

这样一个双曲分支。设 $B_{\mathbf{a}}(c)$表示包含 $c(\mathbf{a})$的吸引Fatou分支，且 p 为 $B_{\mathbf{a}}(c)$的周期。设 $B_{\mathbf{a}} := \bigcup_n f_{\mathbf{a}}^n(B_{\mathbf{a}}(c))$为其直接吸引盆，且 $B_{\mathbf{a}} := \bigcup_n f_{\mathbf{a}}^{-n}(B_{\mathbf{a}}(c))$为其整个吸引盆。在交换 $c(\mathbf{a})$与 $-c(\mathbf{a})$的意义下，有界双曲分支的类型及其边界的驯性部分可总结如下。

$$(\mathrm{A}) : -c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}}(c), \quad (\mathrm{B}) : -c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}} \setminus B_{\mathbf{a}}(c), \quad (\mathrm{C}) : -c(\mathbf{a}) \in \tilde{B}_{\mathbf{a}} \setminus B_{\mathbf{a}},$$

和 (D)： $-c(\mathbf{a}) \notin B_{\mathbf{a}}$。驯服边界定义为

$$\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H} = \{\mathbf{a} \in \partial\mathcal{H} : c(\mathbf{a}) \text{ tends to an attracting cylce}\}.$$

因此，对于 $\mathbf{a} \in \mathcal{H} \cup \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$， $B_{\mathbf{a}}(c)$、 $B_{\mathbf{a}}$ 和 $B_{\mathbf{a}}$ 总是有定义的。

首先，我们可以假设 $B_{\mathbf{a}}$ 是一个超吸引盆，即 $c(\mathbf{a})$ 是 $f_{\mathbf{a}}$ 的一个超吸引周期点，周期为 p。事实上，利用拟共形手术（命题 4.18），我们将看到只需考虑这种情况即可。因此，我们可以将讨论限制在 Milnor 的周期 p 超吸引切片 $\mathcal{S}_p$ 中，其中

$$\mathcal{S}_p := \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^2 : c(\mathbf{a}) \text{ is a } p\text{-periodic point of } f_{\mathbf{a}}\right\}.$$

固定 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$，记 $O = O(\mathbf{a}) := \{c(\mathbf{a})\ c_1(\mathbf{a}) \ldots, c_{p-1}(\mathbf{a})\}$ 为 $c(\mathbf{a})$ 的超吸引周期轨道，其中 $c_k(\mathbf{a}) := f_{\mathbf{a}}^k(c(\mathbf{a}))$，对 $0 \le k \le p-1$，并且 $O = O(\mathbf{a}) := \bigcup_n O_n$ 为 $c(\mathbf{a})$ 的全轨道。

接下来，我们讨论 $x \in O$相应的B¨ottcher映射。在我们的讨论中，我们始终假设$\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$ 是一般的，即 $-c(\mathbf{a}) \notin O(\mathbf{a})$。我们可以在 $c(\mathbf{a})$附近定义相应的B¨ottcher映射 $\phi_{\mathbf{a}}^c$，它对于 $c(\mathbf{a}) \neq 0$将 $f_{\mathbf{a}}$ 与$z \mapsto z^2$ 共轭。定义关于 $c(\mathbf{a})$的指数型 *Green* 函数 $G_{\mathbf{a}}^c$： $\mathbb{C} \to [0,1]$，由

$$G_{\mathbf{a}}^c(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_{\mathbf{a}}^{np}(z) - c(\mathbf{a})|}.$$

对于 $0 < s \le 1$，记 $B_{\mathbf{a}}^c(s) :=(G_{\mathbf{a}}^c)^{-1}(\{z : |z| < s\})$。令

$$s_{\mathbf{a}}^c := \min\{G_{\mathbf{a}}^c(z) : z \in (B_{\mathbf{a}}(c) \setminus \{c(\mathbf{a}_0)\}) \cap \mathrm{Crit}(f_{\mathbf{a}}^p)\}.$$

因此，B¨ottcher映射 $\phi_{\mathbf{a}}^c$ 至少定义在 $B_{\mathbf{a}}^c(s_{\mathbf{a}}^c)$上，映到以原点为中心、半径为 $s_{\mathbf{a}}^c$的圆盘。其逆映射记为 $\psi_{\mathbf{a}}^c$。

对于一般的$\mathbf{a}$，映射 $f_{\mathbf{a}}$在$v \in$的一个邻域上是共形的，映到 $c(\mathbf{a})$的一个邻域，其中 $\ell_v \ge 0$ 是使得$f^{\ell_v}{}_{\mathbf{a}}(v) = c(\mathbf{a})$成立的最小整数。因此，我们可以拉回B¨ottcher映射 $\phi_{\mathbf{a}}^c$ 和格林函数$G_{\mathbf{a}}^c$，从而得到 v的B¨ottcher映射 $\phi_{\mathbf{a}}^v := \phi_{\mathbf{a}}^c \circ f^{\ell_v}{}_{\mathbf{a}}$以及格林函数 $G_{\mathbf{a}}^v := G_{\mathbf{a}}^c \circ f^{\ell_v}{}_{\mathbf{a}}$。其逆映射记为 $\psi_{\mathbf{a}}^v$，它定义在以原点为中心的小圆盘 $D(0, \rho_{\mathbf{a}})$上。可以看到， $\rho_{\mathbf{a}}$ 仅依赖于$\mathbf{a}$，而不依赖于 v。

我们将仔细讨论 $\psi_{\mathbf{a}}^v$ 对 $v \in O$ 的延拓，因为它在我们研究叶状结构时发挥着重要作用。为使论述更有条理，我们引入 映射方案 $(O,\ \sigma,\ \delta)$ 以及 O 上的模型空间 $\mathbf{M}$。

定义 1（映射方案与模型空间）。对于一般的 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$， $\mathbf{a}$ 的 映射方案是一个三元组 $(O,\ \sigma,\ \delta)$，其中

- $O = O(\mathbf{a})$ 是 $c(\mathbf{a})$ 的全轨道；
- σ： $O \to O$ 由 $\sigma(v) = f_{\mathbf{a}}(v)$ 定义；
- δ： $O \to \mathbb{N}$ 由 $\delta(c(\mathbf{a})) = 2$ 和 $\delta(v) = 1$ 对 $v \neq c(\mathbf{a})$ 定义。

在 O 上的模型空间定义为 $\mathbf{M} = \mathbf{M}(O) := O \times \mathbb{D}$。若将 $\partial\mathbb{D}$ 与 $\mathbb{S}$ 视为相同，则 $\partial\mathbf{M}$ 可视为 $O \times \mathbb{S}$。模型映射 g 和 $\tilde{g}$ 定义为

$$g : \mathbf{M} \to \mathbf{M}, \quad (v, z) \mapsto (\sigma(v), z^{\delta(v)}).$$

以及 $\tilde{g}: \partial\mathbf{M} \to \partial\mathbf{M}$ 通过 $(v, t) \mapsto (\sigma(v), \tau_{\delta(v)}(t))$。

根据上述记号，我们可以得出，存在一个映射 $\Psi_{\mathbf{a}} : O \times D(0, \rho_{\mathbf{a}}) \to B_{\mathbf{a}}$，由 $(v, w) \mapsto \psi^v_{\mathbf{a}}(w)$ 给出，使得

$$f_{\mathbf{a}} \circ \Psi_{\mathbf{a}} = \Psi_{\mathbf{a}} \circ g, \qquad \forall (v, w) \in \tilde{O} \times D(0, \rho_{\mathbf{a}}). \tag{3}$$

现在，我们尝试将 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 扩展到极大定义域，使得 (3) 仍然成立。存在一个简单情形：若 $-c(\mathbf{a}) \notin B_{\mathbf{a}}$，则对每个 $v \in O$，$\phi^v_{\mathbf{a}}$ 都可以扩展为一个从 $B_{\mathbf{a}}(v)$ 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射。因此，它们的逆映射 $\psi^v_{\mathbf{a}}$ 都在 $\mathbb{D}$ 上有定义且共形。由此，映射 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 可以扩展为 $\Psi_{\mathbf{a}} : \mathbf{M} \to B_{\mathbf{a}}$，使得 (3) 仍然成立，也就是说，下面的交换图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\Psi_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{a}}} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\Psi_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}} \end{array} \tag{4}$$

扩展映射 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 是纤维方向共形的，即固定任意 $v \in O$，限制映射 $\Psi_{\mathbf{a}}$：$\{v\} \times \mathbb{D} \to B_{\mathbf{a}}(v)$ 是一个共形映射。

相反的情形 $-c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}}$ 则更为复杂，即参数 $\mathbf{a}$ 属于一个类型（A）、（B）或（C）的有界双曲分支 $\mathcal{H}$。请记住，我们排除了 $-c(\mathbf{a}) \in O(\mathbf{a})$ 这一情形，因此 $\mathbf{a}$ 不可能是双曲分支 $\mathcal{H}$ 的中心。下文将此类映射称为*ABC*-双曲型。

现在假设 $\mathbf{a}$ 是 ABC-双曲型且满足以下条件的 $0 < r < 1$ 的集合：存在一条若尔当弧 $\gamma^{v,t}_r : [0, r] \to B_{\mathbf{a}}(v)$，它从 v 出发，且满足以下性质（P1）和（P2）。

(P1) **光滑性：** $\gamma^{v,t}_r(s)$ 不是 $0 \le s < r$ 的 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像。(P2) **动力学相容性：** 给定任意 $0 < s < r$，对于任意足够大的 n，使得 $g^n(v, se^{2\pi it}) \in O \times D(0, s^c_{\mathbf{a}})$，我们有

$$f^n_{\mathbf{a}}(\gamma^{v,t}_r(s)) = \Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v, se^{2\pi it})).$$

性质 (P1) 表明 $\gamma^{v,t}_r$ 是一条光滑的若尔当弧。性质 (P2) 表明 $\gamma^{v,t}_r$ 是规范的，并且与动力学相容。由 (P2) 可知，$\gamma^{v,t}_r$ 确实由指数型 Green 函数 $G^v_{\mathbf{a}}$ 参数化。根据 (3)，要验证 (P2)，只需证明存在 n，满足 $g^n(v, se^{2\pi it}) \in O \times \mathbb{D}(0, s^c_{\mathbf{a}})$，使得 $f^n_{\mathbf{a}}(\gamma^{v,t}_r(s)) = \Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v, se^{2\pi it}))$ 成立。由提升的唯一性，固定 $r \in S(v, t)$ 后，满足 (P2) 的曲线 $\gamma : [0, r] \to B_{\mathbf{a}}(v)$ 是唯一的，因此必定是 $\gamma^{v,t}_r$。因此，固定 $r < r' \in S(v, t)$ 后，我们有 $\gamma^{v,t}_r = \gamma^{v,t}_{r'}$ 在 $[0, r]$ 上。下文中，当 (v, t) 明确时，$\gamma^{v,t}_r$ 有时简写为 γ_r 或直接写作 γ。

引理 3.1 (径向延拓)。对于一般的 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$，以及 $(v, t) \in O \times \mathbb{S}$，定义

$$s^v_{\mathbf{a}}(t) := \sup S(v, t).$$

如果 $s^v_{\mathbf{a}}(t) < 1$，则 $s^v_{\mathbf{a}}(t) \in S(v, t)$，且 $\gamma^{v,t}_{s^v_{\mathbf{a}}(t)}(s^v_{\mathbf{a}}(t))$ 是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像。

证明。假设 $s_{\mathbf{a}}^v(t)<1$。根据 $s_{\mathbf{a}}^v(t)$ 的定义以及 $s_{\mathbf{a}}^v(t)\geq\rho_{\mathbf{a}}>0$ 这一事实，我们可以找到序列 $\{r_k\}\subset(\rho_{\mathbf{a}},s_{\mathbf{a}}^v(t))$，它单调收敛到$s_{\mathbf{a}}^v(t)$，以及满足 (P1) 和 (P2) 的曲线序列 $\gamma_{r_k}:[0,r_k]\to B_{\mathbf{a}}(v)$。由每个 γ_{r_k} 的唯一性，我们可以将它们粘合在一起，形成若尔当弧$\gamma:[0,s_{\mathbf{a}}^v(t))\to B_{\mathbf{a}}(v)$，它仍然满足 (P1) 和 (P2)。

现在固定 n，使得 $g^n(v,se^{2\pi it})\in\{c\}\times D(0,s_{\mathbf{a}}^c)$。根据 (P2)，当 $s\to s_{\mathbf{a}}^v(t)$ 时，$\gamma(s)$ 的任意极限点都经由 $f_{\mathbf{a}}^n$ 映射到 $\Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v,s_{\mathbf{a}}^v(t)e^{2\pi it}))$。因此，当 $s\to s_{\mathbf{a}}^v(t)$ 时，极限 $\gamma(s)$ 存在。这个极限点记作 ω。通过定义 $\gamma(s_{\mathbf{a}}^v(t))=\omega$，将 γ 延拓为 $\gamma:[0,s_{\mathbf{a}}^v(t)]\to B_{\mathbf{a}}(v)$。延拓后的 γ 仍满足 (P1) 和 (P2)。现在我们证明 ω 必须是 $f_{\mathbf{a}}^n$ 的临界点。我们用反证法证明。如果不是，那么存在 z_0 的一个邻域 V，使得 $f_{\mathbf{a}}^n$ 将 V 单叶地映入 $B_{\mathbf{a}}^c(s_{\mathbf{a}}^c)$。选取 $s'>s_{\mathbf{a}}^v(t)$，使得 $\Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v,[s_{\mathbf{a}}^v(t)\ s']e^{2\pi it}))\subset f_{\mathbf{a}}^n(V)$。于是，我们可以通过 $\gamma^{v,t}(s):=(f_{\mathbf{a}}^n|_V)^{-1}\circ\Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v,se^{2\pi it}))$（其中 $s\in[s_{\mathbf{a}}^v(t)\ s']$），将 γ 上的若尔当弧延拓到 $[0,s']$ 上。显然，延拓后的弧仍满足 (P1) 和 (P2)。因此，$s'\in S(v,t)$。这与 $s_{\mathbf{a}}^v(t)=\sup S(v,t)$ 的事实矛盾。因此，我们完成了引理的证明。

□

注意，记号 $\psi_{\mathbf{a}}^v$ 和 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,\ \cdot)$ 相同。下文将同时使用这两种记号。

对于一般的 $\mathbf{a}\in\mathcal{S}_p$，定义约化模型空间 $\mathbf{M}_{\mathbf{a}}\subset\mathbf{M}$ 为

$$\mathbf{M}_{\mathbf{a}}:=\bigsqcup_{v\in\tilde{O}}(\{v\}\times\{re^{2\pi it}:0\leq r<s_{\mathbf{a}}^v(t)\}).$$

~ ~（若 $-c(\mathbf{a})\notin B_{\mathbf{a}}$，则 $\mathbf{M_a}:=\mathbf{M}$。）定义 $\mathbf{M}'_{\mathbf{a}}:=\{(v,\ t)\in O\times\mathbb{S}:\ s_{\mathbf{a}}^v(t)<1\}$。由引理 3.1 可得以下结论。

命题 3.2（约化模型空间）。约化模型空间 $\mathbf{M_a}$ 在~下不变。映射 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 可延拓为 $\Psi_{\mathbf{a}}:\mathbf{M}_{\mathbf{a}}\to B_{\mathbf{a}}$，其定义为

$$\Psi_{\mathbf{a}}(v,w)=\psi_{\mathbf{a}}^v(w):=\gamma_{s_{\mathbf{a}}^v(t)}^{v,t}(r),\qquad w=se^{2\pi it},\ 0\leq s<s_{\mathbf{a}}^v(t).$$

是一个连续单射，使得以下交换图成立。

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{M}_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{\Psi_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}}\\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{a}}}\\ \mathbf{M}_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{\Psi_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}}.\end{array}$$

证明。根据引理 3.1 和 (P2)，只需证明 $g(\mathbf{M_a})\subset\mathbf{M_a}$。任取 $(v,se^{2\pi it})\in\mathbf{M_a}$，记 $g(v,se^{2\pi it})=(v',s'e^{2\pi it'})$。由于 $s\leq s_{\mathbf{a}}^v(t)$，若尔当弧 $f_{\mathbf{a}}(\Psi_{\mathbf{a}}(v,[0,s]e^{2\pi it}))$ 是一条以 $v'=\sigma(v)$ 为起点且满足 (P1) 和 (P2) 的曲线。以指数型 Green 函数为参数，我们看到 $\gamma^{v',t'}$ 在 $[0,s']$上有定义。因此，根据 $s^{v'}\mathbf{a}(t')$ 的定义，有 $s'\leq s^{v'}\mathbf{a}(t')'$。由此可得 $(v',s'e^{2\pi it'})\in\mathbf{M_a}$。

□

光滑弧 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,[0,s_{\mathbf{a}}^v(t))e^{2\pi it})=\gamma^{v,t}([0,s_{\mathbf{a}}^v(t)))$ 称为 $(v,t)\in O\times\mathbb{S}$ 的光滑内弧。由命题 3.2 可知，$f_{\mathbf{a}}$ 将光滑内弧映射为光滑内弧，即对于每个满足 $\tilde{g}(v,t)=(v't')$ 的 $(v,t)\in O\times\mathbb{S}$，都有 $f_{\mathbf{a}}(\Psi_{\mathbf{a}}(v,[0,s_{\mathbf{a}}^v(t))e^{2\pi it}))\subset\Psi_{\mathbf{a}}(v,[0,s^{v'}\mathbf{a}(t')e^{2\pi it'}))$~。

如果 $s_{\mathbf{a}}^{v}(t)=1$，则光滑内弧

$$R_{\mathbf{a}}^{v}(t):=\Psi_{\mathbf{a}}(v,[0,1)e^{2\pi it})$$

也称为（v， t）的光滑内部射线。

若 $s_{\mathbf{a}}(t)<1$，则 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,\ s_{\mathbf{a}}^{v}(t)e^{2\pi it})$ 可定义为它的极限。此外，$\omega=\Psi_{\mathbf{a}}(v,\ s_{\mathbf{a}}^{v}(t)e^{2\pi it})$ 是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像。我们称光滑内部弧 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,\ [0,s_{\mathbf{a}}^{v}(t))e^{2\pi it})$ 在 ω 处终止。反过来，我们有如下结论。

引理 3.3（临界点与内部弧）。设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个 *ABC*-双曲映射。存在（x、$t_{\mathbf{a}}$）和（y、$t'_{\mathbf{a}}$）属于$\mathbf{M}'_{\mathbf{a}}$，使得 $\tilde{g}$（x、$t_{\mathbf{a}}$）$=\tilde{g}$（y、$t'_{\mathbf{a}}$）并且

$$-c(\mathbf{a})=\psi_{\mathbf{a}}^{x}(r_{\mathbf{a}}e^{2\pi it_{\mathbf{a}}})=\psi_{\mathbf{a}}^{y}(r'_{\mathbf{a}}e^{2\pi it'_{\mathbf{a}}}),\tag{5}$$

其中 $r_{\mathbf{a}}=s_{\mathbf{a}}^{x}(t_{\mathbf{a}})$，$r'_{\mathbf{a}}=s_{\mathbf{a}}^{y}(t'_{\mathbf{a}})$。对于 $-c(a)$ 的 ω 的任意 n 阶迭代原像，至少存在一个 $(v,t)\in M'_{\mathbf{a}}$，使得 $\tilde{g}(v,t)=(x,t_{\mathbf{a}})$ 或 $\tilde{g}(v,t)=(y,t'_{\mathbf{a}})$ 并且

$$\omega=\psi_{\mathbf{a}}^{v}(s_{\mathbf{a}}^{v}(t)e^{2\pi it}).\tag{6}$$

反之，当且仅当（v， t）$\in\mathbf{M}'_{\mathbf{a}}$ 时，点（v， t）在$\tilde{g}$下的正向轨道包含（x， $t_{\mathbf{a}}$）或（y， $t'_{\mathbf{a}}$）。

证明。首先，我们证明有两条内弧终止于临界点 $-c(\mathbf{a})$。令 $m\geq 1$ 为满足 $f_{\mathbf{a}}^{m}(-c(\mathbf{a}))\in B_{\mathbf{a}}(c)$ 的最小正整数。可以验证，$G_{\mathbf{a}}^{c}(f_{\mathbf{a}}^{m}(-c(\mathbf{a})))<s_{\mathbf{a}}^{c}$。因此，存在 $r<s_{\mathbf{a}}^{c}$ 和$t\in\mathbb{S}$，使得 $\psi_{\mathbf{a}}^{c}(re^{2\pi it})=f_{\mathbf{a}}^{m}(-c(\mathbf{a}))$。由此可知，光滑内部弧$\psi_{\mathbf{a}}^{c}([0,s_{\mathbf{a}}^{c}(t))e^{2\pi it})$经过 $f_{\mathbf{a}}^{m}(-c(\mathbf{a}))$。令 Γ 为包含 $-c(\mathbf{a})$ 的$f_{\mathbf{a}}^{-m}(\psi_{\mathbf{a}}^{c}([0,r]e^{2\pi it}))$的连通分支。则 $\Gamma\setminus\{-c(\mathbf{a})\}$ 包含两个分支Γ_1、Γ_2和 $f_{\mathbf{a}}^{m}:\ \Gamma_i\to\psi_{\mathbf{a}}^{c}([0,r]e^{2\pi it})$ 是 $i=1$ 的同胚，2。由指数型 Green 函数参数化，Γ_i 满足 (P1) 和 (P2)。因此，我们看到 Γ_1 和 Γ_2 必为关于某个$\tilde{}(x,\ t_{\mathbf{a}})$、$(y,\ t'_{\mathbf{a}})\in O\times\mathbb{S}$的两条光滑内部弧，并且都终止于 $-c(\mathbf{a})$。由此得到(5)。根据(3)，由于 Γ_1和 Γ_2具有相同的像，我们有 $\tilde{g}(x,\ t_{\mathbf{a}})=\tilde{g}(y,\ t'_{\mathbf{a}})$。

我们声称，不存在其他终止于 $-c(\mathbf{a})$ 的光滑内部弧。若还有另一条终止于 $-c(\mathbf{a})$ 的 Γ_3，则 $f_{\mathbf{a}}^{m}(\Gamma_3)$ 必定是经过 $f_{\mathbf{a}}^{m}(-c(\mathbf{a}))$ 的那条内弧的一部分。因此，$f_{\mathbf{a}}^{m}(\Gamma_3)=\psi_{\mathbf{a}}^{c}([0,r]e^{2\pi it})$。这与 $-c(\mathbf{a})$ 是一个简单临界点这一事实矛盾。

我们声称，Γ_1 和 Γ_2 中至少有一个不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的正向轨道。假设 $\Gamma_1=\psi_{\mathbf{a}}^{x}([0,r_{\mathbf{a}}]e^{2\pi it_{\mathbf{a}}})$ 包含 $-c(\mathbf{a})$ 的某次迭代，那么 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 在 $\tilde{g}$ 下必定是周期的。由于 $\tilde{g}(y,t'_{\mathbf{a}})=g(x,t_{\mathbf{a}})$，可知 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 的正向轨道不包含 $(y,t_{\mathbf{a}})$。因此，$\Gamma_2=\psi_{\mathbf{a}}^{y}([0,r'_{\mathbf{a}}]e^{2\pi it'}\mathbf{a})$ 不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的正向轨道。令 ω 为 $-c(\mathbf{a})$ 的一个 n 次原像。假设 Γ_2 不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的正向轨道。令 Γ' 为 $f_{\mathbf{a}}^{-n}(\Gamma)$ 中包含 ω 的连通分支。由于 Γ_2 不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的正向轨道，$f_{\mathbf{a}}^{n}:\Gamma'\to\Gamma_2$ 是一个同胚。按照上述论证，Γ' 必须是一条光滑内部弧，该弧相对于某个 $\tilde{}(v,t)\in O\times\mathbb{S}$ 和 $\tilde{g}^{n}(v,t)=(y,t'_{\mathbf{a}})$ 终止于 ω。因此 (6) 成立。

对于任意 (如果) $s_{\mathbf{a}}^{v}(t)<1$，根据引理 3.1，$\psi_{\mathbf{a}}^{v}(s_{\mathbf{a}}^{v}(t)e^{2\pi it})$ 是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像。假设 $f_{\mathbf{a}}^{n}(\psi_{\mathbf{a}}^{v}(s_{\mathbf{a}}^{v}(t)e^{2\pi it}))=-c(\mathbf{a})$。那么，$\tilde{g}^{n}(v,t)$ 的光滑内部弧终止于 $-c(\mathbf{a})$。由此可知，$\tilde{g}^{n}(v,t)$ 与 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 或 $(y,t'_{\mathbf{a}})$ 重合。反之，如果 $\{\tilde{g}^{n}(v,t):\ n\geq 0\}$ 包含 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 或 $(y,t'_{\mathbf{a}})$。如果$s_{\mathbf{a}}^{v}(t)=1$，那么根据命题 3.2，对于任意 n，我们有 $s^{v_n}\mathbf{a}(t_n)=1$，其中 $(v_n,t_n):=\tilde{g}^{n}(v,t)$。因此，要么 $s_{\mathbf{a}}^{x}(t_{\mathbf{a}})=1$，要么 $s_{\mathbf{a}}^{y}(t'_{\mathbf{a}})=1$。这与矛盾相矛盾。

□

注记 3.1。事实上，根据包含 $\mathbf{a}$ 的双曲分支类型，我们可以明确地找到 x、$r_{\mathbf{a}}$ 和 y、$r'_{\mathbf{a}}$。共有 3 种情况。

（A）如果 a 属于类型（A）的双曲分支，即 $-c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}}(c)$。在这种情况下，$x$、$y$ 中必有一个是 $c(\mathbf{a})$。我们选择 x 为 $c(\mathbf{a})$，于是 $r_{\mathbf{a}} = s^c_{\mathbf{a}}$。那么 y 必定在 p 周期轨道 $O(\mathbf{a})$ 之外，且 $r'_{\mathbf{a}} = (s^c_{\mathbf{a}})^2$。（B）如果 a 属于类型（B）的双曲分支，即对于某个 $1 \le k \le p-1$，$-c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}}(c_k)$，那么 x、y 中必有一个是 $c_k(\mathbf{a})$。$x = c_k(\mathbf{a})$。那么 y必定在 $O(\mathbf{a})$ 之外，且 $r_{\mathbf{a}} = r'_{\mathbf{a}} = (s^c_{\mathbf{a}})^2$。（C）假设 $-c(\mathbf{a}) \in B_{\mathbf{a}} \setminus B_{\mathbf{a}}$，即 a 属于类型（C）的双曲分支。在这种情况下，$s^c_{\mathbf{a}} = 1$。那么 x、y 都在 $O(\mathbf{a})$ 之外。

还有另一种对 ABC-双曲映射进行分类的有用方法，它在考虑双曲分支的边界映射时将起重要作用。

定义 2（周期与非周期）。设 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$ 为一个 ABC-双曲映射，且 x，$y \in O$、$t_{\mathbf{a}}$，$t'_{\mathbf{a}}$ 由引理 3.3 给出。若 $(x,\ t_{\mathbf{a}})$ 在 $\tilde{g}$ 下是周期的，则称 $f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构。

事实上，$f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构，当且仅当$\mathbf{a}$ 位于类型（A）或（B）的双曲分支中，且 $t_{\mathbf{a}}$ 在倍增映射下是周期的。由引理 3.3，具有周期组合结构与非周期组合的映射之间的一个本质区别是：若 $\mathbf{a}$ 具有非周期组合，则 $\tilde{g}(x,\ t_{\mathbf{a}}) \notin \mathbf{M}'_{\mathbf{a}}$。

注记 3.2。在周期情形中，由于 $\tilde{g}(x,\ t_{\mathbf{a}}) = \tilde{g}(y,\ t'_{\mathbf{a}})$，由引理 3.3，每个 $(v,\ t) \in \mathbf{M}'_{\mathbf{a}}$ 最终都被映射到 $(x,\ t_{\mathbf{a}})$。

3.2. **左扩张与右扩张**。在本节中，我们继续将 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 延拓到$\mathbf{M}$，适用于每个 ABC-双曲映射$\mathbf{a}$。也就是说，对每个 $(v,t) \in O \times \mathbb{S}$，沿径向线继续延拓 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,\cdot) = \psi^v_{\mathbf{a}}$，使得交换图 (4) 仍然成立。注意，原来的 $\psi^v_{\mathbf{a}}$ 在 $s^v_{\mathbf{a}}(t)e^{2\pi it}$ 处终止，其中 $\psi^v_{\mathbf{a}}(s^v_{\mathbf{a}}(t)\ e^{2\pi it})$ 是 $-c(\mathbf{a})$ 的一个迭代原像。$f_{\mathbf{a}}$ 的局部行为使我们能够沿两个相反方向（左和右）继续延拓 $\Psi_{\mathbf{a}}(v,\cdot)$。这一延拓是求得双曲分支边界映射的叶状结构的关键。

若简单平面曲线 $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ 在其内部除离散集 $T \subset I$之外的每个 t 处都存在非零的 $\gamma'(t)$，并且对于任意 $t \in T$，$\gamma'_-(t)$ 和 $\gamma'_+(t)$ 均存在且非零，则称其为半可微。T 称为 γ的转向集。特别地，若 γ 可微，则它是半可微的。

转向点 $t \in T$ 若满足 $\arg\gamma'_+(t) - \arg\gamma'_-(t) = \frac{\pi}{2}$，则称为 γ 的左转向点 或 L-转向点。若满足 $\arg\gamma'_-(t) - \arg\gamma'_+(t) = \frac{\pi}{2}$，则称为$\gamma$的右转向点 或 R-转向点。半可微曲线 $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ 若每个转向点都是左转向点，则称为左转曲线。同样，若 γ 的每个转向点都是右转向点，则称其为右转曲线。

对于一般的$\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$和 $(v,\ t) \in \tilde{O} \times \mathbb{S}$，令 $S_L(v,\ t)$ 为 $0 < r < 1$ suc 的集合h使得存在一条左转曲线 $\gamma\colon [0,r) \to B_{\mathbf{a}}(v)$，满足动力学相容性条件 (P2)。同样，我们将 $S_R(v,\ t)$ 定义为相应的

g

关于右转向曲线的集合。

引理 3.4。对于一般的 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$ 和 $(v,t) \in O \times \mathbb{S}$，我们有

$$\sup S_L(v,t) = \sup S_R(v,t) = 1.$$

证明。我们只证明 $\sup S_L(v,t) = 1$。证明与引理 3.1 的证明非常相似。我们将快速略过相似部分，重点讨论差异。记 $r_0 := \sup S_L(v,t)$。由于 $S(v,t) \subset S_L(v,t)$，我们有 $r_0 \geq s^v_{\mathbf{a}}(t)$。下面我们用反证法证明 $r_0 = 1$。

由引理 3.1 证明中的相同论证，我们还可得 $r_0 \in S_L(v, t)$，以及一条左转曲线 $\gamma\colon (0, r_0) \to B_{\mathbf{a}}(v)$。有两种情况。

假设 $\omega := \gamma(r_0)$ 不是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像。由引理 3.1 证明中的相同论证，我们可以找到 $r' > r_0$ 以及 γ 的一个延拓 $\tilde{\gamma}\colon [0, r'] \to B_{\mathbf{a}}(v)$，使得 (P2) 成立。此外，由于 ω 不是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像，$\tilde{\gamma}|_{[r_0, r']}$ 是光滑的。因此 $r' \in S_L(v, t)$。这与 $r' > r_0 = \sup S_L(v, t)$ 这一事实矛盾。

现在假设相反的情形，即 $\omega := \gamma(r_0)$ 是 $-c(\mathbf{a})$ 的一个 m阶迭代原像。取较大的 $n \geq m$，使得 $g(v, r_0 e^{2\pi i t}) := (c, r_n e^{2\pi i t_n}) \in \{c\} \times D(0, s^c_{\mathbf{a}})$，并取 $f^n\mathbf{a}\,(\omega)$ 的一个小邻域 U，使得 $f^n_{\mathbf{a}}$在 V中的唯一临界点为 ω，其中 V是包含 ω的 $f^{-n}_{\mathbf{a}}(U)$ 的连通分支。取 $r^{\pm}$，使得$r_0 \in (r^-, r^+)$ 且 $\Gamma_n := \Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v, (r^-, r^+)e^{2\pi i t})) \subset U$。令 Γ 为包含 ω 的 $f^{-n}_{\mathbf{a}}(\Gamma_n)$的连通分支。则 $\Gamma \setminus \{\omega\}$ 包含两个分支 Γ_L 和 Γ_R。令 Γ_L为满足 Γ_L、 $\gamma([r^-, r_0])$ 和 Γ_R 按正向循环顺序排列的那个分支。将 γ 延拓为曲线 $\gamma_L\colon [0, r^+] \to B_{\mathbf{a}}(v)$，使得

$$\gamma_L(r) := (f^{\mathbf{a}}_n|_{\Gamma_L})^{-1}(\Psi_{\mathbf{a}}(g^n(v, re^{2\pi i t}))), \qquad \forall r \in [r_0, r^+].$$

由于 Γ_n 光滑且 ω 是 $f^n_{\mathbf{a}}$ 的简单临界点，根据 Γ_L 的选取，不难验证 γ_L 是一条左转曲线，而 r_0 是唯一新添加的转向点。因此，$r^+ \in S_L(v, t)$。这与 $r^+ > r_0 = \sup S_L(v, t)$ 的事实相矛盾。

在这两种情况下，我们都得到了矛盾。因此，我们得出 $\sup S_L(v, t) = 1$。 □

˜对于一般的 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$，根据引理 3.4，对于 $(v,t) \in O \times \mathbb{S}$，由于 $\sup S_L(v,t) = 1$，存在一个收敛于 1 的单调递增序列 $\{r_n\}$，使得 $r_n \in S_L(v,t)$。因此，存在一个序列 $\gamma_{L,n}\colon [0, r_n] \to B_{\mathbf{a}}(v)$，使得 (P2) 成立。根据 (P2)，我们可以将它们粘合在一起，形成一条左转曲线 $\gamma_L\colon [0,1) \to B_{\mathbf{a}}(v)$，使得 (P2) 成立。因此，我们可以定义一个映射 $\Psi^L_{\mathbf{a}}\colon \mathbf{M} \to \tilde{B}_{\mathbf{a}}$。它称为 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 的左延拓。对于 $(v,w) \in \mathbf{M}$ 且满足 $w = re^{2\pi i t}$ 的情形，定义 $\Psi^L_{\mathbf{a}}(v,w) := \gamma_L(r)$。类似地，我们也可以找到一条右转向曲线 $\gamma_R\colon [0,1) \to B_{\mathbf{a}}(v)$ 以及右延拓 $\Psi^R_{\mathbf{a}}\colon \mathbf{M} \to \tilde{B}_{\mathbf{a}}$。综合以上讨论，我们得到如下结论。

命题 3.5（的左扩张与右扩张）。映射 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 有两个延拓：右延拓 $\Psi^R_{\mathbf{a}}\colon \mathbf{M} \to \tilde{B}_{\mathbf{a}}$，以及左延拓 $\Psi^L_{\mathbf{a}}\colon \mathbf{M} \to \tilde{B}_{\mathbf{a}}$，它们都是 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 的延拓。对于 $\iota \in \{L, R\}$，如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\Psi^\iota_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{a}}} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\Psi^\iota_{\mathbf{a}}} & \tilde{B}_{\mathbf{a}}. \end{array}$$

此外，对于每个固定的 $t \in \mathbb{S}$，$\Psi^\iota_{\mathbf{a}}(v, \cdot)$ 在 $[0,1)e^{2\pi i t}$ 上是同胚的。

˜对于一般的 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$，以及 $(v,t) \in O \times \mathbb{S}$ 和 $\iota \in \{L,R\}$，我们将 (v,t) 的 ι-内部射线 $\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和左右内部射线 $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}\ ,}(v,t)$ 定义为

$$\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v,t) := \Psi^\iota_{\mathbf{a}}(v,[0,1)e^{2\pi it}), \quad \mathrm{R}^{L,R}_{\mathbf{a}}(v,t) := \mathrm{R}^L_{\mathbf{a}}(v,t) \cup \mathrm{R}^R_{\mathbf{a}}(v,t).$$

并且根据 (P2)，不难验证 $f_{\mathbf{a}}$ 将 ι-内部射线映射为 ι-内部射线，˜即对于任意 $(v,t) \in O \times \mathbb{S}$ 和 $\iota \in \{L,R\}$，我们有 $f_{\mathbf{a}}(\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v,t)) = \mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(\tilde{g}(v,t))$。如果 $s^v_{\mathbf{a}}(t) = 1$，那么 $\mathrm{R}^L_{\mathbf{a}}(v,t)$，$\mathrm{R}^R_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}\ ,}(v,t)$ 都与光滑内部射线 $R^v_{\mathbf{a}}(t)$ 重合。

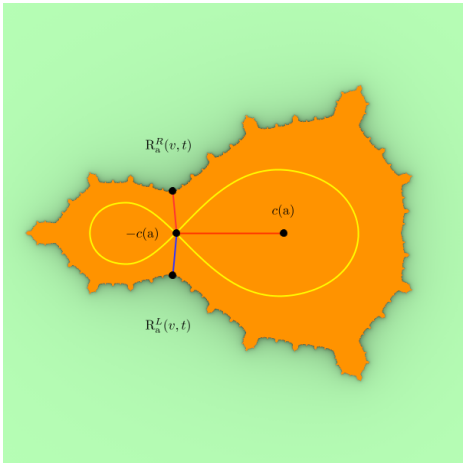


FIGURE 11. 非周期

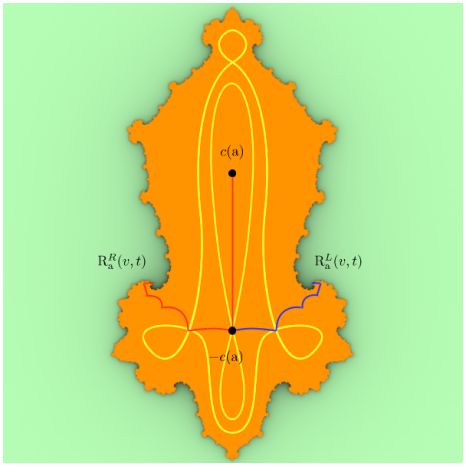


FIGURE 12. 周期的

设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个 ABC-双曲映射。如果 $f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构，那么每条非光滑的左侧或右侧内部射线都有无穷多个转向点。如果 $f_{\mathbf{a}}$ 具有非周期组合，那么每条非光滑的左侧或右侧内部射线恰有一个转向点。我们还观察到，非周期情形具有如下性质。

注3.3（具有相同端点的内部射线。）在非周期情形下，如果 $(v,\ t)$ 和 $(v',\ t')$ 的光滑内部弧终止于临界点 $-c(\mathbf{a})$ 的同一个迭代原像，那么 $\mathrm{R}^L_{\mathbf{a}}(v,\ t)$ 和 $\mathrm{R}^R_{\mathbf{a}}(v',\ t')$ 具有相同端点，即对于某个 $0 < s < 1$，它们在 $B^x_{\mathbf{a}}(v)$ 外重合。

反之，如果左、右两条内部射线 $\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v,\ t)$ 和 $\mathrm{R}^{\iota'}{}_{\mathbf{a}}(v',\ t')$ 具有相同端点，那么必为非周期情形，$(v,\ t)$ 和 $(v',\ t')$ 终止于临界点 $-c(\mathbf{a})$ 的同一个迭代原像，并且 ι 与 ι' 不同。

光滑内部射线以及左或右转向内部射线统称为广义内部射线。关于广义内部射线的交集，我们有以下性质。

推论 3.6（广义内部射线的交集）。以下结论成立。

(I1) 光滑内部射线在内部不会与任何其他光滑内部射线或左转、右转内部射线相交。(I2) 对于任意$(v',t') \neq (v,t)$，$\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}\ ,}(v',t')$ 属于 $B_{\mathbf{a}}(v) \setminus \mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}\ ,}(v,t)$的某个连通分支的闭包。

证明。对于 (I1)，设 $R^v_{\mathbf{a}}(t)$ 是一条光滑内部射线， $R(v',t')$ 是 (v',t') 的另一条广义内部射线，并且 z 是这两条射线在内部的一个交点。由于 $R^v_{\mathbf{a}}(t)$ 是一条光滑内部射线， z 不可能是 $-c$(a) 的迭代原像。注意， $v_n = \sigma^n(v)$ 和 $v'_n = \sigma^n(v')$ 始终属于同一个 Fatou 分支，并且最终周期。因此，当 n 足够大时， $v_n = v'_n$ 都是周期的。于是，我们可以找到足够大的 n ，使得 $v_n = c'_n = c$，以及两条广义内部射线 $R^c_{\mathbf{a}}(t_n)$ 和 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(c, t'_n)$ 的一个交点 $z' := f^n_{\mathbf{a}}(z) \in B^c_{\mathbf{a}}(s^c_{\mathbf{a}})$，其中 $(c, t_n) := \tilde{g}^n(v,t)$，且 $(c, t'_n) := \tilde{g}^n(v',t')$。因此， z' 是两条始于同一点的光滑内部弧的交点。这显然不可能。因此 (I1) 成立。

对于 (I2)，我们可以假设 $B_{\mathbf{a}}(v) = B_{\mathbf{a}}(v')$，否则结论显然成立。我们用反证法证明这一点。假设 $\mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $\mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v',t')$ 在 ω 处相交，这意味着对于 ω 的任意小邻域 U， $(\mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v,t) \cap U) \setminus \mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v',t')$ 是不连通的。运用与 (I1) 相同的论证，广义内部射线只能在 $-c$(a) 的某个迭代原像处相交。经过迭代，我们看到 $R^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v_n, t_n)$ 和 $R^{R\ L}_{\mathbf{a}}(v'_n, t'_n)$ 在 $-c$(a) 处相交。根据引理 3.3，我们可以假设 $(v_n, t_n) = (x, t_{\mathbf{a}})$ 且 $(v'_n, t'_n) = (y, t'_{\mathbf{a}})$。根据左右内部射线的构造，$\mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(x, t_{\mathbf{a}})$ 和 $\mathrm{R}^{R\ L}_{\mathbf{a}}(y, t'_{\mathbf{a}})$ 不可能在 $-c$(a) 处相交。这是一个矛盾。因此 (I2) 成立。

□

3.3. 关于周期情形的更多讨论。 我们已经看到，如果 $f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构，那么每条不光滑的左右内部射线都有无限多个转向点。本节中，我们在周期情形下定义更多一般的、具有无限多个的转向内部射线。

给定一个序列 $\iota := (\iota_1, \iota_2, \ldots\ldots, \iota_n, \ldots\ldots) \in \{L, R\}^{\mathbb{N}}$。若一条半可微曲线 $\gamma\colon [0,1) \to \mathbb{C}$ 具有无限转向集 $T := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$，并且对每个 n， a_n 都是 γ 的 ι_n-转向点，则称其为 ι-转向曲线。一条具有无限转向集的 L-转向曲线 γ，若取 $\iota := \{L, L, L, \ldots\}$ 为常数，则称为 ι-转向曲线。

命题 3.7 (ι-转向内射线)。 设 $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$ 是一个具有周期组合结构的 *ABC*-双曲映射。对每个序列 $\iota := (\iota_1, \iota_2, \ldots\ldots, \iota_n, \ldots\ldots) \in \{L, R\}^{\mathbb{N}}$，以及 $(v,t) \in \tilde{O} \times \mathbb{S}$，其中 $s^v_{\mathbf{a}}(t) < 1$，都存在一条 ι-转向曲线 $\gamma_\iota : [0,1) \to B_{\mathbf{a}}(v)$，使得 (P2) 成立。

证明概要。 证明与引理 3.4 和引理 3.1 非常相似。因此，我们在此简述该命题的证明，并着重说明其中的差异。

由于我们处于周期情形，根据引理 3.3 和注 3.2，$(v,\ t)$ 最终会被 $\tilde{g}$ 映射到 $(x,\ t_{\mathbf{a}})$。经过若干次迭代后，我们只需考虑 $(v,\ t) = (x,\ t_{\mathbf{a}})$ 的情形。令 S_ι 为满足以下条件的 r 的集合：存在一条转向曲线 $\gamma_r\colon [0,r) \to B_{\mathbf{a}}(v)$，其转向集有限，记为 $T_n := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，其中 $n := n(r)$，使得 a_k 是 γ_r 的一个 ι_k-转向点，且 (P2) 成立。按照引理 3.4 的证明思路，我们可以证明 $\sup S_\iota = 1$。

在这种情况下，我们进一步断言，当 $r \to 1$ 时， $n(r) \to \infty$，因为 $(x,\ t_{\mathbf{a}})$ 是周期的。事实上，如果 $(x,\ t_{\mathbf{a}})$ 的周期为 mp，那么 γ_r 的转向点恰好是 $\{a_n := \sqrt[2^m]{r_{\mathbf{a}}} : 1 \le m \le n(r)\}$，其中 $n(r)$ 是满足 $r^{2^n} > r_{\mathbf{a}}$ 的最大整数 n。因此，我们得出结论，当 $r \to 1$ 时， $n(r) \to \infty$。因此，与引理 3.4 的证明一样，取一个单调递增序列 $r_k \to 1$，我们可以将这些转向曲线 $\{\gamma_{r_k}\}$ 拼接起来，从而得到 ι-转向曲线 γ_ι。

□

根据命题 3.7，对于序列 $\iota := (\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n, \ldots) \in \{L, R\}^{\mathbb{N}}$，以及 $(v, t) \in O \times \mathbb{S}$，若 $s^v_{\mathbf{a}}(t) < 1$，则将 (v, t) 的 ι-转向内射线 定义为

$$\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t) := \gamma_{\iota}([0, 1)).$$

显然，对于 $\iota \in \{L, R\}$，先前定义的 ι-转向曲线是一个特殊的 ι-转向内部射线，只要我们将 ι 取为常数（$\iota, \iota, \ldots$）。事实上，我们此前定义的每一种广义内部射线，都可以理解为具有某个 ι 和相应转向集 T_ι的 ι-转向内部射线。光滑内部射线可以理解为具有 $T_\iota = \emptyset$ 的 ι-转向内部射线。对于非周期情形，ι-转向内部射线可以理解为具有有限串 $\iota =$ （ι）和单点集 T_ι的 ι-转向内部射线。

ι-转向内部射线也具有良好的动力学性质。事实上，假设 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$ 是一条 ι-转向内部射线，那么我们已经看到，(v, t) 最终会被映射到在 $\tilde{g}$ 下具有周期性的 $(x, t_{\mathbf{a}})$。因此，它最终会被映射到某个 t_c 对应的 (c, t_c)。于是，$f_{\mathbf{a}}$ 将一条 ι-转向内部射线 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$ 映射到 $\mathrm{R}^{\iota'}$ a $(\tilde{g}(v, t))$, 其中$\iota' := (t_2, t_3, \ldots)$ 是 $\iota := (t_1, t_2, \ldots)$ 的左移位，如果 $(v, t) = (c, t_c)$；而当 $(v, t) \neq (c, t_c)$ 时，则为 $\iota' = \iota$。可以验证，如果 (v, t) 和 ι 都是周期的，那么ι-转向内部射线 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$ 在 $f_{\mathbf{a}}$ 下是周期的。

3.4. 广义内部射线的落点性质。本节研究广义内部射线的落点性质。我们已经知道，每条广义内部射线都可以理解为某条 ι-转向内射线 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$，其中 ι, T_ι 以及 (v, t)。假设 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$由 $\gamma\colon [0, 1) \to B_{\mathbf{a}}(v)$参数化。若极限 $\lim_{s\to 1} \gamma(s) = z$ 存在，则称 ι-转向内射线 $\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(v, t)$落点于 z。我们将证明，在所有情形下，每条广义内部射线都落在有界Fatou分支的边界上的一点（命题3.8）。

命题3.8（每条广义内部射线均有落点）。对一般的$\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$，每条广义内部射线都落在 $\partial B_{\mathbf{a}}$上的一点。

命题3.8的证明从这里开始。若 $-c(\mathbf{a}) \notin B_{\mathbf{a}}$，则根据 Carathéodory 定理，命题3.8的结论显然成立。因此，我们只需考虑 ABC-双曲情形。证明可以通过模仿外射线落点性质的经典结果以及$\mathbf{a}$的双曲性来完成。不过，这里我们采用拼图技巧给出另一种证明方法，因为它能揭示更多信息。

假设（）是一般的。我们拼图构造的核心部分是有限图 $\Gamma(\Theta, T)$，其中 T 和 Θ是满足以下良好条件的两个有限集 $\mathbb{S}$。

(N1) Θ 是由 θ 构成的有限集，其中各元素在 τ_3 下是周期的，且 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$最终到达一个排斥周期点。(N2) T 是由 t 构成的有限集，其中各元素在 τ_2 下是周期的，满足 $s^c_{\mathbf{a}}(t) = 1$，并且 $\psi^c_{\mathbf{a}}(e^{2\pi i t})$ 的正向轨道不包含 $-c$（一个）。

对于每个 $t \in T$，选取一条外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta(t))$，它在 $t \in T$ 时落于 $\psi^c_{\mathbf{a}}(e^{2\pi i t})$。由于 $f_{\mathbf{a}}$ 在 $\psi^c_{\mathbf{a}}(e^{2\pi i\theta})$ 附近是局部保向的，因此存在 $m \geq 1$，使曲线 $\gamma^c_{\mathbf{a}}(t, \theta) := R_{\mathbf{a}}(\theta(t)) \cup R^c_{\mathbf{a}}(t) \cup \{\psi^c_{\mathbf{a}}(e^{2\pi i\theta})\}$ 在 $f^m_{\mathbf{a}}$ 下保持不变。固定

T 和 Θ，我们定义一个在 $f_{\mathbf{a}}$ 下的不变图如下：

$$\Gamma_{\mathbf{a}}(\Theta,T):=\bigcup_{n\geq 0} f_{\mathbf{a}}^{n}\left(\left(\bigcup_{t\in T}\gamma_{\mathbf{a}}^{c}(t,\theta)\right)\cup\left(\bigcup_{\theta\in\Theta}R_{\mathbf{a}}(\theta)\right)\right).$$

我们还会将等势线纳入图中。对于一般的 $\mathbf{a}\in\mathcal{C}(\mathcal{S}_p)$ 和 $s>1, 0<s'<1$，记为

$$X_{\mathbf{a}}:=\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega_{\mathbf{a}}(s)\cup B_{\mathbf{a}}^{c}(s')\cup B_{\mathbf{a}}^{c_1}(s')\cup\cdots\cup B_{\mathbf{a}}^{c_{p-1}}(s')}.$$

显然，我们有 $f^{-1}\mathbf{a}\,(X_{\mathbf{a}})\subset X_{\mathbf{a}}$。对于 $n\geq 0$，定义 $X_n^{\mathbf{a}}:=f_{\mathbf{a}}^{-n}(X_{\mathbf{a}})$，以及 $G_n^{\mathbf{a}}:=f_{\mathbf{a}}^{-n}(\Gamma_{\mathbf{a}}(\Theta,T)\cup\partial X_{\mathbf{a}})$。$X_n^{\mathbf{a}}\setminus G_n^{\mathbf{a}}$ 的连通分支称为深度为 n 的拼图块。对于 $z\notin G_n^{\mathbf{a}}$，存在唯一一个深度为 n、包含 z 的拼图块，记为 $P\mathbf{a}_n(z)$。对于 $n\geq 1$，映射 $f_{\mathbf{a}}\colon P\mathbf{a}_n(z)\to P\mathbf{a}_{n-1}(f_{\mathbf{a}}(z))$ 是一个次数至多为 2 的全纯适当映射。当且仅当 $-c(\mathbf{a})\in P\mathbf{a}_n(z)$ 时，它的次数为 2。$\mathbf{P}_{\mathbf{a}}=\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\Theta,T,s,s')$ 称为拼图系统。

设 $P_n^{\mathbf{a}}\subset P_{\mathbf{a}n-1}\subset\cdots\subset P_{\mathbf{a}1}\subset P_{\mathbf{a}0}$ 是 $\mathbf{a}$ 的拼图块嵌套序列，定义该嵌套序列的$\mathbf{P_a}$的印象为 $I:=\bigcap_n P_{\mathbf{a}n}$。对于 $z\in J_{\mathbf{a}}\setminus\bigcup_n G_n^{\mathbf{a}}$，存在唯一的包含 z 的嵌套序列 $\{P_{\mathbf{a}n}(z)\}$，其交集 $I_{\mathbf{a}}(z):=\bigcap_n P^{\mathbf{a}n}(z)$ 称为 z 的印象。

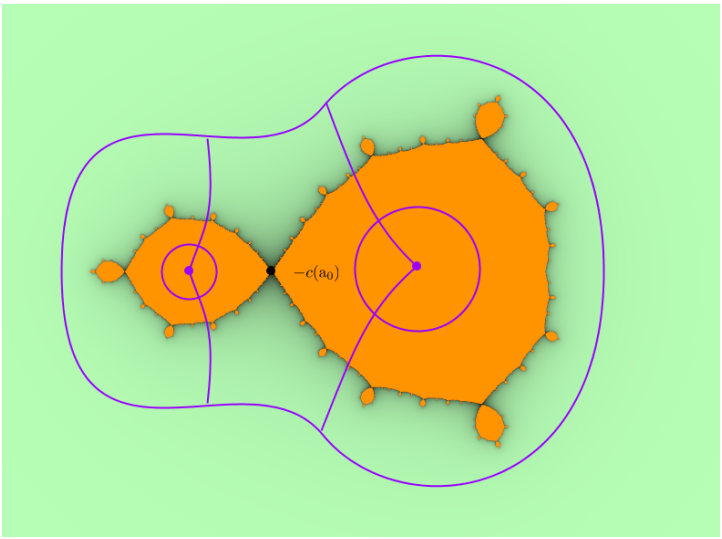


FIGURE 13.

引理 3.9（每个印象都是单点集）。设 $f_{\mathbf{a}}$ 是一个 *ABC*-双曲映射。拼图系统 $\mathrm{P_a}$（Θ、T、s、s'）的每个印象都是单点集。

证明。该证明是加厚技巧 [28] 的标准应用。由于 $-c(\mathbf{a})\in B_{\mathbf{a}}$，因此当 n 足够大时，深度为 n 的每个拼图块都不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的正向轨道。因此，不失一般性，我们假设每个深度为 0 的拼图块都不包含 $-c(\mathbf{a})$ 的轨道。令 $P_{(1)\mathbf{a}}\,P_{\mathbf{a}}^{(2)},\ldots,P_{(m)\mathbf{a}}$ 为所有深度为 0 的拼图块。

对于 $1 \le k \le m$，我们应用加厚技巧得到一个更大的区域 $\tilde{P}_{\mathbf{a}}^{(k)}$，它包含 $P_{\mathbf{a}}^{(k)}$ 的闭包。根据 $\Gamma_{\mathbf{a}}(\Theta, T)$ 的构造，$\partial P(k)\mathbf{a}$ 由内部射线、外射线和等势线组成。注意，$\partial P_{\mathbf{a}}^{(k)}$ 相对于某个 $v_k \in O(\mathbf{a})$ 恰好包含两条内部射线。设 $R^{v_k}\mathbf{a}\,(t_k^{\pm})$ 是 $\partial P_{\mathbf{a}}^{(k)} \cap B_{\mathbf{a}}(v)$ 中的两条内部射线，使得对于 $t \in (t_k^-, t_k^+)+$，$R^{v_k}\mathbf{a}\,(t)$ 与$P_{\mathbf{a}}^{(k)}$相交。取一个 $\tilde{t}_k^{\pm} \in (t_k^+, t_k^-)+$，使其靠近 $t_k^{\pm}$，且在 τ_2 下周期为 s^{v_k}，其中 $\tilde{t}_k^{\pm}\mathbf{a}\,(=1)$。令 $R_{\mathbf{a}}(\theta_k^{\pm})$ 分别为落在 $\psi^{v_k}\mathbf{a}\,(e^{2\pi i\tilde{t}_k^{\pm}})$ 上的外射线，并令 $\tilde{P}_{\mathbf{a}}^{(k)}$ 为 $\mathbb{C}\setminus(R_{\mathbf{a}}(\theta_k^-) \cup R_{\mathbf{a}}(\theta_k^+) \cup R^{v_k}\mathbf{a}\,(\tilde{t}_k^-) \cup R^{v_k}\mathbf{a}\,(\tilde{t}_k^+))$的连通分支；对于 $t \in (\tilde{t}_k^-, \tilde{t}_k^+)+$，该分支与$R^{v_k}\mathbf{a}\,(t)$相交。根据构造，$P(k)\mathbf{a}$ 的闭包包含于 $\tilde{P}_{\mathbf{a}}^{(k)}$ 中。

固定 k，在 $\tilde{P}_{(k)\mathbf{a}}$上有 $f_{\mathbf{a}}^{-1}$的3个分支，它们都是共形的。因此，它们减小双曲距离。由于对所有 k，$P_{\mathbf{a}}^{(k)}$的闭包都包含在$\tilde{P}_{\mathbf{a}}^{(k)}$中，故在所有深度为0的拼图块的并集上存在一致压缩常数 $0 < \kappa < 1$。设 d 为所有深度为0的拼图块之闭包的最大直径。则对任意深度为 n的 P_n，我们有$\operatorname{diam}(P_n) \le d\kappa^n \to 0$。因此，每个印象都是单点集。

□

作为直接推论，我们给出命题3.8的证明

命题3.8的证明。设$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$为一条 ι-转向内射线，它由 γ参数化：$[0,1) \to B_{\mathbf{a}}(v)$。若$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$是属于$\bigcup f_{\mathbf{a}}^{-n}(\Gamma_{\mathbf{a}}(\Theta,T))$的光滑内部射线，则它落在 $\partial B_{\mathbf{a}}$上的一点。下面我们考虑相反的情形。设 X 表示当 $s \to 1$时 $\gamma(s)$的所有极限点的集合。由推论3.6的(I1)，我们观察到对每个 n，X必包含在某个深度为 n的拼图块 $P\mathbf{a}_n(X)$中。因此，X包含在印象 $I(X) := \bigcap_n P\mathbf{a}_n(X)$中。由引理 3.9，$I(X) = \overline{X}$必为单点集 $\{z\}$。故$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$落在 z。

□

极大模原理得到的一个经典结果表明，在有界Fatou分支中，任意两条光滑内部射线都不可能着陆于同一个公共点。运用相同的思路，我们得到了关于左或右转向内射线的相应结果。

推论 3.10（不同着陆点）。设$\mathbf{a} \in \mathcal{S}_p$ 是一个 *ABC*-双曲映射。公共 *Fatou* 分支中的任意两条左或右转向内射线，若端点不同，就不可能着陆于同一个公共点。

证明。我们用反证法证明。设 $R_1 := \mathrm{R}^{\iota_1}_{\mathbf{a}}(v_1,t_1)$ 和 $R_2 := \mathrm{R}^{\iota_2}_{\mathbf{a}}(v_2,t_2)$ 是 $B_{\mathbf{a}}(v_1) = B_{\mathbf{a}}(v_2)$ 中的两条左或右内部射线，且 $\iota_1, \iota_2 \in \{L, R\}$。假设 R_1 和 R_2 着陆于同一个公共点 w。如果对某个 $n \ge 0$，成立 $f_{\mathbf{a}}^n(R_1) = f^n\mathbf{a}(R_2)$，那么 w 是 $f_{\mathbf{a}}^n$ 的临界点。这不可能，因为 $f_{\mathbf{a}}$ 是双曲的。

在下文中，我们考虑对每个 $n \ge 0$，$f^n\mathbf{a}\,(R_1) \ne f_{\mathbf{a}}^n(R_2)$ 的情形。注意，v_1, v_2 的轨道最终周期，且始终属于 Fatou 分支。因此，存在 n，使得 $\sigma^n(v_1) = \sigma^n(v_2) := c$。于是，通过进行迭代，我们可以假设 $v_1 = v_2 = c$，且 $t_1 = t_2 = t$。那么，R_1 和 R_2 必须分别为 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^L(c,t)$ 和 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^R(c,t)$。令 U 为 $\mathbb{C} \setminus (R_1 \cup R_2)$ 的唯一有界分支。那么，U 要么包含 c，要么包含 c'，其中 $c' \in B_{\mathbf{a}}(c)$ 满足 $\sigma(c) = \sigma(c')$。不失一般性，假设 $c \in U$。根据极大模原理，我们可知 $U \subset B_{\mathbf{a}}(c)$。因此，对于任意

$t \in \mathbb{S}$ 在 $(c,\ t) \notin \mathbf{M}'$ 的条件下，光滑内部射线 $R_{\mathbf{a}}^{c}(t)$ 落在 $U \cap \partial B_{\mathbf{a}}(c)$ 中的一个点上。但 $U \cap \overline{\partial} B_{\mathbf{a}}(c) = \{w\}$。因此，它们必定都落在 w 上。这不可能，因为 $(c,\ t) \notin \mathbf{M}'$ 可以是周期的，也可以是非周期的。

□

若 $s_{\mathbf{a}}^{v}(t) < 1$，且左右转向内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L}(v,\ t)$ 和 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{R}(v,\ t)$ 分别落在两点 z 和 w 上，则称 z 和 w 被左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R,}(v,\ t)$连接 。

引理 3.11（由左右内部射线连接）。若 z 和 w 被左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R,}(v,t)$ 连接，则可以找到 (v',t')，使其在 $\tilde{g}$ 作用下的正向轨道包含 $(x,t_{\mathbf{a}})$，且 $B_{\mathbf{a}}(v) = B_{\mathbf{a}}(v')$，从而 z 和 w 被左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R,}(v',t')$ 连接。

证明。由于 $s_{\mathbf{a}}^{v}(t) < 1$，根据引理 3.3，$(v,t)$ 最终会映射到 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 或 $(y,t'_{\mathbf{a}})$。若属于前一种情形，则结论已成立。因此，我们只需处理 (v,t) 的正向轨道包含 $(y,t'_{\mathbf{a}})$ 的情形。若为周期情形，则根据注 3.2 可知，其正向轨道最终会包含 $(x,t_{\mathbf{a}})$。因此结论成立。若为非周期情形，选取 (v',t')，使 (v,t) 和 (v',t') 的光滑内部弧终止于同一点。设 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L}(v,t)$ 落在 z 上，且 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{R}(v,t)$ 落在 w 上。根据注3.3可知，$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{R}(v',t')$ 落在 z 上，且 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L}(v',t')$ 落在 w 上。因此，z 和 w 被左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R,}(v',t')$ 连接。

□

3.5. **外部类与外部角**。给定一个 ABC-双曲映射 $\mathbf{a}$，广义内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 的着陆点记为 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$。由于$J_{\mathbf{a}}$ 是连通且局部连通的，根据 [22]，，有有限条外射线着陆于 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$。这些外射线的角度称为 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 或 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 的外部角 。令 $E_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 表示这些外部角组成的集合。该集合称为 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 或 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 的外部类 。

为方便起见，我们从每个外部类中选取一个优选元素。假设 $E_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t) = \{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}$，且射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ $R_{\mathbf{a}}(\theta_1)$ $R_{\mathbf{a}}(\theta_2)\ldots,R_{\mathbf{a}}(\theta_n)$ 在 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 附近按正向循环顺序排列。我们将 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 或 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 的优选外部角 $\vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)$ 定义为 θ_1。注意，ABC-双曲映射 $f_{\mathbf{a}}$在 $J_{\mathbf{a}}$中的每一点处都是局部共形的。根据共形映射保向的性质，可以验证

$$\tau_3(\vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(v,t)) = \vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(\tilde{g}(v,t)), \qquad \forall (v,t) \in \tilde{O} \times \mathbb{S}. \tag{7}$$

引理 3.12（外部角与组合学）. 一个 *ABC*-双曲映射 $f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构，当且仅当 $\vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(x,t_{\mathbf{a}})$ 在 τ_3 下对 $\iota \in \{L,R\}$ 是周期的。

证明. 若 $f_{\mathbf{a}}$ 具有周期组合结构，则由注 3.2，$(x,t_{\mathbf{a}})$ 在 $\tilde{g}$ 下是周期的。由 (7)，我们看到 $\vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(x,t_{\mathbf{a}})$ 对 $\iota \in \{L,R\}$ 是周期的。

反之，如果 $f_{\mathbf{a}}$ 具有非周期组合，那么 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 是非周期的。在此情况下，$\vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(x,t_{\mathbf{a}})$ 必定是非周期的。我们通过反证法证明这一点。假设 $\theta := \vartheta_{\mathbf{a}}^{\iota}(x,t_{\mathbf{a}})$ 在 τ_3 作用下的周期为 q。于是，$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(x,t_{\mathbf{a}})$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 落在一个周期为整除 q 的公共周期点 z 上。由于 $(x,t_{\mathbf{a}})$ 是非周期的，因此 $f_{\mathbf{a}}^{q}$ 将 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R,}(x,t_{\mathbf{a}})$ 映射到光滑内部射线 $R_{\mathbf{a}}^{v}(t)$，其中 $(v,t) := \tilde{g}^{q}(x,t_{\mathbf{a}})$，该射线也落在 z 上。根据推论 3.10，$B_{\mathbf{a}}(v') \neq B_{\mathbf{a}}(x)$ 是另一个 Fatou 分支，其边界上包含 z。由于 $f_{\mathbf{a}}^{q}$ 是局部保向的并且固定

$R_{\mathbf{a}}(\theta)$，它也必定固定光滑内部射线 $R^v_{\mathbf{a}}(t)$。因此，我们有 $f^q_{\mathbf{a}}(B_{\mathbf{a}}(v)) = f^q_{\mathbf{a}}(B_{\mathbf{a}}(x)) = B_{\mathbf{a}}(v)$。由于 $z \in \partial B_{\mathbf{a}}(v) \cap \partial B_{\mathbf{a}}(x)$，我们看到 z 是 $f^q_{\mathbf{a}}$ 的临界点。这与 $f_{\mathbf{a}}$ 的双曲性相矛盾。

□

4. Lamination of Boundary Maps

4.1. 参数内部射线。 在这一部分，我们研究参数$\mathbf{a}$ 对广义内部射线和参数上的外部类的依赖关系，并利用它研究双曲分支边界上的映射的层状结构。

设 $\mathcal{H}$ 是类型（A）、（B）或（C）的一个双曲分支。回忆一下，$\ell := \ell(\mathcal{H})$是满足 $f^{\ell}_{\mathbf{a}}(-c(\mathbf{a})) \in B_{\mathbf{a}}(c)$的最小整数，其中$\mathbf{a} \in \mathcal{H}$。根据 [29]，我们有 $\mathcal{H}$的如下参数化。

命题 4.1（双曲分支的参数化）。映射 $\Phi_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p \to \mathbb{D}$，$\mathbf{a} \mapsto \phi^c_{\mathbf{a}}(f^{\ell}_{\mathbf{a}}(-c(\mathbf{a})))$ 是一个次数为 $d(\mathcal{H}) = \deg(f^p_{\mathbf{a}}|_{B_{\mathbf{a}}(c)}) - 1$.

对于 $t \in \mathbb{S}$，$\Phi^{-1}_{\mathcal{H}}((0,1)e^{2\pi it})$的连通分支称为 $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$中角度为 t 的参数内部射线。因此，固定 $t \in \mathbb{S}$后，$\mathcal{H}$中角度为 t的参数内部射线恰有 $d(\mathcal{H})$条。每条角度为 t 的参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t)$都可以通过 $\Gamma : (0,1) \to \mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t)$以规范方式参数化，且 $\Phi_{\mathcal{H}} \circ \Gamma = \mathrm{id}$。

固定任意的 $\mathbf{a} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$，令 $t_{\mathbf{a}}, r_{\mathbf{a}}$ 如引理 3.3 所述。参数化映射 $\Phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}) = \phi^c_{\mathbf{a}}(f^{\ell}_{\mathbf{a}}(-c(\mathbf{a})))$ 等于 $r_{\mathbf{a}}e^{2\pi it_{\mathbf{a}}}$。因此，对于参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t_0)$ 上的任意 $\mathbf{a}$，都有 $t_{\mathbf{a}} = t_0$。下面的引理表明，当参数 $\mathbf{a}$沿参数内部射线 $\mathcal{R}$ 移动时，外射线和广义内部射线的结构保持不变。

引理 4.2（参数内部射线上的不变性）。设 $\mathcal{H}$ 是类型为（A）、（B）或（C）的一个双曲分支，并且 $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{H}$ 满足 $\Phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}_1) = r_0 e^{2\pi i t_0}$。设 $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t_0)$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一条参数内部射线，则对于每个 $\mathbf{a} \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t_0)$，存在一个拟-$\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\mathbb{C}}$共形映射 $h_{\mathbf{a}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{h_{\mathbf{a}}} & \widehat{\mathbb{C}} \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{a}_1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathbf{a}}} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{h_{\mathbf{a}}} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

此外，$h_{\mathbf{a}}$ 保持每条外射线和广义内部射线不变。

(1) $h_{\mathbf{a}}|_{\Omega_{\mathbf{a}_1}} = \psi_{\mathbf{a}} \circ \varphi_{\mathbf{a}_1}$ 是共形映射。对于 $\theta \in \mathbb{S}$, $h_{\mathbf{a}}(R_{\mathbf{a}_1}(\theta)) = R_{\mathbf{a}}(\theta)$。*(2)* $M'_{\mathbf{a}} = M'_{\mathbf{a}_1}$。对于$(v,t) \in M'_{\mathbf{a}}$，我们有 $h_{\mathbf{a}}(R^{\iota}_{\mathbf{a}_1}(v,t)) = R^{\iota}_{\mathbf{a}}(v(a)\ t)$，且$E^{\iota}_{\mathbf{a}}(v(a)\ t) = E^{\iota}_{\mathbf{a}_1}(v,t)$, $\vartheta^{\iota}_{\mathbf{a}}(v(a)\ t) = \vartheta^{\iota}_{\mathbf{a}_1}(v,t)$，其中 $v(a) := h_{\mathbf{a}}(v)$。

证明。我们通过拟共形手术重构内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t)$。对于$s > 0$，令 $\ell_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为由 $\ell_s(z) = z|z|^{s-1}$给出的线性映射，并且 $\sigma_s := \ell_s^*(\sigma_0)$，其中 σ_0 表示标准复结构。

令 σ'_s 为满足以下条件的复结构

- $\sigma'_s := (\phi^c_{\mathbf{a}_1})^*(\sigma_s)$ on $B^c_{\mathbf{a}_1}(s^c_{\mathbf{a}_1})$;
- $\sigma'_s = \sigma_0$ outside $\tilde{B}_{\mathbf{a}_1}$;
- $f^*_{\mathbf{a}_1}(\sigma'_s) = \sigma'_s$.

该复结构 σ'_s 具有有界畸变，并且连续依赖于 $s >0$。根据可测黎曼映射定理，存在一个拟共形

映射 $h_s:\ \widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 使得 $h_s^*(\sigma_0)=\sigma_s'$ 且 $h_s(\infty)=\infty$，$\lim_{z\to\infty}\frac{h_s(z)}{z}=1$，并且 $h_s(-c(\mathbf{a}_1))+h_s(c(\mathbf{a}_1))=0$。由此可知，$h_s\circ f_{\mathbf{a}_1}\circ h_s^{-1}$是一个首一中心化三次多项式，并且连续依赖于 $s>0$。令$h_s(c(\mathbf{a}_1))=c(\mathbf{a}(s))$，则有 $\mathcal{R}:=\{\mathbf{a}(s):\ s>0\}$ 在 $\mathcal{P}_3$中形成一条曲线。由于$f_{\mathbf{a}(s)}=h_s\circ f_{\mathbf{a}_1}\circ h_s^{-1}$是双曲的，因此 $\mathcal{R}\subset\mathcal{H}$。

由于 $\sigma_s'=\sigma_0$ 在 $\Omega_{\mathbf{a}_1}$上，因此 $h_s|_{\Omega_{\mathbf{a}_1}}$ 是 $f_{\mathbf{a}_1}$ 与 $f_{\mathbf{a}(s)}$之间的共形共轭。因此，$\varphi_{\mathbf{a}(s)}\circ h_s$ 将 $f_{\mathbf{a}_1}$ 与 $z\mapsto z^3$共轭。结合 $h_s(\infty)=\infty$这一事实，$\lim_{z\to\infty}\frac{h_s(z)}{z}=1$，我们得出结论：$\varphi_{\mathbf{a}(s)}\circ h_s$是$\Omega_{\mathbf{a}_1}$上的 B¨ottcher 映射。因此它必与 $\varphi_{\mathbf{a}_1}$重合。由此可知，对于 $\theta\in\mathbb{S}$，$h_s(R_{\mathbf{a}_1}(\theta))=R_{\mathbf{a}(s)}(\theta)$。出于同样的原因，可以验证$\phi^c_{\mathbf{a}(s)}\circ h_s|_{B^c_{\mathbf{a}_1}(s^c_{\mathbf{a}_1})}=\ell_s\circ\phi^c_{\mathbf{a}_1}$。

现在我们验证 $\mathcal{R}$ 与角度为 t_0 的参数内部射线重合。注意

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}(s))&=\phi^c_{\mathbf{a}(s)}\circ f^\ell_{\mathbf{a}(s)}(-c(\mathbf{a}(s)))=\phi^c_{\mathbf{a}(s)}\circ f^\ell_{\mathbf{a}(s)}\circ h_s(-c(\mathbf{a}_1))\\&=\phi^c_{\mathbf{a}(s)}\circ h_s\circ f^\ell_{\mathbf{a}_1}(-c(\mathbf{a}_1))=\ell_s\circ\phi^c_{\mathbf{a}_1}\circ f^\ell_{\mathbf{a}_1}(-c(\mathbf{a}_1))\\&=\ell_s\circ\Phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}_1)=r_0^s e^{2\pi i t_0}.\end{aligned}$$

由于 $\{r_0^s:\ s>0\}=(0,1)$，结论得证。

对于$\mathbf{a}(s)\in\mathcal{R}$，记 $v(\mathbf{a}(s)):=h_s(v(\mathbf{a}_1))$。给定一条广义内部射线 $\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}_1}(v,t)$，由于 $h_s|_{B^c_{\mathbf{a}_1}(s_0)}\circ\psi^c_{\mathbf{a}_1}=\psi^c_{\mathbf{a}(s)}$ 且 h_s 是保向共轭，我们可推得 $h_s(\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}_1}(v,t))=\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v(\mathbf{a}),t)$。由 h_s的连续性可知，对于任意 $\theta\in\mathbb{S}$，$h_{\mathbf{a}(s)}(z^\iota_{\mathbf{a}_1}(v,t))=z^\iota_{\mathbf{a}(s)}(v(\mathbf{a}(s)),t)$，且 $h_s(z_\theta(\mathbf{a}_1))=z_{\mathbf{a}(s)}(\theta)$。因此，$\mathbf{a}(s)(v(\mathbf{a}(s)),t)=E^\iota_{\mathbf{a}_1}(v,t)$。

将记号 h_s 改为 $h_{\mathbf{a}}$，其中 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(s)$，证明即告完成。

□

根据 [39]，已证明 $\partial\mathcal{H}\cap\mathcal{S}_p$ 是 Jordan曲线。因此，每条参数内部射线都着陆，即 $\Gamma(s)$ 收敛至某个$\mathbf{a}\in\partial\mathcal{H}\cap\mathcal{S}_p$，当$s\to 0$时。反过来，$\partial\mathcal{H}\cap\mathcal{S}_p$ 中的每个边界点都是唯一一条参数内部射线的着陆点。

本文余下部分采用以下约定假设。

假设 4.1。 $\mathcal{H}$ 是类型为（A）、（B）或（C）的有界双曲分支，$\mathbf{a}_0\in\partial\mathcal{H}\cap\mathcal{S}_p$，且 $\mathcal{R}:=\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$（$t_0$）是落在$\mathbf{a}_0$处的参数内部射线。

注意，$O=O(\mathbf{a})$、$\mathbf{M}'_{\mathbf{a}}$、$\vartheta^\iota_{\mathbf{a}}(v,t)$和 g，$\tilde{g}$的原始定义都依赖于$\mathbf{a}$。然而，根据引理 4.2，我们知道它们在参数内部射线 $\mathcal{R}$上与$\mathbf{a}$无关。因此，我们将继续使用记号 O、$v\in O$、g 和 $\tilde{g}$。我们也将使用记号 $\mathbf{M}'$ 和 $\vartheta^\iota(v,t)$，分别表示 $(v,t)\in\mathbf{M}'$ 和 $\iota\in\{L,R\}$。

4.2. **视觉层状结构**。 本节开始研究$\mathbf{a}_0$的实层状结构$\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。我们的策略是研究左右内部射线的结构。

从计算机生成的 Julia 集图像中，我们看到，当 $\mathbf{a}\in\mathcal{R}$趋于 $\mathbf{a}_0$，时，对于任意 $(v,t)\in\mathbf{M}'$，由左右内部射线 $\mathrm{R}^{L,R}_{\mathbf{a}}(v,t)$ 连接的落点 $z^L_{\mathbf{a}}(v,t)$ 与 $z^R_{\mathbf{a}}(v,t)$ 会越来越接近。可以合理地猜想，对于极限映射 $\mathbf{a}_0$，，两条外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L(v,t))$ 与 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R(v,t))$ 落在一个公共点上。因此，自然可以定义 $\mathbf{a}_0$ 的如下视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

定义3（视觉层状结构）. 定义关系 $\Lambda(\mathbf{a}_0) \subset \mathbb{S}\times\mathbb{S}$，它包含对角线 $\{(\theta,\theta)\colon\ \theta\in\mathbb{S}\}$ 并且对于 $\theta\neq\theta'$，我们有 $(\theta,\theta')\in\Lambda(\mathbf{a}_0)$，当且仅当存在 $(v,t)\in\mathbf{M}'$，使得 θ,θ' 中的一个是 $\vartheta^L(v,t)$，另一个是 $\vartheta^R(v,t)$。

$\Lambda_{\mathbb{R}}$（$_0$）的视觉层状结构是指包含 $\lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathcal{H}$）$\cup\Lambda$（$_0$）的最小等价关系。

本章节的主要目的是证明，视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}$（$_0$）与真实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}$（$_0$）一致。

引理*4.3*（ $\Lambda(a_0)$的刻画）。关系 $\Lambda(a_0)$是一个极小的 τ_3 不变等价关系，其生成元为 $E^*=\{\vartheta^L(x,t_0)\ \vartheta^R(x,t_0)\}$。 $\Lambda(a_0)$的所有非单元素等价类，对于所有正向轨道包含(x,t_0)的(v,t)，均为 $\{\vartheta^L(v,t)\ \vartheta^R(v,t)\}$。

证明。首先，我们证明 Λ（$_0$）是一个等价关系。我们只需验证传递性。设（θ_1,θ_2），（θ_2,θ_3）是 $\in\Lambda$（$_0$）中两个不在对角线上的元素。接下来我们证明 $\theta_1=\theta_3$。

我们用反证法证明，假设 $\theta_1\neq\theta_3$。根据 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 的定义，存在 (v,t)、(v',t')，使得 $\{\theta_1,\theta_2\}=\{\vartheta^L(v,t)\ \vartheta^R(v,t)\}$ 且 $\{\theta_2,\theta_3\}=\{\vartheta^L(v',t')\ \vartheta^R(v',t')\}$。假设 $\theta_2=\vartheta^\iota(v,t)=\vartheta^{\iota'}(v',t')$。由于 $\theta_1\neq\theta_3$，我们有 $(v',t')\neq(v,t)$。我们断言 v和 v' 不属于同一个 Fatou 分支。若 $B_{\mathbf{a}}(v)=B_{\mathbf{a}}(v')$，则根据推论 3.10，$\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $\mathrm{R}^{\iota'}$a (v',t') 必须有相同端点。根据注3.3，我们处于非周期情形，(v,t) 和 (v',t') 的光滑内部弧必须终止于 $-c(\mathbf{a})$ 的同一个原像，且 ι 不同于 ι'。不失一般性，假设 $\iota=L,\ \iota'=R$。再次根据注3.3，$\mathrm{R}^R_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $\mathrm{R}^L_{\mathbf{a}}(v',t')$ 必须有相同端点，因此落在一个公共点上。根据外部角的选取以及 $B_{\mathbf{a}}(v)=B_{\mathbf{a}}(v')$ 这一事实，我们看到 $\theta_1=\theta_3$。这就产生了矛盾。因此，必有 $B_{\mathbf{a}}(v)\neq B_{\mathbf{a}}(v')$。但根据外部角的选取以及 $\theta_2=\vartheta^\iota(v,t)=\vartheta^{\iota'}(v',t')$ 这一事实，这显然不可能。因此，我们也得到了矛盾。由此可知 $\theta_1=\theta_3$。因此传递性成立，这意味着 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是一个等价关系。

接下来，我们证明 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是极小的。上述证明还表明，$\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 的非单点等价类恰好是 $\{\vartheta^L(v,t)\ \vartheta^R(v,t)\}$，对所有 $(v,t)\in\mathbf{M}'$ 均如此。记 $E^*:=\{\vartheta^L(x,t_0)\ \vartheta^R(x,t_0)\}$。设 $E:=\{\vartheta^L(v,t)\ \vartheta^R(v,t)\}$ 是一个等价类，则这两个角度对应的外射线的着陆点 z_1,z_2 由左右内部射线 $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}}(v,t)$ 相连。根据引理 3.11，我们可以找到 (v',t')，其正向轨道包含 (x,t_0)，且满足 $B_{\mathbf{a}}(v)=B_{\mathbf{a}}(v')$，使得 z_1,z_2 由 $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}}(v',t')$ 相连。由于 $B_{\mathbf{a}}(v)=B_{\mathbf{a}}(v')$，我们推得 $E=\{\vartheta^L(v',t')\ \vartheta^R(v',t')\}$。根据 (7)，我们看到 E 在 τ_3 作用下最终映射到 E^*。这意味着 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是极小的。

最后，我们证明 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是 τ_3-不变的。设 E 是 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 的一个等价类。若 E 是单点集，则 $\tau_3(E)$ 是一个单元素等价类。假设 $E:=\{\vartheta^L(v,t)\ \vartheta^R(v,t)\}$ 是一个非单元素等价类，且 $(v,t)\in\mathbf{M}'$。记 $(v',t'):=\tilde{g}(v,t)$。由 (7) 可得 $\tau_3(\vartheta^\iota(v,t))=\vartheta^\iota(v',t')$。若 $(v',t')\in\mathbf{M}'$，则 $\tau_3(E)=\{\vartheta^L(v',t')\ \vartheta^R(v',t')\}$ 也是一个等价类。若 $(v',t')\notin\mathbf{M}'$，则 $\tau_3(\vartheta^L(v,t))=\tau_3(\vartheta^R(v,t)):=\theta$。由此可知，$(v,t)$ 的内弧必定终止于 $-c(\mathbf{a})$。因此，我们可以假设 $(v,t)=(x,t_0)$。在这种情况下，我们需要证明 $\{\theta\}$ 构成一个单元素等价类。否则，存在 $(v'',t'')\in\mathbf{M}'$，使得对某个 $\iota\in\{L,R\}$，$\theta=\vartheta^\iota(v'',t'')$。由此可知，存在 n，使得 $\tau_3^n(\theta)=\vartheta^\iota(x,t_0)$，从而 $\tau_3^{n+1}(\theta)=\theta$。这意味着二者均

θ 和 $\vartheta^{\iota}(x,t_0)$ 都是周期的，这与引理 3.12 矛盾。这证明了 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是 τ_3-不变的。

□

两个角度 $\vartheta^L := \vartheta^L(x,t_0)$ 与 $\vartheta^R := \vartheta^R(x,t_0)$ 称为视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的两个特征角度 。

引理 4.4 （其刻画对象为 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$)。 对于任意等价类 E （属于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$），存在等价类 $E_{\mathcal{H}} \subset E$ （属于 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ ），使得或者

(C1) $E = E_{\mathcal{H}}$，或者(C2) 对于任意 $\theta \in E \setminus E_{\mathcal{H}}$ 与 $\theta' \in E_{\mathcal{H}}$，我们有 $(\theta,\theta') \in \Lambda(\mathbf{a}_0)$。

证明。 设 E 为 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的一个等价类。固定一个 $\in \mathcal{R}$，考虑集合$Z_{\mathbf{a}}(E) := \{z_\theta(\mathbf{a}) : \theta \in E\}$。若 $\#Z_{\mathbf{a}}(E) \le 2$，则任取一点 $z \in Z_{\mathbf{a}}(E)$，并令$E_{\mathcal{H}}$ 为落在 z处的外射线的角度所成之集。由 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$的定义，该结论必然成立。

下文中，我们假设 $\#Z_{\mathbf{a}}(E) \ge 3$。根据 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的定义，我们可以找到三个点 z_0、z_1、$z_2 \in Z_{\mathbf{a}}(E)$，使得 z_0、z_1 由左侧内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$、$(v_1,\ t_1)$ 相连，而 z_1、z_2 由左侧-右侧内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$、$(v_2,\ t_2)$ 相连。设 $E_{\mathcal{H}}$ 为落在 z_1上的外射线的角度。

首先，我们断言这只会发生在周期情形。根据引理 3.11，我们可以假设 (v_1,t_1) 和 (v_2,t_2) 最终都映射到 (x,t_0)。因此，我们可以假设存在 n 和 k，使得 $\tilde{g}^n(v_1,t_1) = (x,t_0)$，且$\tilde{g}^k(v_2',t_2') = (x,t_0)$，其中 $(v_2',t_2') := \tilde{g}^n(v_2,t_2)$。于是，$z_0' := f_{\mathbf{a}}^n(z_0)$ 和 $z_1' := f_{\mathbf{a}}^n(z_1)$ 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}, (x,t_0)$ 相连，而 $z_1', z_2' := f_{\mathbf{a}}^n(z_2)$ 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}, (v_2',t_2')$ 相连。假设我们处于非周期情形，那么根据引理 3.12，z_0' 和 z_1' 都是非周期的。由此可得，$f_{\mathbf{a}}^k(z_0') = f_{\mathbf{a}}^k(z_1')$，且 $f_{\mathbf{a}}^k(z_1') = z_1'$ 或 $f_{\mathbf{a}}^k(z_1') = z_0'$。在这两种情形下，我们都得到 z_0' 或 z_1' 是周期的。这是一个矛盾。

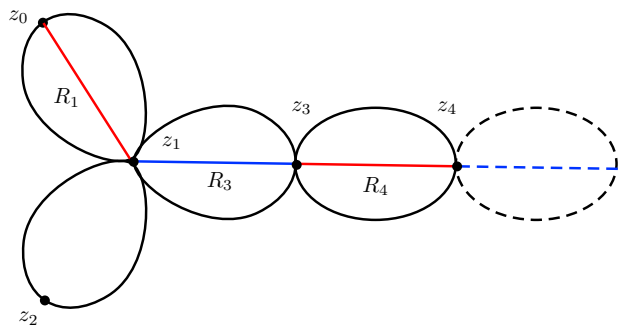


FIGURE 14.

因此，我们看到这必定是周期情形。现在我们通过反证法证明 (C2) 成立。否则，我们可以找到 $\theta \in E \setminus E_{\mathcal{H}}$, z_3, z_4，使得 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 落在 z_4,z_1, z_3 由 $R_3 := \mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}, (v_3,t_3)$ 连接的位置，而 z_3, z_4 由 $R_4 := \mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}, (v_4,t_4)$ 连接。在迭代过程中，我们可以假设 $(v_1,t_1) = (x,t_0)$，并记 $R_1 := \mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}, (x,t_0)$。在这种情况下，可以验证 z_0, z_1, z_3, z_4 和 v_3, v_4 都是周期的（见图 14）。令 m 为满足 $\tilde{g}^m(v_1,t_1) = (v_3,t_3)$ 的最小整数，并令 ℓ 为满足 $\tilde{g}^\ell(v_3,t_3) = (v_4,t_4)$ 的最小整数。由此可得 $f_{\mathbf{a}}^m(R_1) = R_3$，且

$f^{\ell}\mathbf{a}(R_3) = R_4$。那么必有 $f_{\mathbf{a}}^{m}(\{z_0, z_1\}) = \{z_1, z_3\}$，且 $f^{\ell}\mathbf{a}(\{z_1, z_3\}) = \{z_3, z_4\}$。由引理 2.6 可知，$f_{\mathbf{a}}^{m}(z_1) = z_1$，且 $f^{m}\mathbf{a}\,(z_0) = z_3$, $f^{\ell}\mathbf{a}(z_3) = z_3$，以及 $f^{\ell}\mathbf{a}(z_1) = z_4$。因此，我们有 $f_{\mathbf{a}}^{m+\ell}(z_0) = z_3$，且 $f^{m+\ell}\mathbf{a}\,(z_1) = z_4$。由此可得，$f_{\mathbf{a}}^{m+\ell}$ 将 $\Gamma_1 := R_1 \cup R_3 \cup \{z_1\}$ 映到另一条曲线 Γ_2，其满足 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_3\}$。$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{z_3\}$ 连接 z_0 和 $f_{\mathbf{a}}^{2(m+\ell)}(z_0)$。现在我们沿用引理 2.6 证明中的相同论证。由于 z_0 是周期的，有限次应用 $f_{\mathbf{a}}^{m+\ell}$ 后，我们得到 $K_{\mathbf{a}}$ 中的一个圆 $\bigcup_n f_{\mathbf{a}}^{n(m+\ell)}(\Gamma_1)$。因此，这种情形也被排除。由此我们得出 (C2) 成立。

□

虽然我们最终将证明，视觉层状结构就是真实层状结构，因此它满足层状结构公理 (R1)–(R5)，但为此，我们准备先从组合的角度证明这一较弱的结果。

命题 4.5（视觉层状结构是层状结构）。视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 是一个 τ_3-不变层状结构，即它满足层状结构公理。

证明。我们验证 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 满足规则 (R1) 至 (R5)。

（R2）的证明：设 E 是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的一个等价类。设 $E_{\mathcal{H}}$ 是我们在引理 4.4 中得到的 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 的等价类，z_0 是 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 与 $\theta \in E_{\mathcal{H}}$ 的公共着陆点，其中 $\mathbf{a} \in \mathcal{R}$ 固定。若 $E = E_{\mathcal{H}}$ 成立，则 E 显然是有限的。否则，根据引理 4.4，对于任意 $\theta \in E \setminus E_{\mathcal{H}}$，$z_\theta(\mathbf{a})$ 和 z_0 都由某条左右内部射线连接。以 z_0 为端点的左右内部射线至多有有限条。因此 $Z_{\mathbf{a}}(E)$ 是有限的。结合 $J_{\mathbf{a}}$ 中每个点都是有限条外射线的着陆点这一事实，可知 E 是有限的。因此 (R2) 成立。

（R3）的证明：设 E 是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$的一个等价类，我们需要证明$\tau_3(E)$也是一个等价类。由于 $E_{\mathcal{H}}$ 是 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$的一个等价类，且$\tau_3$ 是不变的，我们看到 $E' = \tau_3(E_{\mathcal{H}})$是 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$的一个等价类，因此包含于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$的某个等价类 E' 中。我们将证明 $\tau_3(E) = E'$。首先，我们证明 $\tau_3(E) \subset E'$。事实上，根据引理 4.4，对于任意 $\theta \in E \setminus E_{\mathcal{H}}$ 和$\theta' \in E_{\mathcal{H}}$，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$由某条左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}$，$(v,t)$连接。分两种情况。若 $f_{\mathbf{a}}(\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}, (v,t))$是一条光滑内部射线，则 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta))$和$R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta'))$落在同一个公共点。因此，$\tau_3(\theta) \in \tau_3(E_{\mathcal{H}}) \subset E'$。若 $f_{\mathbf{a}}(\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}, (v,t))$也是一条左右内部射线，则 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta))$和 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta'))$由这条左右内部射线连接。因此，我们也有 $\tau_3(\theta) \in E'$。由此可见，$\tau_3(E) \subset E'$ 成立。

现在我们证明反向结论。对于任意 $\theta' \in E' \setminus \tau_3(E_{\mathcal{H}})$，任意 $\theta'' \in E_{\mathcal{H}}$, $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta''))$，它们都由某条左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}$，$(v',t')$ 连接。因此，存在 (v,t)，使得 $\tilde{g}(v,t) = (v',t')$，且 θ使得 $\tau_3(\theta) = \theta'$，从而 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta'')$ 由左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}$，$(v,t)$ 连接。因此，$\theta \in E$，这意味着 $\theta' \in \tau_3(E)$。于是，$E' \subset \tau_3(E)$。因此，(R3) 成立。

证明 (R4)：现在我们证明 (R4) 成立，即对 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的任意等价类，$\tau_3|_E$ 是保相继的。固定一个 $\in \mathcal{R}$，将角度属于 $E_{\mathcal{H}}$ 的外射线的着陆点记为 z_0。设 $(\theta,\theta')+$为E的任意补弧。有两种情形。若 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 着陆于公共点 w，即 $(\theta,\theta')+$是 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 的某个等价类的补弧，则 $(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))+$是 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 的某个等价类的补弧。我们还应进一步断言，它是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的 $\tau_3(E)$ 的补弧。否则，存在另一个 $\vartheta' \in \tau_3(E) \cap (\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))+$。于是存在 $(v',t') \in \mathrm{M}'$ 使得

$R_{\mathbf{a}}(\vartheta')$ 与 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta))$ 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$，$(v',t')$ 连接。由于 $f_{\mathbf{a}}$ 是局部保向的，我们可以找到 $(v,t)\in\mathrm{M}'$ 以及 $\vartheta\in(\theta,\theta')_+$，满足 $\tilde{g}(v,t)=(v',t')$ 且 $\tau_3(\vartheta)=\vartheta'$，使得 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 与 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta)$ 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$，$(v,t)$ 连接。因此 $\vartheta\in(\theta,\theta')_+\cap E$。这与 $(\theta,\theta')_+$ 是 E 的补弧这一事实相矛盾。

现在假设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 落在不同的点上。我们声称其中之一必为 z_0。否则，根据引理 4.4，不妨设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 z_0 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$, (v,t) 连接，而 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 和 z_0 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$, (v',t') 连接。于是可以找到 $\vartheta\in(\theta,\theta')_+$，使得 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta)$ 落在 z_0 上。因此，我们有 $\vartheta\in E$。这与 $(\theta,\theta')_+$ 是 E 的补弧这一事实矛盾。因此，不妨设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 落在 z_0 上，且 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 和 z_0 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$, (v',t') 连接。分两种情况。若 $\tau_3(\theta)\neq\tau_3(\theta')$，则 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta))$ 落在 $f_{\mathbf{a}}(z_0)$ 上，且 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3(\theta'))$ 和$f_{\mathbf{a}}(z_0)$ 由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$, $(\tilde{g}(v',t'))$ 连接。若 $(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))_+$ 不是 $\tau_3(E)$ 的补弧，则存在 $\vartheta'\in\tau_3(E)\cap(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))_+$。于是 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta')$ 落在 $f_{\mathbf{a}}(z_0)$ 上，或者由某条左右内部射线连接到 $f(z_0)$。因此，运用上述类似论证，存在 $\vartheta\in(\theta,\theta')_+$，使得 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta)$ 落在 z_0 上，或者由某条左右内部射线连接到 z_0。由此可得 $\vartheta\in E$，这与 $(\theta,\theta')_+$ 是 E 的补弧这一事实矛盾。现在考虑 $\tau_3(\theta)=\tau_3(\theta')$ 的情形。在这种情况下，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 必须由 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$, (x,t_0) 连接，而且这必定是非周期情形。可以验证，$\tau_3(E)=\{\tau_3(\theta)\}$ 是一个单点集。因此，$(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta))_+$ 是 $\tau_3(E)$ 的补弧。

（R5）的证明：设 E 是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的一个等价类，而 $\Gamma_{\mathbf{a}}(E)$ 是所有落在 $Z_{\mathbf{a}}(E)$ 上的外射线以及连接它们的所有左右内部射线的并集。这是一个连通集。设 E' 是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的任意另一个等价类。由于 $Z_{\mathbf{a}}(E)\cap Z_{\mathbf{a}}(E')=\emptyset$，$\Gamma_{\mathbf{a}}(E)$ 与 $\Gamma_{\mathbf{a}}(E')$ 之间唯一可能的交集是左右内部射线的交集。由推论 3.6 的推论（I2），$\Gamma_{\mathbf{a}}(E')$ 必须属于 $\mathbb{C}\setminus\Gamma_{\mathbf{a}}(E)$ 某个连通分支的闭包。因此，E' 必须属于 $\mathbb{S}\setminus E$ 的某个连通分支。故（R5）成立。

（R1）的证明：还需证明（R1）成立，也就是说，$\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 是 $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ 的一个闭集。设 $\{(\theta_n,\theta_n')\}$ 是 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 中的一个序列，且当 $n\to\infty$ 时，(θ_n,θ_n') 趋于对角线以外的 (θ,θ')。我们需要证明 $(\theta,\theta')\in\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。设 E^n 是包含 θ_n,θ_n' 的等价类。不妨假设所有 E^n 互不相同，因此 θ_n 和 θ_n' 也都互不相同。如果 $\{(\theta_n,\theta_n')\}\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 有一个子序列，那么 $(\theta,\theta')\in\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$，因为 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 是闭集。下文中，不妨假设对所有 n，$(\theta_n,\theta_n')\notin\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。根据非交错性质（R5），对于任意 n, θ_{n+1},θ_{n+1}'，它们要么属于 $(\theta_n,\theta_n')_+$，要么属于 $(\theta_n',\theta_n)_+$。不失一般性，不妨假设对所有 n，$(\theta_{n+1},\theta_{n+1}')_+\subset(\theta_n,\theta_n')_+$。

我们还可以假设，对于每个 n，$R_{\mathbf{a}}(\theta_n)$和 $R_{\mathbf{a}}(\theta_n')$都可以由一条左右内部射线连接。事实上，若对某个 n，$R_{\mathbf{a}}(\theta_n)$和 $R'_{\mathbf{a}}(\theta_n')$由两条左右内部射线连接，即存在 $\theta_n''\in E^n_{\mathcal{H}}$以及左右内部射线 R_1,R_2，使得 θ_n,θ_n''由 R_1连接，且 θ_n',θ_n''由 R_2连接。由 (R5)，$(\theta_{n+1},\theta_{n+1}')_+$要么包含于$(\theta_n,\theta_n'')_+$中，要么包含于$(\theta_n'',\theta_n')_+$中。因此，对每个 n，用 θ_n''替换 θ_n,θ_n'中的一个，我们得到一个新的嵌套序列$(\theta_n,\theta_n')_+$，它满足：对所有 n，$R_{\mathbf{a}}(\theta_n)$和 $R_{\mathbf{a}}(\theta_n')$由一条左右内部射线$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$连接，$(v_n,t_n)$。

令 $B_n:=B_{\mathbf{a}}(v_n)$。有两种情况。如果对于足够大的 n，$B_n=B_{\mathbf{a}}(v)$，那么我们证明 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 必须落在 $\partial B_{\mathbf{a}}(v)$ 上的一个公共点。我们假设对所有 n，$B_n=B_{\mathbf{a}}(v)$。令 U_n 为 $\mathbb{C}\setminus(\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R},(v_n,\underline{t_n})\cup\underline{R_{\mathbf{a}}(\theta)}\cup\underline{R_{\mathbf{a}}(\theta')})$ 的连通分支，其中包含角度属于 $(\theta_n,\theta_n')_+$ 的外射线。

令 $X_n := \overline{B_n} \cap U_n$。由于 $(\theta_{n+1}, \theta'_{n+1})_+ \subset (\theta_n, \theta'_n)_+$，我们知道 $R_{\mathbf{a}}(\theta_{n+1})$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta'_{n+1})$ 包含在 U_n 中。因此，$U_{n+1} \subset U_n$ 和 X_{n+1} 是 X_n 的真子集。于是 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 必须落在 $X := \bigcap_n X_n$ 中的点上。我们声称，X 必须包含在拼图系统的某个印象中。事实上，当 n 足够大时，X_n 不包含 $m \le n$ 的任何 m 次原像。因此，对于每个 $m \ge 1$，我们都可以找到足够大的 n，使得 $X_n \cap G_m^{\mathbf{a}} = \emptyset$。所以 X_n 包含在深度为 m 的某个拼图块 $P_m^{\mathbf{a}}$ 中。因此，$X \subset \bigcap_m P_m^{\mathbf{a}}$。由引理 3.9 可知，$X$ 是一个单点集。因此，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 落在同一个公共点，这意味着 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

现在，我们考虑互补情形。我们可以假设 $\{B_n\}$ 互不相同。固定 n，由定理 2.1，B_{n+1} 属于相对于 B_n的一个肢。由此可知，存在一对外射线 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta_n)$、$R_{\mathbf{a}}(\vartheta'_n)$，连同它们的公共着陆点，将 B_{n+1} 与 B_n分离。因此它们将$R_{\mathbf{a}}(\theta_{n+1}) \cup R_{\mathbf{a}}(\theta'_{n+1})$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta_n) \cup R_{\mathbf{a}}(\theta'_n)$分离。由此可得$(\theta_{n+1}, \theta'_{n+1})_+ \subset (\vartheta_n, \vartheta'_n)_+ \subset (\theta_n, \theta'_n)_+$。由 ϑ_n、ϑ'_n的构造，当$n \to \infty$时，我们有$(\vartheta_n, \vartheta'_n) \to (\theta, \theta')$。因此，由于$(\vartheta_n, \vartheta'_n) \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$，我们有$(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。这证明了(R1)成立。

□

4.3. **边界映射的拼图与印象**。在本部分中，我们将拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 应用于边界映射 $\mathbf{a}_0$。这将揭示$\mathbf{a}_0$ 的层状结构与$\mathbf{a} \in \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t_0)$的层状结构之间的联系。

以下结果是对 [35, 定理 3.3] 的重新表述。

定理 4.6。存在依赖于$\mathbf{a}_0$ 的 $T = T(\mathbf{a}_0)$，使得拼图系统$\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 在 $\Theta = \emptyset$ 条件下具有以下几种情形。

不可重整化情形： 若每个印象都是单点集，则(x, t_0) 在 $\tilde{g}$ 作用下是非周期的。

可重整化情形： 若存在非单点集印象，则存在一个可重整化周期 q，使得 $f_{\mathbf{a}_0}^q$ 在 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$ 上的限制与抛物二次多项式 p_c 共轭。当且仅当一个印象最终映射到 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$时，它不是单点集印象。以下有两种情形。

- **抛物情形：** (x, t_0) 在 $\tilde{g}$ 下是周期的，且 $\psi^x{}_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi i t_0})$ 是一个抛物周期点。也就是说，p_c 是抛物的。
- **PCF 情形：** (x, t_0) 是非周期的，且 $-c(\mathbf{a}_0)$ 最终映射到一个排斥周期点，也就是说，p_c 是后临界有限的。

在下文中，我们谨慎地选取 Θ，使拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 具有以下更好的性质。

命题 4.7 (良好拼图系统**)**。存在 $\Theta := \Theta(\mathbf{a}_0)$，使得拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 满足以下条件。

- **周期情形：** 如果 (x, t_0) 在 $\tilde{g}$ 下是周期的，那么存在 k，使得 $f^k{}_{\mathbf{a}_0}$ 在 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$ 上的限制与一个具有抛物不动点 $\psi^x{}_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi i t_0})$的二次多项式共轭。
- **非周期情形：** 如果(x, t_0) 在 $\tilde{g}$ 作用下不是周期的，那么每个印象都是一个单点集。

证明。我们只需考虑可重整化情形。设$\mathbf{a}_0$ 是 PCF 可重整化的。由于重整化二次多项式 p_c 是后临界有限的，根据对二次多项式的研究，存在 θ，θ' 使得

$R_c(\theta_1)$ 和 $R_c(\theta_2)$ 在一个不位于临界轨道上的公共排斥周期点处落点。此外，$\bigcup_n p_c^{-n}(R_c(\theta_1) \cup R_c(\theta_2))$ 将 p_c 的朱利亚集划分为单点集。对于三次多项式 $f_{\mathbf{a}_0}$，由于 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$ 与 p_c的填充朱利亚集同胚，我们可以找到 θ_1', θ_2'，使得 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1')$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2')$ 在一个不位于 $-c(\mathbf{a}_0)$ 轨道上的公共排斥周期点处落点，并且 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$ 可以通过 $\bigcup_n f_{\mathbf{a}_0}^{-n}(R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1') \cup R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2'))$ 划分为单点子印象。令 $\Theta := \overline{\{\theta_1', \theta_2'\}}$。由此可知，对于 $J_{\mathbf{a}_0}$ 中的每一点，相对于 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 的印象都是单点集。

现在我们考虑可进行抛物重整化的情形。由定理 4.6 可知，存在一个重整化周期 q，且重整化二次多项式 p_c有唯一的抛物轨道。根据轨道分离引理（[38, 引理 3.7]，另见 [35, 引理 3.6]），存在 θ, θ'，使得 $R_c(\theta_1)$ 和 $R_c(\theta_2)$ 落在同一个排斥周期点上，并且抛物点位于 $\bigcup_n p_c^{-n}(R_c(\theta_1) \cup R_c(\theta_2))$ 的不同连通分支中。出于同样的原因，我们可以找到θ_1', θ_2'，使得 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1')$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2')$ 落在同一个排斥周期点上，并且 $f_{\mathbf{a}_0}$ 的抛物轨道被 $\bigcup_n f_{\mathbf{a}_0}^{-n}(R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1') \cup R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2'))$ 分离。因此，考虑拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$，其中 $\Theta := \{\theta_1', \theta_2'\}$ 时，每个印象至多包含一个抛物点。因此，存在一个为 q 的倍数的 k，使得 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的新印象上的 $f_{\mathbf{a}_0}^k$ 与一个具有抛物不动点的二次多项式共轭。

□

从现在起，我们固定满足命题 4.7 的拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$。下面的引理是引理 3.1] 的一个变体，说明 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 的图 $G_n^{\mathbf{a}}$ 和 $\Gamma_n^{\mathbf{a}}$ 具有全纯运动。

引理 4.8（图形的稳定性）。设 $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{S}_p \cap \mathcal{C}$ 满足 $-c(\mathbf{a}_0) \notin B_{\mathbf{a}_0}$。固定 Θ、T、s、s'，令 $\{G_n^{\mathbf{a}}\}$ 为拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 的图形序列。固定 $n \geq 0$，则存在 $\mathcal{P}_n$ 的充分小邻域$\mathbf{a}_0$，以及一个全纯运动h_n：$\mathcal{P}_n \times G_n^{\mathbf{a}_0} \to \mathbb{C}$，使得以下结论成立。

（1）对于满足 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta) \cap X_n^{\mathbf{a}_0} \subset G_n^{\mathbf{a}_0}$ 的 θ，有 $h_n(\mathbf{a}, R_{\mathbf{a}_0}(\theta) \cap X_n^{\mathbf{a}_0}) = R_{\mathbf{a}}(\theta) \cap X_n^{\mathbf{a}}$。（2）对于 $(v, t) \in O \times \mathbb{S}$，若满足 $s_{\mathbf{a}_0}^v(t) = 1$ 且 $R_{\mathbf{a}_0}^v(t) \cap X_n^{\mathbf{a}_0} \subset G_n^{\mathbf{a}_0}$，则有 $s_{\mathbf{a}}^v(t) = 1$以及 $h_n(\mathbf{a}, R_{\mathbf{a}_0}^v(t) \cap X_n^{\mathbf{a}_0}) = R_{\mathbf{a}}^v(t) \cap X_n^{\mathbf{a}}$。

利用引理 4.8，我们推出以下重要引理，它断言：角度属于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的某个等价类的外射线，其着陆点属于拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 的同一印象。

引理 4.9 (公共印象)。对于 $(\theta, \theta') \in \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$，$z_\theta(\mathbf{a}_0)$ 和 $z_{\theta'}(\mathbf{a}_0)$ 属于拼图系统 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_0}(\Theta, T, s, s')$ 的同一印象。

如果一条 ι-转向内射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t)$ 包含 $-c(\mathbf{a})$ 的一个迭代原像 $\omega(\mathbf{a})$，使得对于 $\mathbf{a} \in \mathcal{R}$，有 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t) = z_\theta(\mathbf{a})$，那么我们有

$$I_{\mathbf{a}_0}(\psi_{\mathbf{a}_0}^v(e^{2\pi i t})) = I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathbf{a}_0)) = I_{\mathbf{a}_0}(\omega(\mathbf{a}_0)) \tag{8}$$

其中 $\omega(\mathbf{a}_0) = \lim_{\mathbf{a} \to \mathbf{a}_0} \omega(\mathbf{a})$ 也是 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的一个迭代原像。

证明。假设 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t)$ 包含 $-c(\mathbf{a})$ 的一个迭代原像 $\omega(\mathbf{a})$，且对于$\mathbf{a} \in \mathcal{R}$，$z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t) = z_\theta(\bar{\mathbf{a}})$。任取一个 n。对于$\mathbf{a} \in \mathcal{R}$，由于 $G_{\mathbf{a}}^n$ 由等势线、光滑内部射线和外射线组成，根据引理 3.6 的 (I1)，三点 $z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t)$ 和 $w(\mathbf{a})$ 不可能被 $G_n^{\mathbf{a}}$ 分离。因此，对于任意$\mathbf{a} \in \mathcal{R}$，

$$P_n^{\mathbf{a}}(z_{\mathbf{a}}^{\iota}(v, t)) = P_n^{\mathbf{a}}(z_\theta(\mathbf{a})) = P_n^{\mathbf{a}}(\omega(\mathbf{a})), \quad \forall n \geq 1. \tag{9}$$

现在，我们用反证法证明 $I_{\mathbf{a}_0}(\psi^v_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it}))=I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathrm{a}_0))$。假设相反，即对于某个 $n\geq 1$，有 $P^{\mathbf{a}_0}_n(\psi^v_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it}))\neq P\mathrm{a}_n{}^0(z_\theta(\mathrm{a}_0))$。由 B¨ottcher 映射 $\psi_{\mathbf{a}_0}$ 和 $\psi^v_{\mathbf{a}_0}$的连续性，当 $r>1$ 和 $r'<1$ 充分接近 1 时，有 $P\mathrm{a}_n{}^0(\psi^v_{\mathbf{a}_0}(r'e^{2\pi it}))\neq P^{\mathbf{a}_0}_n(\psi_{\mathbf{a}_0}(re^{2\pi i\theta}))$。根据引理 4.8 以及参数的 B¨ottcher 映射的连续性可知，当 a 接近 a0 时，$P\mathrm{a}_n(\psi^v_{\mathbf{a}}(r'e^{2\pi it}))\neq P\mathrm{a}_n(\psi_{\mathbf{a}}(re^{2\pi i\theta}))$。由此可得 $P\mathrm{a}_n(z^\iota_{\mathbf{a}}(\underline{v},t))\neq P\mathrm{a}_n(z_\theta(\mathrm{a}))$。这与 (9) 矛盾。用类似的论证可知，$I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathrm{a}_0))=I_{\mathbf{a}_0}(\omega(\mathrm{a}_0))$。因此 (8) 成立。

假设 $(\theta,\theta')\in\Lambda(\mathrm{a}_0)$，我们需要证明 $I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathrm{a}_0))=I_{\mathbf{a}_0}(z_{\theta'}(\mathrm{a}_0))$。由引理 4.4，只需考虑两种情况：$(\theta,\theta')\in\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 和 $(\theta,\theta')\in\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathrm{a}_0)$。若属于前一种情况，则对每个$n$ 和 $\mathrm{a}\in\mathcal{R}$，都有 $P\mathrm{a}_n(z_\theta(\mathrm{a}))=P\mathrm{a}_n(z_{\theta'}(\mathrm{a}))$。然后沿用上面的论证，可得 $I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathrm{a}_0))=I_{\mathbf{a}_0}(z_{\theta'}(\mathrm{a}_0))$。若属于后一种情况，则对于 $\mathrm{a}\in\mathcal{R}$，$z_\theta(\mathrm{a})$ 和 $z_{\theta'}(\mathrm{a})$ 由某条左右内部射线连接，该射线包含 $-c(\mathrm{a})$ 的一个迭代原像 $\omega(\mathrm{a})$。根据上述讨论，我们可知 $I_{\mathbf{a}_0}(z_\theta(\mathrm{a}_0))=I_{\mathbf{a}_0}(\omega(\mathrm{a}_0))=I_{\mathbf{a}_0}(z_{\theta'}(\mathrm{a}_0)$。□

结合命题 4.7 与引理 4.9 中的非周期情形，我们推出如下结论。

推论 4.10（非周期情形）**.** 若 (x,t_0) 在 $\tilde{g}$ 下是非周期的，则 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。特别地，我们有 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

对于周期情形，由于临界点的任一迭代原像的印象都不是单点集，我们需要对外射线的着陆位置作更精确的刻画，才能推出推论 4.10 的对应结果。

引理 4.11（在抛物分支上着陆）**.** 对任意 $\iota\in\{L,R\}^{\mathbb{N}}$，外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^\iota(x,t_0))$ 着陆于包含 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的抛物分支边界上的一点。

证明。由引理 4.9，由于 ι-转向内射线 $\mathrm{R}^\iota_{\underline{\mathbf{a}}}(x,t_0)$ 包含临界点 $-c(\mathbf{a})$，我们知道 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^\iota(x,t_0))$ 着陆于 $I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathbf{a}_0))$ 中的一点。

根据命题 4.7，$\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 是 $f^k_{\mathbf{a}}$ 的抛物不动点。不妨设 $k=1$，即 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 是 $f_{\mathbf{a}_0}$ 的抛物不动点。由此可知，$\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 必须是 p 超吸引 Fatou 分支与 p 抛物分支的公共点。根据引理 2.10，当 $\in\mathcal{H}$ 且充分接近 $_0$, 时，抛物点 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 分裂为一个排斥不动点和一个 p 排斥周期循环。记 $z(\mathrm{a})$ 为该不动点，记 $R_{\mathbf{a}}(\theta_1)$ 为一条在 $z(\mathrm{a})$ 处着陆的外射线。根据命题 2.9，由于当 a 趋近于 $_0$时 $z(\mathrm{a})$ 趋近于 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1)$ 在 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 处着陆。由此可知，θ_1 在 τ_3 下的周期为 p。记其轨道为 $\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\}$。因此，对于 $\in\mathcal{H}$ 且接近 $_0$,的 a，$R_{\mathbf{a}}(\theta_j)$ 在 $z(\mathrm{a})$ 处着陆，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_j)$ 在 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi it_0})$ 处着陆，其中 $1\leq j\leq p$。它们分隔了 p超吸引周期分支。我们假设 $B_{\mathbf{a}}(x)$ 位于扇形 $S_{\mathbf{a}}(\theta_1,\theta_2)+$ 中。对于 $\in\mathcal{R}$，由于 $\mathrm{R}^\iota_{\mathbf{a}}(x,t_0)$ 的轨道在 $f^p_{\mathbf{a}}$ 下总是落在 $\partial B_{\mathbf{a}}(x)$ 上的某一点处。因此，$\vartheta^\iota(x,t_0)$ 在 τ^p_3 下的轨道始终位于 $(\theta_1,\theta_2)+$ 中。于是，$R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^\iota(x,t_0))$ 在 $f^p_{\mathbf{a}_0}$ 下的轨道必须始终位于 $S_{\mathbf{a}_0}(\theta_1,\theta_2)+$ 中。注意，$I_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathrm{a}_0))$ 中那些在 $f^p_{\mathbf{a}_0}$ 下的轨道始终位于 $S_{\mathbf{a}_0}(\theta_1,\theta_2)+$ 中的点，属于一个周期抛物分支。该分支必定是包含 $-c(\mathrm{a}_0)$ 的分支。因此，我们得出结论：$R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^\iota(x,t_0))$ 必须在包含 $-c(\mathrm{a}_0)$ 的抛物分支边界上的某一点处着陆。

□

推论 4.12 (特征角)。 两个特征角 ϑ^L、ϑ^R 所对应的外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R)$ 都在点 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi i t_0})$ 处着陆。

证明。 由引理 4.11 可知， $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R)$ 都落在包含 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的抛物分支边界上的点上。另一方面，由于 $\mathrm{R}^L_{\mathbf{a}}(x,\ t_0)$ 和 $\mathrm{R}^R_{\mathbf{a}}(x,\ t_0)$ 对 $f^p_{\mathbf{a}}$for $\mathbf{a}\in\mathcal{R}$ 都是不动的，我们看到 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R)$ 必须都落在 $f^p_{\mathbf{a}_0}$ 的不动点上。注意， $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi i t_0})$ 是包含 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的抛物分支边界上 $f^p_{\mathbf{a}_0}$ 的唯一不动点。因此， $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R)$ 都落在 $\psi^x_{\mathbf{a}_0}(e^{2\pi i t_0})$ 上。

□

注4.1。 根据引理 4.11，当 $\mathbf{a}\in\mathcal{R}$ 接近 $\mathbf{a}_0$，时， $f_{\mathbf{a}_0}$ 的抛物不动点分裂为 $f_{\mathbf{a}}$ 的排斥不动点 $z(\mathbf{a})$ 和一个 p 周期轨道。 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta^L)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta^R)$ 中的一个必定落在 $f_{\mathbf{a}}$ 的 $z(\mathbf{a})$ 上，另一个则落在该 p 周期轨道中的某个点上。令 E 为包含 $\{\vartheta^L,\vartheta^R\}$ 的 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的等价类。那么， $E_{\mathcal{H}}$ 就是所有落在 $z(\mathbf{a})$ 上的外射线的角度集合。

4.4. 边界与内部叶状结构的关系。本节将证明实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 包含于边界映射 $\mathbf{a}_0$ 的实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 中。非周期情形由推论 4.10 得出。

下文我们着重讨论周期情形。为此，由于 $f_{\mathbf{a}_0}$ 没有无限轨道落在任何 Fatou 分支边界上的临界点，根据定理 2.2，我们只需证明 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})\subset\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。

回忆一下， $\mathbb{Q}_p$ 表示在 τ_3下为周期的所有 $\theta\in\mathbb{S}$ 的集合。根据推论 2.11，我们可得 $\lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{H})\subset\lambda_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{a}_0)$。因此，我们只需处理非周期角的有理叶状结构。下面引入临界叶。

引理 4.13 (临界叶)。若处于周期情形，则存在 $L^{\pm}\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}$，使得下述结论成立。

(1) 对于 $\mathbf{a}\in\mathcal{H}\cup\{\mathbf{a}_0\}$ 和 $\theta\in L^{\pm}$, $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 着陆于包含 $\pm c(\mathbf{a})$ 的 *Fatou* 分支边界上的一个排斥预周期点。(2) 对于任意 $\theta\in L^-\cup L^+$， $\{\theta\}$ 构成 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的一个单元素等价类。(3) $\Delta L^-=\Delta L^+=1/3$。

证明。 选取 $t_1\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，使得内部射线 $R^c_{\mathbf{a}_0}(t_1)$ 着陆于排斥周期点 z_1，该点是唯一外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^+)$ 的着陆点。因此， $R^c_{\mathbf{a}_0}(t_1+1/2)$ 也着陆于排斥预周期点 z_2，该点是唯一外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2^+)$ 的着陆点。根据引理 2.4，对于 $\mathbf{a}\in\mathcal{H}$， $R_{\mathbf{a}}(\theta_j^+)$ 也着陆于 $\partial B_{\mathbf{a}}(c)$ 上的一个点。定义 $L^+:=\{\theta_1^+,\theta_2^+\}$，于是得到 $\Delta L^+=1/3$。

选取一个序列 $\iota=(\iota_1,\ \iota_2,\ .....)\in\{L,R\}^{\mathbb{N}}$，使其在移位映射下为周期的，并令 $\iota'=(\iota_1',\ \iota_2',\ .....)$ 为满足 $\iota_1\neq\iota_1'$ 且对每个 $n\geq 2$ 都有 $\iota_n=\iota_n'$ 的序列。定义 $\theta_1^-:=\vartheta^{\iota}(x,\ t_0)$ 以及 $\theta_2^-:=\vartheta^{\iota'}(x,\ t_0)$。由于 $\tau_3(\theta_1^-)=\tau_3(\theta_2^-)$，(3) 成立。根据引理 4.11，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^-)$ 在包含 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的抛物分支的边界上的一个排斥周期点处着陆，而 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2^-)$ 在边界上的一个排斥预周期点处着陆。通过选取具有充分大周期的 ι，我们可以假设 (2) 成立。

□

对于每个$\mathbf{a}\in\mathcal{R}\cup\{\mathbf{a}_0\}$，我们将临界叶 L^+ 的切割射线 定义为

$$C_{\mathbf{a}}(L^+):=\overline{R_{\mathbf{a}}(\theta_1^+)}\cup\overline{R_{\mathbf{a}}(\theta_2^+)}\cup\overline{R^c_{\mathbf{a}}(t_1)}\cup\overline{R^c_{\mathbf{a}}(t_1+1/2)}.$$

对于$\mathbf{a}\in\mathcal{R}$，将临界叶 L^+ 的切割射线定义为

$$C_{\mathbf{a}}(L^-):=\overline{R_{\mathbf{a}}(\theta_1^-)}\cup\overline{R_{\mathbf{a}}(\theta_2^-)}\cup\overline{\mathrm{R}^{\iota}_{\mathbf{a}}(x,t_0)}\cup\overline{\mathrm{R}^{\iota'}_{\mathbf{a}}(x,t_0)}.$$

对于$\mathbf{a}_0$，我们定义

$$C_{\mathbf{a}_0}(L^-):=\overline{R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^-)}\cup\overline{R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2^-)}\cup\overline{R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^+)}\cup\overline{R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2^+)}\cup B_{\mathbf{a}_0}(c)\cup U_{\mathbf{a}_0}(-c)$$

其中 $U_{\mathbf{a}_0}(-c)$表示包含 $-c(\mathbf{a}_0)$的抛物盆。

定理 4.14. 设 $\mathcal{H}$ 为类型(A)、(B)或(C)的有界双曲分支，且$\mathbf{a}_0\in\partial\mathcal{H}\cap\mathcal{S}_p$，则有 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\subsetneq\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

证明. 正如我们已经注意到的，对于周期情形，只需证明每个$(\theta,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})\backslash\lambda_{\mathbb{Q}_p}$都包含在 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$中。 $(\mathcal{H})$

注意到 θ 与 θ' 都必须是非周期的。设 n 为一个整数，使得$\theta_n:=\tau_3^n(\theta)$与 $\theta'_n:=\tau_3^n(\theta')$都是周期的。由于$(\theta_n,\theta'_n)\in\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$，由上述讨论，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_n)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'_n)$着陆于公共周期点 z_0。有两种情形。z_0 为排斥的情形较为容易。我们通过矛盾来解决它。假设 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$并不着陆于一个公共点。由于 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_n)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'_n)$都着陆于 z_0。因此存在 θ''，使得 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'')$着陆于一个公共的排斥预周期点，且 $\tau_3^n(\theta'')=\theta'_n$。由引理 2.4，当a充分接近$\mathrm{a}_0$,时，外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$也着陆于一个公共点。因此，对于充分接近a0的$\mathrm{a}\in\mathcal{H}$，$R_{\mathbf{a}}(\theta')$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta'')$都着陆于一个公共点。注意到这两条外射线在 $f^n_{\mathbf{a}}$下都被映到$R_{\mathbf{a}}(\theta_n)$。这与$f^n\mathrm{a}$在朱利亚集中任意点附近都是共形的这一事实相矛盾。因此我们得出$(\theta,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$。

剩下的情形是 z_0 为一个抛物周期点。根据我们对周期情形所得的结果以及归纳法，我们可以假设 $(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$。由引理 4.13 的 (1) 和 (2)，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 必须属于 $\mathbb{C}\setminus(C_{\mathbf{a}}(L^-)\cup C_{\mathbf{a}}(L^+))$ 的同一个连通分支。因此，$\{\theta,\theta'\}$ 必须属于 $\mathbb{S}\setminus(L^-\cup L^+)$ 的一个连通分支。由于 $\Delta L^{\pm}=1/3$、$\theta+1/3$ 和 $\theta-1/3$ 必须属于 $\mathbb{S}\setminus(L^-\cup L^+)$ 的另外两个连通分支。若 $(\theta,\theta')\notin\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$，则 $(\theta+1/3,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$ 或 $(\theta-1/3,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$。不失一般性，假设 $(\theta+1/3,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$。由引理 4.13，~~$R_{\mathbf{a}_0}(\theta+1/3)$ 和~~ $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$ 必须属于 $\mathbb{C}\setminus(C_{\mathbf{a}_0}(L^-)\cup C_{\mathbf{a}_0}(L^+))$ 的同一个连通分支。这是不可能的，因为 $\theta+1/3$ 和 θ' 属于 $\mathbb{S}\setminus(L^-\cup L^+)$ 中不同的连通分支。因此，我们得出结论：$(\theta,\theta')\in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathrm{a}_0)$。□

4.5. **视觉层片与实层状结构重合**。在本节中，我们证明视觉层状结构 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$在所有情形下都与实层状结构 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$重合。首先，我们处理周期情形。

命题 4.15（周期情形）。如果(x,t_0) 是周期的，那么 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)=\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

证明。首先，我们证明 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。由于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$被定义为 $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ 中包含 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\cup\Lambda(\mathbf{a}_0)$和 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$的最小等价关系，因此只需证明 $\Lambda(\mathbf{a}_0)\subset\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

令 $(\theta,\ \theta')\in\Lambda(\mathbf{a}_0)$。根据引理4.3，存在极小整数 n 使得$\{\tau_3^n(\theta)\ \tau_3^n(\theta')\}=\{\vartheta^L,\vartheta^R\}$。根据推论 4.12，有 $(\vartheta^L,\ \vartheta^R)\in\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。因此，由归纳法，我们可以假设 $(\tau_3(\theta)\ \tau_3(\theta'))\in\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。通过选择 ι，我们可以假设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 不在 $z_{\theta''}(\mathbf{a})$ 处着陆，对于 $\mathbf{a}\in\mathcal{R}\cup\{\mathbf{a}_0\}$

以及 $\theta'' \in L^- \cup L^+$。固定一个 $\in \mathcal{R}$，假设 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 由左右内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}$，$(v,t)$ 连接。根据推论 3.6 的 (I2)，我们知道 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\,R}$，$(v,t)$ 包含于 $\mathbb{C} \setminus (C_{\mathbf{a}}(L^-) \cup C_{\mathbf{a}}(L^+))$ 的一个连通分支中。令该连通分支为 $U_{\mathbf{a}}$。由此可知，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 对某个 $\mathbf{a} \in \mathcal{R}$ 属于 $U_{\mathbf{a}}$。因此，$\{\theta, \theta'\}$ 位于 $\mathbb{S} \setminus (L^- \cup L^+)$ 的同一个连通分支中。假设 $(\theta, \theta') \notin \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$，则 $(\theta + 1/3, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$ 或 $(\theta - 1/3, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。不失一般性地，假设 $(\theta + 1/3, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。根据引理 4.13，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta + 1/3)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$ 必须属于$\mathbb{C} \setminus (C_{\mathbf{a}_0}(L^-) \cup C_{\mathbf{a}_0}(L^+))$ 的同一个连通分支。这是不可能的，因为 $\theta + 1/3$ 和 θ' 位于 $\mathbb{S} \setminus (L^- \cup L^+)$ 的不同连通分支中。因此，$(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。这表明 $\Lambda(\mathbf{a}_0) \subset \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

下面我们证明 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) \supset \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。根据定理 2.2 和命题 4.5，只需证明 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) \supset \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。设 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$。如果$R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$ 着陆于一个排斥预周期点，那么根据引理 2.4，有 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H}) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。现在假设$R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 和$R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$ 着陆于一个抛物预周期点 z_0。首先，假设 z_0 是一个抛物周期点。与前面一样，我们假设它是一个抛物不动点。正如注 4.1 所述，当参数 $\mathbf{a}$ 进入双曲分支 $\mathcal{H}$时，z_0 会扰动为一个排斥不动点和一个排斥 p周期轨道。因此，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和$R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 会着陆于这些 $p+1$ 点。根据注 4.1，我们可以假设该不动点是 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta^L)$ 的着陆点，而 $R_{\mathbf{a}}(\vartheta^R)$ 着陆于该 p周期循环。令 E 为包含 ϑ^L、ϑ^R的 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的等价类。根据命题 4.5，对于 $0 \le k \le p-1$ 和 $\iota \in \{L, R\}$，有 $\tau_3^k(\vartheta^\iota) \in E$。对于这些 $p+1$ 点中的每一点，都存在 $\theta'' \in E$，使得 $R_{\mathbf{a}}(\theta'')$ 着陆于该点。因此，我们得出结论：$\theta, \theta' \in E$，即 $(\theta, \theta') \in \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

现在我们考虑 z_0 为抛物严格前周期点的情形。设n 是使得 $f_{\mathbf{a}_0}^n(z_0) = \psi_{\mathbf{a}_0}^x(e^{2\pi i t_0})$成立的最小整数。由周期情形的讨论，$\tau_3^n(\theta)$ $\tau_3^n(\theta')$属于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$的一个等价类 E。此外，$R_{\mathbf{a}}(\tau_3^n(\theta))$与 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3^n(\theta'))$着陆于这些 $p+1$ 点，而这些点对某个 $\in \mathcal{H}$收敛到 $\psi_{\mathbf{a}_0}^x(e^{2\pi i t_0})$。由此可知，$R_{\mathbf{a}}(\theta)$与 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$着陆于这些 $p+1$点的第 n个原像。设 E' 为 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$中包含 θ的等价类。我们用反证法证明 $\theta' \in E'$。假设 $\theta' \notin E'$，则由命题 4.5，存在$\theta'' \in E$使得 $\tau_3^n(\theta'') = \tau_3^n(\theta')$。由于 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) \subset \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'')$着陆于一个公共点。但由我们的假设$(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$，我们得出$R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'')$着陆于一个公共点。因此，该公共着陆点是 $f_{\mathbf{a}_0}^n$的一个临界点的原像。这与我们处于抛物情形这一事实矛盾。至此证明完毕。

□

命题 4.16（非周期情形）。如果（x、t_0）是非周期的，那么我们有$\lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）$= \Lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）。

证明。推论 4.10 表明，$\Lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）$\subset \lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）。下面我们证明，$\Lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）$\supset \lambda_{\mathbb{R}}$（$\mathbf{a}_0$）。我们区分以下两种情形。

后临界有限情形：假设 $f_{\mathbf{a}_0}$ 是后临界有限的，那么再次由定理 2.2 和命题 4.5，只需证明 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。假设 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$，且 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 落在 z_0 上。若 z_0 的正向轨道不包含临界点 $-c(\mathbf{a}_0)$，那么由引理 2.4 可知，对于$\mathbf{a}$ 接近$\mathbf{a}_0$,的情形，外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 都落在扰动后的前周期点 $z_0(\mathbf{a})$ 上。因此，我们看到 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \subset \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 成立。现在我们考虑

这样的情形： $z_0 = \omega(\mathrm{a}_0)$ 是 $-c(\mathrm{a}_0)$ 的原像。令 n 为满足 $f^n_{\mathbf{a}_0}(z_0) = -c(\mathrm{a}_0)$ 的唯一整数。由于 $u(\mathrm{a}_0) := f_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathrm{a}_0))$ 的正向轨道不包含 $-c(\mathrm{a}_0)$，因此根据前一种情形的讨论，当 a 接近 a0 时， $R_{\mathbf{a}}(\tau_3^{n+1}(\theta))$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\tau_3^{n+1}(\theta'))$ 都落在 $u(\mathrm{a})$ 上；后者是 $u(\mathrm{a}_0)$ 的扰动前周期点。类似地，由于光滑内部射线 $R^{x_1}\mathrm{a}_0(t_1)$ 落在 $u(\mathrm{a}_0)$ 上，当 a 接近 a0 时， R^{x_1} a (t_1) 也落在 $u(\mathrm{a})$ 上，其中 $(x_1, t_1) := \tilde{g}(x, t_0)$。取足够大的 m ，使映射 $f^{n+1}_{\mathbf{a}_0}$: Pa $^{0}_{m+n+1}(z_0) \to P\mathrm{a}_{m}{}^{0}(u(\mathrm{a}_0))$ 的次数为 2。对于接近 a_0, 的 a，记 $P_{\mathbf{a}} := h_{m+n+1}(\mathrm{a}\ P^{\mathbf{a}_0}_{m+n+1}(z_0))$，并记 $P'\mathrm{a} := h_m(\mathrm{a}\ P^{\mathbf{a}_0}_m(u(\mathrm{a}_0)))$，其中$h_m$ 和 h_{m+n+1} 是引理 4.8 中给出的全纯运动。由引理 4.8 可知，对于接近 a_0, 的 a，有 $u(\mathrm{a}) \in P'_{\mathbf{a}}$、 $z_\theta(\mathrm{a})\ z_{\theta'}(\mathrm{a}) \in P_{\mathbf{a}}$，且映射 $f^{n+1}_{\mathbf{a}}$: $P_{\mathbf{a}} \to P'\mathrm{a}$ 的次数也为 2。对于 $\in \mathcal{R}$， $\omega(\mathrm{a}_0)$ 扰动为 $P_{\mathbf{a}}$ 中连接一对左右转向内部射线 $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}}$、$(v,t)$ 的迭代预临界点 $\omega(\mathrm{a})$。由此可知， $\mathrm{R}^{L\ R}_{\mathbf{a}}$、$(v,t)$ 的两个端点 $z^L_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $z^R_{\mathbf{a}}(v,t)$ 都属于 $P_{\mathbf{a}}$，并且必定经 $f^{n+1}_{\mathbf{a}}$ 映射到 $u(\mathrm{a})$。因此， $z^L_{\mathbf{a}}(v,t)$ 和 $z^R_{\mathbf{a}}(v,t)$ 是 $P^{\mathbf{a}}_{n+1}$中 $u(\mathrm{a})$ 的仅有的两个 $n+1$次原像。因此，我们有 $\{z_\theta(\mathrm{a})\ z_{\theta'}(\mathrm{a})\} = \{z^L_{\mathbf{a}}(v,t)\ z^R_{\mathbf{a}}(v,t)\}$。这意味着 $(\theta, \theta') \in \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathrm{a}_0)$。

后临界无限情形： 现在我们考虑 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的正向轨道是无限的情形。我们断言 $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0) \subset \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$。事实上，对于任意的 $(\theta, \theta') \in\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_0)$，$R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$ 都落在一个排斥预周期点上，该点的正向轨道不包含 $-c(\mathbf{a}_0)$。根据引理 2.4，当 $\mathbf{a}$ 接近 $\mathbf{a}_0$, 时，外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 和$R_{\mathbf{a}}(\theta')$ 落在同一个公共点上。因此，$(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$。

因此，我们只需考虑 $(\theta, \theta') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 且 $\theta \neq \theta'$ 的情形，并且 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 落在 z_0 上，而该点具有无限的正向轨道。

断言 1。设 B 是 $f_{\mathbf{a}_0}$ 的一个 Fatou 分支，且 $z \in \partial B$ 不是 $-c(\mathbf{a}_0)$ 的迭代原像。假设有两条不同的外射线$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1)$ 和$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2)$ 落在 z 上，则 θ_1, θ_2 都是有理的。

断言 *1* 的证明。 我们用反证法证明：如果 θ_1, θ_2 不是有理的，那么 z有无限正向轨道。由于 z 不是 $-c$ 的迭代原像（$\mathbf{a}_0$），对于 $n \geq 0$，外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\tau_3^n(\theta_1))$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\tau_3^n(\theta_2))$ 是两条不同的、落在 $f^n_{\mathbf{a}_0}(z)$ 上的外射线。因此，不失一般性，我们假设 $z \in \partial B_{\mathbf{a}_0}(x)$。根据定理 2.1， $K_{\mathbf{a}_0}$ 可以分解为 $B_{\mathbf{a}_0}(x)$ 和肢 L_w ，其中 $w \in \partial B_{\mathbf{a}_0}(x)$。由于 $f^p_{\mathbf{a}_0}$只有有限多个临界点，当 n 充分大时，$L_{f^n_{\mathbf{a}_0}(z)} = \{z\}$ 。这与至少有两条外射线落在 $f^n_{\mathbf{a}_0}(z)$上的事实矛盾。□

我们继续证明后临界无限情形。这里有两种情况。假设 z_0 不在任何有界Fatou分支的边界上，在这种情况下，我们证明 $(\theta,\ \theta') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。根据引理 3.9，只需证明

$$P^{\mathbf{a}}_n(z_\theta(\mathbf{a})) = P^{\mathbf{a}}_n(z_{\theta'}(\mathbf{a})), \quad \forall n \geq 1, \mathbf{a} \in \mathcal{R}.$$

固定 n，定义 z_0的修正拼图 Q_n。若 $P^{\mathbf{a}_0}_n(z_0)$的边界不包含有界Fatou分支中的任何等势线，则令 $Q_n = P^{\mathbf{a}_0}_n(z_0)$。反之，我们假设 $\partial P^{\mathbf{a}_0}_n(z_0)$在Fatou分支 $B_{\mathbf{a}_0}(v_1)$ $B_{\mathbf{a}_0}(v_2)$……， $B_{\mathbf{a}_0}(v_q)$中包含等势线。

断言2。对每个 $1 \leq k \leq q$，存在 θ_k， $\theta'_k \in \mathbb{Q}$ ，使得 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_k)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta'_k)$落在同一公共点，并将 z_0 与 $B_{\mathbf{a}_0}(v_k)$分离。

断言 *2* 的证明。由于 $z_0 \notin \partial B_{\mathbf{a}_0}(v_k)$，根据定理 2.1，它属于某个 $w \in \partial B_{\mathbf{a}_0}(v_k)$ 对应的唯一非单点肢 L_w。因此，存在两条外射线

$R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_2)$，它们落在 w 上，并将 z_0 与 $B_{\mathbf{a}_0}(v_k)$ 分隔开。如果 w 不是 $-c(\mathbf{a})$ 的迭代原像，根据断言 1， θ^-， θ^+ 都是有理的。在这种情况下，令 θ_k， θ'_k 为 θ^-， θ^+。

现在假设 w 是 $-c(\mathbf{a}_0)$的第 n次原像。由此可知，存在$B_{\mathbf{a}_0}(u_1)$，使得 $\partial B_{\mathbf{a}_0}(u_1) \cap \partial B_{\mathbf{a}_0}(v_k) = \{w\}$。由于 $z_0 \notin \partial B_{\mathbf{a}_0}(u_1)$，再次由定理 2.1，存在一对外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^-)$ $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_1^+)$，落在 $w_1 \in \partial B_{\mathbf{a}_0}(u_1)$，并将 z_0 与 $B_{\mathbf{a}_0}(u_1)$分离。若 w_1 不是 $-c(\mathbf{a}_0)$的迭代原像，则令 θ_k, θ'_k为 θ_1^-, θ_2^+。否则， w_1必为 $B_{\mathbf{a}_0}(u_1)$与某个其他Fatou 分支 $B_{\mathbf{a}_0}(u_2)$的公共边界。重复该过程，要么我们在有限步内找到所需的有理的 θ_k, θ'_k，要么得到一个Fatou分支序列 $\{B_{\mathbf{a}_0}(u_n)\}$，其中 $\partial B_{\mathbf{a}_0}(u_n) \cap \partial B_{\mathbf{a}_0}(u_{n+1}) = \{w_{n+1}\}$，以及无理数对$(\theta_n^-, \theta_n^+) \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$，使得 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_n^-)$与 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta_n^+)$落在 w_n。不失一般性，我们假设对所有$n \geq 2$，有$(\theta, \theta')_+ \subset (\theta_n^-, \theta_n^+)_+ \subset (\theta_{n-1}^-, \theta_{n-1}^+)_+$。由定理 2.2，由于 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$是闭的，存在$(\vartheta^-, \vartheta^+) \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$以及$(\theta, \theta')_+ \subset (\vartheta^-, \vartheta^+)_+ \subset (\theta_n^-, \theta_n^+)_+$。下面我们将证明$(\vartheta^-, \vartheta^+)$必为有理的。

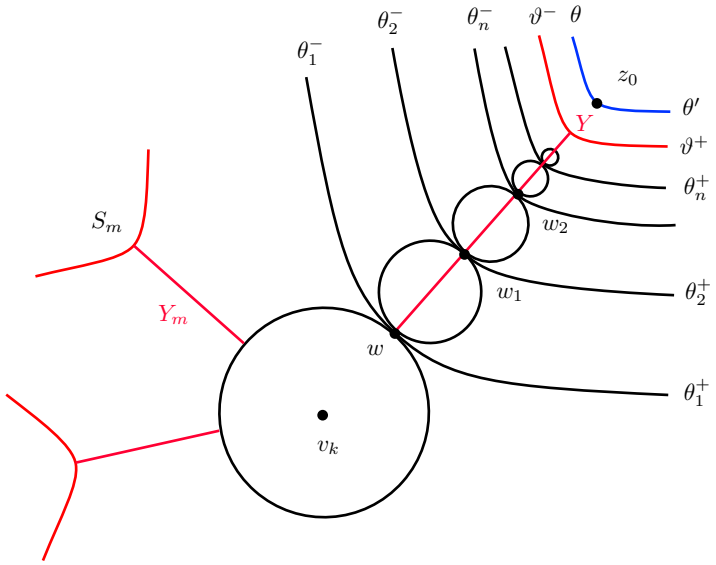


FIGURE 15.

令 R_n 为 $B_{\mathbf{a}_0}(u_n)$内部连接 w_n 和 w_{n+1}的两条内射线的并。定义连通集 $Y := (\bigcup_n R_n) \cup R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^-) \cup R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^+)$。经过迭代后，我们可以假设 Y“立于” $B_{\mathbf{a}_0}(c)$的边界上，即 $v_k = c$和 $z_0 = -c$(一个0)。令 $Y_m := f_{\mathbf{a}_0}^{mp}(Y)$，其中 $m \geq 0$。可以验证， Y_m 也立于$B_{\mathbf{a}_0}(c)$上，并穿过无穷多条内部射线，抵达 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta_m^-)$ $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta_m^+)$。我们可以假设 $S_m := S_{\mathbf{a}_0}(\vartheta_m^-, \vartheta_m^+)_+$ 不包含 $B_{\mathbf{a}_0}(c)$。如果$(\vartheta^-, \vartheta^+)$不是有理对，那么 S_m、 $m \geq 1$ 互不相交。由于 $f_{\mathbf{a}_0}^p$ 只有有限多个临界点，因此当 m 足够大时， S_m 不包含 $f_{\mathbf{a}_0}^p$的任何临界点。这意味着，对于 m， $\Delta(\vartheta_{m+1}^-, \vartheta_{m+1}^+)_+ = 3\Delta(\vartheta_m^-, \vartheta_m^+)_+$ 的角宽

足够大。这显然不可能。因此，$(\vartheta^-,\ \vartheta^+)$必定是有理的。在此情形下，令 $\theta_k := \vartheta^-$，并令 $\theta_k' := \vartheta^+$ 。□

根据断言 2 和引理 2.4，当 a 充分接近 a_0, 时，外射线 $R_{\mathbf{a}}(\theta_k)$ 和 $R_{\mathbf{a}}(\theta_k')$ 一致地着陆于同一个公共点，并将 $\{z_\theta(\mathsf{a})\ z_{\theta'}(\mathsf{a})\}$ 与 $v_k(\mathsf{a})$ 分隔开。定义修正拼图块 Q_n 为$P\mathsf{a}_n{}^0(z_0)\backslash\bigcup_k(R_{\mathbf{a}_0}(\theta_k)\cup R_{\mathbf{a}_0}(\theta_k'))$ 的包含 z_0的连通分支。由此可知， $Q_n \subset P_n^{\mathbf{a}_0}(z_0)$的边界上不含任何等势线，也就是说，它只可能包含共着陆外射线 $\{(\theta_k,\theta_k')\colon\ 1 \le l \le \ell\}$ （其中 $\ell \ge q$为某个值），以及填充朱利亚集 $K_{\mathbf{a}_0}$之外的等势线。只要 $K_{\mathbf{a}}$ 是连通的，且对于 $1 \le l \le \ell$有 $(\theta_k,\theta_k') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a})$，修正拼图块就始终有定义，并记为 $Q_n^{\mathbf{a}}$。此外，根据 $Q_n^{\mathbf{a}}$的构造，我们知道 $\{z_\theta(\mathsf{a})z_{\theta'}(\mathsf{a})\} \subset Q_n^{\mathbf{a}}$ 成立。由引理 2.4 可知，对于 $\mathsf{a}_1 \in \mathcal{R}$ 且充分接近 a_0, 的情形，$(\theta_k,\theta_k') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a}_1)$。由引理 4.2 可知，对于任意 $\mathsf{a} \in \mathcal{R}$，我们也有 $(\theta_k,\theta_k') \in \lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a})$。因此，对于所有 $\mathsf{a} \in \mathcal{R}$，$z_\theta(\mathsf{a})z_{\theta'}(\mathsf{a}) \in Q_n^{\mathbf{a}}$ 都包含在深度为 n的同一个（未经修正的）拼图块中。这就完成了此情形下的证明。

剩下需要讨论的是 $z_0 \in \partial B_{\mathbf{a}_0}(v)$ 具有无限正向轨道的情形。根据断言 1，$z_0 = \omega(\mathsf{a}_0)$ 必定是 $-c(\mathsf{a}_0)$ 的一个迭代原像，因为它接收两条外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta) \ne R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$，而 $u(\mathsf{a}_0) := f_{\mathbf{a}_0}(-c(\mathsf{a}_0))$ 是一条唯一外射线 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta)$ 的着陆点。令 $\omega(\mathsf{a})$ 表示 a 接近 $_0$ 时 $-c(\mathsf{a})$ 的迭代原像。这说明只有两条外射线着陆于 z_0，它们必定是 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta)$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\theta')$。注意，当 $\mathsf{a} \in \mathcal{R}$ 接近 $_0$, 时， $\omega(\mathsf{a})$ 连接一对左右转向内部射线 $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}^{L\ R}$，$(v',t)$。根据引理 4.9， $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^L(v',t))$ 和 $R_{\mathbf{a}_0}(\vartheta^R(v',t))$ 必定着陆于 z_0。因此， $\{\theta,\theta'\} = \{\vartheta^L(v',t)\ \vartheta^R(v',t)\}$。这说明 $(\theta,\theta') \in \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a}_0)$。

□

结合命题 4.15 和命题 4.16，我们得出结论：视觉层状结构确实与实层状结构一致。

定理 4.17 (边界层状结构 $\mathcal{S}_p$)。 设 $\mathcal{H}$ 是一个类型为 (A)、(B)或(C)的有界双曲分支，且$\mathbf{a}_0 \in \partial\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$，则 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) = \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。

4.6. 主定理的证明。 本节中，我们给出定理 1.1 的证明。我们需要将 $\partial\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$ 中的主要结果定理 4.17 推广到二维复空间中的驯服边界 $\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$ 。这是拟共形手术的标准应用，用于改变吸引周期的乘子。以下是引理 3.12] 的一个变体 [35,。

命题 4.18 (改变吸引周期的乘子)。 设 $\mathcal{H}$ 是一个类型为(A)、(B)或(C)的有界双曲分支。对于每个$\mathbf{a}_1 \in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$，存在 $p \ge 1$和$\mathbf{a}_0 \in \partial\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$，使得 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) = \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_1)$。

利用命题 4.18 和定理 4.17，我们给出定理 1.1 的证明。

定理 *1.1* 的证明。 对于每个 $\mathbf{a} \in \partial_{\mathrm{t}}\mathcal{H}$，根据命题 4.18，存在 $\mathbf{a}_0 \in\partial\mathcal{H} \cap \mathcal{S}_p$，使得 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) = \lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a})$。根据定理 4.17，我们有 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) =\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$。根据 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0)$ 的定义，我们知道 $\Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_0) = \langle\Lambda(\mathbf{a}_0) \cup \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\rangle$。根据命题 4.3， $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 是一个极小 τ_3-不变等价类。将记号 $\Lambda(\mathbf{a}_0)$ 改为 $\Lambda(\mathbf{a})$ 后，证明完成。

□

推论 1.2 是定理 1.1 的直接推论。

推论 *1.2* 的证明。 对于任意 $z \in J_{\mathbf{a}^*}$， z 是至少一条外射线 $R_{\mathbf{a}^*}(\theta)$ 的着陆点，定义 $\pi_{\mathbf{a}}(z)$ 为 $R_{\mathbf{a}}(\theta)$ 的着陆点。定理 4.14 确保映射 $\pi_{\mathbf{a}}$ 定义良好。 $\pi_{\mathbf{a}}$ 的连续性由 $\psi_{\mathbf{a}}$ 和 $\psi_{\mathbf{a}^*}$ 的连续性推出。

□

最后，我们将作为一个应用给出定理1.3的证明。

定理1.3的证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个(A)、(B)或(C)型双曲分支，且 $\mathsf{a}_1 \in \mathcal{H}$。任取一个无理的 t_0 。设 $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\mathcal{H}}(t_0)$是角度为 t_0的参数内部射线。设 $\mathsf{a} \in \mathcal{S}_p \cap \partial\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{R}$的着陆点。由定理 4.14，得 $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a}) \neq \lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a}_1)$。由定理 4.17， $\lambda_{\mathbb{R}}(\mathsf{a}) = \langle \Lambda(\mathsf{a}) \cup \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\rangle$。由引理4.3， $\Lambda(\mathsf{a})$的非单元素等价类最终都会映射到 $\{\vartheta^L(x,t_0)\ \vartheta^R(x,t_0)\}$。只要 t_0 是无理数，这两个特征角 $\vartheta^L(x,t_0)\ \vartheta^R(x,t_0)$就是无理数。因此， $\lambda_{\mathbb{Q}}(\mathsf{a}) = \lambda_{\mathbb{Q}}(\mathsf{a}_1)$。由此， $f_{\mathbf{a}_1}$ 不具有组合刚性。

□

References

[1] Matthieu Arfeux 和 Jan Kiwi。《具有一个周期临界点的三次多项式集合的不可约性》。 *arXiv preprint arXiv:1611.09281*，2016。[2] Artur Avila、Jeremy Kahn、Mikhail Lyubich 和沈维孝。《单临界多项式的组合刚性》。 *Annals of mathematics*，第 783–797 页，2009。[3] Alexander Blokh。《三次层合中游荡三角形存在的必要条件》。 *Disc. and Cont. Dyn. Syst*，13：13–34，2005。[4] Alexander Blokh、Clinton Curry 和 Lex Oversteegen。《三次临界肖像与具有游荡间隙的多项式》。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，33(3)：713–738，2013。[5] Alexander Blokh、Debra Mimbs、Lex Oversteegen 和 Kirsten Valkenburg。《以叶片语言描述的层状结构》。 *Transactions of the American Mathematical Society*，365(10)：5367–5391，2013。[6] Alexander Blokh、Lex Oversteegen、Ross Ptacek 和 Vladlen Timorin。《三次多项式的类二次动力学》。

Communications in Mathematical Physics 341 3 733 749, , (): –。2016

[7] Alexander Blokh、Lex Oversteegen、Ross Ptacek 和 Vladlen Timorin。《三次多项式空间的组合模型》。 *Comptes Rendus Mathematique*，355(5)：590–595，2017。[8] Alexander Blokh、Lex Oversteegen、Ross Ptacek 和 Vladlen Timorin。《具有固定临界叶的三次层合的参数空间》。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，37(8)：2453–2486，2017。[9] Alexander Blokh、Lex Oversteegen 和 Vladlen Timorin。《二次层合的完全子空间》。 *Science China Mathematics*，61(12)：2121–2138，2018。[10] Araceli Bonifant、Jan Kiwi 和 John Milnor。《具有周期临界轨道的三次多项式映射，第二部分：逃逸区域》。 *Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society* 14 04 68 112, 2010 , (): –, Mar。[11] Bodil Branner 和 John H Hubbard。《三次多项式的迭代，第一部分：参数空间的整体拓扑》。 *Acta mathematica*，160(1)：143–206，1988。[12] Bodil Branner 和 John H Hubbard。《三次多项式的迭代，第二部分：模式与准模式》。 *Acta mathematica*，169(1)：229–325，1992。[13] 曹杰、Xiaoguang Wang 和 Yongcheng Yin。《捕获双曲分支的边界》。 *arXiv preprint arXiv:2206.07462*，2022。[14] 曹杰、Xiaoguang Wang 和 Yongcheng Yin。《中心双曲分支的边界 I：动力学性质》。 *arXiv preprint arXiv:2506.18487*，2025。[15] 曹杰、Xiaoguang Wang 和 Yongcheng Yin。《中心双曲分支的边界 II：边界延拓定理》。 *arXiv preprint arXiv:2509.07350*，2025。[16] 阿德里安·杜阿迪、John Hamal Hubbard 和 P Lavaurs。《复多项式的动力学研究》。1984。

[17] Romain Dujardin 和 Charles Favre。《具有预周期临界点的有理映射的分布》。 *American journal of mathematics*，130(4)：979–1032，2008。[18] Yan Gao、Xiaoguang Wang 和 YUEYANG WANG。《多项式有界双曲分支的边界》。 *arXiv preprint arXiv:2504.16496*，2025。[19] Christian Henriksen。《组合刚性猜想对三次多项式不成立》。 *Transactions of the American Mathematical Society*，355：3625–3639，2003。[20] Hiroyuki Inou 和 Jan Kiwi。《矫直映射的组合学与拓扑学，I：紧致性与双射性》。 *Advances in Mathematics*，231(5)：2666–2733，2012。[21] Jan Kiwi。《复多项式的有理叶状结构》。 *Contemporary Mathematics*，269 111：–154，2001。[22] Jan Kiwi。《游荡轨道肖像》。 *Transactions of the American Mathematical Society*，354 1473 1485，2002：–。[23] Jan Kiwi。《实层状结构与复多项式的拓扑动力学》。 *Advances in Mathematics* 184 2 207 267, 2004，( )：–。[24] Jan Kiwi。《复多项式动力学中的组合连续性》。 *Proceedings of the London Mathematical Society* 91 1 215 248, 2005，( )：–。[25] Yusheng Luo。《几何有限退化论 I：主双曲分支的边界》。 *Journal of the European Mathematical Society*，26(10)：3793–3861，2023。[26] Ricardo Man´e、Paulo Sad 和 Dennis Sullivan。《有理映射的动力学》。 *Annalesscientifiques de l'École Normale Supérieure*，16(2)：193–217，1983。[27] Curtis T. McMullen。《共形动力系统的分类》。1995。[28] John Milnor。《朱利亚集的局部连通性：讲解性讲座》。 *Stony Brook*，1992。[29] John Milnor。《具有周期临界轨道的三次多项式映射，第一部分》。 *Collected Papers of John Milnor* 7 409 476, 2008，：–。[30] John Milnor 和 Alfredo Poirier。《双曲分支》。 *Conformal dynamics and hyperbolic geometry* 573 183 232, 2012，：–。[31] Carsten Lunde Petersen 和 Pascale Roesch。《抛物工具》。 *Journal of Difference Equations and Applications* 16 5 6 715 738, 2010，(-)：–。[32] Carsten Lunde Petersen 和 Tan Lei。《记录三次动力学的 10 个解析坐标》。[33] Carsten Lunde Petersen 和 Tan Lei。《记录三次动力学的解析坐标》。 *Complex Dynamics: Families and Friends* 413 450, 2009，第 – 页。[34] Carsten Lunde Petersen 和 Saeed Zakeri。《外射线的豪斯多夫极限：拓扑图景》。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，128(5)：e12598，2024。[35] Weiyuan Qiu 和 YUEYANG WANG。《三次多项式有界双曲分支边界之间的交集》。 *Mathematische Zeitschrift*，305(4)：55，2023。[36] Pascale Roesch。《具有最高阶固定临界点的多项式的双曲分支》。载于 *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*，第 40 卷，第 901–949 页。爱思唯尔，2007。[37] Pascale Roesch 和 Yongcheng Yin。《有界多项式 Fatou 分支的边界》。*Comptes Rendus Mathematique*，346(15-16)：877–880，2008。[38] Dierk Schleicher。《曼德博集合的有理参数射线》。 *Astérisque*，1997。[39] Xiaoguang Wang。《双曲分支与三次多项式》。 *Advances in Mathematics*，379 107554，2021：。

School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai, 200433, China*Email address*: yueyangwang@icloud.com