arXiv:2603.06268v1 [math-ph] 6 Mar 2026

六顶点模型的高斯自由场收敛 with $-1 \leq \Delta \leq -\frac{1}{2}$

Hugo Duminil-Copin*†、Karol Kajetan Kozlowski‡、Piet Lammers§ 和 Ioan Manolescu¶

2026年3月6日

摘要

我们研究谱参数为 $\Delta \in [-1,-1/2]$ 的 $\mathbb{Z}^2$ 上的各向同性六顶点模型，其权重为 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ 和 $\mathbf{c} \in [\sqrt{3},2]$。我们证明，相应的高度函数在标度极限下收敛到经过适当标度的全平面高斯自由场。通过采用合适的晶格嵌入，该结果也适用于各向异性权重 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$。

A 引言 2 1 研究动机.2 2 主要结果陈述 .7 3 主要结果的初步应用 .11 4 证明概述与组成要素 .14 5 论文结构 .21**B 主要结果的证明** 21 6 二点函数的子序列 GFF 极限 .22 7 多点函数的子序列 GFF 极限 .38 8 子序列 GFF 极限 .42 9 主要结果的证明（定理 2.8 ） .44 10 各向异性情形的证明（定理 3.3）.45**C 要素 4：关联函数的谱表示** 48 11 转移矩阵形式 .48 12 一般可观测量的谱表示（定理 4.15）. . . . . 50 13 二点函数的谱表示（定理 4.12）. . . . . 52**D 要素3：正则性估计与定性行为** 55 14 自旋表示与 RSW 理论 .55 15 自旋表示的 FKG 不等式 .61 16 自旋构型的渗流估计 .65 17 全平面自旋表示（包括定理 4.10）.70 18 环面和圆柱上的自旋表示（定理 2.2）.72 19 交叉计数的界（定理 4.9）.75 20 水平线树与分支函数 .80 21 全平面上的正则性估计（定理 4.5）. 85 22 正则性估计（圆柱，推论 4.7）.89 23 混合估计（定理 4.8）.91**E 要素 2：尺度不变性概览** 97 24 自由能的二阶导数（定理 4.4）.97 25 定理 4.3 的证明 .101 26 分裂的证明（命题 25.3）. 110**参考文献** 123

*高等科学研究所，duminil@ihes.fr
†日内瓦大学，hugo.duminil@unige.ch
‡里昂高等师范学院，法国国家科学研究中心，物理实验室，F-69342 里昂，法国，karol.kozlowski@ens-lyon.fr§法国国家科学研究中心，索邦大学，索邦大学概率与统计实验室，piet.lammers@cnrs.fr
¶弗里堡大学，ioan.manolescu@unifr.ch

A 部分引言

1 研究动机

1.1 一文读懂相变

经历连续相变的物理系统，通常可以通过格点模型进行数学描述；在这类模型中，微观自由度由附着在图的顶点、边或面上的变量表示。这些模型既能有效描述底层的物理相互作用，又便于进行严格分析。在这一框架下， k点关联函数对应于局部算子 $\langle\prod_i O_{u_i}^{(i)}\rangle_\delta$乘积的期望值之极限。在此背景中， $\langle\cdot\rangle_\delta$编码了网格尺寸为 δ的格点上模型的相关性； $u_1,\ldots,u_k$为空间中的点， $O^{(i)}$是（可能各不相同的）可观测量，用于测量系统在原点 0 附近的局部性质； $O_{u_i}^{(i)}$ 是这些可观测量平移至点 u_i 后的结果，因此 $O_{u_i}^{(i)}$ 可由 u_i附近小邻域内的行为来测定。下文中，我们假设每个可观测量都是中心化的。

远离相变时，相关性极弱：对于任意一组互不相同的点，关联函数会随着这些点之间的间隔距离（此处为 $1/\delta$）呈指数速度快速衰减 u_1， $\ldots$， u_k。换言之，单个可观测量会迅速失去相关性，并渐近独立。

然而，在连续相变处，渐近独立性仍然存在，但相关性预计会强得多。 k点函数随距离呈幂律衰减：

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}\Big\langle\prod_{i=1}^{k}O_{u_i}^{(i)}\Big\rangle_\delta=\mathcal{C}_{O^{(1)},\ldots,O^{(k)}}(u_1,\ldots,u_k)\tag{1}$$

对于某些非平凡函数 $\mathcal{C}_{O^{(1)},\ldots,O^{(k)}}$ 以及临界指数 $\alpha_i=\alpha_i(O^{(i)})$，它们决定了关联函数在大距离下的代数衰减速率。

预测函数 $\mathcal{C}_{O^{(1)},\ldots,O^{(k)}}$ 在膨胀变换和旋转下保持不变，并且具有普适性，也就是说，它们不依赖于格点模型定义中出现的特定局部相互作用势。统计力学的一个目标是将发生连续相变的模型归入普适类，这些模型具有相同的临界指数 α_i 和极限函数 $\mathcal{C}_{O^{(1)},\ldots,O^{(k)}}$。

关于连续相变系统行为的基本思想，源自20世纪60年代中期至70年代初期理论物理学的奠基性著作，尤其是 Fisher [Fis67; Fis66; Fis64], 、Kadanoff [Kad66], 和 Widom [Wid65b; Wid65a],的研究，并最终发展为 Wilson 的重整化群理论 [Wil71a; Wil71b]。这些预测已在各种情形、有效模型和实验数据中，通过微扰计算以及数值模拟得到广泛检验 [Kad+67; EF63; DS57; Bak61; El-+12; KPS14]。

1.2 格点模型的共形场论猜想极限

假设的普适类究竟应当是什么，尚无法预先明确。一种思路源自 Patashinskii 和 Pokrovskii [PP64] 以及后来 Polyakov [Pol68; Pol70b; Pol70a], 认为，普适类应由不仅具有标度和旋转不变性，而且具有共形变换不变性的量子

场论来描述。这类量子场论称为共形场论（CFT）。由此产生了以下较为宽泛的猜想。

猜想1。 在方程(1) 意义下，经历连续相变的二维统计力学模型的标度极限由共形场论的关联函数给出。

在一般维数下，在共形映射下保持不变这一附加要求的限制性并不强，因为局部共形群是有限维的，因而只施加有限的约束。然而，正如Belavin、Polyakov和Zamolodchikov在其开创性工作中所指出的 [BPZ84], ，二维情形则大为改观：此时共形群是无限维的，由此产生的局部共形对称性使得平面上众多共形场论具有可积性；详情见面向数学的教材 [Gaw] 。

二维共形场论按其中心荷 $c \in \mathbb{R}_{>0}$分类。经过20世纪80年代和20世纪90年代的大量研究，这些理论在物理基础上在很大程度上可以进行分析 [Tes19; DMS97]。在数学方面，除了众多早期进展（参见 [Gaw; Seg88]）之外，概率学界近来对这些共形场论重新产生了兴趣，其动力既来自Schramm–Loewner演化 [Sch00; Law14] 的发展（以及由此构造的相关模型 [SW12; MS16; She09; MS20; GRV16]），也来自基于 [Dav+16; RV14; GRV19]的严格技术。

在许多情形下，人们可以对共形场论的关联函数给出相当详细的描述。对具有 $c = 1$ 的共形场论——即自由玻色子模型，数学家称之为高斯自由场——的理解，因其高斯分布性质而十分直接。特别地，Wick规则借助二点关联的乘积来表示 k点关联，从而显著简化了它们的分析。关于这一具体情形的细节，我们参阅 [She07；BP25]。有理共形场论，尤其是对应于 $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ 且 p、 $q \geq 2$ 为互素整数的极小模型，也因这些中心荷所特有的代数结构而得到了很好的理解 [DGT24；DW25；GZ26；Fje+06；FRS02；FRS04a；FRS04b；FRS05]。对于 $c \geq 25$，该理论已发展得相当完善，如 [Tes95；Tes01]，以及更近期的数学文献 [DS11；BP25；DS11；DS11；Gui+24]。完全确定共形场论的相关性至今仍是物理与数学两方面深入研究的课题，参见例如 [Ang+21；KRV20；Gui+24；CRV23；GZ26；DW25]。

如今我们对共形场论的理解虽然尚未完全穷尽，但已令人印象深刻。尽管如此，即使我们获得了对所有二维共形场论完整且严谨的描述，要透彻理解某个给定格点模型所呈现的连续相变，仍需完成以下两个艰巨步骤：

（i）确定是否存在某个共形场论（即其中心荷 c以及相应共形场论代数结构的某种表示），能够刻画临界状态下的相关极限；（ii）确定该共形场论中的哪些关联函数描述所选局域可观测量的 k点函数的极限。具体而言，在方程（1）的情形下，这相当于确定函数 $\mathcal{C}_{O^{(1)},\ldots,O^{(k)}}$ 与所讨论共形场论中的哪些关联函数相对应。

1.3 从离散到连续

多年来，人们发展出了两种主要策略，以沿着这一方向推进。

1.3.1 从转移矩阵形式中提取信息

对于可用转移矩阵表述的模型，分析转移矩阵的主导特征值 T_L 对于尺寸为 L 且具有周期性边界条件的系统，可以提供有关其极限行为的重要信息。众所周知， T_L 的最大特征值的指数增长率决定了模型的自由能。此外，正如 [Aff86；BCN86], 中启发式论证的那样，自由能的有限尺寸修正——等价地说，主特征值的次主导修正——会产生一个常数；人们猜想，这个常数可解释为预期在临界性处支配模型行为的共形场论的中心荷。

还可以从转移矩阵次主导特征值的大体积L 渐近行为中提取更多信息，以及从所谓的平移算符中提取信息（两者都会在本文中出现）。尤其是，猜想性的方程将这些特征值的间距与局域可观测量所对应的临界指数可能取值联系起来。因此，上述物理图景相当全面，尽管它没有说明某个晶格关联函数对应哪个临界指数。最后这一步通常是在物理层面的严谨性要求下，通过对称性考虑来完成的。综述请参见 [Car86；Car08]。

由局域哈密顿量构造转移矩阵通常很直接，但要提取大体积渐近行为则是一项艰巨的任务。对于一般模型，这个问题几乎无从解决——即使只要求启发式的处理也是如此。然而，对于二维统计力学中的可积模型，情况会大为改观 [Bax82]。

这方面最简单的例子是零外场下的二维伊辛模型。该模型最初由 Onsager 求解 [Ons44]，后来又以许多不同方式重新研究（历史回顾见 [MW14；Dum23] ）。Kaufman [Kau49] 以及后来的 Lieb- Schultz-Mattis [LSM61] 发现，通过简单的代数变换，伊辛模型等价于一个由非相互作用（或自由）费米子组成的模型。这种自由费米子结构在很大程度上解释了该模型为何特别容易精确求解。尤其是，它给出了其转移矩阵特征值的闭合且完全显式的公式；现代处理可参见 [Bax82] 。这项分析为以下观点提供了证据：该模型在临界性处的标度极限由中心荷为 $c = 1/2$ 的共形场论所支配。

对于经历连续相变的其他二维统计力学可积模型，情况要复杂得多。这些模型是真正相互作用的，也就是说，无法通过简单的映射将其化约为自由费米子。从某种意义上说，它们仍然是可解的：其转移矩阵可以用相对明确的方式对角化；但要做到这一点，需要求解一组 Bethe Ansatz方程，确定哪些解对应于主导特征值以及次主导特征值塔，并分析当 L 趋于无穷大时它们的行为。

在20世纪80年代中期和20世纪90年代，人们付出了大量努力，基于启发式方法，推导出了在临界性下各类可积二维模型的转移矩阵最大特征值展开式 [DV95；dW85；IKR89；KB90；KBP91；KWZ93]。尽管这项研究并不严谨，却为许多可积格点模型标度极限中的中心荷和临界指数提出了大量猜想。

要实现完全严谨的数学论证，一大障碍在于难以证明Bethe根的凝聚这一性质。Hülten最初提出了这一猜想 [Hul38]。在 [DS09；Dum+21；Dum+22；Gus80；Gus85；Koz18], 方面取得了重大进展，并最终首次严格推导出六顶点模型 [Koz18] 以及交错六顶点模型 [FGK25], 转移矩阵最大特征值的展开式；后者源于对有限温度下XXZ自旋$1/2$ 链的分析。

1.3.2 离散全纯性与共形不变标度极限

第二种策略源于离散全纯性的发展。边界共形场论将边界条件的影响纳入考量，其发展显著深化了对共形场论的物理分析。这样一种直觉——研究平面区域中的物理系统能够揭示更多结构——促使数学文献在理解二维模型的标度极限方面取得了重大突破。其思路是利用这样一个事实：连续情形中共形不变（更确切地说，是共形协变）的相关性族，往往是某些边值问题的调和解或全纯解。因此，自然可以预期，在某种意义上，这些相关性的离散先辈是相应离散边值问题的离散调和解或离散全纯解。千禧年后的第一个十年里，这一观察在少数模型中取得了成功。

共形不变性的早期严格证明之一涉及多米诺铺砌，其底层具有自由费米子结构。Kenyon [Ken00；CKP01] 通过证明某些可观测量具有离散全纯性并满足狄利克雷边值问题，确立了二分 Temperleyan 平面图上多米诺铺砌的高度函数分布在标度极限下的共形不变性。他还证明，高度函数（视为分布）收敛到高斯自由场，对应于中心荷为 $c = 1$ 的共形场论（自由玻色子）。这一分析在 [Til07], 中推广到周期等半径图；这类图保留了精确可解性和离散全纯结构。

2001 年，Smirnov [Smi01] 证明了著名的 Cardy 公式 [Car92]适用于三角晶格上的伯努利点渗流。Smirnov 的论证依赖于某些近似离散全纯的可观测量，它们满足特定边界条件，并且可以证明收敛到该边值问题的连续对应问题的解。这一重大成果对临界区制作出了极为精确的描述，包括确定临界指数以及揭示与 $c = 0$ 共形场论 [LSW02；Smi01；CN07；CN06；CN26；CF24]。

2004 年，Lawler、Schramm 和 Werner [LSW04] 利用离散格林函数的性质，推导出环消随机游走及其相关的均匀生成树（UST）的共形不变性，使这一方法在思路上接近上述策略。值得注意的是，UST 与二聚体模型密切相关，并且也具有自由费米子结构。

2008 年，Smirnov [Smi10] 和 Chelkak-Smirnov [CS12] 为二维伊辛模型的费米子可观测量建立了离散全纯框架，证明这些可观测量在标度极限下收敛到适当黎曼–希尔伯特边值问题的全纯解。将这一方法推广至等半径图后，得到了费米子可观测量的稳健收敛结果，并展示了标度极限下的普适性和共形对称性。进一步的研究带来了大量关于界面 [Che+14]、能量密度可观测量 [HS13], 、其 n点推广形式 [Hon], 、自旋关联函数 [CHI 15], 以及最终对应于共形场论初级算符的关联函数 [CHI22]的标度极限结果。这些工作共同建立了与 $c = \frac{1}{2}$ 共形场论的联系。

1.4 超越自由费米子点

除了伯努利点渗流 [Smi01] 以及一种被称为调和探索者的逆向工程模型 [SS05], 迄今为止，关于标度极限的所有严格进展都涉及可归约为非相互作用（自由）费米子的模型。然而，共形场论普适性猜想（猜想 1）对于连续相变的主要吸引力，恰恰在于其

广泛性：它旨在涵盖真正的相互作用模型，这些模型与任何类似自由理论的结构都相去甚远。然而，一旦存在相互作用，分析就会变得复杂得多。

对于自由费米子模型（例如弱相互作用二聚体）的小扰动，已经取得了严格的研究进展。这些结果依赖于构造性重整化，这是威尔逊重整化群纲领的严格实现。该方法始于 [PS],此后不断发展，用以确立多种微扰模型的标度性质 [Mas04；GGM12；BFM14a；BFM14b；GMT17；GT19]。尽管这些工作代表了重大进展，但其研究范围仍局限于微扰区域：构造性重整化本身的性质，使其极难触及非微扰情形，或远离自由费米子情形的标度极限。

由此看来，真正相互作用的可积二维统计力学模型，为猜想1提供了天然的检验场。这些模型除在孤立的参数取值处（或许）之外，并不等价于自由费米子；它们还具有丰富的代数结构，源自量子群的表示论。这种结构体现在星-三角关系等重要恒等式中 [Ken99；DLM18]以及转移矩阵族的交换性中 [Bax72；STF79], 这些都提供了通用模型所不具备的强大工具。

一个尤为突出的真正相互作用可积模型是六顶点模型；例如参见 [LW80；Bax82]。

本文首次在相当广泛的参数范围内，为六顶点模型给出了标度极限结果。具体而言，对于 $\Delta \in [-1, -\frac{1}{2}]$，我们证明，当网格尺寸趋于零时，全平面模型的高度函数收敛于高斯自由场。尽管目前我们的结果仅限于全平面情形，但这是建立更一般的平面模型标度极限框架的重要第一步，因为它适用于一大类真正具有相互作用的模型。因此，这项工作属于一项更广泛研究计划，旨在确定二维临界格点模型在相互作用区域深处的行为。

现在就详细讨论证明当然为时过早（尤其是我们尚未恰当地介绍模型或结果），不过我们可以简要说明，该论证借鉴了转移矩阵形式体系和离散全纯性中的思想。从这个意义上说，它综合了上述两种历史研究路径的要素。粗略地说，我们利用某个谱测度的性质，该测度编码了转移矩阵与移位算子的特征值的平均行为，并据此证明六顶点模型的 k点相关性在极限下是调和的。为此，我们将 [Ave+a]中得到的模型旋转不变性与对谱性质的一种新颖分析结合起来。这构成了论文的主要创新之处。调和性结合对奇点附近行为的分析，使我们能够识别这些极限 k点相关性，随后可通过引导论证获得更强的收敛模式。更具体地说，我们的证明首先确立了仅沿某些合适子序列成立的收敛。最终，这足以推出完整的结果，而完整结果反过来也表明，取子序列其实并无必要。

提取此类子序列极限的能力，实际上是论文的另一项主要创新。我们所采用的框架允许使用该模型的定性估计——这让人联想到渗流专家所熟悉的RSW 型理论（我们将深入讨论RSW 理论）——从而获得紧性，并提取上文所述谱测度的收敛子列。这一策略与

使三角晶格上伯努利点渗流的Cardy公式之证明成为可能的因素相呼应。在 [Smi01], Smirnov通过证明RSW理论使人能够提取这些离散观测量的子序列极限，且这些极限最终是全纯的，从而绕过了可观测量仅近似全纯的问题。一个主旋律由此浮现：为了超越那些具有自由费米子结构、因而可以找到精确离散调和或全纯可观测量的“超可积”情形，人们很可能需要在这样一种设定中工作，其中精确离散调和性或全纯性的缺失可以由先验 估计来弥补，而这些估计确保子序列极限的存在。本文引入的对象说明了这一视角的优势与潜力。

2 主要结果陈述

本章节正式介绍该模型并陈述主要结果。

2.1 六顶点模型的定义

本文将六顶点模型定义在局部看起来像方格晶格图的图上。我们先给出环面上的定义。对于 M， $L \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$，令 $\mathbb{T}_{M,\ L}$ =(V($\mathbb{T}_{M,\ L}$) E($\mathbb{T}_{M,\ L}$)) 表示顶点集为 V($\mathbb{T}_{M,\ L}$) 的环面方格网格：=($\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$)×($\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$)，其中在欧几里得距离为 1 的顶点之间放置边。

一个箭头构型 ω 是为每条边指定一个方向。若箭头构型满足冰规则（或称为六顶点构型），则每个顶点恰有两条入边和两条出边。因此，每个顶点周围的入边和出边共有六种可能的排列，具体标记见图1。

定义 2.1（环面上的六顶点模型）。对于参数 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 > 0$，箭头构型 ω 在 $\mathbb{T}_{M,\ L}$ 上的权重定义为

$$W_{6\mathrm{V}}(\omega) = \mathbb{1}[\omega \text{ satisfies the ice rule}] \cdot \mathbf{a}_1^{n_1}\mathbf{a}_2^{n_2}\mathbf{b}_1^{n_3}\mathbf{b}_2^{n_4}\mathbf{c}_1^{n_5}\mathbf{c}_2^{n_6}, \tag{2}$$

其中， n_i 表示 ω中类型为 i 的 V($\mathbb{T}_{M,\ L}$)里的顶点数。箭头构型 ω 上的吉布斯测度$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\ L}}$ 定义为

$$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\{\omega\}] := \frac{1}{Z_{\mathbb{T}_{M,L}}} \cdot W_{6\mathrm{V}}(\omega), \tag{3}$$

其中，$Z_{\mathbb{T}_{M,\ L}}$ 是唯一的常数，称为配分函数，它使$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\ L}}$ 成为概率测度。

权重取为正实数，以便进行概率解释。在本文中，我们进一步将讨论范围限定在以下情形：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 =: \mathbf{a}; \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 =: \mathbf{b}; \qquad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 =: \mathbf{c}, \tag{4}$$

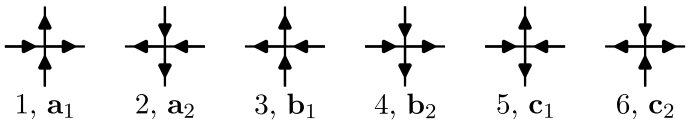


图 1：六种顶点构型及其标签和权重。

这使得对 ω 中的所有方向进行翻转后， $W_{6V}(\omega)$ 保持不变。本文中的参数 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 始终固定，因此记号中不再列出它们。通常会引入谱参数 ，其定义公式如下：

$$\Delta = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2}{2\mathbf{ab}}. \tag{5}$$

模型可以按以下方式扩展到无限体积。在 $\mathbb{T}_{M,L}$ 上，任何遵循冰规则的构型，在每一竖直列中都有相同数量的左箭头——我们称之为水平箭头守恒。如果某个构型的每一列水平箭头中，左箭头的数量都等于右箭头的数量，则称该构型为平衡的 。记 $\{\text{balanced}\}$ 为满足冰规则的平衡箭头构型的集合。从现在起， L 始终为偶数，因此平衡构型存在。

对于 $\Delta < -1$，已知六顶点模型处于局域化区域，因此其极限行为是平凡的 [Dum+21; RS22; GP23]。因此，本文将聚焦于 $\Delta \geq -1$ 的情形；当 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ 时，这对应于 $\mathbf{c} \leq 2$。我们将顺带在引理 *18.7* 中给出以下已知结果 18.7 ）。

定理 2.2 （无限体积六顶点模型）。固定$\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ 和$\mathbf{c} \in [1, 2]$。测度 $\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\cdot|\{\text{平衡}\}]$ 的弱极限存在，取极限时按如下顺序进行：先令 M 趋于无穷，再令 L 趋于无穷。我们将其记为 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ ，并称之为平面上的零斜率六顶点测度。它在 $\mathbb{Z}^2$ 的自同构群作用下保持不变。

该结果断言， $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ 是方格晶格图 $\mathbb{Z}^2$ 上箭头构型的唯一概率测度，使得

$$\lim_{L\to\infty} \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[A|\{\text{balanced}\}] = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[A] \tag{6}$$

对任意事件 A ，只要它可由方格晶格图 $\mathbb{Z}^2$中有限多条边的定向所测得。测度 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ 还可以用其他若干方式来刻画。除上述描述外，它也是$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}$ 在 M, L 以任意方式趋于无穷时的弱极限，它是在全局箭头翻转下不变的唯一遍历吉布斯测度，并且它是与六顶点模型相关的自由能泛函的唯一极小化者。后两个等价陈述在本工作中不起作用。

定理 2.2 以及上述等价关系，来自 [She05] 中对高度函数的一般分析，并结合高度函数的去局域化。去局域化最初在 $\mathbf{c} = 1$ [Cha+21]、$\mathbf{c} = 2$ [GP23]，以及 $\mathbf{c} \in [(2 + 2^{1/2})^{1/2}, 2]$ [Lis21]，处得到，这发生在 [Dum+24] 通过 Bethe Ansatz 论证覆盖全部范围 $\mathbf{c} \in [1, 2]$ 之前；后来又在 [GL25] 中用渗流方法得到。

2.2 六顶点模型的高度函数

高度函数是定义在方格的面 $F(\mathbb{Z}^2)$ 上的函数 $h\colon F(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{Z}$，任意两个相邻面之间的函数值相差恰好 ± 1 。此外，我们还要求原点东北侧的面具有偶数高度。

我们将高度函数视为模去一个偶常数后的函数。形式上，若存在某个常数 $a \in 2\mathbb{Z}$ ，使得对所有 $u \in F$，$h'(u) = h(u) + a$，则称两个高度函数 h' 和 h 等价。高度函数的梯度就是关于这一等价关系的高度函数等价类。实际应用中，我们将高度函数的梯度与其等价类中的任意代表元视为相同。最后，我们也将 h记作分段常数函数

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto h(\text{the face whose bottom-left corner is } (\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)), \tag{7}$$

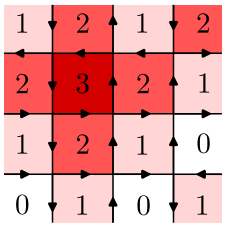


图 2：六顶点构型与梯度高度函数之间的对应关系为：每个箭头左侧的高度较高。

并且，对于任意 $\delta > 0$，我们定义缩放高度函数 $h^{(\delta)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}, \quad u \mapsto h(u/\delta)$。

定义 2.3（六顶点构型的高度函数）。全平面六顶点构型与梯度高度函数构成双射。更确切地说，对于任意六顶点构型 ω，我们将其与满足以下条件的高度函数相关联：每个箭头 左 侧的面的高度比其 右侧面的高度高一个单位；参见图 2。

梯度高度函数的多点相关函数将是我们研究六顶点模型高度函数时的核心可观测量。

定义 2.4（六顶点多点相关函数）。六顶点模型的 k点相关函数 将以下量赋给向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \ldots\ldots, u_k, u_k') \in (\mathbb{R}^2)^{2k}$，其 $2k$ 坐标由点 $u_1, u_1', \ldots\ldots, u_k, u_k' \in \mathbb{R}^2$构成：

$$\Phi_k(\boldsymbol{u}) := \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}\left[\prod_{i=1}^{k}\big(h(u_i') - h(u_i)\big)\right], \tag{8}$$

其中，h 表示根据 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$抽取的六顶点构型所对应的任意高度函数。此外，对于 $\delta > 0$，缩放后的 k点相关函数定义为

$$\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u}) := \Phi_k(u_1/\delta, u_1'/\delta, \ldots, u_k/\delta, u_k'/\delta). \tag{9}$$

k点相关函数是良定义的，因为期望中的被积函数仅取决于高度函数的梯度。我们可以立即看出 Φ_k的一些基本性质，这些性质常常无需特别说明便会用到：

- $\Phi_k \equiv \Phi_{(\delta)_k} \equiv 0$ 为奇数，因为 h 和 $-h$ 具有相同的分布，
- Φ_k 和 $\Phi_{(\delta)_k}$ 在交换 u_i 和 u_i'时是反对称的，
- Φ_k 和 $\Phi_{(\delta)_k}$ 在置换这些配对 $\{u_i, u_i'\}$时保持不变，
- Φ_k 和 $\Phi_{(\delta)_k}$ 满足以下可加性，对任意 u_1、u_1'、u_1'' 以及任意固定的 $\boldsymbol{v} = (u_2, u_2', \ldots\ldots, u_k, u_k')$：

$$\Phi_k(u_1, u_1', \boldsymbol{v}) + \Phi_k(u_1', u_1'', \boldsymbol{v}) = \Phi_k(u_1, u_1'', \boldsymbol{v}). \tag{10}$$

尽管主要研究对象之一是 k点关联，我们也将高度函数 h 视为随机分布。为此，我们引入由 h 对测试函数积分所定义的分布。

定义 2.5（六顶点测试函数）。一个广义测试函数 是 $\mathbb{R}^2$ 上满足 $\varphi(\mathbb{R}^2) = 0$的有限紧支撑符号测度 φ。对任意广义测试函数 φ，定义

$$\langle h^{(\delta)}, \varphi\rangle := \int h^{(\delta)}(x)\mathrm{d}\varphi(x) = \int h(x/\delta)\mathrm{d}\varphi(x). \tag{11}$$

注意，$\langle h^{(\delta)}, \varphi\rangle$ 是一个梯度可测随机变量，因为 $\varphi(\mathbb{R}^2) = 0$。因此，我们可以将其视为一个随机变量。

2.3 高斯自由场背景

模型建立后，接下来我们描述最终将出现的标度极限。记$|\cdot|$为 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得范数。定义全平面格林函数 $G_{\mathbb{R}^2}$ 如下：

$$G_{\mathbb{R}^2}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to(-\infty,\infty],\ (x,y)\mapsto-\tfrac{1}{2\pi}\log|y-x|. \tag{12}$$

下面的主要结果表明，当 δ 趋于零时，由 $h^{(\delta)}$ 得到的随机高度函数 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$（经常数 $\sigma=\sigma(\Delta)$缩放后）收敛于 **高斯自由场 (GFF)**，记作 Γ。根据对该对象所需正则性的不同，高斯自由场有多种数学上的理解方式；这里我们需要以下三种（与定义 2.4 和2.5相呼应）。关于高斯自由场的更多细节，请参见 [BP25]。

定义 2.6（高斯自由场的定义）。我们从三个角度考察高斯自由场。

(i) **多点相关函数**。对于任意 $k\geq1$，定义

$$\mathcal{D}_k:=\{(u_i,u_i')_{i=1,\dots,k}\in(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)^k:\forall i\neq j,\ \{u_i,u_i'\}\cap\{u_j,u_j'\}=\emptyset\}, \tag{13}$$

并定义函数

$$\Psi_k^{\mathrm{GFF}}:\mathcal{D}_k\to\mathbb{R},\ \boldsymbol{u}\mapsto\sum_{a,\,\pi}(-1)^{\varepsilon(a)}\prod_{ij\in\pi}G_{\mathbb{R}^2}(a_i,a_j), \tag{14}$$

其中：

- 对 a 的求和遍历满足 $a_i\in\{u_i,u_i'\}$ 的映射 $\{1,\dots,k\}\to\{u_1,u_1',\dots,u_k,u_k'\}$，
- $\varepsilon(a)$ 表示满足条件 u_i 的指标 i 的个数的奇偶性，
- 对 π 的求和遍历 $\{1,\dots,k\}$ 的所有配对，即将$\{1,\dots,k\}$ 划分为数对（也就是包含两个点的集合）的所有划分。

这些恰好是协方差为 $G_{\mathbb{R}^2}$ 的高斯过程所对应的关联函数。注意，当 k 为奇数时，$\Psi_k^{\mathrm{GFF}}\equiv0$，因为此时 π 为空。

(ii) 有限维边缘分布。若广义测试函数 φ 满足 $\int G_{\mathbb{R}^2}(u,v)\mathrm{d}\varphi(u)\mathrm{d}\varphi(v)<\infty$，则称其具有有限狄利克雷能量 。对于任意有限族 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ 的有限狄利克雷能量广义测试函数，引入其相应的 $n\times n$协方差矩阵 $\Sigma(\boldsymbol{\varphi})$，定义如下

$$\Sigma(\boldsymbol{\varphi})_{ij}:=\int G_{\mathbb{R}^2}(u,v)\mathrm{d}\varphi_i(u)\mathrm{d}\varphi_j(v). \tag{15}$$

于是，我们将 $(\langle\Gamma,\ \varphi_i\rangle)_i$ 视为一个分布为 $\mathcal{N}(0,\ \Sigma(\boldsymbol{\varphi}))$ 的随机变量。

(iii) 负正则性 Hölder 空间中的随机元素。固定 $\alpha\in(-1,\ 0)$ 和一个有界开集 $U\subset\mathbb{R}^2$。回顾一下，U 上正则性为 α 的 ***Hölder*** 空间 $\mathcal{C}^\alpha(U)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 关于半范数的完备化

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha(U)}:C_c^\infty(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R},\ f\mapsto\sup_{\substack{(\varepsilon,\varphi)\in(0,1]\times\mathcal{T}_1((-1,1)^2),\\ \mathrm{support}(\varphi)\subset U/\varepsilon}}\varepsilon^{-\alpha}\int f(x/\varepsilon)\mathrm{d}\varphi(x), \tag{16}$$

其中，$\mathcal{T}(U)$表示支撑包含于U 中的广义测试函数集合，而 $\mathcal{T}_1(U)\subset\mathcal{T}(U)$表示这类密度为1-Lipschitz的测试函数集合。我们将 Γ 视为 $\mathcal{C}^\alpha(U)$中的一个随机元素，使得对于任意有限个 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$，若对每个 i都有$\varphi_i\in\mathcal{T}(U)$，则$(\langle\Gamma,\varphi_i\rangle)_i$的分布为 $\mathcal{N}(0,\Sigma(\boldsymbol{\varphi}))$。

2.4 主要结果的陈述

本文考虑三种收敛模式。

定义 2.7 （高斯自由场收敛）。 考虑某个固定值 $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及概率测度 $\mathbb{P}$ 下的随机梯度高度函数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。如果以下标度极限 的所有条件 都成立，我们就称 h 的极限为 $\sigma\Gamma$ 或 σ -高斯自由场。

（i）多点相关函数的收敛。对于任意 $k \geq 1$， $\Phi_k^{(\delta)}$ 在 $\mathcal{D}_k$ 的紧子集上一致收敛到 $\sigma^k \Psi_k^{\mathrm{GFF}}$，当 δ 趋于零时成立。（ii）有限维边缘分布的收敛。对于任意有限狄利克雷能量广义测试函数族 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$，$(\langle h^{(\delta)}, \varphi_i \rangle)_i$ 的分布依弱收敛于 $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \Sigma(\boldsymbol{\varphi}))$，当 δ 趋于零时成立。（iii）在负正则性 Hölder 空间中的依分布收敛。对于任意 $\alpha \in (-1, 0)$ 和任意有界开集 $U \subset \mathbb{R}^2$， $h^{(\delta)}$ 的分布在 $\mathcal{C}^\alpha(U)$ 中收敛于 $\sigma\Gamma$ 的分布，当δ 趋于零时成立。最后，我们还要求在经典 Besov 空间$\mathcal{B}^\alpha_{p,q}(U)$ 和 Sobolev 空间 $W^{\alpha,p}(U)$ 中收敛，其中 $p \in [1, \infty)$ 和 $q \in [1, \infty]$ 均任意（详见第8节）。

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 2.8 (各向同性权重下六顶点模型的标度极限)。 在 $\mathbb{Z}^2$ 上，当$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \frac{1}{}$ 且 $\sqrt{3} \leq \mathbf{c} \leq 2$ 时，六顶点模型高度函数的标度极限为σ -高斯自由场，其中

$$\sigma^2 = \frac{2}{\arccos \Delta} = \frac{1}{\arcsin \frac{\mathbf{c}}{2}}. \tag{17}$$

下面我们对参数条件作一些说明。用 Δ表示，前一定理涵盖了区域 $-1 \leq \Delta \leq -\frac{1}{2}$。定理 3.3 将解除各向同性情形（即权重为 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$）下的限制。回顾一下，$\mathbf{c} > 2$ ($\Delta < -1$) 时的各向同性六顶点模型已知处于局域化区域。预期定理 2.8 对所有 $\mathbf{c} \in (0, 2]$（即 $\Delta \in [-1, 1)$）均成立；此前，该结果已在自由费米子点 $\mathbf{c} = \sqrt{2}$ ($\Delta = 0$) 处由 [Ken00] 得到，并在 $\bar{\mathbf{c}}$ 接近 $\sqrt{2}$ 时由 [GMT17] 得到。

我们的证明有两个方面需要 $\mathbf{c}$ 的下界。首先，六顶点模型的若干种表示满足 Fortuin–Kasteleyn–Ginibre（FKG）性质的前提是$\mathbf{c} \geq 1$。在证明的不同阶段，我们利用这一性质来确保所研究对象的正则性。其次，我们的证明依赖于多点相关函数 Φ_k 的渐近旋转不变性；这一结果由 [Ave+a] 借助相应的随机簇模型 [Dum+20] 得出。要使该结果适用，随机簇模型必须满足 FKG 性质，而这要求 $\mathbf{c} \geq \sqrt{3}$。

这一渐近旋转不变性结果有可能推广到 $\mathbf{c} \geq 1$，例如可以利用上文提到的六顶点模型表示。这将立即使定理 2.8 推广到区间 $1 \leq \mathbf{c} \leq 2$（对应于 $-1 \leq \Delta \leq 1/2$）。然而，要绕过六顶点模型的这些表示不满足 FKG 不等式这一问题，似乎是一项艰巨的挑战，因此目前的方法难以处理 $0 < \mathbf{c} < 1$ 这一情形。

3 我们结果的首次应用

处于 $-1 \leq \Delta < 1$ 区域的六顶点模型位于众多二维格点模型交汇之处。它与二聚体模型、伊辛模型和波茨模型、临界随机簇模型、环路 $O(n)$ 模型、阿什金–特勒模型、随机

排列和量子自旋链 [FK72；Nie82；GP23；Lis22；MW68]。尽管目前尚不清楚最终能从此处确立的高斯自由场收敛中提取多少信息，但已有若干重要应用。

3.1 其他二维格点模型的临界指数

得益于 Baxter–Kelland–Wu（BKW）对应 [BKW76], ，六顶点模型在其连续相变处与临界随机簇模型（又称*Fortuin-Kasteleyn*（*FK*）渗流）密切相关，该模型由 [FK72]引入。我们的主要结果为随机簇模型带来了以下推论。

- **单臂指数** α_1。对于簇权为 $q \in [1,4]$的随机簇模型，[Che+b] 证明了单臂临界指数的存在性及其取值 α_1，该指数描述了一个顶点与距离 n处连通的概率衰减。由此还可推出经典指数 η， ζ和 δ ，它们分别刻画临界性下二点函数、簇尺寸尾以及幽灵场连通性的行为；详见 [Che+b]。

- **双臂指数** α_2。对于满足 $q \in [1,4]$的随机簇模型， [ADH] 证明了双臂指数 α_2的存在性及其取值，该指数描述了一个顶点位于延伸至距离 n的原始/对偶界面上的概率。由此可推导出临界界面的任意子序列缩放极限的分形维数，这与预测的CLE(κ)一致；详见 [ADH] 。

- **能量指数** ι。对于参数为 $q \in [4-\varepsilon, 4]$（取 ε的某个较小值）的随机簇模型，文章 [Che+a；Ave+b]确定了所谓的影响指数 ι，它控制着临界性下可观测量的协方差。结合 [DM22],中建立的标度关系，可得热力学临界指数 α、β、 γ和 ν，它们分别决定自由能、自发磁化、磁化率和关联长度的行为。

最后，由于随机簇模型与Potts模型相耦合，上述所有临界指数都可直接推广到二态、三态和四态Potts模型。这些结果对于二态Potts模型（即更广为人知的伊辛模型）早已为人所知，但对于三态和四态Potts模型则是新的。

我们预计，沿着这一方向，无论对于随机簇模型还是其他模型，都能得到更多结果。

注 3.1。 我们强调，这里得到的临界指数并不依赖于对转移矩阵最大特征值的计算。相反，我们借助定理 2.8，该定理基于对某些远离谱边的特征值平均行为的分析。从这个意义上说，我们的方法绕过了为主导特征值的计算提供严格论证这一主要难题。

3.2 特定随机簇可观测量的标度极限

利用 BKW 对应 [BKW76] ，可以推导出临界性下某些随机簇可观测量的标度极限。特别地，六顶点测试函数的特征函数 $\langle h^{(\delta)},\ \varphi\rangle$ 可以表示为随机簇模型下的期望：对渗流构型中各环所关联的适当扭曲权重取乘积。更精确地，若 $\mu = \frac{1}{2\pi}$ 反余弦($\sqrt{q}/2$) 且 余弦$\mu(\cdot)$:=余弦$(\cdot + 2\pi\mu)$/余弦$(2\pi\mu)$，则

$$\mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbb{Z}^2}\Big[e^{\mathrm{i}\langle h^{(\delta)},\varphi\rangle}\Big] = \phi_{\delta\mathbb{Z}^2,q}\Big[\prod_{\ell\in\mathcal{L}} \cos_\mu\big(\varphi(\mathrm{int}(\ell))\big)\Big], \tag{18}$$

其中 $\phi_{\delta\mathbb{Z}^2,\ q}$ 表示环系的分布 $\mathcal{L}$，该环系位于 $\delta\mathbb{Z}^2$，由簇权为 q 的临界随机簇测度的环表示导出；而$\mathrm{int}(\ell)$ 表示环 ℓ的内部，即当 $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$ 被视为连续简单路径时，它所围成的有界连通分支。该恒等算子的变体在文献中屡有出现；例如，参见 [Dub11]。关于此公式的更多细节，请参见 [Ave+a] 。

收敛到高斯自由场得到如下推论，该推论为上一章节中临界指数推导奠定了基础。

Cor推论 3.2。 固定 $q \in [1,4]$。对于每个具有有限狄利克雷能量的广义检验函数 φ,

$$\lim_{\delta\to 0} \phi_{\delta\mathbb{Z}^2,q}\Big[\prod_{\ell\in\mathcal{L}} \cos_\mu\big(\varphi(\mathrm{int}(\ell))\big)\Big] = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 \iint G_{\mathbb{R}^2}(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy\Big), \tag{19}$$

其中 $\sigma^2 = 2/$ 反余弦$(-\frac{\sqrt{q}}{2})$。

3.3 各向异性六顶点模型的应用

在 [Dum+20] 中推导出的随机簇模型的普适性使我们能够将主要结果推广到各向异性六顶点模型（权重 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$）。通常将 $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ 按以下方式参数化：令 $\zeta =$ 反余弦$(-\Delta)$ 以及 $\theta \in (0,\ \pi)$ 为满足以下条件的唯一角度：若 $1 > \Delta > -1$

$$\mathbf{a}\sin\tfrac{\zeta}{2} = \sin((1-\tfrac{\theta}{\pi})\zeta), \qquad \mathbf{b}\sin\tfrac{\zeta}{2} = \sin\tfrac{\theta\zeta}{\pi}, \qquad \mathbf{c} = 2\cos\tfrac{\zeta}{2}. \tag{20}$$

且若 $\Delta = -1$,

$$\mathbf{a} = 2\tfrac{\pi-\theta}{\pi}, \qquad \mathbf{b} = 2\tfrac{\theta}{\pi}, \qquad \mathbf{c} = 2. \tag{21}$$

参数 θ 表示方格的自然嵌入； $\theta = \pi/2$ 表示各向同性情形。更准确地说，令

$$\mathbf{L}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x + \cos(\theta)y, \sin(\theta)y). \tag{22}$$

将 [Dum+20] 的普适性结果、 [Ave+a]，中得到的 Baxter– Kelland–Wu 耦合的推论以及定理 2.8 结合起来，可得以下结果。

定理 3.3 （一般权重下六顶点模型的标度极限）。 在 $\mathbf{L}_\theta\mathbb{Z}^2$ 上、权重 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c} > 0$ 满足 $\Delta \in [-1,-1/2]$ 的六顶点模型的高度函数，按照定义 2.7 中的第 *(i)* 和 *(ii)* 项，收敛至 σ ·高斯自由场，其中

$$\sigma^2 = \frac{2}{\arccos\Delta} = \frac{1}{\arcsin\frac{\mathbf{c}}{2}} = \frac{2}{(\pi-\zeta)}. \tag{23}$$

请注意，我们并未声称收敛满足定义 2.7(iii) 的意义，即在 Hölder 空间中收敛。这一省略纯属技术原因。为了使论文篇幅保持适中，我们选择尽可能依赖六顶点高度函数的所谓自旋表示（下文将对此作详细讨论）。在各向同性情形下，为这一自旋表示建立所需的 RSW 理论相对直接，但在各向异性情形下尚不可行。虽然 [Ave+a]可以直接处理各向异性区域，但无法提供此处所需的正则性估计（更多讨论见注 10.1 ）。

4 证明概述及组成要素

下面我们将概述主要结果定理 2.8 的证明路线。定理 3.3 将在第 2.8 节由定理 10推导得出；除此章节外，我们只考虑各向同性情形 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$。

4.1 证明结构概述

各向同性情形下的收敛结果（定理 2.8）的证明分为四个步骤，在第 B 部分完成，非正式地概述如下。若定义 h 沿某个趋于零的序列 σ ·高斯自由场收敛，则称 $(\delta_n)_n$ 沿该尺度序列满足定义 2.7 中的每一项收敛。

1. 定理 6.1 断言，二点函数 $\Phi_2^{(\delta)}$ 满足二分：要么$\Phi_2^{(\delta)}$ 收敛到 $\sigma^2 \cdot \Psi_2^{\mathrm{GFF}}$，其中某个 $\sigma \geq 0$成立；要么这种收敛沿两个具有不同 σ值的子序列成立。2. 定理 7.1 使我们能够在以下意义下从二点相关函数推广到多点相关函数：若沿某个子序列 $(\delta_n)_n$, $\Phi^{(\delta_n)}$ 2 趋于 $\sigma^2 \cdot \Psi_2^{\mathrm{GFF}}$，则对每个 k， $\Phi^{(\delta_n)}$ k 趋于 $\sigma^k \cdot \Psi_k^{\mathrm{GFF}}$。这将定理 6.1 的二分推广到所有多点相关函数。3. 定理 8.1 断言，若沿某个子序列 $(\delta_n)_n$，所有关联函数都收敛到 σ · 高斯自由场的相应关联函数，则 $h^{(\delta_n)}$ 的极限为 σ ·高斯自由场（按定义 2.7 的意义）。这将定理 6.1 的二分推广到高斯自由场收敛的所有模式。4. 定理 4.3 和 4.4 共同推出，若对于某个 $(\delta_n)_n$， $h^{(\delta_n)}$ 收敛到σ · 高斯自由场，则 $\sigma^2 = 2/$ 反余弦 Δ。这使二分归并为单一情形，并完成主要结果的证明。

为了简洁地陈述本文B部分中这些步骤的证明，我们依赖四个证明要素，并在B 部分中将它们作为“黑箱”使用（见表1）。这些“黑箱”将在C–E部分中构建。简而言之，它们的描述如下。

1. **旋转不变性**。 关联函数渐近地具有旋转不变性。更准确地说，关联函数的任意子序列 标度极限都具有旋转不变性。2. **尺度不变性概览**。 经过适当选取的“可观测量”在标度极限下收敛，且我们可以显式计算其极限。3. **正则性估计与定性行为**。 我们建立了关联函数的适当界，并证明这些界在所有尺度上均成立。4. **关联函数的谱表示**。 关联函数可以用两个彼此对易的转移矩阵的谱来表示。前两项组成要素（旋转不变性和弱形式的尺度不变性）呼应了

	要素1: 旋转不变性	要素 2: 尺度不变性	要素3: 相关性的正则性	要素 4: 谱表示
步骤1: 二点	X		X	X
步骤 2: 多点	X		X	X
步骤 3: 测试函数			X	
步骤 4: 寻找 σ		X	X	

表 1：证明要素在全局证明步骤中的应用

论文开篇的讨论，也与物理学预测相符，尤其是那些源自重整化群形式体系的预测。不过，我们强调，这些性质并非 通过严格的重整化群分析得出。第三项组成要素（正则性估计）对应于一般连续相变所预期的定性界。

第四个组成要素更为神秘。我们对其作如下解释。自 Polyakov [Pol68; Pol70b; Pol70a], 的工作以来，人们便已预言：只要理论还满足适当的局域性原理，共形不变性就应由旋转、标度和平移不变性推出（对我们的模型而言，后者是平凡的）。虽然我们的谱表示并不能直接给出可观测量的局域性，但它使我们能够将拉普拉斯算子作用于不同空间位置处关联函数的效果联系起来。即便先验地属于与局域性不同的类型，这一显著特征仍提供了开展我们的分析所需的额外结构。

下面各小节将正式描述这些组成要素，以便它们可在第B部分中作为黑箱使用，并在后续部分中加以证明。

4.2 要素1：旋转不变性

下述结果是论文的一项关键外部输入。它表明， k点关联函数在 δ 趋于零的极限下对旋转不变。

定理 4.1 （ k点相关性 [Ave+a]的旋转不变性）。 固定 $\sqrt{3} \leq \mathbf{c} \leq 2$。则对任意 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意紧集 $K \subset \mathcal{D}_k$,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\boldsymbol{u} \in K} \sup_{I} \left| \Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u}) - \Phi_k^{(\delta)}(I\boldsymbol{u}) \right| = 0, \tag{24}$$

其中，第二个上确界取遍所有等距变换 I： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$。

这就是限制条件 $\mathbf{c} \geq \sqrt{3}$ 的由来。事实上，[Dum+20]证明了具有簇权重 $q \in [1,4]$ 的临界随机簇模型具有渐近旋转不变性 [BKW76], ，通过 Baxter–Kelland–Wu（BKW）对应关系， q 这一范围的 $\mathbf{c} \in [\sqrt{3}, 2]$ 与六顶点模型的参数范围 [Ave+a], 相匹配。利用这一对应关系，可以将临界随机簇模型的渐近旋转不变性转移到六顶点高度函数上。

我们预计定理 4.1 对所有 $\mathbf{c} \in (0,2]$均成立。对于 $\mathbf{c} \in [1,2]$，我们相信可能存在沿用 [Dum+20]的证明，但需直接处理六顶点模型，而不是其 FK 渗流表示。如果定理 $\mathbf{c} \in [1,2]$ 4.1 在该参数范围内成立，本文的论证将原样推广到 该范围。

对于$\mathbf{c} < 1$，尽管仍预期会收敛到高斯自由场，但六顶点模型缺乏正关联，并且证明中的若干步骤（与要素3相关）在没有这种正关联的情况下（以其现有形式）无法成立。

4.3 要素 2：尺度不变性概览

除了旋转不变性之外，人们自然会认为尺度不变性也是确定标度极限的重要因素。具备这一性质会大大简化我们的论证，但目前看来，直接运用现有方法还无法做到这一点。不过，六顶点模型在斜率为零时，其自由能或表面张力具有二阶可微性，这为我们提供了尺度不变性的一瞥。事实上，其二阶导数将被确定为某个量在尺度 δ 趋于零时的极限。该量的收敛将作为尺度不变性的指标。

下面，我们将前述断言明确表述出来。先回顾自由能的定义。

De定义 4.2 （自由能）。 固定 $\mathbf{c} > 0$。定义斜率为 $s \in [-1,1]$ 时的自由能 如下：

$$f(s) = \lim_{L\to\infty} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{ML} \log\left(Z_{\mathbb{T}_{M,L}} \mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}} \left[\left\{ \frac{I}{ML} = \frac{\lfloor Ls/2 \rfloor}{L/2} \right\} \right] \right), \tag{25}$$

其中， I 是任意一列水平边上的左箭头数量减去右箭头数量。

对于环面上的非平衡六顶点构型，高度函数可能无法定义，但应将 I/ML 理解为其垂直方向上的平均斜率。注意， $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 是偶函数，这是因为将所有箭头翻转后具有对称性。

自由能的二阶可微性已在 [Dum+22]中针对 $\mathbf{c} \in (0,2]$ 的六顶点模型利用 Bethe Ansatz 技术得以证明。该结果在 [Dum+24] 中用于证明 $\mathbf{c} \in [1,2]$ 时零斜率六顶点模型的去局域化。进一步利用 [Dum+22]，我们明确计算出 f 在 0 处的二阶导数——见 第24节，其中 $\mathbf{c} \in [1,2]$。

我们以这一结果为起点，进行两步分析，概述如下两个结果。第一步表明，二阶导数确实与实际六顶点模型的尺度不变性有关：它决定 GFF 极限的振幅（假设这样的极限存在）。第二步则将对[Dum+22] 的刻画转化为显式计算。

定理4.3 (GFF-LDP 对应)。 固定$\mathbf{c} \in [1,2]$。假设六顶点模型存在一个形式为 σ ·高斯自由场的子序列缩放极限。那么，

$$\sigma^2 = -\frac{1}{f''(0)}. \tag{26}$$

定理4.4 (计算 $f''(0)$)。 固定$\mathbf{c} \in [1,2]$。那么， f在 $s = 0$处对称且二阶可微，并且

$$f''(0) = -\tfrac{1}{2} \arccos \Delta = -\arcsin(\mathbf{c}/2), \tag{27}$$

其中，$\mathbf{c}$与 Δ之间的关系由方程 (5)给出。

这两个定理共同证明，任何为高斯自由场倍数的子序列缩放极限都必须具有显式计算出的方差。

我们简要评论一下定理4.3。若子序列收敛至 $\sigma^2 = -1/f''(0)$ 的拓扑足够强，能够涵盖大偏差事件的概率收敛，那么公式 σ高斯自由场便可通过一番“信封背面”的计算得出。遗憾的是，该拓扑不适用于概率以指数速度趋于零的事件，因此我们必须用其他方法得到这个公式。我们将通过把一个大偏差事件的概率实质上表示为许多 GFF 事件概率的乘积来推导该公式，而这些事件与子序列收敛的拓扑相容。

4.4 要素3：正则性估计与定性行为

最近发展的六顶点模型的 Russo–Seymour–Welsh（RSW）理论蕴含了该模型一种合适渗流表示的回路估计 。这

RSW 理论最初发展于 [Dum+24]，其中使用了 Bethe Ansatz。这里所采用的表示最初出现在 [Lis21；Lis22]。相应的回路估计由 [Dum+24] 得出，后来又独立地在 [GL25] 中通过一种不依赖 Bethe Ansatz 的不同方法得到。我们稍后将更详细地回到这些方面。

为便于本引言的阐述，我们采用以下原则：本段记录表示和回路估计的推论，而不明确描述回路估计的表示，以便在第 B 部分中将它们视为黑箱。以下所有陈述都将在第 D 部分中证明。

首先，对任意 $\{a,a'\},\{b,b'\}\subset\mathbb{R}^2$，定义尺度分离函数：

$$S_{\mathbb{R}^2}(\{a,a'\},\{b,b'\}) := \log\frac{\operatorname{dist}(\{a,a'\},\{b,b'\})}{\min\{|a'-a|,|b'-b|\}}; \tag{28}$$

$$S'_{\mathbb{R}^2}(\{a,a'\},\{b,b'\}) := \log\frac{1\vee\operatorname{dist}(\{a,a'\},\{b,b'\})}{\min\{|a'-a|,|b'-b|\}}. \tag{29}$$

回顾一下，在这些公式中，$|\cdot|$ 表示欧几里得距离；dist 表示两个集合之间的欧几里得距离（即第一个集合中的任意点与第二个集合中的任意点之间的最小距离）。第一个函数在标度变换下严格不变；第二个函数则更适用于离散情形，因为它允许点对重叠。

以下估计与方程（14）相似，并构成我们对关联函数进行定性分析的基础。

定理 4.5（正则性估计）。对任意 $k\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，存在常数 $\alpha_k>0$ 和$C_k<\infty$，使得对任意 $\mathbf{c}\in[1,2]$ 和 $\boldsymbol{u}\in(\mathbb{Z}^2)^{2k}$，

$$|\Phi_k(\boldsymbol{u})|\leq C_k\sum_{\pi}\prod_{ij\in\pi}\begin{cases}e^{-\alpha_k S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\})} & \text{if } S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\})\geq 20k^2,\\ 1\vee -S'_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\}) & \text{if } S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\})<20k^2,\end{cases} \tag{30}$$

其中 π 遍历 $\{1,\dots,k\}$的配对。

前一个定理有以下重要推论，它可由方程 (10) 中的可加性立即得出。

推论 4.6（相关函数的预紧性）。固定 $\mathbf{c}\in[1,2]$ 和 $k\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$。令$(\delta_n)$表示任意一个趋于零的序列。那么以下两条等价：

(i) $\Phi_k^{(\delta_n)}$ 在 $\mathcal{D}_k$的一个可数稠密子集上逐点收敛至 Ψ_k；

(ii) $\Phi^{(\delta_n)}{}_k$ 在 $\mathcal{D}_k$的紧子集上一致收敛至 Ψ_k。

在这种情况下，我们简单地称 $\Phi^{(\delta_n)}{}_k$ 在 $\mathcal{D}_k$上收敛到 Ψ_k。

此外，上确界$_\delta|\Phi_k^{(\delta)}|$ 在 $\mathcal{D}_k$上有限，因此这一族$(\Phi_k^{(\delta)})_\delta$ 在此拓扑中相对紧。最后，任何子序列极限在 $\mathcal{D}_k$上都是连续的。

证明。证明可通过仔细运用正则性估计（定理4.5）、尺度分离函数的定义（方程（28）和（29））以及可加性（方程（10））得出。

我们首先断言，对于某个紧集 $\mathcal{K}\subset\mathcal{D}_k$的任意邻域 $\mathcal{N}\subset\mathcal{D}_k$，我们可以找到某个 $\delta_0>0$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{K},\,\delta\in(0,\delta_0)}|\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{v})|\leq\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{N}}B(\boldsymbol{u}) \tag{31}$$

其中 $B(\boldsymbol{u})$定义为

$$C_k \sum_{\pi} \prod_{ij\in\pi} \begin{cases} e^{-\alpha_k S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\})} & \text{if } S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\}) \geq 20k^2, \\ 1 \vee -S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\}) & \text{if } S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u_i'\},\{u_j,u_j'\}) < 20k^2. \end{cases} \tag{32}$$

这个断言很方便：它没有考虑定理 4.5中的整数限制，也不涉及函数 $S'_{\mathbb{R}^2}$。

为了证明这个断言，我们首先要找到一个 $\delta_0 > 0$，使得：
- 对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{K}$ 和 $\delta \in (0, \delta_0)$，点 $\lfloor \boldsymbol{v}/\delta \rfloor \in (\mathbb{Z}^2)^{2k}$ 将所有坐标向下取整后仍位于 $(\delta^{-1})\mathcal{N} \subset \mathcal{D}_k$ 中，
- 对于任意 $\delta \in (0, \delta_0)$ 和 $\boldsymbol{u} \in (\delta^{-1})\mathcal{N}$，方程 (28) 和 (29) 对任意 $i \neq j$ 都一致。

第一项根据基本的拓扑学考量成立。对于第二项，很容易看出，当 $(\delta^{-1})\mathcal{N}$ 足够小时，方程 (28) 和 (29) 在 δ 上一致，这由 $\mathcal{N}$ 的紧性可知；这是因为 $\operatorname{dist}(\{u_i/\delta, u_i'/\delta\}, \{u_j/\delta, u_j'/\delta\}) \geq 1$。

从上面两条即可轻易推出该断言。注意，B 继承了 $S_{\mathbb{R}^2}$的尺度不变性，因此 (31) 的左侧有界于$\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{N},\,\delta\in(0,\delta_0)} B(\boldsymbol{u}/\delta) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{N}} B(\boldsymbol{u})$。这就证明了该断言（方程 (31)）。现在我们将根据该断言推导推论中的结论。

首先，立即可得 $\sup_\delta |\Phi_k^{(\delta)}|$ 在 $\mathcal{D}_k$上有界。对于另外两条结论（局部一致收敛到一个连续函数），只需证明：对于任意点 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_k$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\boldsymbol{u}$ 的一个邻域 $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}_k$ 以及某个$\delta_0 > 0$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{N},\,\delta\in(0,\delta_0)} |\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u}) - \Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{v})| \leq \varepsilon. \tag{33}$$

这个差可以写成由 $2k$ 项组成的望远镜求和，其中每一项的形式为 $\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{v}') - \Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{v}'')$，其中 $\boldsymbol{v}'$ 和 $\boldsymbol{v}''$ 仅有一个条目不同。在这种情况下，我们可以应用可加性（方程 (10)），将这个差写成一个相关函数 $\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{w})$，其中 $\boldsymbol{w}$ 具有这样的性质：两个点非常接近（因为 $\mathcal{N}$ 是 $\boldsymbol{u}$的一个极小邻域），而其他点保持固定。于是，方程 (31) 告诉我们，$\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{w})$ 可以通过缩小 $\mathcal{N}$而变得任意小。这就推出了所需的结论。

□

下面的圆柱估计是对定理 4.5的直接推广。下文中，$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\,2}$ 表示圆柱 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$上的两点相关函数，详见下文第 4.5小节。

推论 4.7（圆柱的正则性估计）。存在常数 $C, c \in (0, \infty)$，使得对于任意$\mathbf{c} \in [1, 2]$，$L \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(k,0),(2k,0),(3k,0))| \leq C, \tag{34}$$

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(0,\ell),(k,0),(k,\ell))| \leq C(\ell/k)^c \quad \textit{for } 0 < \ell \leq \min\{8k, L/2\}. \tag{35}$$

RSW 理论更微妙的一种体现形式是混合估计。众所周知，RSW 估计会导出不同尺度之间的多项式混合估计。这里，我们以多点相关函数的形式陈述一个非最优版本。

定理 4.8（混合估计）。固定$\mathbf{c} \in [1, 2]$、$k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$。在本定理中，我们考虑$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) \in \mathcal{D}_k$，其中 $\boldsymbol{u}^{(1)} = (u_1, u_1', u_2, u_2')$ 以及 $\boldsymbol{u}^{(2)} = (u_3, \ldots u_k')$；我们将 $2k$ 个点中的每一个都视为固定的，唯独第一个点 u_1 是可变的。于是存在某个常数 $C = C(u_1', u_2, u_2', \ldots\ldots) < \infty$，使得

$$\limsup_{u_1\to u_2} \limsup_{\delta\to 0} \left| \Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u}) - \Phi_2^{(\delta)}(\boldsymbol{u}^{(1)}) \Phi_{k-2}^{(\delta)}(\boldsymbol{u}^{(2)}) \right| \leq C. \tag{36}$$

接下来，我们陈述两个中间结果，它们对于第E部分很有用，在该部分中我们将确定极限高斯自由场的方差。这些中间结果以 $F(\mathbb{Z}^2)$ 的（随机）子集的形式表述。我们为这类子集赋予最近邻连通性：当且仅当两个面共享一条边时，它们才是邻点。我们将这类面的路径视为连接各面的中心的线段的并集，因此可以将这些路径看作 $\mathbb{R}^2$ 的子集。

定理 4.9 (臂指数)。 固定 $\mathbf{c} \in [1,2]$。存在常数 $c>0$，使得对任意满足 $R \geq 2r$ 的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $R,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$，

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\begin{Bmatrix}\exists a \in 2\mathbb{Z} \text{ such that the two sets of faces } \{h+a \leq 0\} \text{ and} \\ \{h+a \geq k\} \text{ both contain paths from } [-r,r]^2 \text{ to } \partial[-R,R]^2\end{Bmatrix}\right] \leq (r/R)^{ck^2}. \tag{37}$$

最后一个中间结果可直接由表示推出（而非 RSW 理论）。非正式地说，翻转支配表示：若 h 在某个面的闭回路上低于某个固定的 $m \in 2\mathbb{Z}$，那么在该回路所围住的面上，$h-m$ 随机支配于 $m-h$。由于六顶点高度函数具有梯度性质，正式表述会稍微复杂一些。

定理 4.10 (翻转支配)。 固定 $\mathbf{c} \in [1,2]$。考虑以下设置：

- γ 是任意一条自避的 $F(\mathbb{Z}^2)$-回路，
- $F_\gamma \subset F(\mathbb{Z}^2)$ 表示被 γ 严格围住的面（不包括 γ 经过的面），
- $m \in 2\mathbb{Z}$ 表示$2\lceil \frac{1}{2} h|_{F_\gamma} \rceil$的最大值，因此 $h-m$ 是梯度可测的，
- $\mathcal{E}$ 是任意一个关于$h|_{F(\mathbb{Z}^2)\setminus F_\gamma}$ 可测且具有正概率的梯度事件。

那么，对于测度 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\cdot|\mathcal{E}]$，高度函数 $(h-m)|_{F_\gamma}$被 $(m-h)|_{F_\gamma}$随机支配。更确切地说，对于任意有界递增函数 X，有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}\big[X((h-m)|_{F_\gamma})\big|\mathcal{E}\big] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}\big[X((m-h)|_{F_\gamma})\big|\mathcal{E}\big]. \tag{38}$$

4.5 要素 4：关联函数的谱表示

接下来几段的目的是陈述一种谱表示（它是转移矩阵形式的一个推论），说明其在证明核心中的用法，而不详细讨论它是如何得到的。该谱表示不依赖于杨–巴克斯特方程或 Bethe Ansatz。我们从圆柱上的六顶点模型的定义开始。

4.5.1 圆柱上的六顶点模型

转移矩阵可用于推导圆柱上六顶点模型中的恒等式。回顾$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\ L}}$ 是环面上的六顶点测度 $\mathbb{T}_{M,\ L}$。对于 L 偶数，令Cyl$_L$ 表示顶点集为 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$ 且具有最近邻连通性的图。平衡六顶点构型的定义可扩展到圆柱上：如果在每一列水平边中，恰有 $L/2$个箭头指向右方，且有 $L/2$个箭头指向左方，则称一个六顶点构型为平衡} 。平衡六顶点构型的事件记为 {balanced} ，与之前相同。下面的引理构成了我们谱表示的起点（稍后将在方程（195）中证明）。

引理 4.11 （柱测度）。 固定 $\mathbf{c} > 0$。$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\ L}}[\cdot|\{\text{平衡}\}]$ 在$M \to \infty$ 时的弱极限存在，并记为 $\mathbb{P}_{\mathrm{Cyl}_L}$。

回顾定理 2.2 表明，当 $\mathbf{c} \in [1,2]$， $\mathbb{P}_{\mathrm{Cyl}_L}$ 弱收敛于 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ 当L 趋于无穷时。

平衡六顶点构型 ω 在 Cyl_L 与梯度高度函数 h 之间存在双射： $F(\mathrm{Cyl}_L) \to \mathbb{Z}$。为说明这一点，我们注意到，根据冰规则和平衡条件，Cyl_L 的对偶图上的任一定向环路，沿环路方向看，穿过的左指箭头和右指箭头数量相同。我们可以将此类梯度高度函数的定义域扩展到 $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ （通过方程（7）的类似形式），并可通过简单的提升扩展到 $\mathbb{R}^2$ 。

回顾定义 2.4。对于任意 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \dots, u_k, u_k') \in (\mathbb{R}^2)^{2k}$，我们记作

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,k}(\boldsymbol{u}) =:= \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}\left[\prod_{i=1}^{k}\big(h(u_i') - h(u_i)\big)\right]. \tag{39}$$

4.5.2 二点函数的谱表示

我们引入一些更多的记号。对于 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \dots, u_{2k}, u_{2k}') \in (\mathbb{R}^2)^{2k}$，定义 x_i、 y_i、x_i' 和 y_i' 使得

$$u_i' - u_i = (x_i, y_i) \qquad \text{and} \qquad u_{i+1} - u_i' = (x_i', y_i'). \tag{40}$$

我们称序列 $(u_1, u_1', \dots, u_{2k}, u_{2k}')$ 为水平有序，当 $x_i, x_i' \geq 0$ 对所有 i 成立时；并称其为水平严格有序，当 $x_i \geq 0$ 且 $x_i' > 0$ 对所有 i 成立时。

定理 4.12 （二点函数的谱表示）。 固定 $\mathbf{c} > 0$ 与 $L \in 2\mathbb{Z}_{>0}$。则存在 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ 上的有限正测度 μ_L，使得

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u}) = \int \left((1-a)^{x_2} e^{-\mathrm{i}by_2} - 1\right)(1-a)^{x_1'} e^{-\mathrm{i}by_1'}\left(1 - (1-a)^{x_1} e^{-\mathrm{i}by_1}\right) \mathrm{d}\mu_L(a,b) \tag{41}$$

对任意水平有序的 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', u_2, u_2') \subset \mathbb{Z}^2$ 成立，且该测度支撑于集合$(0,2] \times [-\pi, \pi]$ 上，并在映射 $(a,b) \mapsto (a,-b)$ 下不变。此外， $\mu_L(\{|b| \in (0, 2\pi/L)\}) = 0$。

测度 μ_L 称为正 测度，以区别于有符号 测度或复 测度。我们稍后会看到， μ_L 是由六顶点模型转移矩阵的谱所诱导的狄拉克质量的有限和。因此，该测度称为谱测度。我们主要定理证明的核心，将是通过适当的极限（当 L 趋于无穷时）研究全平面二点函数 Φ_2 与测度 μ_L。

4.5.3 一般可观测量的谱表示

我们将推导出一般可观测量的一个表达式，它类似于（41），但不那么显式。该表达式的核心是关于反射 及其相关的反射正性的一项关键对称性。

为描述这一点，令 $\mathcal{R} := \{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ 表示反射线。此定义特意选取为使 $\mathcal{R}$ 穿过面心（而非顶点）。令 $\dagger : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 表示关于 $\mathcal{R}$的反射。令 $F^-(\mathrm{Cyl}_L)$ 表示 $\mathcal{R}$左侧的柱面面，令 $F^+(\mathrm{Cyl}_L)$ 表示 $\mathcal{R}$右侧的柱面面；中心位于 $\mathcal{R}$上的面同时包含在这两个集合中。函数 $\dagger$ 也被视为 $F(\mathrm{Cyl}_L)$ 上的一个对合，并通过 $h^\dagger := h \circ \dagger$作用于高度函数。

注 4.13. 重要的是， $\dagger$ 作用于高度函数，而非箭头。

设 $\mathfrak{A}$ 表示局域可观测量的集合，即实值随机变量$\mathbf{X}$，它们关于 h 的梯度在有限多个面上的限制可测（此类可观测量必然有界）。设

$$\mathfrak{A}^{\pm} := \{\mathbf{X} \in \mathfrak{A} : \mathbf{X} \text{ is measurable in terms of } h|_{F^{\pm}(\mathrm{Cyl}_L)}\}. \tag{42}$$

注意，反射 † 可解释为从 $\mathfrak{A}^-$ 到 $\mathfrak{A}^+$的双射，通过

$$\mathbf{X}^{\dagger} : h \mapsto \mathbf{X}(h^{\dagger}). \tag{43}$$

最后，对于任意 $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$，定义（平移）映射 $\tau_v \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, u \mapsto u + v$，并将其扩展到 $\mathfrak{A}^+$，通过

$$\tau_v : \mathfrak{A}^+ \to \mathfrak{A}^+, \mathbf{X} \mapsto (h \mapsto \mathbf{X}(h \circ \tau_v)). \tag{44}$$

注 4.14. 为了更好地理解这个定义，考虑以下例子。令 $(u_1, u_1', \ldots, u_k, u_k') \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{2}) \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ 表示 $F^+(\mathrm{Cyl}_L)$ 中的一族面的中心。那么：

- 通过 $\mathbf{X}$： $h \mapsto \prod_i (h(u_i') - h(u_i))$ 定义的可观测量 $\mathbf{X}$ 属于 $\mathfrak{A}^+$，
- 对于任意 $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$，我们有 $\tau_v(\mathbf{X}) \in \mathfrak{A}^+$，其中 $\tau_v(\mathbf{X})(h) = \prod_i (h(u_i' + v) - h(u_i + v))$，
- 我们有$\mathbf{X}^{\dagger} \in \mathfrak{A}^-$，其中$\mathbf{X}^{\dagger}(h) = \prod_i (h((u_i')^{\dagger}) - h(u_i^{\dagger}))$。

我们现在陈述关于一般可观测量的谱表示的主要定理。

定理 4.15（一般可观测量的谱表示）**.** 固定$\mathbf{c} > 0$。对任意三元组$(\mathbf{X}、\mathbf{Y}\ L) \in \mathfrak{A}^- \times \mathfrak{A}^+ \times 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，存在有限复值测度$\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}$，其支撑于 $[0, 2)$，使得：

(i) 对任意 $k \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X} \cdot \tau_{(k,0)}(\mathbf{Y})] = \int (1-a)^k \, \mathrm{d}\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}(a), \tag{45}$$

(ii)（柯西-施瓦茨不等式）$\mu_{\mathbf{X},\mathbf{X}^{\dagger},L}$ 与$\mu_{\mathbf{Y}^{\dagger},\mathbf{Y}\ L}$ 为正测度，且

$$|\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}\mathbf{Y}]|^2 \leq \|\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}\|^2 \leq \|\mu_{\mathbf{X},\mathbf{X}^{\dagger},L}\| \cdot \|\mu_{\mathbf{Y}^{\dagger},\mathbf{Y},L}\| = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}\mathbf{X}^{\dagger}]\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{Y}^{\dagger}\mathbf{Y}] \tag{46}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示全变差度量。

注意，（45）成立，并且对于 $k = 0$而言并非平凡结论。第二个性质可以理解为反射正性，参见例如 [Bis09] 及其中的参考文献。

5 论文的组织结构

论文按照表2分为四个部分。回顾第4 节的内容，B 部分包含主要证明，并依赖四个组成要素。除此之外，各部分相互独立，但要素2（E 部分）依赖于要素3（D 部分）中提出的一些想法。要素1（定理4.1的旋转不变性）已在先前工作中得到证明，论文没有专门安排章节讨论这一要素。

B 部分
主要结果的证明

本部分按照第4章节的概述，给出了主要证明。引言中正式陈述的组成要素均作为外部输入使用。第6、

Part	内容	技巧	外部输入
B	主要证明 （定理2.8 和3.3）	测度论； 复分析	要素1–4
C	要素 4 谱表示	初等的； 线性代数	
D	要素3 正则性估计	渗流	[Dum+24]（或 [GL25]）
E	要素 2 尺度不变性概览	渗流； 复分析	[Dum+22] 和要素3

表2：论文的组织结构：各部分的内容、技术和相互依赖关系。

7和8 章的主要结果分别为定理6.1、7.1和8.1，分别对应第4章节中概述的步骤1–3。第6–8 章彼此独立，可分别阅读。第9章将这些结果结合起来，证明各向同性情形下的主要结果（定理2.8）。第10 章给出了各向异性情形的证明（定理3.3）。$\mathbf{c} \in [\sqrt{3}, 2]$的取值与证明无关，因此在记号中省略。

6 二点函数的子序列高斯自由场极限

6.1 定理陈述与证明概要

第6 章专门用于证明以下结果。

Theo理 6.1（两点函数的二分性）。 以下两种性质之一成立

- 存在某个 $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\Phi_{(\delta)\ 2}$ 在 $\mathcal{D}_2$ 的每个紧子集上一致收敛到 $\sigma^2 \Psi_{\text{高斯自由场 }2}$，当 δ 趋于零时，
- 存在两个不同的 $\sigma, \sigma' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及两个趋于零的序列 $(\delta_n)_n, (\delta'_n)_n$，使得 $\Phi_{(\delta_n)\ 2}$ 和 $\Phi_{(\delta'_n)\ 2}$ 分别收敛到 $\sigma^2 \Psi_{\text{高斯自由场}2}$ 和 $(\sigma')^2 \Psi_{\text{高斯自由场}2}$，且当 n趋于无穷时，这种收敛在 $\mathcal{D}_2$ 的每个紧子集上一致成立。

注 6.2. 该定理并未断言所有子序列极限都是Ψ_2^{GFF}的倍数。我们认为，其证明允许存在其他子列缩放极限的可能性，例如 $\sigma^2 \Psi_2^{\mathrm{GFF}} + (\sigma')^2 \Psi'_2$，其中 Ψ' 是一个有质量的 高斯自由场的两点相关函数。

我们来概述证明思路。第一步（第 6.2 小节）是令 L 趋于无穷，并在六顶点模型圆柱上的两点相关函数的定理 4.12 谱表示公式中沿一个子序列取标度极限。通过紧性论证，可得到一个极限两点函数 Ψ_2 和一个定义在 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$上的正测度 μ，该测度在 $(a, b) \mapsto (a, -b)$ 下保持不变，使得对于满足某些简单几何约束的每个 $\boldsymbol{u} = (u_1, u'_1, u_2, u'_2) \in (\mathbb{R}^2)^4$，

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) = \int \left(e^{-ax_2 - \mathrm{i}by_2} - 1\right) e^{-ax'_1 - \mathrm{i}by'_1} \left(1 - e^{-ax_1 - \mathrm{i}by_1}\right) \mathrm{d}\mu(a, b) \tag{47}$$

（回顾方程（40中对与此类 $(x_1, y_1, x'_1, y'_1, x_2, y_2)$ 相关的 $\boldsymbol{u}$）的定义）。测度 μ 完整编码了二点函数 Ψ_2，我们的目标是分析其结构。

假设可以在积分号下求导，在 任意个自变量处对 Ψ_2 应用拉普拉斯算子，会在被积函数中产生因子 $a^2+(ib)^2$，这暗示了 Ψ_2 在 $\mathcal{D}_2$ 的每个自变量上具有调和性，等价于集中性质 $\mu[\{b^2\neq a^2\}]=0$。事实上，只需简单验证（另见定理 9.1的证明），即可从上面的表达式看出，对于某个 $\Psi_2=\sigma^2\cdot\Psi_2^{\mathrm{GFF}}$，有 $\sigma>0$ 当且仅当 $\mu[\{b^2\neq a^2\}]=0$ 且 μ 的第一边缘分布的密度为 $\frac{\sigma^2}{2\pi a}\mathrm{d}a$。 —

我们无法直接证明 μ 的这两个性质。不过，我们确实利用了 Ψ_2 （定理 4.1）中的旋转不变性这一关键要素，它给出了许多恒等式，将 Ψ_2 在不同点处的取值联系起来。这些恒等式转化为对 a 与 b 在 μ 下的联合分布所施加的约束——见（78）和（87）。将这些约束与某些解析性性质（函数 I_F，定义于第6.3小节）结合起来，我们将在第6.4小节推导出

$$\mu[\{a^2<b^2\}]=0. \tag{48}$$

人们或许会希望定理4.1 还能给出相反方向的界 $\mu[\{a^2>b^2\}]=0$，从而推出 $\mu[\{b^2\neq a^2\}]=0$。这样一来，第一边缘分布的密度便可直接由旋转不变性约束得到，进而确定 μ 至一个乘法常数。不幸的是，事实并非如此：正如备注 6.2所指出的，可以构造出一整族与旋转不变性及所有正则性假设相容的标度极限，但它们满足 $\mu[\{b^2\neq a^2\}]\neq 0$。

尽管（48）不足以唯一确定 Ψ_2，但它仍足以说明（见第 6.5节）， Ψ_2 的大尺度和小尺度行为与高斯自由场的二点相关函数相容。特别是，如果 Ψ_2 不是 Ψ_2^{GFF}的倍数，那么它在大尺度和小尺度下的子序列缩放极限必定是 Ψ_2^{GFF}的不同倍数。这便得到定理 6.1中的二分结论。

6.2 谱表示的紧性

此处及下文中，对于引言中引入的每个水平有序 $\boldsymbol{u}$，我们沿用方程（40）中的约定，即 $(x_1,\ y_1,\ x_1',\ y_1',\ x_2,\ y_2)$。回顾定理 4.12，有

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u})=\int\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}(a,b)\mathrm{d}\mu_L(a,b) \tag{49}$$

其中

$$\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}(a,b):=\left((1-a)^{x_2}e^{-\mathrm{i}by_2}-1\right)(1-a)^{x_1'}e^{-\mathrm{i}by_1'}\left(1-(1-a)^{x_1}e^{-\mathrm{i}by_1}\right) \tag{50}$$

对于任意水平有序的 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ u_1',\ u_2,\ u_2')\in(\mathbb{Z}^2)^4$。本小节证明族 $(\mu_L)_L$ 属于一个测度紧空间，从而使我们能够为两点函数的子序列标度极限导出谱表示。

6.2.1 紧测度空间

在本章节中，我们引入一个满足某些尺度不变的定性界的测度紧空间 $\mathcal{M}$，然后证明圆柱测度 μ_L 属于该空间。

定义 6.3 （紧测度空间$\mathcal{M}_{c,\ C}$）。 对于 $c,\ C\in(0,\ \infty)$，令$\mathcal{M}_{c,\ C}$表示 $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$上的正测度 ν 的集合，这些测度在$(a,\ b)\mapsto(a,\ -b)$下不变，并满足以下界：

(i) $\nu[\{a\in(\alpha,\ 2\alpha)\}]\leq C$，对于任意 $\alpha>0$，

(ii) $\nu[\{(a,\ |b|) \in (0,\ \alpha) \times (\beta,\ 2\beta)\}] \le C(\alpha/\beta)^c$，对于任意 $\beta \ge \alpha > 0$。
我们赋予 $\mathcal{M}_{c,C}$ 以弱（或模糊）拓扑，即令映射$\nu \mapsto \nu[f]$ 对任意支撑为 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$的紧子集的连续函数 f：$\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 均为连续映射的拓扑。

现在我们证明，对于适当的常数$c, C \in (0, \infty)$，柱测度 μ_L 属于 $\mathcal{M}_{c,C}$ 。

引理 6.4. 存在常数 $c, C \in (0, \infty)$，使得对每个 L，测度 μ_L都属于 $\mathcal{M}_{c,C}$。

从现在起，我们固定这样一对 $c, C \in (0, \infty)$，并在下文中记作$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{c,C}$ 。

证明。 反射对称性表明，某些 $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{Z}^2)^4$ 具有特殊性质：具体而言，这些 $\boldsymbol{u}$的前两个点位于某条垂直反射线的左侧，而后两个点则是前两个点关于该反射线的反射像。这使得 $\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}}$为实数且具有恒定符号，这对证明至关重要。我们将在全文中固定 L 。

步骤1：检验 $\mathcal{M}$ 的定义中的 (i)。对于 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 $\ell \in 2\mathbb{Z}_{\ge 0}$，令

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \\ k+\ell & 0 \\ 2k+\ell & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

使得

$$\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}}(a,b) = -(1-a)^\ell (1-(1-a)^k)^2 \le 0. \tag{52}$$

现在我们根据 α 的取值将论证分为两种情况。首先，考虑 $\alpha \le 1/16$ 的情形。令 $k = \ell \in [\frac{1}{8\alpha}, \frac{1}{4\alpha}] \cap 2\mathbb{Z}$。那么，对于任意 $(a,\ b) \in [\alpha, 2\alpha] \times \mathbb{R}$，经过简短计算可得 $|\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}}(a,\ b)| \ge 1/1000$。此外，推论 4.7表明$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\ 2}(\boldsymbol{u})| \le C$ 关于 L 和 α 一致。结合前两句中的断言以及 $\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}}(a,\ b) < 0$ 可得

$$\mu_L[\{a \in [\alpha, 2\alpha]\}] \le -1000 \int \chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}}(a,b) \mathrm{d}\mu_L(a,b) = 1000 |\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u})| \le 1000C. \tag{53}$$

对于情形 $\alpha \ge 1/16$，只需令 $k = 1$ 和 $\ell = 0$，并采用类似的策略来获得 t

$$\mu_L[\{a \in [1/16, \infty)\}] \le 256 |\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u})| \le 256. \tag{54}$$

On 右侧我们用到了高度差不超过 1，因此$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\ 2}(\boldsymbol{u})| \le$ 1.

步骤 2：验证 $\mathcal{M}$ 的定义中的 (ii)。我们将证明存在常数$c,\ C > 0$ 使得

$$\mu_L[\{(a,|b|) \in (0,\alpha) \times (\beta, 2\beta)\}] \le C\left(\tfrac{\alpha}{\beta}\right)^c \qquad \text{for } \alpha < \tfrac{1}{16} \text{ and } \beta = \tfrac{\pi}{2\ell} \tag{55}$$

满足 $1 \le \ell \le L/2$ 偶整数。条件 (ii) 可由（55）结合上述第 (i) 点，以及 μ_L 的支撑位于 $\{$（$a,\ b$）这一事实推出：$0 < a \le 2$ 和 $2\pi/L \le |b| \le \pi\}$（见定理4.12），只需进行简单的代数运算。

固定 α 和 β 的取值，使其满足（55），并选取一个偶整数 $k \in [\frac{1}{8\alpha}, \frac{1}{4\alpha}]$。令

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ell \\ k & 0 \\ k & \ell \end{pmatrix} \tag{56}$$

使得 $x_1 = x_2 = 0$ 和 $x_1' = k$ 和

$$\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}(a,b) = 2(1-a)^k(1-\cos \ell b) \geq 0. \tag{57}$$

那么，对于任意的 $(a,\ b) \in [0,\alpha] \times [\beta, 2\beta]$，简单计算可得 $\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}(a,\ b) \geq 1$. 此外，推论 4.7 意味着 $|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\ 2}(\boldsymbol{u})| \leq C'(\alpha/\beta)^{c'}$，其中存在一些常数 C'，$c' \in (0,\ \infty)$，它们关于 L、α 和 β 是一致的。结论可由与 (i) 相同的论证得出。 □

现在我们开始处理 $\mathcal{M}$ 中的测度。根据构造，这些测度具有如下性质：

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}} \int (a \wedge \tfrac{1}{a}) \mathrm{d}\nu(a,b) < \infty. \tag{58}$$

这意味着函数 $a \wedge \frac{1}{a}$ 是应用控制收敛定理时一个合适的控制函数。在下面的引理中，我们总结了 $\mathcal{M}$ 的另外一些性质。我们将其作为一道直接的练习留给读者。

引理 6.5 (关于 $\mathcal{M}$的性质)。我们有以下性质：

(i) $\mathcal{M}$ 是一个紧拓扑空间，*(ii)* 假设 f： $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数，使得

$$\sup_{a,b} (a \vee \tfrac{1}{a}) |f(a,b)| < \infty, \tag{59}$$

那么函数 $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$, $\nu \mapsto \nu[f]$ 是连续的，

(iii) 设 $(\nu_n)_n \subset \mathcal{M}$ 表示一列测度，并设 $(f_n)_n$ 表示一列连续函数 f_n： $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，满足 $\sup_{n,a,b} (a \vee \frac{1}{a}) |f_n(a,b)| < \infty$。若 $(\nu_n)_n$ 收敛到 ν，且 $(f_n)_n$ 在$\mathbb{R}_{>0}^{-} \times \mathbb{R}$ 的每个紧子集上一致收敛到函数 f，那么

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n[f_n] \to \nu[f]. \tag{60}$$

6.2.2 柱测度的全平面极限

本节中，我们分析柱测度在 L 趋于无穷时的极限。由于测度 μ_L 属于 $\mathcal{M}$，我们可以预先固定序列 $\mu_\infty \in \mathcal{M}$的一个子序列极限$(\mu_L)_L$。实际上可以证明整个序列 $(\mu_L)_L$ 收敛——例如利用式（61）以及全平面测度存在所带来的二点函数极限的唯一性——但这一事实对下文并无影响。因此，我们只考虑一个固定的子序列极限。

因此，全平面两点相关函数可以像圆柱情形那样用 μ_∞ 表示。

引理 6.6。 对于任意满足 $\{y_1, y_2\} \ni 0$ 的水平有序序列 $\boldsymbol{u} \subset \mathbb{Z}^2$，有

$$\Phi_2(\boldsymbol{u}) = \int \chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}(a,b)\, \mathrm{d}\mu_\infty(a,b). \tag{61}$$

证明。 设 $\boldsymbol{u}$ 满足引理的假设。利用六顶点模型的全平面极限（定理2.2），得到

$$\Phi_2(\boldsymbol{u}) = \lim_{L\to\infty} \Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u}) \overset{(49)}{=} \lim_{L\to\infty} \mu_L[\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}]. \tag{62}$$

由于 μ_L 的支撑位于 $(0,\ 2]\times\mathbb{R}$，我们可以插入指示函数 $\mathbb{1}[a\le 2]$，并写成

$$\Phi_2(\boldsymbol{u}) = \lim_{L\to\infty} \mu_L[\mathbb{1}[a\le 2]\cdot\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}]. \tag{63}$$

由于 $y_1 = 0$ 或 $y_2 = 0$，我们有 $\mathbb{1}[a \le 2]\cdot\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}} = O(a\wedge\frac{1}{a})$（见方程 (50)）。引理 6.5 因此推出

$$\Phi_2(\boldsymbol{u}) = \mu_\infty[\mathbb{1}[a\le 2]\cdot\chi_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{discr}}]. \tag{64}$$

去掉指示函数 $\mathbb{1}[a\le 2]$即可完成证明，这可由以下事实得到论证： $\mu_\infty[|a|>2]=0$。根据 μ_L的定义，这一性质可由对应的测度 $\mathcal{M}$ 的界继承而来，并再次应用引理 6.5。 □

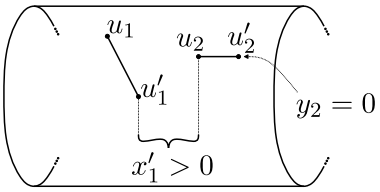


图 3：当点 $\boldsymbol{u}\in(\mathbb{R}^2)^4$ 满足图中的几何约束时，谱表示可传递到标度极限：点对不能在“水平方向”重叠（图中为 $x_1\ge 0$ 和 $x_1'>0$），且其中一对点必须位于同一条水平线（图中为 $y_2=0$）。

6.2.3 通往标度极限

现在令格点的网格尺寸趋于零，从而进入标度极限。对于任意 $\nu\in\mathcal{M}$ 和 $\delta>0$，记由下式定义的测度为 $\nu^{(\delta)}\in\mathcal{M}$

$$\nu^{(\delta)}(U) := \nu(\delta U) \tag{65}$$

for 任意可测子集 $U\subset\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$。根据构造，对于每个可积函数 f,

$$\int f(\delta a,\delta b)\,\mathrm{d}\nu^{(\delta)}(a,b) = \int f(a,b)\,\mathrm{d}\nu(a,b). \tag{66}$$

对于 $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$，令 $u/\delta := (\lfloor x/\delta\rfloor,\lfloor y/\delta\rfloor)\in\mathbb{Z}^2$；对于任意 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_1',\dots,u_k,u_k')\in(\mathbb{R}^2)^{2k}$，其中某个 k，记为 $\boldsymbol{u}/\delta := (u_1/\delta,u_1'/\delta,\dots,u_k/\delta,u_k'/\delta)\subset(\mathbb{Z}^2)^{2k}$。

下述概念将在全文中使用。

定义 6.7 （收敛序列）。 收敛序列 是一个趋于零的正实数序列 $(\delta_n)_n$，使得 $\mu_\infty^{(\delta_n)}$在紧拓扑空间 $\mathcal{M}$中收敛。我们用 μ 表示其极限。对 $(\delta_n)_n$ 的依赖关系总是可以从上下文中明确看出。

由 $\mathcal{M}$的紧性可知，收敛序列必然存在。此外，对于任意趋于零的尺度序列 $(\delta'_n)_n$ ，都可以抽取一个收敛子序列 $(\delta_n)_n$。

为陈述下一个结果，我们引入 χ 方程（ χ^{discr} 50）中的函数的一个变体：对于任意 $\boldsymbol{u} = (u_1,\ u'_1,\ u_2,\ u'_2) \subset \mathbb{R}^2$，定义

$$\chi_{\boldsymbol{u}}(a,b) := (e^{-ax_2-\mathrm{i}by_2} - 1)e^{-ax'_1-\mathrm{i}by'_1}(1 - e^{-ax_1-\mathrm{i}by_1}). \tag{67}$$

引理 6.8 （子序列缩放极限的谱表示）。 设$(\delta_n)_n$ 是一个收敛序列。那么，对于任意满足 $\{y_1, y_2\} \ni 0$ 的水平严格有序 $\boldsymbol{u} = (u_1, u'_1, u_2, u'_2) \in (\mathbb{R}^2)^4$

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) := \lim_{n\to\infty} \Phi_2^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u}) = \int \chi_{\boldsymbol{u}}(a,b)\,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{68}$$

注 6.9。 与（61）相比，我们在上文要求这些点在水平方向上严格有序。这一额外的严格性是必要的，因为在缩放过程中，还必须控制 $\chi_{\boldsymbol{u}}$ 在较大取值下的行为 a，而这一几何条件正是确保妥善处理此类行为所必需的。

证明。 为简化记号，我们假设点 $\boldsymbol{u}$ 属于 $(\mathbb{Z}^2)^{2k} \subset (\mathbb{R}^2)^{2k}$，对所有 n 均有 $1/\delta_n \in \mathbb{Z}$，且 $y_2 = 0$。由于 $\boldsymbol{u}$ 水平严格有序，且 $\boldsymbol{u} \mapsto \chi_{\boldsymbol{u}}(a,\ b)$ 具有光滑性，同时考虑到 $\mathcal{M}$ 定义中的界以及关联函数的赫尔德性质，这些假设无伤大雅。

如果 μ_∞ 的支撑位于 $\{a \le 1\}$ 上（即转移矩阵的所有特征值都非负），证明就很简单。对应于$a \in$ 的负特征值（$1, 2]$, ）会使证明稍微复杂一些。

对于任意 n，根据正特征值和负特征值各自的贡献，将 $\Phi^{(\delta_n)}{}_2(\boldsymbol{u}) = P_n + N_n$ 拆分为：

$$P_n := \int_{\{a\le 1\}} \chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}(a,b)\,\mathrm{d}\mu_\infty(a,b); \tag{69}$$

$$N_n := \int_{\{1<a\le 2\}} \chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}(a,b)\,\mathrm{d}\mu_\infty(a,b). \tag{70}$$

总之，只需证明 P_n 趋于 $\int \chi_{\boldsymbol{u}}(a,b)\mathrm{d}\mu(a,b)$（当 $n \to \infty$时），且 N_n 趋于零。

步骤1：的极限 N_n。 回顾 $\mathcal{M}$ 的定义可知 $\mu_\infty[\{1 < a \le 2\}] < \infty$。将$\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}$ 明确写出后，很容易看出

$$|\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}(a,b)| \le 4(1-a)^{x'_1/\delta_n}. \tag{71}$$

对于任意固定的 $a \in$ (1,2)，右侧的上界在 n 趋于无穷时趋于零。因此，利用控制收敛定理，只有 $a = 2$处的原子可能对极限有贡献。然而， $\mu_\infty[\{a = 2\}] = 0$。事实上，将 $e_1 =$ (1,0)写出，当 k 沿奇整数趋于无穷时，

$$\Phi_2(0, e_1, (k+1)e_1, (k+2)e_1) = -\int a^2(1-a)^k \mathrm{d}\mu_\infty(a,b) \to 4\mu_\infty[\{a=2\}]. \tag{72}$$

但我们知道，左侧的关联函数趋于零，这要归功于我们的正则性估计（定理 4.5）。至此，步骤1完成。

步骤 2： P_n **的极限**。我们可以写成

$$P_n = \int_{\{a\le 1/\delta_n\}} \chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}(\delta_n a, \delta_n b)\,\mathrm{d}\mu^{(\delta_n)}_\infty(a,b) = \int f_n(a,b)\,\mathrm{d}\mu^{(\delta_n)}_\infty(a,b), \tag{73}$$

其中 $f_n(a,b) := \mathbb{1}[a \le 1/\delta_n]\cdot\chi^{\mathrm{discr}}_{\boldsymbol{u}/\delta_n}(\delta_n a, \delta_n b)$。通过推导出 f_n 的显式表达式，可以直接看出，当 n 趋于无穷时，f_n 在 $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ 的每个紧子集上都收敛到 $\chi_{\boldsymbol{u}}$。此外，由于 $\{y_1,y_2\}\ni 0$，可知 $\sup_{n,a,b}(a\vee\frac{1}{a})|f_n(a,b)|<\infty$。由于 $\mu^{(\delta_n)}_\infty$ 趋于 μ（根据假设），P_n 的收敛性便由引理 6.5 得证。

□

6.3 旋转不变性的推论

简要回顾一下目前为止我们所做的工作。我们引入了定义 $\mathcal{M}$中描述的紧测度集 6.3，并在引理 6.5 中研究了它的一些性质。这使我们能够证明，任意趋于零的网格尺寸序列都存在一个“收敛子序列”$(\delta_n)_n$，沿着该子序列，对于某个 $\mu\in\mathcal{M}$,

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) := \lim_{n\to\infty}\Phi_2^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u}) = \int \chi_{\boldsymbol{u}}(a,b)\,\mathrm{d}\mu(a,b) \tag{74}$$

对于任意水平严格有序的 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_1',u_2,u_2')\in\mathcal{D}_2$ 满足 $\{y_1,y_2\}\ni 0$ (见方程 (67)、引理 6.8 和图 3)。

本章节研究谱测度 μ 的子序列标度极限 μ_∞的性质，尤其是定理 4.1的旋转不变性所带来的后果。这些后果具体体现在 (78) 中，并最终导出定理 6.1。在定理7.1的证明中还会再次用到旋转不变性，但我们认为 (78) 是其主要后果。

令 $\mathbb{C}_+ := \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$。

定义 6.10。对于收敛序列 $(\delta_n)_n$，关联以下函数：

$$F : \mathbb{C}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ (x,y)\mapsto \int a e^{-ax-\mathrm{i}by}\,\mathrm{d}\mu(a,b), \tag{75}$$

$$I_F : \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R},\ s\mapsto -\int_1^s F(x,0)\mathrm{d}x. \tag{76}$$

定义 $\mathcal{M}$ 中的界保证上述函数确实定义良好。在 I_F的定义中，积分带符号，因此对于所有 $s>0$，$I_F'(s) = -F(s,0)$。

我们首先归纳 F 的若干性质。

引理 6.11. 对于任意收敛序列 $(\delta_n)_n$，函数 F 满足以下性质：

(i) 对于任意水平严格有序的$(u_1,u_1',u_2,u_2')\in(\mathbb{R}^2)^4$,，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{\varepsilon}\Psi_2(u_1,u_1',u_2,u_2+(\varepsilon,0)) = F(x_1+x_1',y_1+y_1') - F(x_1',y_1'). \tag{77}$$

(ii) 函数 F 在 $\mathbb{C}_+\times\mathbb{R}$ 上连续。*(iii)* 对任意固定的 $y\in\mathbb{R}$，函数 $F(\,\cdot\,、\,y)$ 在 $\mathbb{C}_+$ 上全纯。*(iv)* 对任意 $(x、\,y)$，有 $|F(x、\,y)|\le F(\mathrm{Re}(x)、0)$，且 $F(x、0)$ 关于 $x\in\mathbb{R}_{>0}$ 单调递减。*(v)* 有 $\lim_{x\to\infty}F(x、0)=0$。

证明。 所有性质均由68）、 $\mathcal{M}$ 的定义中的界以及以 $a \wedge \frac{1}{a}$ 为控制函数的控制收敛定理推出。 □

我们现在转而讨论 I_F的性质。回想一下， $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得范数。

引理 6.12. 对于每个收敛序列$(\delta_n)n$，函数 F 与 I_F 满足以下性质。

(i) 函数 I_F 是解析的。*(ii)* 对于每个 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', u_2, u_2') \in \mathcal{D}_2$，极限 $\Psi_2(\boldsymbol{u}) := \lim_{n\to\infty} \Phi^{(\delta_n)}{}_2(\boldsymbol{u})$ 是良定义的，并且等于

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) = I_F(|u_2 - u_1|) + I_F(|u_2' - u_1'|) - I_F(|u_2 - u_1'|) - I_F(|u_2' - u_1|). \tag{78}$$

(iii) 对于任意$(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$，我们有

$$F(x, y) = -\partial_x(I_F(|(x, y)|)). \tag{79}$$

注记6.13. 注意（78）与高斯自由场相关函数（14）的表达式之间的相似性。 Ψ_2（$\boldsymbol{u}$）可以分解为依赖于 $\boldsymbol{u}$ 的成对差的四项之和，这是（68）的一个简单推论——至少对于 $\boldsymbol{u}$ ，（68）对其适用。这些项仅依赖于差的欧几里得范数，这一关键事实编码了标度极限的旋转不变性（定理4.1）。

证明。 I_F 的解析性由 F的性质可知。下面证明 (ii) 和 (iii)。

定义 $\mathbb{R}^2_\pm := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pm x > 0\}$。回想一下，对于所有满足 $y_1 = 0$ 或 $y_2 = 0$ 的水平严格有序的 $\boldsymbol{u}$ ， Ψ_2 都有良好定义，并且可用 μ 表示——见引理 6.8。证明分为四步。首先，证明对于固定的 $(u_1, u_1', u_2) \in (\mathbb{R}^2_-)^2 \times \mathbb{R}^2_+$，函数 $\Psi_2(u_1, u_1', u_2, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^2_+$上有良好定义且 C^1。其次，证明公式（79）。第三，当 $y_2 = 0$时，证明 $\mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ 上的方程 (78)。最后，将方程 (78)推广到整个 $\mathcal{D}_2$。

步骤1： $\Psi_2(u_1, u_1', u_2, \cdot)$ 的定义。读者可以参考图4。固定 $(u_1, u_1') \in (\mathbb{R}^2_-)^2$。我们首先证明 $\Psi_2(u_1, u_1', \cdot, \cdot)$ 在 $(\mathbb{R}^2_+)^2$ 上的良定义性。固定两个点 $u_2, u_2' \in (\mathbb{R}^2_+)^2$。令 U 表示一个包含 u_2 与 u_2' 之间线段的开集，并且其闭包是 $\mathbb{R}^2_+$ 的紧子集（见图4）。令 $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 表示旋转一个充分小的角度，使得 θu_1、 $\theta u_1' \in \mathbb{R}^2_-$ 和 $\theta U \subset \mathbb{R}^2_+$。现在，我们可以找到一条从 u_2 到 u_2' 的路径，该路径由有限条直线段 $S \subset U$ 构成，并且每条线段都满足 S 是水平的或 θS 是水平的（见图 4 ）。分别以 S_- 和 S_+ 表示 S 的起点和终点。由 $\Phi^{(\delta_n)}$ 2 的可加性，我们得到

$$\Phi_2^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u}) = \sum_S \Phi_2(\tfrac{u_1}{\delta_n}, \tfrac{u_1'}{\delta_n}, \tfrac{S_-}{\delta_n}, \tfrac{S_+}{\delta_n}) \tag{80}$$

由于 $n \to \infty$，有限和中的所有项都收敛：若 S 是水平穿越，则该项由引理6.8得出收敛；若 θS 是水平穿越，则将引理6.8应用于旋转系统，并利用定理4.1，即可得出该项收敛。

现在证明 $\Psi_2(u_1, u_1', u_2, \cdot)$ 在 U 上是 C^1。由引理 6.11(i)，水平偏导数存在且连续（我们也利用了 Ψ_2 的可加性）。对旋转系统应用同样的推理可知，沿方向 $\theta^{-1}e_1$ （其中 $e_1 = (1, 0)$）的偏导数也存在且连续。由于向量 $\{e_1, \theta^{-1}e_1\}$ 张成了 $\mathbb{R}^2$ 的切空间，因此我们得出结论： $\Psi_2(u_1, u_1', u_2, \cdot)$ 在 U 上是 C^1。

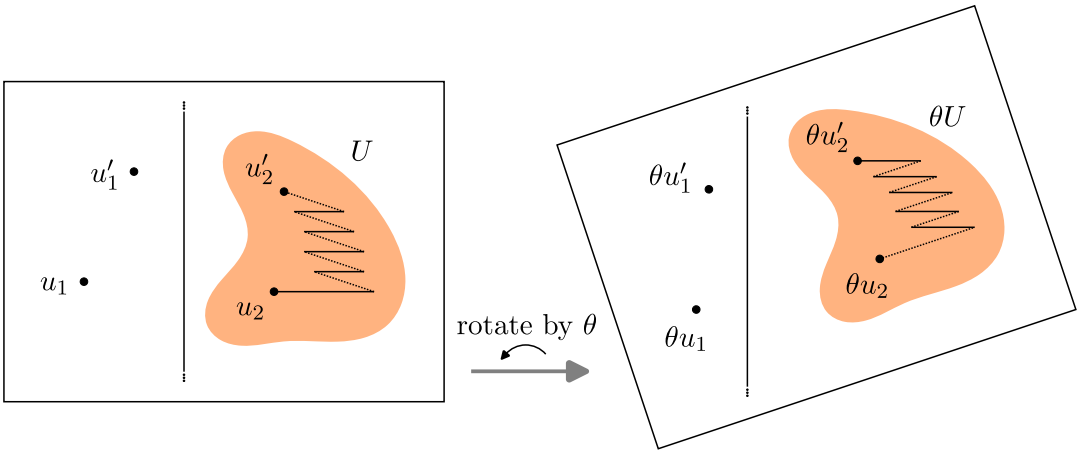


图4：在引理 6.12 的证明中，步骤1证明了 $\Psi_2(u_1,\ u_1',\ \cdot,\ \cdot)$ 定义良好，并利用引理 6.11 以及 Ψ_2 的旋转不变性，证明了它在 $(\mathbb{R}^2_+)^2$ 上。

步骤 2：方程的证明 (79)。 读者可以参考图 5。设$u_1' = (0,0)$， $u_2 \in \mathbb{R}^2_+$，以及 $u_1 = -(n-1)\cdot u_2$，其中 $n > 1$ 足够大。与之前一样，设$(x_1', y_1') = u_2 - u_1'$。回顾引理 6.11 中的方程（77）。有两点值得注意。

首先，控制收敛定理意味着 $\lim_{n\to\infty} F(nx_1',\ ny_1') = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{\varepsilon}\Psi_2(u_1,u_1',u_2,u_2+(\varepsilon,0)) = \lim_{n\to\infty} F(nx_1',ny_1') - F(x_1',y_1') = -F(x_1',y_1'). \quad (81)$$

其次，我们在上文证明了 $u_2' \mapsto \Psi_2(u_1,\ u_1',\ u_2,\ u_2')$ 在 $\mathbb{R}^2_+$ 上全微分。进一步，由定理 4.1可知，它在关于经过 u_1、 u_1'和 u_2的直线的正交反射下保持不变。因此我们得出结论，在 u_2 处，沿该直线正交方向的偏导数为零。因此，将我们上文分析的偏导数分解为两个部分是自然的：一个沿直线，另一个垂直于直线。利用定理 4.1的旋转不变性，沿直线的导数可以改写为关于函数 $F(\cdot,\ 0)$的表达式。这样便得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{\varepsilon}\Psi_2(u_1,u_1',u_2,u_2+(\varepsilon,0)) = \left(\partial_{x_1'}|(x_1',y_1')|\right)\left(F(n\cdot|u_2|,0) - F(|u_2|,0)\right). \quad (82)$$

令 n 趋于无穷大，由控制收敛定理，第一项消失，因此

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{\varepsilon}\Psi_2(u_1,u_1',u_2,u_2+(\varepsilon,0)) = -\left(\partial_{x_1'}|(x_1',y_1')|\right)F(|u_2|,0) \quad (83)$$

$$= \partial_{x_1'}\left[I_F(|(x_1',y_1')|)\right], \quad (84)$$

其中第二行由 I_F 的定义得出。

结合（81）和（84可得 $-F(x_1',\ y_1') = \partial_{x_1'}(I_F(|(x_1',\ y_1')|)$ 如所需。

步骤 3：方程 (78) **在** $\mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ **当** $y_2 = 0$**时。** 固定 $(u_1,\ u_1',\ u_2) \in (\mathbb{R}^2_-)^2 \times \mathbb{R}^2_+$。若 $u_2' = u_2$，则方程 (78) 两边均为零。要将方程 (78) 推广到与 u_2 位于同一水平线上的所有 $u_2' \in \mathbb{R}^2_+$，只需证明两边关于 u_2' 的水平偏导数相等。这可由方程 (77) 和 (79) 得出。

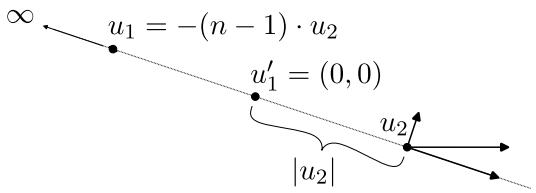


图5：引理 6.12证明中的步骤 2

步骤 4：将方程 (78) 推广到 $\mathcal{D}_2$中的所有点。 方程 (78) 的左右两边均满足方程 (10) 中首次引入的可加性，并且对平面上的四个点同时施加固定的等距变换时也保持不变。因此，可以将方程 (78) 从 $(\mathbb{R}^2_-)^2 \times (\mathbb{R}^2_+)^2$ 推广到 $\mathcal{D}_2$。 □

6.4 副对角线上的集中

对于每个收敛序列，函数 Ψ_2 完全由上文引入的函数 I_F决定。因此，问题归结为确定 I_F。如果 I_F 恰好是对数的倍数，那么 Ψ_2 就是 Ψ_2^{GFF}的一个缩放版本，而 Ψ_2^{GFF}是高斯自由场的二点函数。

本章节余下部分将用于分析 I_F。分析分为两个步骤。首先，我们证明对于任意收敛序列，相应的测度 μ支撑在 $\{|b| \le a\}$上。第二步中，我们利用这一信息推导 I_F的进一步性质，最终得出定理 6.1中所述的二分结论。第一步至关重要，也是本文的核心内容之一。我们现在来证明它。

定理 6.14。 对于每个收敛子序列 $(\delta_n)_n$，有 $\mu[\{|b| > a\}] = 0$。

我们先提出两条注记，为证明提供动机。在论证中，我们将利用这两种视角以及关于 F 以 μ 的方式给出的定义，来推导定理6.14。

注 6.15. F 是一个径向对称函数的水平偏导数，这一事实对 F施加了很强的约束。

注 6.16. 考虑 F 的定义，并暂且假设 $|b| = a$ 几乎处处成立。那么对于任意$(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$，我们有

$$F(x,y) = \int ae^{-ax-\mathrm{i}by}\,\mathrm{d}\mu(a,b) = \mathrm{Re}\left(\int ae^{-ax-\mathrm{i}|b|y}\,\mathrm{d}\mu(a,b)\right) = \mathrm{Re}(F(x+\mathrm{i}y,0)). \quad (85)$$

虽然我们不会真正证明 $|b| = a$，但上述视角表明，表达式 $F(x + \mathrm{i}y, 0)$提供了一种有趣的替代方式，可将二维数据传递给 F。

下面，我们将使用全纯延拓和围道积分等基本复分析工具。此时，奇点（极点）和支割线等问题便显得重要。在此语境下，我们用 $\sqrt{\cdot}$ 表示唯一的支割线

$$\sqrt{\cdot} : (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}) \to \mathbb{C}_+ \quad (86)$$

它将正实数映射为正实数。这意味着我们明确舍弃函数 $\sqrt{\cdot}$取非正实数值的情况。

引理 6.17. 对于任意$(x, y) \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}$，有

$$F(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} F(\sqrt{x^2+y^2}, 0). \quad (87)$$

证明。 如果 x 是实数，那么由引理 79中的方程 (6.12可得此结论。固定 y时，方程 (87两边都是关于 $x \in \mathbb{C}_+$的全纯函数，这要归功于引理 6.11(iii)。由于它们在正实轴上相等，因此对所有 $x \in \mathbb{C}_+$ 都必然相等。 □

下面的辅助引理是傅里叶变换的一个标准计算。我们省略证明。

引理 6.18. 对于固定的 σ、 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$， $\frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}\sin(\alpha t)\, t$ 的傅里叶变换满足

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}\frac{\sin(\alpha t)}{t} e^{-\mathrm{i}bt}\,\mathrm{d}t = \pi \int_{b-\alpha}^{b+\alpha} \tfrac{\sigma}{2} e^{-\sigma|y|}\,\mathrm{d}y = \pi \cdot (\mathbb{1}[|\cdot| \le \alpha] * \tfrac{\sigma}{2} e^{-\sigma|\cdot|})(b) \tag{88}$$

对任意 $b \in \mathbb{R}$。

定理的证明 *6.14*。 由于 ae^{-a} 在 $\mathbb{R}_{>0}$上是严格正函数，因此只需证明，对任意 $\lambda > 1$, 我们有

$$F(1,0) = \int ae^{-a}\mathrm{d}\mu(a,b) = \int \mathbb{1}[|b| \le \lambda a] ae^{-a}\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{89}$$

固定 $\lambda > 1$。其想法是对指示函数进行磨光并应用双重傅里叶变换，从而出现与 F 的一般定义以及方程（87）相容的额外因子。首先，对于 $\sigma > 0$，定义 J_σ 为方程（89）右边的积分，但采用磨光后的指示函数:

$$J_\sigma := \int \Big((\mathbb{1}[|\cdot| \le \lambda a] * \tfrac{\sigma}{2} e^{-\sigma|\cdot|})(b) \Big) ae^{-a}\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{90}$$

由控制收敛， J_σ 收敛于方程（89）右边的积分，当 σ趋于无穷时。因此，为证明（89），只需证明

$$J_\sigma \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} F(1,0). \tag{91}$$

代入上文引理 6.18 中的公式，得到

$$J_\sigma = \int \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}\frac{\sin(\lambda a t)}{\pi t} e^{-\mathrm{i}bt}\,\mathrm{d}t \Big) ae^{-a}\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{92}$$

由于被积函数的阶为 $O(ae^{-a}/(1+t^2))$，且在此乘积测度下可积，我们可以对乘积测度 $\mathrm{d}t \otimes \mu$ 应用富比尼定理。整理后得到

$$J_\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}\Big(\int \sin(\lambda a t) ae^{-a-\mathrm{i}bt}\mathrm{d}\mu(a,b) \Big)\mathrm{d}t. \tag{93}$$

利用 $\sin(\lambda a t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\lambda a t} - e^{-\mathrm{i}\lambda a t})$，根据 F的定义可得

$$2\mathrm{i}\int \sin(\lambda a t) ae^{-a-\mathrm{i}bt}\mathrm{d}\mu(a,b) = F(1-\mathrm{i}\lambda t, t) - F(1+\mathrm{i}\lambda t, t) =: F_-(t) - F_+(t) \tag{94}$$

将其代入我们先前关于 J_σ 的表达式，便可写成

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}\big(F_-(t) - F_+(t)\big)\mathrm{d}t. \tag{95}$$

我们将使用复分析来研究这个积分；不同的极点和积分路径见图 6 。

下面对方程（95）作一些说明。

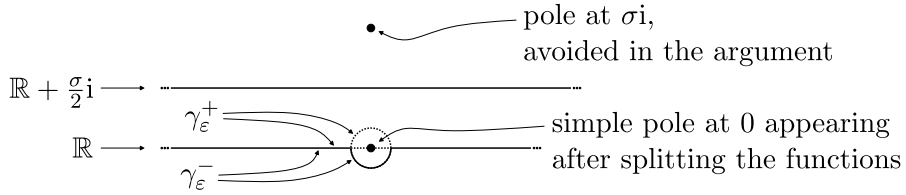


图 6：路径 γ_ε^+ 和 γ_ε^- 分别沿着 $\mathbb{R}$，并使用上半平面和下半平面中的小半圆环绕 0。函数 $F_- - F_+$ 在带域 $|\mathrm{Im}(z)| < \sigma$ 上解析，因此 J_σ 可以表示为其沿 γ_ε^- 的积分。将 F_- 沿 γ_ε^- 的积分替换为沿 γ_ε^+ 的积分时，应考虑 F_- 在 0 处的极点。

- 方程（87）意味着

$$F_\pm(t) = \frac{1 \pm \mathrm{i}\lambda t}{\sqrt{(1 \pm \mathrm{i}\lambda t)^2 + t^2}} F(\sqrt{(1 \pm \mathrm{i}\lambda t)^2 + t^2}, 0). \tag{96}$$

- 函数 F_- 在先验上定义于 $\mathbb{R}$。我们可以将 F_- 和（96）延拓为开集 $\mathcal{N}_- \supset \mathbb{R}$上的相等全纯函数，其中 $\mathcal{N}_- \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的最大子集，使得 F_- 定义中的平方根 F有定义。事实上，只要平方根有定义，$\sqrt{(1 \pm \mathrm{i}\lambda t)^2 + t^2}, 0)$ 也有定义，因为平方根的取值属于 $\mathbb{C}_+$。类似的考虑也适用于 F_+，它延拓为定义在类似定义的 $\mathcal{N}_+$上的全纯函数。

- 方程（95）中的被积函数在 $(\mathcal{N}_- \cap \mathcal{N}_+) \setminus \{\pm\sigma\mathrm{i}\}$上是全纯函数。特别地，在 $t = 0$处不存在简单极点，因为因子 $1/t$ 被全纯函数 $F_-(t) - F_+$与t () 的差的消失所抵消。

令 γ_ε^- 和 γ_ε^+ 表示以下路径：
- γ_ε^- 先沿着 $\mathbb{R}$ 从 $-\infty$ 延伸至 $-\varepsilon$，然后沿半径为 ε 的半圆在下半平面内从 $-\varepsilon$ 延伸至 ε，最后沿着 $\mathbb{R}$ 从 ε 延伸至 $+\infty$，
- γ_ε^+ 的定义类似，不同之处在于半圆位于上半平面内。

若 $\varepsilon \in (0, \sigma)$ 足够小，使得以 0 为中心、半径为 2ε 的球包含于 $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{N}_+$ 中，则由柯西积分定理可得

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2} \big(F_-(t) - F_+(t)\big) \mathrm{d}t. \tag{97}$$

现在我们说明函数 $F_\pm$ 在 γ_ε^-上一致有界。首先，由于它们连续，只需证明这些函数在 $\mathbb{R}$ 上有界。但这很容易，因为对于实数 t，有 $|F_\pm(t)| = |F(1 \pm \mathrm{i}\lambda t, \ t)| \le F(1, \ 0) < \infty$（参见引理 6.11(iv) 中的界）。现在可以拆分方程（97）中的积分，从而得到

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \left(\int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t - \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2} F_+(t) \mathrm{d}t \right). \tag{98}$$

对于左侧的积分，我们希望将路径 γ_ε^-替换为 γ_ε^+。被积函数在两条路径围成的区域内全纯，除了在 $t = 0$处有一个简单极点。由留数定理可得

$$\int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} F_-(0) + \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t. \tag{99}$$

由于 $F_-(0) = F(1, 0)$,

$$J_\sigma = F(1,0) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t - \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_+(t) \mathrm{d}t \right) \tag{100}$$

$$= F(1,0) + \frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \left(\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t \right), \tag{101}$$

因为第一行中的两个积分互为复共轭。现在我们来证明

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t = 0. \tag{102}$$

回想一下， F_- 是定义在 $\mathcal{N}_- \supset \mathbb{R}$上的全纯函数，并且 F_- 在 $\mathbb{R}$ 上一致有界，其上界为 $F(1, 0)$。下面的断言说明函数 F_-受到更好的控制。

断言。 以下各项均成立：

(i) 集合 $\mathcal{N}_-$ 包含 $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$; *(ii)* 函数 $|F_-|$ 在 $\mathbb{H}^+$上一致有界; *(iii)* 对任意 $s \in \mathbb{H}^+$，有$\lim_{\sigma \to \infty} F_-(\sigma s) = 0$。

我们先来看断言如何推出方程（102）。再次应用柯西积分定理，并作变量替换 $t = \sigma s$,

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}+\frac{\sigma}{2}\mathrm{i}} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} F_-(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}+\frac{1}{2}\mathrm{i}} \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+1} F_-(\sigma s) \mathrm{d}s. \tag{103}$$

根据控制收敛定理，当 $\sigma \to \infty$时，右侧趋于零，由此推出方程（102）和方程（91）。至此，证明完成；断言的证明见下文。

□

最后，为结束本章节，我们证明上述论证中用到的断言。注意，我们尚未使用性质 $\lambda > 1$; 现在就来使用它（我们利用 $\lambda^2 - 1 > 0$）。

断言的证明。引入 $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, t \mapsto (1 - \mathrm{i}\lambda t)^2 + t^2$ 使得

$$F_-(t) = \frac{1 - \mathrm{i}\lambda t}{\sqrt{\alpha(t)}} F(\sqrt{\alpha(t)}, 0). \tag{104}$$

现在我们来做一些简单的观察（另见图 7）。

- 对于任意 $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$，当且仅当 $\sqrt{t}$位于抛物线之上或其右侧时，$\mathrm{Re}(\sqrt{t}) \geq 1$

$$\{(1 + \mathrm{i}t)^2 : t \in \mathbb{R}\} = \{1 - t^2 + 2\mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}. \tag{105}$$

- 根据 $\alpha(t)$ 的定义，显然对于实数 t， $\alpha(t)$ 位于这条抛物线之上或其右侧。因此，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha(t)}) \geq 1$ 。
- 对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们可以将 $\alpha(x + \mathrm{i}y)$ 明确写出：

$$\alpha(x + \mathrm{i}y) = 1 + 2\lambda y + (\lambda^2 - 1)(y^2 - x^2) - 2\mathrm{i}x(\lambda + (\lambda^2 - 1)y). \tag{106}$$

由此立即可得：

$$\mathrm{Re}(\alpha(x + \mathrm{i}y)) \geq \mathrm{Re}(\alpha(x)); \qquad |\mathrm{Im}(\alpha(x + \mathrm{i}y))| \geq |\mathrm{Im}(\alpha(x))|. \tag{107}$$

特别地，由于 $\alpha(x)$ 位于抛物线上或其右侧， $\alpha(x + \mathrm{i}y)$ 也位于抛物线上或其右侧。因此，对于任意 $t \in \mathbb{H}^+$，我们有 $\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha(t)}) \geq 1$ 。

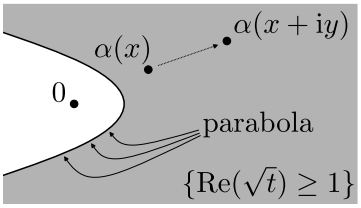


图 7

我们现在已经证明了 $\mathcal{N}_- \supset \mathbb{H}^+$，即断言的性质 (i)。此外，借助引理6.11(iv)，我们得到，在 $\mathbb{H}^+$ 上，

$$|F(\sqrt{\alpha(t)},0)| \leq F(\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha(t)}),0) \leq F(1,0). \tag{108}$$

由此可得性质 (ii)，因为因子 $(1-\mathrm{i}\lambda t)/\sqrt{\alpha(t)}$ 在 $\mathbb{H}^+$ 上也有界。接下来只需证明性质 (iii)。固定 $s \in \mathbb{H}^+$ 并令 $t = \sigma s$。因子 $(1-\mathrm{i}\lambda t)/\sqrt{\alpha(t)}$ 仍像之前一样有界；只需证明 $\mathrm{Re}(\alpha(\sigma s))$ 在 σ 趋于无穷时也趋于无穷，从而引理 6.11(iv) 蕴含

$$|F(\sqrt{\alpha(\sigma s)},0)| \leq F(\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha(\sigma s)}),0) \to 0. \tag{109}$$

上面的 $\alpha(\sigma s)$ 显式公式使我们能够选取 $\varepsilon = \varepsilon_s \in (0,\ \pi)$，使得对任意 $R > 0$ 以及充分大的 σ，

$$\alpha(\sigma s) \in \{re^{\mathrm{i}\theta} : \theta \in (-(\pi-\varepsilon), \pi-\varepsilon),\ r > R^2\}. \tag{110}$$

按照平方根的标准理解方式（角度取一半，模取平方根），这意味着

$$\liminf_{\sigma\to\infty} \mathrm{Re}(\sqrt{\alpha(\sigma s)}) \geq \sin(\tfrac{\pi-\varepsilon}{2}) \cdot R. \tag{111}$$

由于 R 是任意的，极限为无穷。 □

注 6.19 (关于 $\lambda > 1$)。 由于我们的主要结果蕴含 $\mu[\{a \neq b\}] = 0$，我们不禁会想，当 $\lambda < 1$ 时论证为何会失效。在这种情况下， $\lambda^2 - 1 < 0$，而方程 (106) 蕴含 $\alpha(t)$ 在上半平面的某点 $t = \mathrm{i}y$处有一个零点，且 $y > 0$。函数 F_- (方程 (104)) 在该点附近表现出奇异行为，从而使上述论证失效。

6.5 二分的推导

对于任意收敛序列，我们知道，相应的解析函数 I_F 是递减的，因为 $I_F'(x) = -F(x,0) \leq 0$。如果 $I_F(s) \propto -$对数 s，那么根据引理 6.12 的方程 (78)， $\Psi_2 \propto \Psi_2^{\mathrm{GFF}}$。为了推导定理 6.1 的二分，我们必须理解当解析函数 I_F 不属于这种形式时会发生什么。事实证明，用一个新函数 Ξ来表述 $I_F(s) \propto -$对数 s 这一性质很有益处，该函数定义如下：

$$\Xi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ s \mapsto -sI_F'(s) = sF(s,0). \tag{112}$$

注意， $I_F(s) \propto -$对数 s 当且仅当 Ξ 是常数。现在我们证明关于 Ξ的以下结果。

定理 6.20。 对于任意收敛序列$(\delta_n)_n$，函数 Ξ 有界，且

$$-\Xi'(s) = s\Delta I_F(|u|)|_{u=se_1} = s\int (a^2 - b^2)e^{-as}\,\mathrm{d}\mu(a,b) \geq 0. \tag{113}$$

特别地， Ξ是一个非递增函数。

在深入证明之前，让我们扩展引理 6.8 的适用范围。

引理 6.21 （引理 6.8 的扩展）。 设 δ_n）$_n$ 表示一个收敛序列。对于每个 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', u_2, u_2') \in (\mathbb{R}^2)^4$，其 u_1和 u_1'的第一坐标都严格小于 u_2 和 u_2'的第一坐标，

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) := \lim_{n\to\infty} \Phi_2^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u}) = \int \chi_{\boldsymbol{u}}(a,b)\,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{114}$$

证明。 固定 $\boldsymbol{u}$ 满足引理的假设。上文中，我们已经证明 Ψ_2（$\boldsymbol{u}$）存在，且函数 $\chi_{\boldsymbol{u}}$ 是 μ-可积的。事实上，形如 $1 - e^{-ax-iby}$的任意项都是 O（a）阶的，这归功于定理 6.14。因此，方程（114）的左右两边均有定义；下面只需证明二者相等。

令 $e_1 = (1, 0)$。我们可以利用可加性将高度差$h(u_2'/\delta_n) - h(u_2/\delta_n)$写成沿以下路径的高度差之和：

$$\frac{u_2}{\delta_n} \to \frac{u_2 + ne_1}{\delta_n} \to \frac{u_2' + ne_1}{\delta_n} \to \frac{u_2'}{\delta_n}. \tag{115}$$

设 $\boldsymbol{s}^n := (u_1, u_1', u_2, u_2 + ne_1)$ 且 $\boldsymbol{t}^n := (u_1, u_1', u_2' + ne_1, u_2')$。我们断言

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) = \lim_{n\to\infty} (\Psi_2(\boldsymbol{s}^n) + \Psi_2(\boldsymbol{t}^n)). \tag{116}$$

要使这一结论成立，我们必须说明，路径中间那一步的相关函数不会出现。不过，根据正则性估计（定理 4.5），它趋于零。

因此，我们可以（两次）应用最后两个点位于同一条水平线上的情形，得到

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) = \lim_{n\to\infty} \int (\chi_{\boldsymbol{s}^n} + \chi_{\boldsymbol{t}^n})(a,b)\,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{117}$$

最后，利用控制收敛定理，并应用定理 6.14 来找到所需的控制函数，我们便可以补入函数 $\chi_{\boldsymbol{u}}$ 中缺失的部分，得到

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) = \int \chi_{\boldsymbol{u}}(a,b)\,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{118}$$

证明至此完成。 □

定理 *6.20* 的证明。 为说明 Ξ有界，回顾定义可知

$$\Xi(s) = s\int ae^{-as}\,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{119}$$

$\mu \in \mathcal{M}$ 的界因此意味着 Ξ 有界。

现在我们着重证明（113）。等式（113）右侧的等式是定理 6.14。对于左侧的等式，注意到 $I_F(|\cdot|)$ 的径向对称性使我们可以将∂_x 替换为 $s\partial_{yy}$，从而得到

$$\begin{aligned} -\Xi'(s) &= I_F'(s) + sI_F''(s) && (120)\\ &= (\partial_x + s\partial_{xx}) I_F(|(x,y)|)|_{(x,y)=se_1} && (121)\\ &= s(\partial_{yy} + \partial_{xx}) I_F(|(x,y)|)|_{(x,y)=se_1} && (122)\\ &= s\Delta I_F(|u|)|_{u=se_1}. && (123) \end{aligned}$$

要得到（113），只需证明

$$\Delta I_F(|u|)|_{u=se_1} = \int (a^2 - b^2) e^{-as} \,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{124}$$

令 $u_1 = -ne_1$，$u_1' = (0,\ 0)$，$u_2 = se_1$，并令 $u_2' = u_2 + (x,\ y)$（其中 $|(x,\ y)|$ 很小）。利用引理 6.21 并令 n 趋于无穷，得到

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_2(u_1, u_1', u_2, u_2') = \int e^{-as}(e^{-ax-\mathrm{i}by} - 1) \,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{125}$$

利用引理 6.12 并令 n 趋于无穷，我们得到前一个等式左端的另一种表达式：

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_2(u_1, u_1', u_2, u_2') = I_F(|se_1 + (x,y)|) - I_F(|se_1|). \tag{126}$$

令前面的两个恒等式相等，得到

$$I_F(|se_1 + (x,y)|) - I_F(|se_1|) = \int e^{-as}(e^{-ax-\mathrm{i}by} - 1) \,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{127}$$

现在，在点 $(0,\ 0)$ 处计算 $(x,\ y)$ 的拉普拉斯算子，得到

$$\Delta I_F(|u|)|_{u=se_1} = \int (a^2 - b^2) e^{-as} \,\mathrm{d}\mu(a,b). \tag{128}$$

我们利用了控制收敛定理在积分号下求导，并用到 $a \wedge \frac{1}{a}$ 可积，以及 $|b| \le a$ (定理 6.14)。 □

在结束二分的证明之前，我们总结迄今已确立的内容。对于任意趋于零的序列 $(\delta_n)_n$，我们可以提取一个子序列 $(\delta_n')_n$，并找到某个解析函数 $I_F\colon\ \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$，使得以下各项均成立：

- 对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_2$,

$$\Psi_2(\boldsymbol{u}) := \lim_{n\to\infty} \Phi_2(\boldsymbol{u}/\delta_n) = I_F(|u_2 - u_1|) + I_F(|u_2' - u_1'|) - I_F(|u_2' - u_1|) - I_F(|u_2 - u_1'|). \tag{129}$$

- 函数 $-sI_F'(s)$ 是非负、有界且非增的。

我们现在准备证明二分结果。

定理的证明*6.1.* 我们首先注意到，以下三个陈述中至少有一个显然必然成立：

（i）要么存在 σ，使得对于每个收敛序列 $(\delta_n)_n$，$I_F = -\frac{\sigma^2}{2\pi}$ 对数，（ii）要么存在两个不同的 σ，σ' 以及两个收敛序列 $(\delta_n)_n$ 和 $(\delta_n')_n$，使得 I_F分别等于 $-\frac{\sigma^2}{2\pi}$ 对数和 $-\frac{(\sigma')^2}{2\pi}$ 对数，

（iii）或者对于某个收敛序列 $(\delta_n)_n$，函数 I_F 不与 $-$对数成正比。前两种情形显然属于定理 6.1 中二分框架的一部分。事实上，此时引理 6.12（ii）意味着 $\Phi^{(\delta_n)}{}_2$ 收敛到其高斯自由场对应物。因此，（i）对应于二分的第一种情形，而（ii）对应于第二种情形。为了完成证明，我们只需证明（iii）也意味着二分的第二种情形。从现在起，固定一个收敛序列 $(\delta_n)_n$，使得 $I_F \not\propto -$对数。

根据定理 6.20，定义 σ，$\sigma' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得

$$\frac{\sigma^2}{2\pi} = \lim_{s\to 0} -sI_F'(s) > \lim_{s\to\infty} -sI_F'(s) = \frac{(\sigma')^2}{2\pi}. \tag{130}$$

由前一个引理的性质可知，对于任意 $s \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{\theta\to 0} I_F(\theta s) - I_F(\theta) = -\frac{\sigma^2}{2\pi}\log s; \qquad \lim_{\Theta\to\infty} I_F(\Theta s) - I_F(\Theta) = -\frac{(\sigma')^2}{2\pi}\log s. \tag{131}$$

特别地，引理 6.12(ii) 蕴含，对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_2$,

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty} \Phi_2^{(\delta_n/\theta)}(\boldsymbol{u}) = \sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}); \qquad \lim_{\Theta\to\infty}\lim_{n\to\infty} \Phi_2^{(\delta_n/\Theta)}(\boldsymbol{u}) = (\sigma')^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}). \tag{132}$$

这意味着我们可以对该子序列缩放极限取两个“标度极限”：一个通过“放大”得到，另一个通过“缩小”得到。下面介绍放大构造；缩小情形类似。

固定一个由四元组组成的稠密可数族 $(\boldsymbol{u}_k)_k$，它包含于 $\mathcal{D}_2$。选取一个趋于零的序列 $(\theta_k)_k$, 使得对于每个 k,

$$\left|\Psi_2(\theta_k\boldsymbol{u}_i) - \sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}_i)\right| \leq \tfrac{1}{k} \qquad \forall\, i \leq k. \tag{133}$$

接下来，选取一个递增序列 $(n_k)_k$，使得对于每个 k、$\delta_{n_k}/\theta_k \leq \frac{1}{k}$ 以及 $-$

$$\left|\Phi_2^{(\delta_{n_k})}(\theta_k\boldsymbol{u}_i) - \Psi_2(\theta_k\boldsymbol{u}_i)\right| \leq \tfrac{1}{k} \qquad \forall\, i \leq k. \tag{134}$$

在此选择下，序列 $(\delta_{n_k}/\theta_k)_k$ 满足

$$\left|\Phi_2^{(\delta_{n_k}/\theta_k)}(\boldsymbol{u}_i) - \sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}_i)\right| = \left|\Phi_2^{(\delta_{n_k})}(\theta_k\boldsymbol{u}_i) - \sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}_i)\right| \leq \tfrac{2}{k} \qquad \forall\, i \leq k. \tag{135}$$

因此，对于每个 i，当 k 趋于无穷时，序列 $(\Phi^{(\delta_{n_k}/\theta_k)}{}_2(\boldsymbol{u}_i))$ 逐点收敛到$\sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}(\boldsymbol{u}_i)$。根据推论 4.6，这意味着 $\Phi^{(\delta_{n_k}/\theta_k)}{}_2$ 在 $\mathcal{D}_2$的紧子集上一致收敛到 $\sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}$。同样的构造可得一个收敛到 $(\sigma')^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}$的序列。

□

7 多点函数的高斯自由场子序列极限

本章节旨在证明以下结果。

定理 7.1。 固定 $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个趋于零的序列 $(\delta_n)_n$。考虑以下针对固定 k的命题：

$$\Phi_k^{(\delta_n)}|_{\mathcal{D}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^k\Psi_k^{\mathrm{GFF}} \qquad \textit{uniformly on compacts subsets of } \mathcal{D}_k. \tag{136}$$

如果该结论对 $k = 2$ 成立，那么它对所有 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都成立。

回忆一下推论 4.6，它保证了预紧性。因此，取一个子序列后，我们可以假设这些函数收敛。在本章节中，我们因此固定 σ 和 $(\delta_n)_n$ 满足：

- $\Phi^{(\delta_n)}{}_2 \quad |_{\mathcal{D}_2}$ 收敛到 $\sigma^2\Psi_{\mathrm{GFF}2}$，
- $\Phi^{(\delta_n)}{}_k \quad |_{\mathcal{D}_k}$ 收敛到某个连续函数 Ψ_k。

只需证明，对于每个 k，$\Psi_k = \sigma^k\Psi_k^{\mathrm{GFF}}$。

证明分两步进行。首先，我们证明 Ψ_k 的 $\Phi^{(\delta_n)}{}_k$ 的标度极限在每个坐标上都是调和函数，这要利用测度 μ 在 $\{b = \pm a\}$ 上的集中。一旦证明了调和性，我们便将 $\Psi_k = \sigma^k\Psi_k^{\mathrm{GFF}}$ 识别为满足若干其他性质（无穷远处的极限、点合并时的行为）的唯一调和函数，而这些性质 Ψ_k 都具备。第二步对 k 使用归纳法，其中基础情形 $k = 2$ 正是我们的假设。

7.1 调和性

命题 7.2。 函数 Ψ_k 在每个坐标上都是调和的。

为了证明该命题，我们引入集合

$$\mathcal{H} := \{\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \dots, u_k, u_k') \in \mathcal{D}_k : \Psi_k \text{ is harmonic in } u_1 \text{ at } \boldsymbol{u}\}. \tag{137}$$

由于 Ψ_k 在其自变量的各种排列下自然不变或反对称，只需证明 $\mathcal{H} = \mathcal{D}_k$。还应注意，对于 u_1中的调和性，u_1' 的位置不起作用。我们从下面的引理开始，该引理断言：只要 u_1 不位于点 $u_2, u_2', \dots, u_k, u_k'$的凸包中，调和性基本上可由迄今已建立的论证得出。

引理 7.3. 我们有

$$\mathcal{Z}_0 := \{\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \dots, u_k, u_k') \in \mathcal{D}_k : u_1 \notin \mathrm{ConvexHull}(\{u_2, u_2', \dots\})\} \subset \mathcal{H}. \tag{138}$$

证明。 固定 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{Z}_0$。设 $C_r \subset \mathbb{R}^2$ 表示以 u_1为圆心、半径为 $r > 0$ 的圆。只需证明：若 r 小于从 u_1 到凸包的距离，则

$$\Upsilon := \int_{C_r} \Psi(u_1, s, u_2, u_2', u_3, u_3', \dots)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{139}$$

（该积分正是 C_r上的均匀概率测度）。

通过施加平面的一个等距变换，我们可以不失一般性地假设C_r 严格位于垂直轴 $\{0\} \times \mathbb{R}$的左侧，而凸包严格位于该轴的右侧。

为证明 $\Upsilon = 0$，我们将使用一般可观测量的谱表示、柯西-施瓦茨不等式（定理 4.15），以及 $\sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}$ 的调和性。对于固定的 n，引入以下分别属于 $\mathfrak{A}^-$ 和 $\mathfrak{A}^+$（参见方程（42））的可观测量：

$$\mathbf{X}_n(h) := \int_{C_r} (h(s/\delta_n) - h(u_1/\delta_n))\,\mathrm{d}s; \tag{140}$$

$$\mathbf{Y}_n(h) := \prod_{i=2}^{k} \left(h(u_i'/\delta_n) - h(u_i/\delta_n)\right). \tag{141}$$

根据定理 4.15，我们有

$$|\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}_n\mathbf{Y}_n]| \le \sqrt{\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^\dagger]\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{Y}_n^\dagger\mathbf{Y}_n]}. \tag{142}$$

当我们先令 L 再令 n 趋于无穷时，左端收敛到 $|\Upsilon|$。只需证明右端在相同的双重极限下收敛到 0。然而，

$$(\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^\dagger)(h) = \left(\int_{C_r} (h(s/\delta_n) - h(u_1/\delta_n))\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_{C_r} \left(h^\dagger(s/\delta_n) - h^\dagger(u_1/\delta_n)\right)\,\mathrm{d}s\right). \quad (143)$$

$\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}$期望这个随机变量，在双重极限下由于 $\sigma^2\Psi_2^{\mathrm{GFF}}$的一致收敛和调和性而趋于零。

还需证明$\mathbf{Y}_n^\dagger\mathbf{Y}_n$ 在双重极限下一致有界。但这显然成立，因为它趋于有界函数

$$\Psi_{2k-2}\big(u_2, u_2', \dots, u_k, u_k', (u_2)^\dagger, (u_2')^\dagger, \dots, (u_k)^\dagger, (u_k')^\dagger\big) < \infty. \quad (144)$$

这里提醒一下$(u)^\dagger$ 已在第4.5.3 小节中引入，表示 u关于 $\{\frac{1}{2}\}\times\mathbb{R}$的反射。证明至此完成。

□

现在，我们将调和性从 $\mathcal{Z}_0$ 扩展到 $\mathcal{D}_k$ 的全体（见图8）。我们先给出一个技术性引理。

引理 7.4。 假设 $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{D}_k$ 可以通过如下方式从 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \dots, u_k, u_k') \in \mathcal{D}_k$ 得到：选取一条直线 $L \subset \mathbb{R}^2$，使得对于每个 i，u_i 和 u_i' 严格位于 L 的同一侧；然后将直线一侧的所有点沿垂直于 L的方向向外移动距离 $\lambda_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。

那么，$\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}$ 只要对于某个邻域 $\mathcal{N}_{\tilde{\boldsymbol{u}}}$，$\mathcal{N}_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \subset \mathcal{H}$ 就有 $\tilde{\boldsymbol{u}}$。

证明。 通过对平面施加等距变换并对不同的 $\{u_i, u_i'\}$进行置换，不失一般性地假设 $L = \{0\}\times\mathbb{R}$，成对的 $\{u_i, u_i'\}$ 在 $i \leq \ell$ 时位于L 左侧，而在 $i > \ell$时位于 L 右侧，并且我们将 L右侧的点向右移动 $\lambda_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。

令 $e_1 = (1,0)$。对于 $s \in \mathbb{R}^2$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，定义

$$\boldsymbol{u}^{-,s} := (u_1, s, u_2, u_2', \dots, u_\ell'); \qquad \boldsymbol{u}^{+,\lambda} := (u_{\ell+1} + \lambda e_1, u_{\ell+1}' + \lambda e_1, \dots, u_k' + \lambda e_1). \quad (145)$$

对于任意 $r > 0$，记 C_r 为以 u_1为圆心、半径为 r 的圆。我们断言，函数

$$\Upsilon_r(\lambda) := \int_{C_r} \Psi_k(\boldsymbol{u}^{-,s}, \boldsymbol{u}^{+,\lambda})\,\mathrm{d}s \quad (146)$$

满足 $\Upsilon_r(0) = 0$，只要 r足够小，这便能证明其调和性以及该引理。

固定 r，使其足够小，从而 C_r 的凸包与 L 或 $\cup_{i>1}\{u_i, u_i'\}$不相交。由于 $\Upsilon_r\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，且当 $\lambda \approx \lambda_0$ 和 r 足够小并且 $\mathcal{N}_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \subset \mathcal{H}$时，$\Upsilon_r(\lambda) = 0$，因此只需证明 $\Upsilon_r|_{(0,\infty)}$ 是解析函数。

对于固定的 n，引入以下分别属于 $\mathfrak{A}^-$ 和 $\mathfrak{A}^+$ 的可观测量：

$$\mathbf{X}_n(h) := \left(\int_{C_r} (h(s/\delta_n) - h(u_1/\delta_n))\,\mathrm{d}s\right)\prod_{i=2}^{\ell}\left(h(u_i'/\delta_n) - h(u_i/\delta_n)\right); \quad (147)$$

$$\mathbf{Y}_n(h) := \prod_{i=\ell+1}^{k}\left(h(u_i'/\delta_n) - h(u_i/\delta_n)\right). \quad (148)$$

定理 4.15 表明，对于任意 $\lambda > 0$,

$$\Upsilon_r(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\lim_{L\to\infty}\int (1-a)^{\lfloor\lambda/\delta_n\rfloor}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n,L}, \quad (149)$$

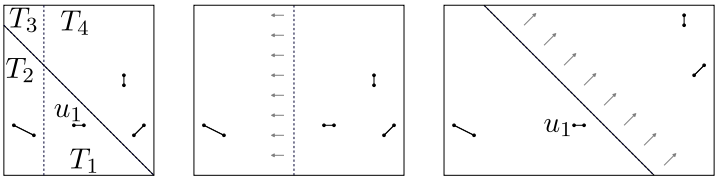


图 8

其中 $\mu_{\mathbf{X}_n,\ \mathbf{Y}_n,\ L}$ 满足其全变差的如下界

$$\|\mu_{\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n,L}\| \leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^\dagger]\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{Y}_n^\dagger\mathbf{Y}_n]}. \tag{150}$$

现在，定理 4.5 给出如下结论。由于存在某个常数 $C<\infty$ 使得$\mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}[\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^\dagger]\mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}[\mathbf{Y}_n^\dagger\mathbf{Y}_n] \leq C^2$ 对任意 n均成立，我们可以找到一个复测度 $\mu_{\mathbf{X},\ \mathbf{Y}}$ 定义在 $[0,\infty]$上，使得 $\|\mu_{\mathbf{X},\ \mathbf{Y}}\| \leq C$ 且 $\mu_{\mathbf{X},\ \mathbf{Y}}$ 是族 $(\mu_{\mathbf{X}_n,\ \mathbf{Y}_n,\ L,\ \delta_n})_{n,\ L}$ 当 L 以及 n 趋于无穷时，在紧集 $[0,\infty]$ 上的复测度弱拓扑下的一个子序列极限。

特别地，这些陈述意味着，对于任意 $\lambda>0$，我们有

$$\Upsilon_r(\lambda) = \int e^{-a\lambda}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(a). \tag{151}$$

于是，$\Upsilon_r|_{(0,\infty)}$ 是定义在 $[0,\infty]$上的有限复测度的拉普拉斯变换，或者等价地说，是四个定义在 $[0,\infty]$上的有限正测度的拉普拉斯变换的线性组合（系数为复数）。它自动是解析的。

□

现在我们已经准备好证明完整的调和性。

命题7.2的证明。 考虑集合（见图8）

$$\mathcal{D}'_k := \{\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}_k : \min_{i\neq j}|u_i-u_j| > 1000k^2\max_i|u'_i-u_i|\}. \tag{152}$$

我们分两步进行。首先证明 $\mathcal{D}'_k\subset\mathcal{H}$，然后证明 $\mathcal{D}_k\subset\mathcal{H}$，这与该断言等价。

步骤1：证明 $\mathcal{D}'_k\subset\mathcal{H}$。 回顾引理 $\mathcal{Z}_0$ 中的定义，该定义来自引理7.3。归纳定义集合 $\mathcal{Z}_{t+1}$（当 $t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$时），其由元素 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}_k$ 组成，这些元素 $\tilde{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{Z}_t$ 是通过前一个引理中描述的操作从某个 $\cup_t\mathcal{Z}_t\subset\mathcal{H}$得到的。根据构造，前一个引理蕴含 $\cup_t\mathcal{Z}_t\subset\mathcal{H}$。

只需证明 $\mathcal{D}'_k\subset\mathcal{Z}_2$。固定 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}'_k$。我们可以选取两条直线 L 和 L'（见图8），使得

- $\mathbb{R}^2\setminus(L\cup L')$由四个无限的“三角形”连通分支 T_1、.....、T_4组成，它们以交点 $L\cap L'$ 为中心按顺时针顺序排列，
- u_1 和 u'_1 位于 T_1中，
- $\{u_i,u'_i\}$ 中的每一对• （对于 $i\geq 2$）要么包含于 T_2 中，要么包含于 T_4中。

将 T_2 中的所有点沿垂直于分隔 T_1 和 T_2的直线的方向平移距离 $\lambda\gg 1$。接下来，将 T_4 中的所有点沿垂直于分隔 T_1 和 T_4的直线的方向平移距离 $\lambda'\gg 1$。

经过这些平移后，很容易验证， u_1 和 u'_1 不再位于其余点的凸包中。因此，所得的 $2k$元组属于 $\mathcal{Z}_0$。根据集合 $\mathcal{Z}_t$的定义，第二次平移前的构型属于 $\mathcal{Z}_1$，而原始构型 $\boldsymbol{u}$ 属于 $\mathcal{Z}_2$。

步骤 2：证明 $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{H}_\circ$ 固定 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_1', \ldots\ldots, u_k, u_k') \in \mathcal{D}_{k\circ}$ 我们将 $\Psi_k(\boldsymbol{u})$ 写成若干增量之和，每个增量都具有 $\Psi_k(\boldsymbol{v})$ 的形式，其中 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}_{k\circ}'$。

由于 u_1 中的调和性不取决于 u_1'的位置，我们不妨假设 u_1' 与 u_1极为接近。令 $(\gamma_i)_{i=2,\ldots,k}$ 表示一族长度有限的互不相交的光滑曲线 $[0,1] \to \mathbb{R}^2$，其中 γ_i 始于 u_i，终于 u_i'。那么，对于任意 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，由期望的线性性可得

$$\Psi_k(\boldsymbol{u}) = \sum_{n_2=1}^{N} \cdots \sum_{n_k=1}^{N} \Psi_k(u_1, u_1', \gamma_2(\tfrac{n_2-1}{N}), \gamma_2(\tfrac{n_2}{N}), \ldots, \gamma_k(\tfrac{n_k-1}{N}), \gamma_k(\tfrac{n_k}{N})). \tag{153}$$

由连续性可知，当 N 充分大时，右侧所有项都对应于 $\mathcal{D}_k'$中的 $2k$元组。由于每一项都是关于 u_1 的调和函数，因此 $\Psi(\boldsymbol{u})$ 关于 u_1 也是调和函数。 □

7.2 高斯自由场关联函数的刻画

现在我们可以证明定理7.1了。思路是采用归纳法。

定理*7.1*的证明。我们希望证明 $\Psi_k = \sigma^k \Psi_k^{\mathrm{GFF}}$，方法是对 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$进行归纳。基础情形 $k = 2$ 由假设成立。现在，固定 k，并假设该命题对所有 $\ell < k$都成立。

我们来汇总一下迄今为止得到的关于 Ψ_k 的性质。固定其他所有变量，将 Ψ_k 视为 $u_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i>1}\{u_i, u_i'\}$ 中的一个函数。该函数满足以下性质。

- **调和性：** Ψ_k 在 u_1 上是调和函数，依据命题7.2。
- **全平面渐近行为：** Ψ_k 在 $\mathbb{R}$ 中，当 $|u_1| \to \infty$时收敛到一个常数。事实上，正则性估计（定理4.5）表明，$\Psi_k(\boldsymbol{u}) \to 0$ 当 $|u_1|$时，$|u_1'| \to \infty$这意味着，当固定 $\Psi_k(\boldsymbol{u})$ 时，u_1' 当 $|u_1| \to \infty$时趋于一个有限常数。
- **融合渐近行为：** 对于任意 $i > 1$ 和 $v \in \{u_i, u_i'\}$，定理4.8 表明，当 u_1趋于 v时，

$$\Psi_k(\boldsymbol{u}) = \Psi_2(u_1, u_1', u_i, u_i')\Psi_{k-2}(((u_j, u_j'))_{j \notin \{1,i\}}) + O(1), \tag{154}$$

其中 $\Psi_2 = \sigma^2 \Psi_2^{\mathrm{GFF}}$和 $\Psi_{k-2} = \sigma^{k-2}\Psi_{k-2}^{\mathrm{GFF}}$由归纳假设得出。

- **某一特定点处的值：** $\Psi_k(\boldsymbol{u}) = 0$ 在 $u_1 = u_1'$。

根据调和函数奇点附近的延拓定理 [Ces14],这四个性质（调和性以及对奇点的分析）完全确定了函数 Ψ_k，并得出 $\Psi_k = \sigma^k \Psi_k^{\mathrm{GFF}}$。证明至此完成。

□

8 高斯自由场极限的子列

本节旨在证明以下结果。

定理 8.1 (收敛判据)。 固定 $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并令 $(\delta_n)_n$ 表示一个趋于零的序列。若对所有 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$\Phi_k^{(\delta_n)}|_{\mathcal{D}_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^k \Psi_k^{\mathrm{GFF}} \qquad \textit{uniformly on compacts of } \mathcal{D}_k, \tag{155}$$

那么高度函数沿着缩放序列 σ ·高斯自由场 收敛于 $(\delta_n)_n$ 其意义见定义 *2.7*。

证明。 证明仅依赖一个关键条件：定理 4.5中的正则性估计。因此，对于任何满足类似正则性估计的模型，该定理均成立。

固定 $\sigma \in [0,\infty)$ 以及一个趋于零的序列 $(\delta_n)_n$ 。回顾描述高斯自由场收敛的定义 2.7 。我们的目标是证明有限维边缘分布的收敛以及依分布收敛。

有限维边缘分布的收敛。 有限狄利克雷能量的广义测试函数构成一个希尔伯特空间，其内积由狄利克雷型给出。因此，只需考虑一个有限狄利克雷能量的广义测试函数 φ ，并证明

$$\langle h^{(\delta_n)}, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \int G_{\mathbb{R}^2}(u,v)\,\mathrm{d}\varphi(u)\,\mathrm{d}\varphi(v)\right) \tag{156}$$

依分布收敛。由于正态分布由其矩确定，只需证明随机变量 $\langle h^{(\delta_n)}\varphi\rangle$ 的所有矩都收敛到所需的极限 [Bil95，例 30.1 和定理 30。2], 这正是我们将要做的。

不失一般性，我们可以假设 $|\varphi|(\mathbb{R}^2) = 2$ ，且 $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ ，其中这两个测度均为概率测度。我们首先注意到

$$\langle h^{(\delta_n)}, \varphi\rangle = \int h^{(\delta_n)}(u')\,\mathrm{d}\varphi_+(u') - \int h^{(\delta_n)}(u)\,\mathrm{d}\varphi_-(u) \tag{157}$$

$$= \int\int (h^{(\delta_n)}(u') - h^{(\delta_n)}(u))\,\mathrm{d}\varphi_+(u')\,\mathrm{d}\varphi_-(u). \tag{158}$$

固定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。对于 k 的奇数值无需证明，因为相应的矩为零。因此我们仅限于 k 为偶数的情形。在离散情形中，可以应用富比尼定理得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}[\langle h^{(\delta_n)}, \varphi\rangle^k] = \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left(\iint \left(h^{(\delta_n)}(u') - h^{(\delta_n)}(u)\right)\,\mathrm{d}\varphi_+(u')\,\mathrm{d}\varphi_-(u)\right)^k\right] \tag{159}$$

$$= \int \Phi_k^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\tilde{\varphi}^k(\boldsymbol{u}) \tag{160}$$

其中

$$\mathrm{d}\tilde{\varphi}^k(\boldsymbol{u}) := \mathrm{d}\varphi_-(u_1)\,\mathrm{d}\varphi_+(u_1')\cdots\mathrm{d}\varphi_-(u_k)\,\mathrm{d}\varphi_+(u_k'). \tag{161}$$

被积函数收敛到 $\sigma^k \cdot \Psi_k^{\mathrm{GFF}}$当 $n \to \infty$ 时，根据我们的假设（方程（155））。因此，只需论证可以应用控制收敛定理，以确保收敛到高斯自由场的相应矩。

根据定义，

$$\Phi_k^{(\delta_n)}(\boldsymbol{u}) = \Phi_k([\tfrac{u_1}{\delta_n}], \ldots, [\tfrac{u_k'}{\delta_n}]) \tag{162}$$

其中 $[z] \in F(\mathbb{Z}^2)$ 表示左下角为 $(\lfloor z_1\rfloor, \lfloor z_2\rfloor)$ 的面，其中 $z \in \mathbb{R}^2$。我们将利用正则性估计（定理 4.5）找到一个控制函数。对于 π 中的每一种配对 $\{1,\ldots,k\}$ （涉及于式（30）），我们都可以分别进行处理。我们重点考察配对$\pi = \{(1,2)\ldots,(k-1,k)\}$。由于积分可按配对分解，只需证明以下积分收敛：

$$\int \mathrm{d}\tilde{\varphi}^2(\boldsymbol{u}) \sup_n \begin{cases} e^{-\alpha_k S_n(\boldsymbol{u})} & \text{if } S_n(\boldsymbol{u}) \geq 20k^2; \\ 1 \vee -S_n'(\boldsymbol{u}) & \text{if } S_n(\boldsymbol{u}) < 20k^2; \end{cases} \tag{163}$$

其中 $S_n^{\#}(\boldsymbol{u}) := S_{\mathbb{R}^2}^{\#}(\{[\frac{u_1}{\delta_n}], [\frac{u_1'}{\delta_n}]\}, \{[\frac{u_2}{\delta_n}], [\frac{u_2'}{\delta_n}]\})$，其中 # 表示没有上标或撇号 $'$。

由于 $\tilde{\varphi}^2(\boldsymbol{u})$ 是概率测度，只需证明

$$\int \mathrm{d}\tilde{\varphi}^2(\boldsymbol{u}) \sup_n \max\{0, -S_n'(\boldsymbol{u})\} < \infty. \tag{164}$$

回顾 $S_{\mathbb{R}^2}$ 和 $S_{\mathbb{R}^2}'$的定义，很容易找到一个常数η 使得

$$\max\{0, -S_n'(\boldsymbol{u})\} \le \max\{0, -S_{\mathbb{R}^2}(\boldsymbol{u})\} + \eta. \tag{165}$$

因此，只需证明

$$\int \max\{0, -S_{\mathbb{R}^2}(\boldsymbol{u})\} \,\mathrm{d}\tilde{\varphi}^2(\boldsymbol{u}) < \infty. \tag{166}$$

现在，回顾 $S_{\mathbb{R}^2}$的显式公式。由于 $\tilde{\varphi}^2$ 是紧支撑的，方程由以下事实 φ 具有有限狄 (166) 利克雷能量即可得出。

在负正则性 Hölder 空间中的收敛。 取 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为有界开集，并取 $\alpha \in (-1, 0)$。只需证明随机分布族 $(h^{(\delta_n)}|_U)$ 在 $\mathcal{C}^\alpha(U)$ 中是紧的，因为此时任何子序列极限都必须与 $\sigma\cdot$ 高斯自由场一致，这由上文证明的有限维边缘分布收敛性可知。

Furlan 和 Mourrat 为负正则性 Hölder 空间 [FM17 中的随机场建立了一般紧性判据，定理 1.1]。我们应用该定理（借用论文中的记号），取 $\beta = 0$ 并取某个整数 $p > -\frac{1}{\alpha}$。还要注意，由于我们的随机函数 $h^{(\delta_n)}$ 是平稳的，无须对 x取上确界。回顾一下，$\mathcal{T}_1((-1,1)^2)$ 表示支撑在 $(-1,1)^2$ 中、且其相对于勒贝格测度的密度为利普希茨的广义测试函数集合。根据 [FM17，定理 1.1], ，只需证明对于任意 $\varphi \in \mathcal{T}_1((-1,1)^2)$，均有

$$\sup_{\delta\in(0,1)} \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}[|\langle h^{(\delta)}, \varphi\rangle|^p] < \infty. \tag{167}$$

自然地， n in [FM17 定理 1.1] 中的上确界已编码在我们的标度参数 δ 中，因此不会显式出现。不过，方程（167）已在上文得到证明：广义测试函数 φ 具有有限狄利克雷能量，因为它是利普希茨函数；而方程（167）中的一致上界，则来自上文讨论的控制函数的存在性。最后， [FM17 定理 1.1] 表明，在由所有半范数诱导的拓扑空间中 $(\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha(V)})_V$，该族是紧的；这尤其意味着它在 $\mathcal{C}^\alpha(U)$ 中是紧的。

关于贝索夫空间 $\mathcal{B}_{p,q}^\alpha$、 $\alpha \in (-1,0)$、 $p \in [1,\infty)$ 和 $q \in [1,\infty]$ 中的紧性，注意方程（167）中的界与 [FM17 定理 2.30], 的假设相符，因此可得所需结论。根据 [BL76 定理 6.2.4], ，这也意味着在索伯列夫空间 $W^{\alpha,p}(U)$ 中具有所需的紧性。 □

9 主要结果的证明（定理 2.8）

定理 2.8的证明。 定理 6.1、 7.1和 8.1 共同推出：对于 **任意** $= \mathbf{b} = 1$ 以及任意固定的 $\mathbf{c} \in [\sqrt{3}, 2]$，以下两个陈述之一成立：

- 存在某个 $\sigma \in \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得高度函数收敛到 $\sigma\cdot$高斯自由场，
- 存在两个不同的标准差 σ， $\sigma' \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 以及两个趋于零的序列 $(\delta_n)_n$ 和 $(\delta_n')_n$，使得高度函数沿缩放序列 $(\delta_n)_n$收敛到 $\sigma\cdot$高斯自由场，并沿缩放序列 $(\delta_n')_n$收敛到 $\sigma'\cdot$高斯自由场。

然而，我们可以排除第二种情况，因为 σ 和 σ' 不可能不同。事实上，定理4.3 和4.4 的结合表明，σ^2 和 $(\sigma')^2$ 都应等于1/反正弦 $\mathbf{c}_2$。因此，我们处于第一种情况，其中 $\sigma^2 = 1/$反正弦 $\mathbf{c}_2$。 □

我们记录一个可能对未来研究有所帮助的附加结果。尽管证明主定理时我们采用了一条稍显迂回的路径，但现在我们可以证明谱测度的收敛。特别地，前面引入的子序列极限测度μ 实际上是唯一的，并且就是谱测度的极限。

定理 9.1。 固定 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ 以及 $\mathbf{c} \in [\sqrt{3}, 2]$。那么，若 μ_L 表示由定理 *4.12* 给出的测度（参见下文方程 (219)中的显式构造），则

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{L\to\infty} \mu_L^{(\delta)} = \tfrac{1}{2}(\delta_{b=a} + \delta_{b=-a}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\pi a}\,\mathrm{d}a. \tag{168}$$

证明。 由于 $(\mu_L)_{L\in 2\mathbb{Z}_{>0}} \subset \mathcal{M}$，该族是相对紧的。因此，只需证明任意子序列极限 μ 都与 $\frac{1}{2}(\delta_{b=a} + \delta_{b=-a}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\pi a}\mathrm{d}a$.相同

我们利用 $\Phi_2^{(\delta)}$ 到 $\sigma^2 \cdot \Psi_2^{\mathrm{GFF}}$的收敛性。由此得到

$$I_F(s) - I_F(1) = -\frac{\sigma^2}{2\pi}\log s, \tag{169}$$

这与（79）一起推出

$$F(s,0) = \frac{\sigma^2}{2\pi s}. \tag{170}$$

我们来考察测度 μ，看看前面的公式意味着什么。我们已经知道 $\mu[\{|b| > a\}] = 0$。为证明 $\mu[\{|b| < a\}] = 0$，注意到（113）给出

$$\int (a^2 - b^2)e^{-a}\mathrm{d}\mu(a,b) = -\Xi'(1) = 0, \tag{171}$$

由于 $\Xi(s) = sF(s,\ 0) = \sigma^2/(2\pi)$ 是常数。因此我们得到 $\mu[\{|b| < a\}] = 0$。接下来需要确定 a 变量的边缘分布，并证明

$$\mathrm{d}\mu(a) = \frac{\sigma^2}{2\pi a}\mathrm{d}a. \tag{172}$$

根据定义以及 F 的公式，我们得到，对任意 $x > 0$,

$$\int ae^{-ax}\mathrm{d}\mu(a) = \frac{\sigma^2}{2\pi x}. \tag{173}$$

右侧恰好是测度 $\frac{\sigma^2}{2\pi a}\mathrm{d}a.$ 的拉普拉斯变换。由于一个 σ-有限正测度由其拉普拉斯变换唯一确定，这就确定了 μ，并完成了证明。

□

10 各向异性情形的证明（定理 3.3）

多点关联函数与有限维边缘分布的收敛性被推广到各向异性六顶点模型，具体如下：首先将这些量表示为相应等半径图上随机簇模型的宏观环，然后援引 [Dum+20]的普适性结果，该结果保证环系综的标度极限与各向同性情形相同。因此，极限相关性与各向同性情形中得到的结果一致。

定理3.3的证明。 固定 $\Delta \in [-1,-1/2]$。考虑权重为$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$、由（20）给出的六顶点模型。在本章节中，我们仅限于 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$被设定为等于 Δ的情形。根据该参数化的定义， ζ 是固定的，唯一剩余的自由度是角度 θ。我们将$\mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)}$ 记作$\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)$上相应的各向异性六顶点测度，并用 h 表示其关联的高度函数。

Baxter–Kelland–Wu 对应 [BKW76]将定义在$\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)$上的这个六顶点模型映射为定义在等半径图 $\mathbb{L}(\theta)$上的随机簇模型（即矩形格的一个旋转版本），并赋予相应的等半径权重；详情见 [Dum+20]。这里不需要用到该随机簇模型的显式构造。我们只会用到这样一个事实：它的环表示自然地以$\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)$为支撑。沿用[Dum+20; Ave+a], 的记号，我们用 $\phi_{\delta\mathbb{L}(\theta),q}$ 表示具有相关等半径权重、定义在 $\delta\mathbb{L}(\theta)$上的随机簇测度之环系综的分布。

多点相关函数的收敛。 固定 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_k$。不失一般性地，我们假设 $\boldsymbol{u}$ 中的所有 $2k$ 点互不相同。仅在本节中，我们将记作 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{2k})$。记 $\mathfrak{F}$ 为 $\{1,\ldots,2k\}$ 的幂集，并去掉基数为0、1和 $2k$ 的子集。

对于给定的环系综 $\mathcal{L}$和 $S \subset \{1,\ldots,2k\}$，令 $\mathcal{N}_S$表示 $\mathcal{L}$ 中包围 $\{u_i$ 中的所有点、且不包围 $\{u_j$ 中的任何点的环的数量： $i \in S\}$ 。对于$S=\{v\}$，我们简记为 $\mathcal{N}_v$。

现在 [Ave+a，命题 2.5] 断言，我们可以找到实系数多项式 $P_R \in \mathbb{R}[(X_S)_{S\in\mathfrak{F}}]$，与每个 $R \subset \{1,\ldots,k\}$ 相关联，使得以下结论成立：对于任意 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_k$，以及任意网格尺寸 δ，只要没有点落在 $\delta\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)$ 的边上(这样便可以明确判定点 x_i 是否被 $\mathcal{L}$中的环所包围)，

$$\mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)}\left[\prod_{i=1}^{k}\left(h^{(\delta)}(u_{2i-1})-h^{(\delta)}(u_{2i})\right)\right] = \sum_{R\subset\{1,\ldots,k\}} \phi_{\delta\mathbb{L}(\theta),q}\left[\prod_{i\in R}(\mathcal{N}_{2i-1}-\mathcal{N}_{2i})\,P_R\big((\mathcal{N}_S)_{S\in\mathfrak{F}}\big)\right]. \tag{174}$$

此外， [Ave+a，引理 4.5] 断言，我们可以将讨论限制在“大”环上。更精确地，固定 $\varepsilon > 0$，并令 $\mathcal{N}_j^{\mathrm{big}}$ 表示对 $\mathcal{N}_j$ 有贡献、且不包含在以 ε 为中心、半径为 u_j的球内的环的数量。那么，存在一个普适常数 $c>0$，使得对于任意 $\varepsilon>0$，右侧的项在（174）中满足

$$\begin{aligned}\phi_{\delta\mathbb{L}(\theta),q}&\left[\prod_{i\in R}(\mathcal{N}_{2i-1}-\mathcal{N}_{2i})\,P_R\big((\mathcal{N}_S)_{S\in\mathfrak{F}}\big)\right]\\ &= \phi_{\delta\mathbb{L}(\theta),q}\left[\prod_{i\in R}(\mathcal{N}^{\mathrm{big}}_{2i-1}-\mathcal{N}^{\mathrm{big}}_{2i})\,P_R\big((\mathcal{N}_S)_{S\in\mathfrak{F}}\big)\right]+O(\varepsilon^c).\end{aligned} \tag{175}$$

结合前面显示的两个方程，我们得到，各向异性六顶点模型的 k点相关性可以用一个泛函来近似（当 ε趋近于零时，误差也趋近于零）。该泛函仅取决于从定义在 $\delta\mathbb{L}(\theta)$上的随机簇模型中得到的环系综里，半径至少为 ε 的环。文献 [Dum+20]证明了等半径图上随机簇模型的普适性，这意味着不同 θ 取值对应的环系综分布相同。特别地，角度为 θ 的环系综与角度为 $\pi/2$的环系综相同，而后者与各向同性六顶点模型有关。由此可推得，对于任意 $\eta>0$ 以及任意紧集 $K \subset \mathcal{D}_k$，存在 $\delta_0(k,K,\eta) > 0$

使得对于任意 $0 < \delta < \delta_0$ 和 $\boldsymbol{u} \in K$,

$$\left| \mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)} \left[\prod_{i=1}^{k} \left(h^{(\delta)}(u_{2i}) - h^{(\delta)}(u_{2i-1}) \right) \right] - \Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u}) \right| \leq \eta, \tag{176}$$

这里我们回顾一下， $\Phi_k^{(\delta)}(\boldsymbol{u})$ 表示各向同性情形下的相关函数。特别地，各向同性情形下， k点关联函数在 $\mathcal{D}_k$ 的紧子集上 $\theta = \pi/2$ (定理 2.8) 一致收敛，可立即推广到任意 θ的各向异性情形。

有限维边缘分布的收敛。 建立多点相关函数的收敛性之后，自然会尝试采用各向同性情形下使用的策略。该策略的问题在于，它需要一个控制函数（以应用控制收敛定理），而我们是通过相关函数的一致上界找到这个控制函数的。此时出现了一个技术难点：定理 4.5依赖于自旋表示的穿越估计，而这些估计在各向异性情形下并不容易获得。因此，若要采用这种方法，就必须在缺少 $\pi/2$ 旋转所带来的对称性的情况下，重新进行整个分析。

为绕过这一问题，我们改为直接处理方程（18）。设 $h_\theta^{(\delta)}$ 为定义在$\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)$上的各向异性六顶点模型的高度函数，并固定一个具有有限狄利克雷能量的测试函数 φ。回顾一下，如果 $\langle h_\theta^{(\delta)}$ 的特征函数 $\varphi\rangle$ 逐点收敛到某个高斯分布的特征函数，那么该序列就在弱拓扑下依分布收敛到该高斯分布。

对于环系综 $\mathcal{L}$，定义（只要无穷乘积有定义）

$$A_\varphi(\mathcal{L}) := \prod_{\ell \in \mathcal{L}} \cos_\mu \varphi(\mathrm{int}(\ell)). \tag{177}$$

令 $\mathcal{L}^{(\delta)}$ 和 $\mathcal{L}_\theta^{(\delta)}$ 分别表示与随机簇模型在 $\delta\mathbb{L}(\frac{\pi}{2})$ 和 $\delta\mathbb{L}(\theta)$ 上相关联的环系综。必要时从 $(\delta_n)_n$ 中抽取一个子序列，我们可以假设 $\mathcal{L}^{(\delta_n)}$ 和 $\mathcal{L}^{(\delta_n)}_\theta$ 依分布收敛到环系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{cont}}$ 和 $\mathcal{L}^{\mathrm{cont}}_\theta$。令 ϕ^{cont} 和 $\phi^{\mathrm{cont}}_\theta$ 表示它们的分布。 [Ave+a] 的结果保证，对每个 $t \in \mathbb{R}$，量 $A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{\mathrm{cont}})$ 和 $A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{\mathrm{cont}}_\theta)$ 几乎必然有定义且可积，并且

$$\phi^{\mathrm{cont}}\left[A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{\mathrm{cont}})\right] = \lim_{n\to\infty} \phi_{\delta_n \mathbb{L}(\frac{\pi}{2})}\left[A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{(\delta_n)})\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbb{Z}^2}\left[e^{\mathrm{i}t\langle h^{(\delta_n)}, \varphi\rangle}\right], \tag{178}$$

$$\phi^{\mathrm{cont}}_\theta\left[A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{\mathrm{cont}}_\theta)\right] = \lim_{n\to\infty} \phi_{\delta_n \mathbb{L}(\theta)}\left[A_{t\varphi}(\mathcal{L}^{(\delta_n)}_\theta)\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{6\mathrm{V}}_{\mathbf{L}_\theta(\mathbb{Z}^2)}\left[e^{\mathrm{i}t\langle h^{(\delta_n)}_\theta, \varphi\rangle}\right], \tag{179}$$

其中，每一行中的第二个等号仅仅是（18）。 [Dum+20]中的普适性结果断言，两个极限环系综具有相同的分布，因此左侧的量也相同。由于我们已经在各向同性情形中确定了特征函数，这也意味着各向异性情形中特征函数所需的逐点收敛。

□

注 10.1. 各向异性情形下无法得到正则性，这解释了为什么我们不陈述 Hölder 空间中的收敛性，因为要确立这一结果需要大量额外的技术工作。尽管如此，我们预计，在获得这一结果时不会遇到任何根本性障碍。

C 部分

要素 4：关联函数的谱表示

本部分将推导要素 4 中陈述的结果，即定理 4.12 和 4.15。在本部分中，$L \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的值始终固定。这两个定理源于圆柱上的基本对称性（平移不变性、反射不变性以及全局箭头翻转下的不变性）。我们强调，尽管六顶点模型的转移矩阵具有极其丰富的结构，本部分的目的却恰恰是突出相反这一事实：证明 B部分 所需的性质并不依赖于这一结构，而且具有普遍性。

11 转移矩阵形式

回顾一下，$\mathsf{Cyl}_L = (V(\mathsf{Cyl}_L)\ E(\mathsf{Cyl}_L))$是顶点集$V(\mathsf{Cyl}_L) := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$上的最近邻图。用 E_i 表示 $\{i\} \times (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$与$\{i+1\} \times (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$之间的水平边 。集合 E_i 称为第列水平边。我们还用$E_{ii'}$表示 $E_i \cup E_{i+1} \cup \cdots \cup E_{i'}$与这两列之间所有竖直边 的并集（即端点属于 $\{i+1, \ldots, i'\} \times (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$的边）。

列构型 是一个元素 $\kappa \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$，用于编码列 E_i 中水平箭头的方向。共有 L 个竖直位置； $\kappa_j = +1$ 表示位置 j 上的箭头朝右； $\kappa_j = -1$ 表示箭头朝左。用 $\mathfrak{C}$ 表示平衡的列构型集合，也就是说， $\sum_j \kappa_j = 0$。类似地，沿垂直线 $\{k\} \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ 的垂直列构型 是一个元素$\alpha^k \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$，用于编码竖直箭头的方向。共有 L 个竖直位置；$\alpha^k_j = +1$ 表示位置 j 和 $j+1$ 之间的箭头朝上； $\alpha^k_j = -1$ 表示箭头朝下。 $E_{ii'}$ 上的箭头构型可写作一个族$((\kappa^k)_{i \leq k \leq i'},\ (\alpha^k)_{i < k \leq i'})$，其中 κ^k 编码列 E_k中的水平箭头，而α^k 编码 $\{k\} \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$上的竖直箭头。

对于 $i \leq i'$ 和 $\zeta,\ \zeta' \in \mathfrak{C}$，令 $\mathbb{P}^{ii'}_{\zeta\zeta'}$ 表示定义在 $\{\pm 1\}^{E_{ii'}}$ 上、具有边界条件 ζ 和 ζ' 的概率测度，其定义为

$$Z^{ii'}_{\zeta\zeta'}\mathbb{P}^{ii'}_{\zeta\zeta'}[((\kappa^k)_{i\leq k\leq i'}, (\alpha^k)_{i<k\leq i'})] := \mathbb{1}[(\kappa^i, \kappa^{i'}) = (\zeta, \zeta')] \cdot \mathbb{1}[\text{ice rule}] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-vertices}\}}, \quad (180)$$

其中 $Z^{ii'}_{\zeta\zeta'}$ 是归一化因子，定义为

$$Z^{ii'}_{\zeta\zeta'} := \sum_{(\kappa^k)_{i\leq k\leq i'},\,(\alpha^k)_{i<k\leq i'}} \mathbb{1}[(\kappa^i, \kappa^{i'}) = (\zeta, \zeta')] \cdot \mathbb{1}[\text{ice rule}] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-vertices}\}}. \quad (181)$$

我们总结几个基本性质。

引理 11.1 （概率测度的基本性质）。

(i) 单步定律。对于任意 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\kappa,\ \kappa' \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$,

$$Z^{i(i+1)}_{\kappa\kappa'}\mathbb{P}^{i(i+1)}_{\kappa\kappa'}[\alpha^{i+1}] = \mathbb{1}[\textit{ice rule for } (\kappa, \alpha^{i+1}, \kappa')] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\textit{-vertices in } (\kappa, \alpha^{i+1}, \kappa')\}}. \quad (182)$$

(ii) 复合规则。 对任意 $i \leq i' \leq i''$ 和 $\kappa,\ \kappa'' \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$,

$$Z^{ii''}_{\kappa\kappa''}\mathbb{P}^{ii''}_{\kappa\kappa''} := \sum_{\kappa' \in \mathfrak{C}} Z^{ii'}_{\kappa\kappa'} Z^{i'i''}_{\kappa'\kappa''} (\mathbb{P}^{ii'}_{\kappa\kappa'} \times \mathbb{P}^{i'i''}_{\kappa'\kappa''}). \quad (183)$$

*(iii)*环面测度。我们有

$$Z_{\mathbb{T}_{M,L}}\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\{\text{balanced}\}]\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\,\cdot\,|\{\text{balanced}\}] = \sum_{\kappa\in\mathfrak{C}} Z^{0M}_{\kappa\kappa}\mathbb{P}^{0M}_{\kappa\kappa}. \tag{184}$$

(iv)反射对称性。令 $i \le i'$，并令 $\mathbf{X}$ 表示一个关于 $E_{ii'}$中的箭头可测的随机变量。（回想一下，箭头编码了高度函数的梯度。）令 $\mathbf{X}^\dagger$ 表示一个关于 $E_{(-i')(-i)}$ 中的箭头可测的随机变量，它由将 $\mathbf{X}$ 与梯度关于 $\mathcal{R}$的反射复合而得。于是，

$$\mathbb{E}^{ii'}_{\kappa\kappa'}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}^{(-i')(-i)}_{\kappa'\kappa}[\mathbf{X}^\dagger]. \tag{185}$$

(v) 水平平移不变性。令 $i \le i'$，并令 $\mathbf{X}$ 表示一个关于 $E_{ii'}$中的箭头可测的随机变量。对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\tau_{(n,0)}$ 表示平移$(n,0)$，并令 $\tau_{(n,0)}(\mathbf{X})$ 表示一个关于 $E_{(i+n)(i'+n)}$可测的随机变量，它由将 $\mathbf{X}$与该平移复合而得。于是，

$$\mathbb{E}^{ii'}_{\kappa\kappa'}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}^{(i+n)(i'+n)}_{\kappa\kappa'}[\tau_{(n,0)}(\mathbf{X})]. \tag{186}$$

证明。前三条可由对各个和进行整理得到。最后两条是六顶点模型的对称性。

□

前一个引理揭示了希尔伯特空间结构。令 $\Omega := \ell^2(\mathfrak{C})$表示以 $(e_\kappa)_{\kappa\in\mathfrak{C}}$为正交归一基的复希尔伯特空间。用符号 † 表示向量和算子的厄米共轭。为每一列水平边 E_i关联一个希尔伯特空间 $\Omega_i := \Omega$。对于每个有效三元组，也就是说，对于三元组 $(\mathbf{X}\ i, i')$，其中 $i \le i'$，且$\mathbf{X}$ 是一个仅依赖于 $E_{ii'}$中边的复值算子，我们定义算子$\mathfrak{o}^{ii'}_{\mathbf{X}}$ $\mathbf{x} : \Omega_i \to \Omega_{i'}$，其定义为

$$e^\dagger_{\kappa'}\ \mathfrak{o}^{ii'}_{\mathbf{X}}\ e_\kappa := Z^{ii'}_{\kappa\kappa'}\mathbb{E}^{ii'}_{\kappa\kappa'}[\mathbf{X}]. \tag{187}$$

在这一框架下，上述引理立即推出以下推论。

推论 11.2（算子的基本性质）。

(i) 单步配分函数。与单步配分函数对应的算子 $t(\pi/2) := \mathfrak{o}_1^{i(i+1)}$，与 i 的选择无关，并满足

$$e^\dagger_{\kappa'}t(\pi/2)e_\kappa := \sum_{\alpha\in\{\pm1\}^L} \mathbb{1}[\textit{ice rule for } (\kappa,\alpha,\kappa')]\cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-}\textit{vertices in } (\kappa,\alpha,\kappa')\}}. \tag{188}$$

(ii) 复合规则。对于任意两个有效三元组 $(\mathbf{X}\ i, i')$ 和 $(\mathbf{Y}\ i', i'')$，复合$(\mathbf{XY}\ i, i'')$ 是一个有效三元组，并且

$$\mathfrak{o}^{ii''}_{\mathbf{XY}} = \mathfrak{o}^{i'i''}_{\mathbf{Y}} \circ \mathfrak{o}^{ii'}_{\mathbf{X}}. \tag{189}$$

(iii) 环面测度。对于任意有效三元组 $(\mathbf{X}\ 0, M)$，

$$Z_{\mathbb{T}_{M,L}}\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\{\text{balanced}\}]\mathbb{E}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\mathbf{X}|\{\text{balanced}\}] = \operatorname{Trace}\mathfrak{o}^{0M}_{\mathbf{X}}. \tag{190}$$

(iv) 反射对称性。对于任意有效三元组 $(\mathbf{X}\ i, i')$，其中 $\mathbf{X}$ 为实值函数，

$$(\mathfrak{o}^{ii'}_{\mathbf{X}})^\dagger = \mathfrak{o}^{(-i')(-i)}_{\mathbf{X}^\dagger}. \tag{191}$$

(v) 水平平移不变性。对于任意有效三元组$(\mathbf{X}\ i, i')$ 以及 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，

$$\mathfrak{o}^{(i+n)(i'+n)}_{\tau_{(n,0)}(\mathbf{X})} = \mathfrak{o}^{ii'}_{\mathbf{X}}. \tag{192}$$

现在我们转而讨论转移矩阵 $t(\pi/2)$ 本身。

引理 11.3（转移矩阵的基本性质）。 算子 $t(\pi/2)$ 是一个只有单个块的厄米佩龙-弗罗贝尼乌斯矩阵。因此，它在某个正交归一基 $(v_k)_k$ 下为对角形式，且特征值均为实数；并且基可以适当标记，使得相应的特征值 $(\lambda_k(\pi/2))_k$ 满足

$$\lambda_0(\pi/2) > |\lambda_1(\pi/2)| \geq |\lambda_2(\pi/2)| \geq \lambda_3(\pi/2) \geq \cdots . \tag{193}$$

最后，可以选取 v_0，使其在基 $(e_\kappa)_\kappa$ 下的各项均为正实数。

证明。 算子 $t(\pi/2)$ 在基 $(e_\kappa)_\kappa$ 下是一个实对称矩阵。因此，它是厄米矩阵。可以直接验证它是一个佩龙-弗罗贝尼乌斯矩阵。容易看出，当 k 足够大时，$t(\pi/2)^k$ 的各项均为正。因此，它只有一个块。其余结论随之得出。 □

定义

$$T(\pi/2) := \frac{t(\pi/2)}{\lambda_0(\pi/2)}; \qquad \Lambda_k(\pi/2) := \frac{\lambda_k(\pi/2)}{\lambda_0(\pi/2)}; \qquad \mathfrak{O}_{\mathbf{X}}^{ii'} := \mathfrak{o}_{\mathbf{X}}^{ii'}/\lambda_0(\pi/2)^{i'-i}. \tag{194}$$

注 11.4（引理 11.3）。 与 $T(\pi/2)$ 的最大特征值 1 对应的特征子空间是一维的。约定 v_0 具有正实数项，仅仅是为了固定与 $\lambda_0(\pi/2)$ 对应的归一化特征向量的复相位。$T(\pi/2)$ 的谱支撑在 $(-1,\ 1]$，因为 -1 不可能是 $T(\pi/2)$ 的特征值，这由佩龙-弗罗贝尼乌斯性质可知。

由构造可知，对任意有效三元组（$\mathbf{X}$ i，i'），我们有

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}] = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,L}}[\mathbf{X}|\{\text{balanced}\}] = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{Trace}(\mathfrak{o}_{\mathbf{X}}^{ii'} t(\pi/2)^{M-(i'-i)})}{\mathrm{Trace}\, t(\pi/2)^M} = v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\mathbf{X}}^{ii'}\, v_0. \tag{195}$$

事实上，最右侧的等式是通过观察到仅$t(\pi/2)$的最大特征值有贡献而得到的。

我们通过如下观察结束本小节：引理 4.11 现在是显然的。

引理 *4.11*的证明。 见上文方程（195）。 □

12 一般可观测量的谱表示（定理 4.15）

定理 *4.15*的证明。 考虑该定理的设定，并固定 L。定义嵌入

$$\mathcal{E}^- :\ \mathfrak{A}^- \to \Omega, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathfrak{O}_{\mathbf{X}}^{(-i)0}\, v_0; \tag{196}$$

$$\mathcal{E}^+ :\ \mathfrak{A}^+ \to \Omega^\dagger, \quad \mathbf{Y} \mapsto v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\mathbf{Y}}^{0i}, \tag{197}$$

其中，i 选得足够大，使得$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{Y}$ 分别关于 $E_{(-i)0}$和 E_{0i} 中的箭头可测。根据复合规则，这些定义不依赖于 i，因为

$$v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\mathbf{Y}}^{0(i+1)} = v_0^\dagger T(\pi/2)\, \mathfrak{O}_{\mathbf{Y}}^{0i} = v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\mathbf{Y}}^{0i} \tag{198}$$

（$\mathcal{E}^-$ 的证明相同）。注意，$\mathcal{E}^-$ 和 $\mathcal{E}^+$ 是将实向量空间映射到复向量空间的线性映射。

步骤1：定义 $\mu_{\mathbf{X},\,\mathbf{Y},\,L}$。 对于$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{Y}$，在 $[0,2)$上如下定义测度$\mu_{\mathbf{X},\,\mathbf{Y},\,L}$

$$\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L} := \sum_k \big(\mathcal{E}^+(\mathbf{Y})v_k\big)\big(v_k^\dagger \mathcal{E}^-(\mathbf{X})\big)\delta_{1-\Lambda_k(\pi/2)}. \tag{199}$$

（上文中， δ_x 表示点 x 处的狄拉克测度。）

步骤 2：证明 (i)。利用方程 (195) 和第一个等式中的复合规则、第二个等式中的水平平移不变性，以及第三个等式中嵌入的定义，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}\cdot\tau_{(n,0)}(\mathbf{Y})] &= v_0^\dagger\, \mathfrak{O}^{n(i+n)}_{\tau_{(n,0)}(\mathbf{Y})}\, T(\pi/2)^n\, \mathfrak{O}^{(-i)0}_{\mathbf{X}}\, v_0 && (200)\\
&= v_0^\dagger\, \mathfrak{O}^{0i}_{\mathbf{Y}}\, T(\pi/2)^n\, \mathfrak{O}^{(-i)0}_{\mathbf{X}}\, v_0 && (201)\\
&= \mathcal{E}^+(\mathbf{Y})T(\pi/2)^n\mathcal{E}^-(\mathbf{X}). && (202)
\end{aligned}$$

利用 (199)，即可推出所需公式

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}\cdot\tau_{(n,0)}(\mathbf{Y})] = \int (1-a)^n \mathrm{d}\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}(a). \tag{203}$$

步骤 3：证明 (ii)。对于$\mathbf{X}$，反射对称性和嵌入的定义意味着

$$\mathcal{E}^+(\mathbf{X}^\dagger) = v_0^\dagger\, \mathfrak{O}^{0i}_{\mathbf{X}^\dagger} = v_0^\dagger\, (\mathfrak{O}^{-i0}_{\mathbf{X}})^\dagger = (\mathfrak{O}^{-i0}_{\mathbf{X}}\, v_0)^\dagger = (\mathcal{E}^-(\mathbf{X}))^\dagger. \tag{204}$$

因此，$\mu_{\mathbf{X},\,\mathbf{X}^\dagger,\,L}$ 是一个正测度，因为对任意 k,

$$\big(\mathcal{E}^+(\mathbf{X}^\dagger)v_k\big)\big(v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\big) = \big(\mathcal{E}^-(\mathbf{X})^\dagger v_k\big)\big(v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\big) = \|\mathcal{E}^-(\mathbf{X})^\dagger v_k\|^2 \geq 0. \tag{205}$$

尚需证明柯西-施瓦茨不等式（方程 (46)）。利用 (203)（对于 $n=0$）以及全变差的定义，可得

$$|\mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{XY}]| = |\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}[[0,2)]| \leq \|\mu_{\mathbf{X},\mathbf{Y},L}\| \leq \sum_k \Big|\big(\mathcal{E}^+(\mathbf{Y})v_k\big)\big(v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\big)\Big|. \tag{206}$$

对右侧的和应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\Big(\sum_k \big|\big(\mathcal{E}^+(\mathbf{Y})v_k\big)\big(v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\big)\big|\Big)^2 \leq \Big(\sum_k \|\mathcal{E}^+(\mathbf{Y})v_k\|^2\Big)\Big(\sum_k \|v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\|^2\Big). \tag{207}$$

反向使用（203）（针对 $n=0$），并结合 $\mu_{\mathbf{X},\,\mathbf{X}^\dagger,\,L}$ 的正性，可得

$$\sum_k \|v_k^\dagger\mathcal{E}^-(\mathbf{X})\|^2 = \|\mu_{\mathbf{X},\mathbf{X}^\dagger,L}\| = \int \mathrm{d}\mu_{\mathbf{X},\mathbf{X}^\dagger,L}(a) = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger]. \tag{208}$$

应用相同的论证，同样可得

$$\sum_k \|\mathcal{E}^+(\mathbf{Y})v_k\|^2 = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbf{Y}^\dagger\mathbf{Y}]. \tag{209}$$

结合（206）–（209）得出柯西-施瓦茨不等式，证明至此完成。 □

13 二点函数的谱表示（定理 4.12）

在开始证明定理 4.12之前，我们先介绍另外两个算子——竖直箭头算子和上移算子——并讨论它们的基本性质。为了测量竖直箭头之间的箭头间关联，我们引入一些新算子，用以编码位置 j 和 $j+1$之间竖直箭头的方向。对于 $j \in (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$，令$s_j(\pi/2) := \mathfrak{o}^{01}_{\alpha_j}$，或者等价地

$$e^\dagger_{\kappa'} s_j(\pi/2) e_\kappa := Z^{01}_{\kappa\kappa'} \mathbb{E}^{01}_{\kappa\kappa'}[\alpha_j] \tag{210}$$

$$= \sum_{\alpha\in\{\pm1\}^L} \alpha_j \cdot \mathbb{1}[\text{ice rule for } (\kappa,\alpha,\kappa')] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-vertices in } (\kappa,\alpha,\kappa')\}}. \tag{211}$$

记 $S(\pi/2) := \mathfrak{O}^{01}_{\alpha_0} = s_0(\pi/2)/\lambda_0(\pi/2)$。

注 13.1. 对于步骤 3，只需计算两支竖直箭头之间的箭头-箭头关联。我们将看到，一般情形可由加法规则和混合性质推出。因此，我们仅使用测量竖直箭头的算子，完全避免引入水平箭头的算子。

接下来，定义上移算子。对于任意 $\kappa \in \mathfrak{C}$，我们令 $\kappa^\uparrow \in \mathfrak{C}$ 表示满足 $(\kappa^\uparrow)_i = \kappa_{i-1}$ 的列构型。类似地，我们定义满足 $(\kappa^\downarrow)^\uparrow = \kappa$ 的 $\kappa^\downarrow \in \mathfrak{C}$。它们分别称为上移和下移。定义上移算子 $T(0): \Omega \to \Omega$ 为

$$e^\dagger_{\kappa'} T(0) e_\kappa := \mathbb{1}[\kappa' = \kappa^\uparrow]. \tag{212}$$

回顾 $s_j(\pi/2)$ 的定义，很容易看出

$$s_j(\pi/2) = T(0)^j s_0(\pi/2) T(0)^{-j}; \tag{213}$$

$$\mathfrak{O}^{01}_{\alpha_j} = \frac{s_j(\pi/2)}{\lambda_0(\pi/2)} = T(0)^j S(\pi/2) T(0)^{-j}. \tag{214}$$

现在我们来总结这些算子的若干基本性质。

引理 13.2（移位算子）。基 $(v_k)_k$ 在引理 *11.3* 中引入，可以选取为同时将 $T(0)$ 对角化的基。如果 $\Lambda_k(0)$ 表示与 v_k对应的特征值，那么 $\Lambda_k(0)$ 是 L-次单位根，并且 $\Lambda_0(0) = 1$。

证明。算子 $T(0)$ 是正规算子，因为 $T(0)$ 与 $T(0)^\dagger = T(0)^{-1}$可交换。此外，由于六顶点模型的移位不变性，$T(0)$ 与 $T(\pi/2)$ 可交换。因此，$T(0)$ 与 $T(\pi/2)$ 可共同对角化。不妨设 $T(0)$ 已经在基 $(v_k)_k$下为对角的。这不会破坏 $(v_k)_k$ 在引理 11.3 中的性质。事实上，在引理 11.3 中，我们只是任意选取了一个将 $T(\pi/2)$ 对角化的正交归一基，然后对其排序；但这里排序并不重要（特别是因为 $\Lambda_0(\pi/2)$ 的特征子空间是一维的）。

由于 $T(0)^L =$ 恒等算子，其特征值是 L 次单位根。最后，v_0 是 $T(\pi/2)$ 的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，并且我们要求它在基 $(e_\kappa)_\kappa$ 中的所有分量都严格为正。由于 $T(0)$ 在基 $(e_\kappa)_\kappa$下的系数非负（它是一个置换矩阵），这意味着 $T(0)v_0$ 的分量也为正。由于$T(0)v_0 = \Lambda_0(0)v_0$，这就迫使 $\Lambda_0(0) = 1$。 □

引理 13.3（边测量算子）。算子 $S(\pi/2)$ 是反厄米的，并且 $v_0^\dagger S(\pi/2) v_0 = 0$。

证明。 先关注第一个性质。回到其在基 $(e_\kappa)_\kappa$ 中的定义，不难看出 $s_0(\pi/2)$ 是反厄米的。事实上，这些定义蕴含

$$e_{\kappa'}^\dagger s_0(\pi/2)e_\kappa = \sum_{\alpha\in\{\pm1\}^L} \alpha_j \cdot \mathbb{1}[\text{ice rule for } (\kappa,\alpha,\kappa')] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-vertices in } (\kappa,\alpha,\kappa')\}} \tag{215}$$

$$= \sum_{\alpha\in\{\pm1\}^L} \alpha_j \cdot \mathbb{1}[\text{ice rule for } (\kappa',-\alpha,\kappa)] \cdot \mathbf{c}^{\#\{\mathbf{c}\text{-vertices in } (\kappa',-\alpha,\kappa)\}} \tag{216}$$

$$= -e_\kappa^\dagger s_0(\pi/2)e_{\kappa'}. \tag{217}$$

对于第二个性质，注意公式（195）给出

$$v_0^\dagger S(\pi/2)v_0 = v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\alpha_0}^{01}\, v_0 = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[\text{the orientation of a fixed vertical edge}] = 0, \tag{218}$$

这里的期望为零，因为测度在全局箭头翻转下保持不变。 □

定理 *4.12* 的证明。 对于任意偶整数 L，定义测度

$$\mu_L := \sum_{k>0} \frac{|v_k^\dagger S(\pi/2)v_0|^2}{(1-\Lambda_k(\pi/2))^2}\delta_{(1-\Lambda_k(\pi/2),-\mathrm{i}\log\Lambda_k(0))}. \tag{219}$$

μ_L 的支撑包含于 $(0,2)\times[-\pi,\pi)$，因为对于每个 $k>0$，$|\Lambda_k(\pi/2)|<1$。这个不等式还确保对于每个 $k>0$，分母 $1-\Lambda_k(\pi/2)$ 均不为零，从而使该定义成立。

证明分为三个步骤。首先，在约束 $y_1=y_2=0$ 下证明公式（41）。然后，将其推广至定理 4.12 的一般情形。最后，完成证明。

步骤1：在约束 $y_1=y_2=0$ 下证明公式（41）。在这一步中，我们考虑 $\boldsymbol{u}$，其中 u_1 和 u_1' 位于同一条水平线上，u_2 和 u_2' 也如此。在这种情况下，$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u})$ 可以写成 $\boldsymbol{u}$ 的二点函数之和，其中 (u_1,u_1') 与 (u_2,u_2') 水平相邻。因此，公式（10）的可加性将问题归结为证明这一特殊情形下的公式（41）。

我们计算方程（41）的左端和右端。考虑 $\boldsymbol{u}$。当 $u_1'-u_1=u_2'-u_2=(1,0)$ 时，我们只是在计算竖直箭头之间的箭头-箭头关联。回忆一下 $\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1'=(x_1',y_1')$ 的定义，以及 $y(u)$ 表示 $u\in\mathbb{R}^2$的第二坐标。对于左端，我们得到

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}[(h(u_1')-h(u_1))(h(u_2')-h(u_2))] \tag{220}$$

$$= v_0^\dagger\, \mathfrak{O}_{\alpha_{y(u_2)}}^{01}\, T(\pi/2)^{x_1'}\, \mathfrak{O}_{\alpha_{y(u_1)}}^{01}\, v_0 \tag{221}$$

$$= v_0^\dagger T(0)^{y(u_2)}S(\pi/2)T(0)^{-y(u_2)}T(\pi/2)^{x_1'}T(0)^{y(u_1)}S(\pi/2)T(0)^{-y(u_1)}v_0 \tag{222}$$

$$= v_0^\dagger S(\pi/2)T(\pi/2)^{x_1'}T(0)^{-y_1'}S(\pi/2)v_0. \tag{223}$$

最后一行中，我们利用了 $T(\pi/2)$ 与 $T(0)$ 可交换。将 $S(\pi/2)$ 按基 $(v_k)_k$ 展开，并利用反厄米性质，可得

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u}) = -\sum_{k>0}|v_k^\dagger S(\pi/2)v_0|^2\Lambda_k(\pi/2)^{x_1'}\Lambda_k(0)^{-y_1'}. \tag{224}$$

我们省略了 $k=0$ 这一项，因为 $v_0^\dagger S(\pi/2)v_0=0$ 是由翻转对称性导致的（218）。

对于方程（41）的右端，利用 $x_1 = x_2 = 1$ 和 $y_1 = y_2 = 0$，可得

$$\int -a^2(1-a)^{x_1'} e^{-\mathrm{i}by_1'} \,\mathrm{d}\mu_L(a,b)$$
$$= -\sum_{k>0} \frac{|v_k^\dagger S(\pi/2) v_0|^2}{(1-\Lambda_k(\pi/2))^2} (1-\Lambda_k(\pi/2))^2 \Lambda_k(\pi/2)^{x_1'} \Lambda_k(0)^{-y_1'}. \quad (225)$$

这与我们为 $\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\,2}(\boldsymbol{u})$ 得到的表达式一致。

步骤 2：方程 (41) 的一般情形。 现在我们放宽条件：每一对 $(u_i,\ u_i')$ 都位于同一条水平线上。

我们先放宽 $y_1 = 0$ 这一条件，然后再放宽 $y_2 = 0$ 这一条件。事实上，这两个证明相同，因此我们重点讨论第一步。

固定 $\boldsymbol{u}$，使得 $y_1 \neq 0$ 且 $y_2 = 0$。思路是将 $\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\,2}(\boldsymbol{u})$ 写成三项之和，其中两项属于步骤 4 的范畴，第三项则是一个误差项，它在某个极限下趋于零。

更确切地说，我们将高度差 $h(u_1') - h(u_1)$ 写成沿路径 $(u_1,\ u_1 - ne_1,\ u_1' - ne_1,\ u_1')$ 的增量之和，其中 $e_1 = (1,\ 0)$。第一步和第三步由步骤 4 涵盖，因此得到

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}(\boldsymbol{u}) - \Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}\big(u_1 - ne_1, u_1' - ne_1, u_2, u_2'\big)$$
$$= \int \left((1-a)^{x_2} - 1\right)(1-a)^{x_1'} e^{-\mathrm{i}by_1'} \left(1 - (1-a)^{x_1} e^{-\mathrm{i}by_1}\right)\left(1 - (1-a)^n\right) \mathrm{d}\mu_L(a,b). \quad (226)$$

现在令 n 趋于无穷。由于 μ_L 几乎处处是由 $0 < a < 2$ 狄拉克测度组成的有限和，右端趋于

$$\int \left((1-a)^{x_2} - 1\right)(1-a)^{x_1'} e^{-\mathrm{i}by_1'} \left(1 - (1-a)^{x_1} e^{-\mathrm{i}by_1}\right) \mathrm{d}\mu_L(a,b). \quad (227)$$

只需证明，当 n 趋于无穷时，以下误差项趋于零：

$$\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}\big(u_1 - ne_1, u_1' - ne_1, u_2, u_2'\big) = \mathbb{E}_{\mathrm{Cyl}_L}\left[\big(h(u_1' - ne_1) - h(u_1 - ne_1)\big)\big(h(u_2') - h(u_2)\big)\right]. \quad (228)$$

但这个期望可以写成

$$v_0^\dagger \mathfrak{O}_2 T(\pi/2)^n \mathfrak{O}_1 v_0, \quad (229)$$

其中每个 $\mathfrak{O}_i$ 测度了两个高度差中的一个。当 n 趋于无穷时，该式趋于 $v_0^\dagger \mathfrak{O}_2 v_0 v_0^\dagger \mathfrak{O}_1 v_0$，因为 $\Lambda_0(\pi/2) = 1$，而所有其他特征值的模都严格小于 1。但 $v_0^\dagger \mathfrak{O}_1 v_0 = v_0^\dagger \mathfrak{O}_2 v_0 = 0$，因为每个因子都表示单个高度差的期望，而根据全局翻转对称性，该期望为零。这就证明了 $y_1 \neq 0$ 和 $y_2 = 0$ 的情形；一般情形可类似证明。

步骤 3：结论 我们构造了测度 μ_L 如上所述，我们观察到它支撑于 $(0,\ 2) \times [-\pi, \pi)$，并且我们对所有所需的点 $\boldsymbol{u}$建立了方程（41）。事实 $\mu_L[\{|b| \in (0,\ 2\pi/L)\}] = 0$ 源于以下观察：特征值$e^{-\mathrm{i}b}$ $T(0)$ 是 L次单位根。

最后，我们要证明 μ_L 在反射 $(a,b) \mapsto (a,-b)$下保持不变。但这是显而易见的，因为我们只需将 μ_L替换为它的对称化版本 $(\mu_L + \bar{\mu}_L)/2$即可；这是因为相关函数取实值，且按构造在反射下保持不变，同时显然仍满足定理 4.12的所有其他性质。 □

注 13.4. 上述反射 $(a,b)\mapsto(a,-b)$ 对应于对两个算子的加权特征值进行复共轭。复共轭是域扩张 $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ 的伽罗瓦群中的一个元素。由于所有算子在基 $(e_\kappa)_\kappa$ 下均取实值，伽罗瓦群保持 $T(\pi/2)$ 和 $T(0)$ 的加权联合谱。特别地，公式 (219) 本身在反射 $(a,b)\mapsto(a,-b)$ 下保持不变。

D部分
要素3：正则性估计与定性行为

本部分旨在证明以下中间结果：

- 无限体积六顶点测度的存在性（定理 2.2），
- 要素3中陈述的结果（定理 4.5、4.8、4.9、4.10以及推论4.7）。这些结果已在D部分 B中应用过，我们将在E部分 E再次应用它们（届时我们将推导出其余缺失的组成要素）。

本部分的证明基于 Fortuin–Kasteleyn–Ginibre（FKG）不等式和 Russo–Seymour–Welsh（RSW）理论。我们已经提到，六顶点模型的若干种表示在 $\mathbf{c}\geq 1$时满足这一 FKG 不等式。我们发现，采用六顶点模型的自旋表示 来形式化证明最为方便（见 [Lis22；Lis21；GL25]）。我们认为，也可以用高度函数绝对值的 FKG 不等式来写出这些证明（见 [Dum+24]），但本文不采用这一路径。

本部分安排如下。第14–16 章节介绍自旋表示及其性质。尽管这些结果或多或少已为人所知（对于自旋表示，相关结果例如可见于 [GL25]），但由于我们需要对已知结果作一些微妙的变体以及进行小幅扩展，仍将所有内容准确陈述出来。除回路估计已在 [Dum+24] 和 [GL25]中得到证明外，全文均以自包含的方式撰写。

在确立了自旋表示所需的术语和标准结果后，我们将在第17–23章节中逐一证明所需的中间结果。

14 自旋表示与 RSW 理论

14.1 自旋表示的研究动机

回顾一下，$h:\ F(\mathbb{Z}^2)\to\mathbb{Z}$ 表示六顶点模型的高度函数表示。它是一个在相邻面上相差 ±1 的函数，并为西南角为 (0，0) 的面赋予一个偶数。我们可以将 $F(\mathbb{Z}^2)$划分为两部分，使得 h 为 $F_\circ$（偶数面）赋予偶数，为 $F_\bullet$（奇数面）赋予奇数。

h 的梯度可以从 h 模4的取值中恢复，也就是说，可以从 th e function

$$h/4\mathbb{Z}:F(\mathbb{Z}^2)\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ x\mapsto h(x)+4\mathbb{Z}. \tag{230}$$

此外，这个模4的高度函数可以用一族 $(\{\pm\}^{F_\circ\,\mathbb{Z}^2}\times\{\pm\}^{F_\bullet\,\mathbb{Z}^2}$ $\sigma_\circ\ \sigma_\bullet$ ，）（）（）自旋来编码。事实上，我们只需如下定义（，）即可：

若 x 为偶数，则

$$\sigma_\circ(x):=\begin{cases}+ & \text{if } h(x)\in 0+4\mathbb{Z},\\ - & \text{if } h(x)\in 2+4\mathbb{Z};\end{cases} \tag{231}$$

若 x 为奇数，则

$$\sigma_\bullet(x) := \begin{cases} + & \text{if } h(x) \in 1 + 4\mathbb{Z}, \\ - & \text{if } h(x) \in 3 + 4\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{232}$$

因此，高度函数的自旋表示（即高度函数模4）编码了除相差4的常数倍平移之外的高度函数。偶面上的自旋称为偶自旋，奇面上的自旋称为奇自旋。

自旋表示之所以有用，主要有两个原因：
- 偶自旋满足 Fortuin–Kasteleyn–Ginibre 不等式，
- 偶自旋具有“最小”和“最大”值，分别为 $-$ 和 $+$，这使其有别于无界且没有最小值或最大值的高度函数。

尽管 $F(\mathbb{Z}^2)$ 是一个面集，我们通常会将每个面与其面中心等同起来。这样，我们就可以将 $F(\mathbb{Z}^2)$ 视为嵌入 $\mathbb{R}^2$ 中的顶点集，并将面之间的边视为面中心之间的线段。请注意，这与 $\mathbb{Z}^2$ 的标准对偶图一致，但我们避免明确提及它，因为后文还会出现其他几个图。

14.2 自旋表示的形式化定义

定义 14.1 (偶、奇子晶格)。 我们将 $F(\mathbb{Z}^2)$ 中的每个面都视为其面中心。偶面集合 $F_\circ$ 配备边集 $E_\circ$，使得位于 (i, j) 处的面的四个邻点为 $(i \pm 1, j \pm 1)$。我们也简单地将图 $F_\circ$ 记作 $(F_\circ, E_\circ)$。奇子晶格 $F_\bullet$也有类似的定义。见图 9。

定义 14.2（偶域）。在渗流理论的语境中，我们将每条边 $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^2$ 视为连接顶点 x 和 y的闭直线段。令 $\partial\mathcal{D}$ 表示穿过偶子晶格 $F_\circ$的一条有限自避回路。我们用 $F_\circ(\mathcal{D})$ 表示 $F_\circ$ 的子图，该子图由完全包含在 $\partial\mathcal{D}$ 所围点集的闭包内的顶点和边组成（特别地，$\partial\mathcal{D} \subset F_\circ(\mathcal{D})$）。它的边集记为 $E_\circ(\mathcal{D})$，顶点集简记为 $F_\circ(\mathcal{D})$。子图 $F_\bullet(\mathcal{D}) \subset F_\bullet$ 的定义类似，不过显然 $\partial\mathcal{D}$ 不能是 $F_\bullet(\mathcal{D})$的子图。三元组$\mathcal{D} := (\partial\mathcal{D}, F_\circ(\mathcal{D})\ F_\bullet(\mathcal{D}))$ 称为偶域，见图 9。我们也用 $F(\mathcal{D})$ 表示图 $F(\mathbb{Z}^2)$（其中共享一条边的面互为邻点）由顶点集 $F_\circ(\mathcal{D})$ $\cup F_\bullet(\mathcal{D})$ 诱导出的子图。我们不定义或使用奇域。

定义 14.3 （相容自旋构型）。 令 $\mathcal{D}$ 表示一个偶域。 $\mathcal{D}$ 上的自旋构型 是一个二元组

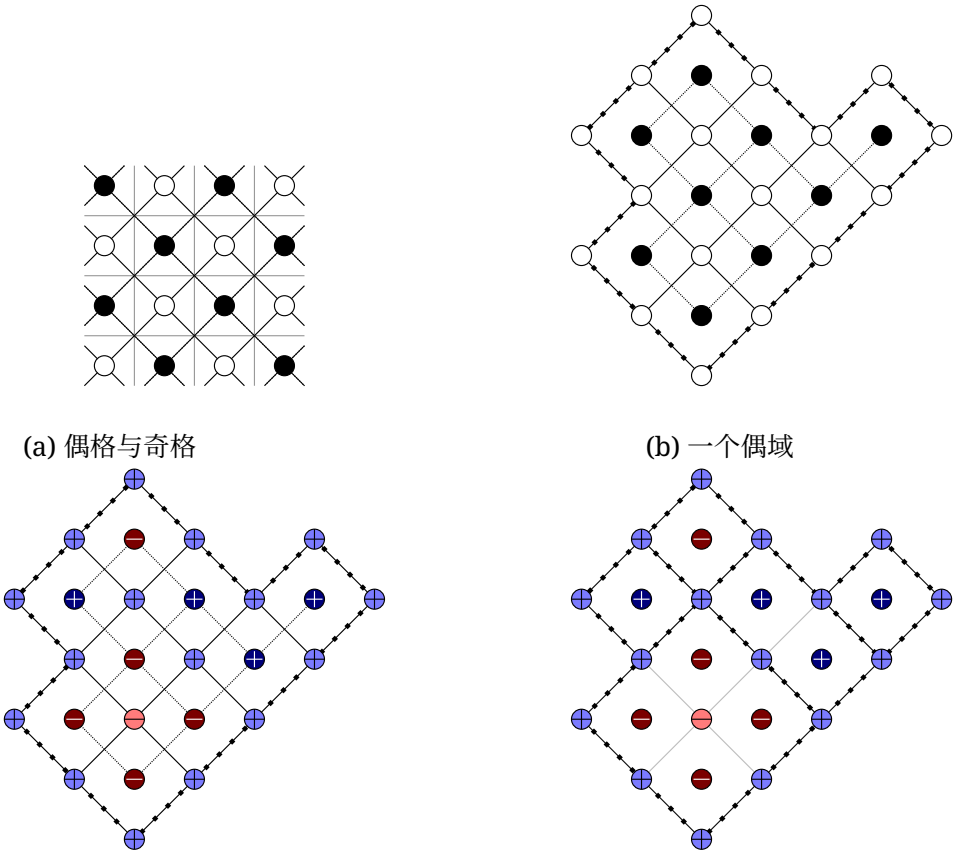
$$(\sigma_\circ, \sigma_\bullet) \in \{\pm\}^{F_\circ(\mathcal{D})} \times \{\pm\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}. \tag{233}$$

如果对任意边 $uv \in E_\bullet(\mathcal{D})$ 及其对偶边$xy = uv^* \in E_\circ(\mathcal{D})$（这里，对偶是指与该边在中点相交），都有以下关系，则称这样的自旋构型为相容的

$$\sigma_\bullet(u) = \sigma_\bullet(v) \qquad \text{or} \qquad \sigma_\circ(x) = \sigma_\circ(y) \qquad (\text{or both}). \tag{234}$$

此时记作 $\sigma_\circ \perp \sigma_\bullet$；相容自旋构型的示例见图 9 。

冰规则与相容性规则是同一件事的两个方面：它们是相关高度函数存在的充要条件。



(a) 偶格与奇格　(b) 一个偶域

(c) 一个一致的自旋构型　(d) 一个正概率三元组（$\sigma_\circ$， ω， $\sigma_\bullet$）

图 9

定义 14.4 （一致边）。 我们还引入一个相关的一致边集合

$$A(\sigma_\circ) := \{xy \in E_\circ(\mathcal{D}) : \sigma_\circ(x) = \sigma_\circ(y)\}. \tag{235}$$

我们对 $\sigma_\bullet$ 引入相同的记号。因此，两个自旋构型一致，当且仅当一致边的补集 彼此不相交。

在以下定义中，我们用符号 $\propto$ 表示“成正比”；读者应注意，式中隐含了一个归一化常数，以确保这些测度是概率测度。

我们希望定义一个概率测度 $\mu^+_{\mathcal{D}}$ ， 使随机对 $(\sigma_\circ,\ \sigma_\bullet)$ 服从如下分布

$$\mu^+_{\mathcal{D}}[(\sigma_\circ, \sigma_\bullet)] \propto \mathbb{1}[\sigma_\circ|_{\partial\mathcal{D}} \equiv +] \cdot \mathbb{1}[\sigma_\circ \perp \sigma_\bullet] \cdot \mathbf{c}^{\#A(\sigma_\circ)} \cdot \mathbf{c}^{\#A(\sigma_\bullet)}. \tag{236}$$

我们将证明，这实际上是参数为 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ 和 $\mathbf{c} \in [1, 2]$、具有固定边界条件的六顶点模型的一种变换。

我们对上述公式作如下解释： $\sigma_\circ$ 和 $\sigma_\bullet$ 是相互独立的铁磁伊辛模型（定义在对偶图上），并且以它们的畴壁不相交这一事件为条件。伊辛模型 $\sigma_\circ$ 具有固定边界条件，而 $\sigma_\bullet$ 具有自由边界条件。

在对 $\sigma_\circ$ 进行条件化后， $\sigma_\bullet$ 的分布可以解释为一个伊辛模型，只是其中一些耦合常数被设为无穷大（这是由于示性函数

$\mathbb{1}[\sigma_\circ \perp \sigma_\bullet]$）。这个条件伊辛模型具有 FK–伊辛耦合。我们不把方程（236）作为定义，而是直接在一个更大的空间上定义概率测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$，该空间也包含这个 FK–伊辛耦合。下文中，相关的渗流构型记作 $\omega_\circ$

定义 14.5 (自旋测度)。 考虑一个偶域 $\mathcal{D}$。令 $\Omega = \Omega_{\mathcal{D}}$ 表示样本空间

$$\Omega := \{\pm\}^{F_\circ(\mathcal{D})} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathcal{D})} \times \{\pm\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}. \tag{237}$$

典型元素记为 $(\sigma_\circ,\ \omega,\ \sigma_\bullet)$。我们常将 ω 与集合 $\{xy \in E_\circ(\mathcal{D}) : \omega(xy) = 1\}$等同，并使用标准的渗流术语。下文中，对于一条边 $xy \in E_\circ$，令 xy^* 为与其共享同一中点的唯一一条边。在 $(\sigma_\circ,\ \omega,\ \sigma_\bullet) \in \Omega$ 上定义概率测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 如下：

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[(\sigma_\circ,\omega,\sigma_\bullet)] \propto \mathbb{1}[\sigma_\circ|_{\partial\mathcal{D}} \equiv +] \cdot \mathbb{1}[\partial\mathcal{D} \subset \omega] \cdot \mathbb{1}[\omega \subset A(\sigma_\circ)] \tag{238}$$

$$\cdot\, \mathbb{1}[xy \in \omega \text{ or } xy^* \in A(\sigma_\bullet) \text{ (or both) for any } xy \in E_\circ(\mathcal{D})] \tag{239}$$

$$\cdot\, \mathbf{c}^{\#A(\sigma_\circ)} \cdot \left(\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#\omega} \cdot \left(1-\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#(A(\sigma_\circ)\setminus\omega)}. \tag{240}$$

样本示例见图 9。

引理 14.6。 对 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 的定义与方程 (236)一致。

证明。 固定 $(\sigma_\circ,\ \sigma_\bullet)$ 对 ω求和，即可得到方程 (236)。 □

14.3 自旋表示的基本性质

回忆一下，边 $xy \subset \mathbb{R}^2$ 被视为从 x 到 y的直线线段。例如，我们将 ω 视为 $\mathbb{R}^2$的一个（闭）子集；每条边都由两个面中心之间的一条闭线段表示。

引理 14.7 (翻转对称性)。 考虑在条件 $(\sigma_\circ,\omega)$下的测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$。此时，$\sigma_\bullet$ 的分布可通过对 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$的每个有界连通分支各投掷一次公平硬币来确定。

证明。 根据 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 的定义可立即得出，在给定 $(\sigma_\circ,\omega)$ 的条件下，$\sigma_\bullet$ 在满足下列条件的构型集合 $\{\pm\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}$ 上均匀分布

$$xy^* \in A(\sigma_\bullet) \text{ for any } xy \in E_\circ(\mathcal{D}) \setminus \omega, \tag{241}$$

另见图9。这便得到了引理中所述的分布。 □

现在考虑二元组 $(\sigma_\circ,\omega)$ 的边缘律。这个边缘律特别有用，因为我们常常不考虑奇自旋构型 $\sigma_\bullet$。对于集合 $A \subset \mathbb{R}^2$，令 $f(A)$ 表示 $\mathbb{R}^2 \setminus A$的连通分支数。

引理 14.8 ($(\sigma_\circ,\ \omega)$ 边缘分布)。对于每个$(\sigma_\circ,\ \omega) \in \{\pm\}^{F_\circ(\mathcal{D})} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathcal{D})}$,

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[(\sigma_\circ,\omega)] \propto$$

$$\mathbb{1}[\sigma_\circ|_{\partial\mathcal{D}} \equiv +]\mathbb{1}[\partial\mathcal{D} \subset \omega]\mathbb{1}[\omega \subset A(\sigma_\circ)] 2^{f(\omega)} \mathbf{c}^{\#A(\sigma_\circ)-\#\omega} \left(1-\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#(A(\sigma_\circ)\setminus\omega)}. \tag{242}$$

证明。 证明与前一个引理有关。对于固定的 $(\sigma_\circ,\omega)$，需要计算满足方程（241）中条件的构型数量 $\sigma_\bullet$。 $2^{f(\omega)-1}$ （-1 这是因为唯一的无界连通分支并未涉及）。由此便得到引理中的表达式。

□

现在我们陈述一个简单的组合观察。为了理解 $(\sigma_\circ,\ \omega)$ 的分布，显然需要计算 $f(\omega)$，也就是计算 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 的连通分支数量。由于 $\omega \subset A(\sigma_\circ)$，$\omega$ 中的每条边连接的都是符号相同的两个自旋。因此，我们可以写作 $A(\sigma_\circ) = A^-(\sigma_\circ) \cup A^+(\sigma_\circ)$ 和 $\omega = \omega^- \cup \omega^+$，其中：

- $A^-(\sigma_\circ)$ 和 ω^- 连接带有 $\sigma_\circ$-自旋 $-$的面，
- $A^+(\sigma_\circ)$ 和 ω^+ 连接带有 $\sigma_\circ$-自旋 $+$的面，
- 没有任何面同时邻接 $A^-(\sigma_\circ)$的一条边和 $A^+(\sigma_\circ)$的一条边，
- 没有任何面同时邻接 ω^- 的一条边和 ω^+的一条边。

特别地，我们注意到以下公式成立：

$$f(\omega) = -1 + \sum_{\#\in\{+,-\}} f(\omega^{\#}). \tag{243}$$

我们还将 $\bar{\omega}$ 记作两个渗流构型组成的有序对 $(\omega_\circ^+,\ \omega_\circ^-)$。我们希望用这些新对象来改写引理 14.8 中的权重。以下引理中的（较长）表达式表明，$\omega_\circ^+$和 $\omega_\circ^-$仅通过 $\sigma_\circ$相互作用，也就是说，在对 $\sigma_\circ$进行条件化后，它们相互独立。

引理 14.9。 对于$(\sigma_\circ, \bar{\omega}) \in \{\pm\}^{F_\circ(\mathcal{D})} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathcal{D})} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathcal{D})}$，有

$$\mu_{\mathcal{D}}^+[(\sigma_\circ, \bar{\omega})] \propto \mathbf{c}^{\#A(\sigma_\circ)} \tag{244}$$

$$\times\, \mathbb{1}[\partial\mathcal{D} \subset \omega_\circ^+]\mathbb{1}[\omega_\circ^+ \subset A^+(\sigma_\circ)]2^{f(\omega^+)} \left(\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#\omega^+} \cdot \left(1-\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#(A^+(\sigma_\circ)\setminus\omega^+)} \tag{245}$$

$$\times\, \mathbb{1}[\omega_\circ^- \subset A^-(\sigma_\circ)]2^{f(\omega^-)} \left(\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#\omega^-} \cdot \left(1-\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#(A^-(\sigma_\circ)\setminus\omega^-)}. \tag{246}$$

证明。 这由方程 (243) 和直接推导可得。 □

在方程 (243) 中，平面 $\mathbb{R}^2$ 的简单拓扑起着重要作用；该方程并不能直接推广到例如环面的情形。因此，在处理环面时，我们必须稍微修改设定（参见第 18章和引理18.5）。

到目前为止，我们定义的所有测度都采用 $+$ 边界条件，但同样也可以采用 $-$边界条件来定义；我们用 $\mu_{\mathcal{D}}^-$ 表示这种测度。

14.4 具有固定边界条件的六顶点高度函数

自旋表示与六顶点模型直接相关。考虑一个偶域$\mathcal{D}$和$(\sigma_\circ,\ \omega,\ \sigma_\bullet) \sim \mu_{\mathcal{D}}^+$。给定$(\sigma_\circ,\ \sigma_\bullet)$，通过本节开头（第55页）对自旋的定义，可以得到高度函数的梯度。更准确地说，对于相邻面 uv，若 $u \in F_\circ$ 且 $v \in F_\bullet$，则

$$h(v) - h(u) = \sigma_\circ(u)\sigma_\bullet(v). \tag{247}$$

这就定义了测度 $\mu_{\mathcal{D}}^+$ 下 $F(\mathcal{D})$ 上 h 的梯度。通过规定其在 $\partial\mathcal{D}$ 上等于 0，即可将该梯度转化为一个非梯度函数。

如此定义的函数 h 是高度函数，定义在 $F(\mathcal{D})$上：它是一个取整数值的函数$h:\ F(\mathcal{D}) \to \mathbb{Z}$，在相邻面上的差恰为 ± 1，因此保持每个面的奇偶性。根据引理14.6 （方程（236））， 其分布为：

$$\mu_{\mathcal{D}}^+[h] \propto \mathbb{1}[h|_{\partial\mathcal{D}} \equiv 0] \cdot \mathbf{c}^{\#A(h)}, \tag{248}$$

其中 $A(h) \subset E_\circ(\mathcal{D}) \cup E_\bullet(\mathcal{D})$ 表示一致对角线。因子 $\mathbf{c}^{\#A(h)}$ 与六顶点模型的定义（方程（2））一致，因为 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$，并且因为 $\mathbf{c}$型顶点比 $\mathbf{a}$型或 $\mathbf{b}$型顶点多诱导一条一致对角线。

定义 14.10（水平线）。此后，对任意 $k \in 2\mathbb{Z}$，记

$$A^k = A^k(h) := \{uv \in E_\circ(\mathcal{D}) : h(u) = h(v) = k\}; \tag{249}$$

$$\omega^k := \omega \cap A^k. \tag{250}$$

渗流 $\omega^k \subset E_\circ(\mathcal{D})$ 称为高度为 k 的层线。

注意

$$\omega^+ = \bigcup_{k\in 4\mathbb{Z}} \omega^k; \qquad \omega^- = \bigcup_{k\in 4\mathbb{Z}+2} \omega^k. \tag{251}$$

注意，$(\omega^k)_{k\in 2\mathbb{Z}}$ 不只是对 ω进行划分：此划分还具有这样的性质，即 ω 的每个连通分支都包含在某个 ω^k中。如果 ω 的一个连通分支 α 是 ω^k的子集，那么对于任何与 α相邻的 x，都有 $h(x) = k$，我们就简单地说 α 的高度为k。

之前我们看到，奇自旋只有在被 ω-边分隔时才会改变符号（例如参见引理 14.7）。这立即推出了介值定理，同时也说明了为何称之为水平线。

引理 14.11（介值定理）。考虑某个偶域 $\mathcal{D}$ 上的测度 $\mu^+_{\mathcal{D}}$。固定目标高度 $k \in 2\mathbb{Z}$，以及两个面 u、$v \in F(\mathcal{D})$ 和两个高度 a、$b \in \mathbb{Z}$，满足 $a < k < b$。那么，以下陈述几乎必然成立：如果 $h(u) = a$且 $h(v) = b$，并且若 γ：$u \to v$ 是区域 $\mathbb{R}^2$ 中从 u 到 v的任意连续路径，那么 γ 会与 ω^k相交。

14.5 自旋表示的马尔可夫性质

自旋表示沿偶区域满足马尔可夫性质，这一特点对下文的分析至关重要。本节将介绍这一性质。

若 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个偶区域，则记作 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$，并称 $\mathcal{D}$ 包含于$\mathcal{B}$，当且仅当 $E_\circ(\mathcal{D}) \subset E_\circ(\mathcal{B})$。考虑两个偶区域 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$。回顾样本空间 $\Omega_{\mathcal{D}}$ 的定义（定义 14.5），并将自然投影映射（它只需抹去与 $\Omega_{\mathcal{D}}$无关的自旋和边的取值）记为 $\pi_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{B}} \to \Omega_{\mathcal{D}}$。将互补投影映射记为 $\pi^c_{\mathcal{D}}$，因此 $\pi_{\mathcal{D}} \times \pi^c_{\mathcal{D}}$ 是 $\Omega_{\mathcal{D}}$上的恒等映射。

引理 14.12 (马尔可夫性质)。考虑两个偶区域 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$。对于$\# \flat \in \{\pm\}$使得 $\mu^{\#}_{\mathcal{B}}[\{\partial\mathcal{D} \subset \omega^\flat\}] > 0$,

- 随机变量组 $\mu^{\#}_{\mathcal{B}}[\cdot\,|\{\partial\mathcal{D} \subset \omega^\flat\}]$和 $\pi_{\mathcal{D}}(\sigma_\circ, \bar\omega, \sigma_\bullet)$ 的分布与随机变量组 $\mu^\flat_{\mathcal{D}}$ $(\sigma_\circ, \bar\omega, \sigma_\bullet)$的分布相同，
- 随机变量 $\pi_{\mathcal{D}}$和 $\pi^c_{\mathcal{D}}$在 $\mu^{\#}_{\mathcal{B}}[\cdot\,|\{\partial\mathcal{D} \subset \omega^\flat\}]$中相互独立。

证明。取引理 14.9中的表达式，并加入一个表示该条件事件的额外指示函数。随后不难得出，权重可在 $\mathcal{D}$ 及其补集上分解，正如所需。

□

由于 $\sigma_\bullet$ 在给定 $(\sigma_\circ, \bar\omega)$ 条件下的分布非常简单（引理 14.7），因此将分析完全聚焦于 $(\sigma_\circ, \bar\omega)$是合理的。从现在起，我们记作

$$\Omega^\circ_{\mathcal{D}} := \{\pm\}^{F_\circ(\mathcal{D})} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathcal{D})}. \tag{252}$$

对于任意 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$，我们将相应的投影映射记为 $\pi^\circ_{\mathcal{D}} : \Omega^\circ_{\mathcal{B}} \to \Omega^\circ_{\mathcal{D}}$，并将自然的互补投影映射记为 $\pi^{c,\circ}_{\mathcal{D}}$，使得 $\pi^\circ_{\mathcal{D}} \times \pi^{c,\circ}_{\mathcal{D}} = \pi^\circ_{\mathcal{B}}$。最后，为简洁起见，我们常将 $\sigma_\circ$、ω、$\bar\omega$ 和 $\omega^\pm_\circ$ 中的下标 $\circ$ 省略。

我们还要证明一种马尔可夫性质，适用于所谓的极域。极域是一个偶域 $\mathcal{D}$，并附带一个划分 $\partial\mathcal{D}$，将其分成两条标记为 $\partial^+\mathcal{D}$ 的线段

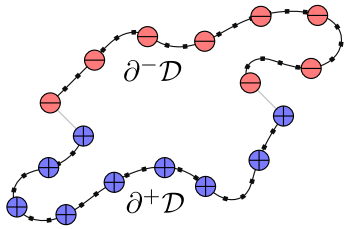


图10：一个极域。

和 $\partial^-\mathcal{D}$。更准确地说，我们要求这些线段的顶点将 $\partial\mathcal{D}$ 上的顶点划分开来，并且这些线段的边将 $E(\partial\mathcal{D})$ 划分开来，但连接两个端点的两条边不属于任何一部分（见图 10）。

引理14.13（极域的马尔可夫性质）。考虑一个极域 $(\mathcal{D}, \partial^+\mathcal{D}, \partial^-\mathcal{D})$ 以及另一个偶域 $\mathcal{B} \supset \mathcal{D}$。考虑事件

$$\mathcal{E} := \{\partial^+\mathcal{D} \subset \omega^+ \text{ and } \partial^-\mathcal{D} \subset \omega^-\}. \tag{253}$$

设 $\# \in \{\pm\}$。若 $\mu_{\mathcal{B}}^{\#}[\mathcal{E}] > 0$，则在条件测度 $\nu := \mu_{\mathcal{B}}^{\#}[\cdot\,|\mathcal{E}]$ 中，关于 $(\sigma_\circ, \omega)$，在 $\partial\mathcal{D}$ 上具有马尔可夫性质。更确切地说，$\pi_{\mathcal{D}}^{\circ}$ 和 $\pi^{c,\,\mathcal{D}^\circ}$ 在 ν 中相互独立。

证明。在事件 E 上，$\partial\mathcal{D}$ 上的 $\sigma_\circ$ 取值已知。因此，在引理14.9 的权重中，唯一可能使 $\pi_{\mathcal{D}}^{\circ}$ 与 $\pi^{c,\,\mathcal{D}^\circ}$ 相互作用的因子是

$$\prod_{\flat\in\pm} 2^{f(\omega^\flat)}. \tag{254}$$

注意，在事件 E 上，我们有

$$f(\omega^\flat) = 1 + \#\text{conn. comp. of } \mathbb{R}^2 \setminus \omega^\flat \text{ which are entirely surrounded by } \partial\mathcal{D} \tag{255}$$

$$+ \#\text{conn. comp. of } \mathbb{R}^2 \setminus \omega^\flat \text{ which are entirely outside } \partial\mathcal{D}. \tag{256}$$

右侧第一项是关于 $\pi_{\mathcal{D}}^{\circ}$可测的，第二项是关于 $\pi^{c,\,\mathcal{D}^\circ}$ 可测的，由此证明了所需的因子化与独立性。 □

15 自旋表示的 FKG 不等式

现在我们陈述并证明 Fortuin-Kasteleyn-Ginibre（FKG）不等式。我们还将讨论它的若干直接推论。

定义15.1（增函数与 FKG性质）。 如果一个随机变量可以表示为三元组（$\circ$-增 （或简称为增）函数，则称其为增函数，其中三元组为（$\sigma_\circ$、ω^+、$-\omega^-$）。注意最后一个分量中的负号；这意味着，在此类三元组的偏序中，$\omega_\circ^-$-开边处于较低位置。若随机变量 X 是 $\circ$-减（或简称减）的，则称其为 $-X$，当且仅当 $\circ$是增函数。若一个事件称为 $\circ$-增或 $\circ$-减，是指其示性函数分别为 $\circ$-增或 $\circ$-减。

若概率测度 μ 满足 $\circ$-FKG （或简称FKG）性质，则称其具有该性质，当且仅当

$$\mathrm{Cov}_\mu[X, Y] := \mu[XY] - \mu[X]\mu[Y] \geq 0 \tag{257}$$

对于任意有界的 $\circ$-递增随机变量 X 和 Y，只要它们关于有限个自旋和边可测。

下面的陈述概括了本小节的核心内容。

引理 15.2. 测度$\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 与$\mu_{\mathcal{D}}^{-}$ 对任意偶域 $\mathcal{D}$具有 $\circ$-*FKG*。

本引理已在 [GL25], 中得到证明，但我们将陈述并证明其更一般的版本。更确切地说，我们将定义格事件，即具有如下性质的事件 $\mathcal{E}$：对 $\mathcal{E}$ 进行条件化会保持 FKG。许多感兴趣的事件都可以划分为格事件，这在应用 FKG 不等式时非常有用。

定义 15.3 （格事件）。 一个 $\circ$-格事件 （或格事件）是如下形式的事件

$$\{\omega|_Q = \zeta\} \cap \{\sigma_\circ|_B = \xi\}, \tag{258}$$

其中 B 与 Q 分别包含 $F_\circ$ 的顶点和边，并且 B 包含 Q中所有边的端点。自然地，我们要求 $\zeta \in \{0,1\}^Q$ 与 $\xi \in \{\pm\}^B$。注意，若 $Q = B = \emptyset$，则 $\mathcal{E}$ 就是整个样本空间。

命题 15.4 （FKG 不等式）。 考虑一个偶域 $\mathcal{D}$ 以及一个 $\circ$-格事件 $\mathcal{E}$。令$\# \in \{\pm\}$。若 $\mu_{\mathcal{D}}^{\#}[\mathcal{E}] > 0$，则条件概率测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{\#}[\cdot\,|\mathcal{E}]$ 具有 $\circ$-*FKG*。

我们严格遵循 [LO24，定理 2。8] 以及 [GL25，命题 4。9]。读者初次阅读时可以跳过这段技术性证明。我们着重讨论 $\# = +$ 的情形；另一种情形的证明完全相同。 $\circ$-FKG 的证明可由下面的引理推出，该引理将在下文证明。

引理 15.5。 固定一个区域 $\mathcal{D}$ 和一个格事件 $\mathcal{E}$，使得 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\mathcal{E}] > 0$。那么，在条件测度 ν 下，以下结论均成立：$= \mu_{\mathcal{D}}^{+}[\cdot\,|\mathcal{E}]$。

(i) $\sigma_\circ$ 的权重满足 FKG 格点条件，这蕴含了 $\sigma_\circ$ *[FKG71]* 的 *FKG* 不等式。*(ii)* 在 $\sigma_\circ$ 的条件下，渗流 ω^+ 与 ω^- 相互独立。*(iii)* 在 $\sigma_\circ$ 的条件下， ω^+ 的分布满足 *FKG* 不等式。*(iv)* ω^+ 的条件分布关于 $\sigma_\circ$随机递增。*(v)* 在 $\sigma_\circ$的条件下， ω^- 的分布满足 *FKG* 不等式。*(vi)* ω^- 的条件分布关于 $\sigma_\circ$随机递减。

在证明引理之前，我们先推导 FKG 不等式。

命题的证明 *15.4*。如前所述，我们重点讨论 $+$ 情形。固定 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$，使得$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\mathcal{E}] > 0$，并设 $\nu = \mu_{\mathcal{D}}^{+}[\cdot\,|\mathcal{E}]$。我们应用 FKG 不等式的所谓塔式性质。

引理 15.5(ii)–(vi) 表明，给定 $\sigma_\circ$，有序对 $(\omega^+, -\omega^-)$ 满足 FKG 不等式，且有序对 $(\omega^+, -\omega^-)$ 的条件分布关于 $\sigma_\circ$随机递增。

现在，令 X 和 Y 表示两个有界的 $\circ$-增函数。断言

$$\nu[XY] = \nu[\nu[XY|\sigma_\circ]] \geq \nu[\nu[X|\sigma_\circ]\nu[Y|\sigma_\circ]] \geq \nu[\nu[X|\sigma_\circ]]\nu[\nu[Y|\sigma_\circ]] = \nu[X]\nu[Y]. \tag{259}$$

这个标准技巧（见 [LO24]）的证明如下。塔式性质推出这两个等式。第一个不等式来自有序对 $(\omega^+, -\omega^-)$的条件 FKG 不等式。由于有序对 $(\omega^+, -\omega^-)$ 的分布关于 $\sigma_\circ$随机递增，我们可知 $\nu[X|\sigma_\circ]$ 和 $\nu[Y|\sigma_\circ]$ 是关于 $\sigma_\circ$的增函数。第二个不等式由针对$\sigma_\circ$ 的 FKG 不等式（引理15.5(i)）得出。 □

引理的证明 *15.5*。 我们省略下标，记作 $\sigma = \sigma_{\circ\circ}$。为证明该引理，我们首先找出 ν 的一个恰当分解，然后逐项推导。

步骤1： ν**的分解。** 由于 $\mathcal{E}=\{\omega|_Q=\zeta\}\cap\{\sigma|_B=\tau\}$ 具有正概率，边集 Q 可写成不相交并

$$Q^+\cup Q^-\cup Q^\emptyset, \tag{260}$$

其中 $Q^\emptyset=\{\zeta=0\}$ 且其中 τ 等于 $+1$ 在 Q^+ 的端点上取值为 -1 在 Q^-的端点上取值为此。不失一般性， $\partial\mathcal{D}\subset Q^+$。将条件事件的示性函数代入引理 14.9 的表达式，得到

$$\nu[(\sigma,\bar{\omega})]\propto\mathbb{1}[\sigma|_B=\tau]\cdot\mathbf{c}^{\#A(\sigma)}\cdot 2^{f(\omega^+)}Y_+(\sigma,\omega^+)\cdot 2^{f(\omega^-)}Y_-(\sigma,\omega^-); \tag{261}$$

其中

$$\begin{aligned}Y_\pm(\sigma,\omega^\pm):=\mathbb{1}[Q^\pm\subset\omega^\pm]\mathbb{1}[\omega^\pm\cap Q^\emptyset=\emptyset]\mathbb{1}[\omega^\pm\subset A^\pm(\sigma)]\\ \cdot(\tfrac{1}{\mathbf{c}})^{\#(\omega^\pm\cap(A^\pm(\sigma)\setminus Q))}(1-\tfrac{1}{\mathbf{c}})^{\#((A^\pm(\sigma)\setminus Q)\setminus\omega^\pm)}.\end{aligned} \tag{262}$$

步骤 2：证明 (ii)。 固定 σ 后，上述权重可写成两个因子的乘积：一个因子仅依赖于 ω^+，另一个仅依赖于 ω^-。这意味着所需的独立性。

步骤 3：证明 (i)。证明 (i) 是论证中最微妙的部分；一旦得证，其余断言便可轻易推出。要计算自旋构型 σ 的权重，我们必须在方程 (261) 中对 ω^+ 和 ω^- 求和。由于在此表达式中，只有 $2^{f(\omega^+)}Y_+(\sigma,\omega^+)$ 依赖于 ω^+，而只有 $2^{f(\omega^-)}Y_-(\sigma,\omega^-)$ 依赖于 ω^-，因此可以分别进行求和。对于 ω^+ 和 ω^-，情况几乎相同。我们先考察 ω^+，然后说明如何将论证调整用于 ω^-。

关键思路如下。在给定 σ 的条件下，渗流构型 ω^+ 的行为如同 $F_\bullet(\mathcal{D})$ 上一个簇权重为 $q=2$ 的随机簇模型的对偶，这对应于通过 Edwards–Sokal 耦合定义在奇面上的伊辛模型。随机簇模型和伊辛模型的分布及配分函数都已得到充分理解，而这种对应关系使我们能够验证以下断言。为完整起见，我们给出详细证明。

引入耦合常数

$$a_{uv}^\pm(\sigma)=\begin{cases}1 & uv^*\in Q^\pm,\\ 1/\mathbf{c} & uv^*\in A^\pm(\sigma)\setminus Q,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{263}$$

and 耦合常数为 a 的 $F_\bullet(\mathcal{D})$ 上伊辛模型的配分函数 $\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a)$ 定义如下

$$\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a)=\sum_{\tilde{\sigma}\in\{\pm1\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}}\prod_{uv\in E_\bullet(\mathcal{D})}(a_{uv})^{\mathbb{1}[\tilde{\sigma}(u)\neq\tilde{\sigma}(v)]}. \tag{264}$$

我们的目标是计算 $\sum_{\omega^+}2^{f(\omega^+)}Y_+(\sigma,\ \omega^+)$。首先，改写

$$2^{f(\omega^+)}=2\sum_{\tilde{\sigma}\in\{\pm1\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}}\mathbb{1}[\tilde{\sigma}\perp\omega^+], \tag{265}$$

其中， $\tilde{\sigma}\perp\omega^+$ 表示 $\tilde{\sigma}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\omega^+$的每个连通分支上都是常数。右侧的系数 2 用于补偿在 $f(\omega^+)$中计入的无界面。代入前一个公式并交换求和次序，得到

$$\sum_{\omega^+}2^{f(\omega^+)}Y_+(\sigma,\omega^+)=2\sum_{\tilde{\sigma}\in\{\pm1\}^{F_\bullet(\mathcal{D})}}\sum_{\omega^+,\,\tilde{\sigma}\perp\omega^+}Y_+(\sigma,\omega^+). \tag{266}$$

虽然 Y_+ 的表达式很长，但内层和（对 $\omega^+ \perp \tilde{\sigma}$求和）很容易计算。事实上，指示函数和条件 $\omega^+ \perp \tilde{\sigma}$ 只是说明某些边必须打开或关闭。其余边上的和可以独立计算。通过进行这一计算，并仔细记录关于 ω^+的条件，可得

$$\sum_{\omega^+} 2^{f(\omega^+)} Y_+(\sigma, \omega^+) = 2\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a^+(\sigma)), \tag{267}$$

类似地，可得

$$\sum_{\omega^-} 2^{f(\omega^-)} Y_-(\sigma, \omega^-) = \mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a^-(\sigma)) \tag{268}$$

（与方程（267）不同，我们不需要前面的系数 2，因为$\mathbb{R}^2 \setminus \omega^-$ 的无界面与 $F_\bullet(\mathcal{D})$ 相交，因此其符号已计入其中）。将这两个表达式合并可得

$$\nu[\{\sigma\}] \propto \mathbb{1}[\sigma|_{\partial\mathcal{D}} \equiv +] \cdot \mathbb{1}[\sigma|_B = \tau] \cdot \mathbf{c}^{\#A(\sigma)} \cdot \mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a^+(\sigma)) \cdot \mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a^-(\sigma)). \tag{269}$$

现在我们验证每个因子都满足 FKG 格条件：

$$g(\sigma \vee \sigma')g(\sigma \wedge \sigma') \geq g(\sigma)g(\sigma'), \tag{270}$$

其中，$\sigma \vee \sigma'$ 和 $\sigma \wedge \sigma'$ 分别表示 σ 和 σ'的逐点最大值与逐点最小值

前两个因子显然满足该条件，因为它们是常数（回想一下，我们关注的是 $\nu = \nu^+_{\mathcal{D}}[\cdot|\mathcal{E}]$ 为正的构型）。第三个因子是经典结果：映射 $\sigma \mapsto \mathbf{c}^{\#A(\sigma)}$ 对应于铁磁伊辛相互作用，所需的不等式显然成立。现在我们来处理 $\mathcal{Z}_{\text{Ising}}$（$a^{\pm}$（$\sigma$））。我们重点考察 $+$，$-$的情形类似。根据 a^+ 的定义（方程（263））以及不等式$\mathbf{c} \geq 1$，可得

$$a^+_{uv}(\sigma \vee \sigma') \geq a^+_{uv}(\sigma) \vee a^+_{uv}(\sigma'); \qquad a^+_{uv}(\sigma \wedge \sigma') = a^+_{uv}(\sigma) \wedge a^+_{uv}(\sigma'). \tag{271}$$

现在暂时假设映射

$$a \mapsto \mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a) \tag{272}$$

在 $a \in [0,1]^{E_\bullet(\mathcal{D})}$ 上满足 FKG 格条件。由于 $\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a)$ 关于 a 是递增的，方程 (271) 以及 (272) 的 FKG 格条件意味着对于 $g(\sigma) = \mathcal{Z}_{\text{Ising}}(a^+(\sigma))$，所需的方程 (270) 成立。方程 (272) 的 FKG 格条件是经典结果（对配分函数进行不影响 FKG 格条件的重新归一化后），可见于 [Frö82，方程 (35)、(36)、(38)], [Cha98，命题 A.1], [LO24，引理 6.1 及方程 (7)]，或 [GL25]。

我们已经证明所有因子都满足 FKG 格条件，因此它们的乘积也满足该条件 $\nu[\{\sigma\}]$。根据 [FKG71], ，这意味着 σ 在 ν下满足 FKG性质。至此，(i) 的证明完成。

(iii)–(vi) 的证明。 我们先证明 (iii) 和 (v)。在给定 σ的条件下，渗流ω^+ 是簇权重为 $q = 2$ 的随机簇模型的对偶，而众所周知，该模型满足 FKG 不等式。 ω^-同样如此。

现在证明 (iv)；(vi) 的证明类似。在给定 σ 的条件下，随机簇模型的耦合常数编码于 $a^+(\sigma)$ 中。注意到 $a^+(\sigma)$（即耦合强度的倒数）关于 σ 是递增的。这意味着 ω^+ 的分布（它是随机簇模型的对偶）关于 σ 按随机序递增。这就证明了 (iv)，并完成了证明。

□

现在陈述一个由上述单调性性质得到的经典推论，它能够将区域“推向”远处，并比较边界条件。该推论用于规避模型中独立性的缺失。在伊辛模型和随机簇模型的理论中可以找到类似的结论。接下来的自旋构型概率分析将以这一结果为核心。

推论 15.6（区域单调性与边界条件）。 考虑两个偶域 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ 以及一个有界的 $\circ$-递增随机变量 X。则

$$\mu_{\mathcal{D}}^{-}[X] \leq \mu_{\mathcal{B}}^{-}[X] \leq \mu_{\mathcal{B}}^{+}[X] \leq \mu_{\mathcal{D}}^{+}[X]. \tag{273}$$

证明。 设 $\mathcal{M}$ 是一个包含 $\mathcal{B}$ 的偶域，并且足够大，使得 $\partial\mathcal{B}$ 与$\partial\mathcal{M}$不相交。则两个事件 $\{\partial\mathcal{B} \subset \omega^{\pm}\}$ 在 $\mu_{\mathcal{M}}^{+}$ 中具有正概率。我们断言

$$\mu_{\mathcal{B}}^{+}[X] = \mu_{\mathcal{M}}^{+}[X|\partial\mathcal{B} \subset \omega^{+}] \geq \mu_{\mathcal{M}}^{+}[X]. \tag{274}$$

事实上，等式来自马尔可夫性质，不等式来自 FKG 不等式。这就证明了该断言。同理，我们得到

$$\mu_{\mathcal{B}}^{-}[X] = \mu_{\mathcal{M}}^{+}[X|\partial\mathcal{B} \subset \omega^{-}] \leq \mu_{\mathcal{M}}^{+}[X], \tag{275}$$

从而得到

$$\mu_{\mathcal{B}}^{-}[X] \leq \mu_{\mathcal{B}}^{+}[X]. \tag{276}$$

该引理陈述中的其他不等式也类似；例如，在右侧，我们得到

$$\mu_{\mathcal{B}}^{+}[X] \leq \mu_{\mathcal{B}}^{+}[X|\partial\mathcal{D} \subset \omega^{+}] = \mu_{\mathcal{D}}^{+}[X]. \tag{277}$$

这就证明了该引理。 □

16 自旋构型的渗流估计

从现在起，我们将始终记作

$$[\![n]\!] := [-n, n]; \qquad [\![n \times m]\!] := [-n, n] \times [-m, m]; \tag{278}$$

$$\text{球}_n := [\![n \times n]\!]; \qquad \mathrm{Ball}_n(x) := \mathrm{Ball}_n + x; \tag{279}$$

$$\mathrm{Annulus}_{R,r} := \mathrm{Ball}_R \setminus \mathrm{Ball}_r; \qquad \mathrm{Annulus}_{R,r}(x) := \mathrm{Annulus}_{R,r} + x. \tag{280}$$

一个 矩形 是 $\mathbb{R}^2$ 中形如 $R = [\![a \times b]\!] + x$的子集。其四条边（即 ∂R的子集所构成的闭线段）按通常方式分别记作右$_R$、上$_R$、左$_R$和下$_R$ 。

16.1 与自旋表示相关的渗流事件

回顾一下，我们将 ω^+ 和 ω^- 视为 $\mathbb{R}^2$ 的随机子集（每条边都视为连接其两个端点的闭线段）。我们的目标是理解 $\bar{\omega} =$ （ω^+, ω^-）的随机几何。本节中，我们定义一些有用的渗流事件：首先是“简单”事件（用 ω^+ 或 ω^-定义），然后是“交替”事件（用 ω^+ 和 ω^-共同定义）。

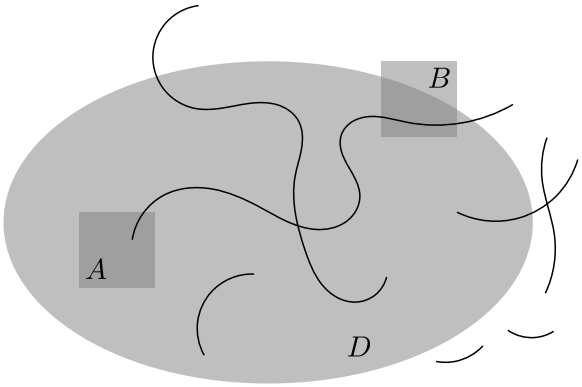


图 11：一般渗流事件 $\{A \overset{D}{\leftrightarrow} B\}$ 的一个元素

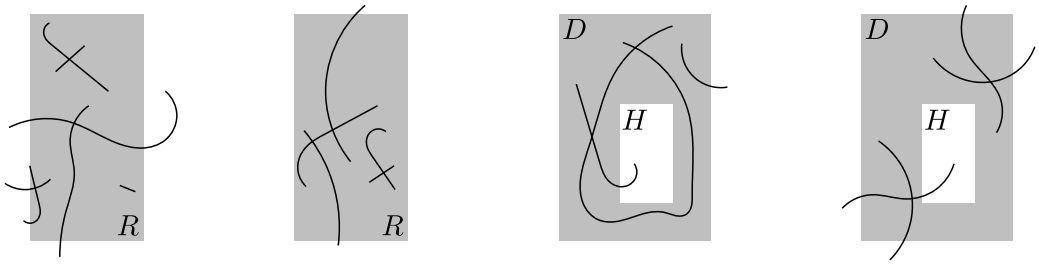


图 12：Hor(R)、Ver(R)、Circuit($D \setminus H$) 和 Arm($D \setminus H$) 的元素

定义 16.1（简单渗流事件）。定义

$$\{A \overset{D}{\leftrightarrow} B\} := \{S \subset \mathbb{R}^2 : S \cap D \text{ contains a path from } A \text{ to } B\}; \tag{281}$$

s见图 11。定义矩形的水平穿越和垂直穿越所构成的集合为 s

$$\mathrm{Hor}(R) := \{\mathrm{Left}_R \overset{R}{\leftrightarrow} \mathrm{Right}_R\}; \tag{282}$$

$$\mathrm{Ver}(R) := \{\mathrm{Top}_R \overset{R}{\leftrightarrow} \mathrm{Bottom}_R\}. \tag{283}$$

若 $A \subset \mathbb{R}^2$ 是一个拓扑环带，定义回路和臂事件

$$\mathsf{Circuit}(A) := \{S \subset \mathbb{R}^2 : S \cap A \text{ 在 } \mathbb{R}^2 \setminus A \text{ 中包含一条不可缩回路；} \mathsf{Arm}(A) : \tag{284}$$

$$= \{S \subset \mathbb{R}^2 : S \cap A \text{ 有一条路径连接边界分量} \quad \text{ts of } A\}. \tag{285}$$

参见图12，其中展示了我们刚才定义的全部四种事件。

注 16.2 (组合回路事件)。回路事件用途广泛，因为可以将它们组合起来形成（水平或垂直）穿越（见图13）；例如，对于 $k \geq 1$，我们有

$$\bigcap_{i=0}^{k-1} \mathrm{Circuit}(\mathrm{Annulus}_{2,1}((2i,0))) \subset \mathrm{Hor}([-1, 2k-1] \times [1,2]). \tag{286}$$

它们也可以组合起来，构造更复杂的渗流事件。例如，对于 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们可以找到一个子集 $Z \subset \mathbb{R}^2$，其基数为 $\#Z = 4r$，使得

$$\bigcap_{z \in Z} \mathrm{Circuit}(\mathrm{Annulus}_{2,1}(z)) \subset \mathrm{Circuit}(\mathrm{Annulus}_{r+1,r}). \tag{287}$$

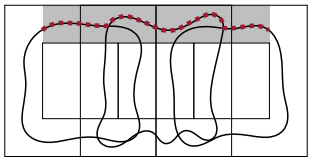


图 13：这三个回路共同表明该矩形存在交叉。

构造一个基数在常数因子意义下最优的集合 Z 通常相当直接（但在技术上颇为繁琐）。在这种情况下，我们不精确定义Z，而是将选择留给读者，并请读者参考这条说明。

定义16.3（交替渗流事件）。对于以下定义，令 $\mathfrak{R}$表示集合

$$\{(S_+, S_-) : S_+, S_- \subset \mathbb{R}^2 \text{ and } S_+ \cap S_- = \emptyset\}. \tag{288}$$

现在引入这些事件； R 是一个矩形， A 是一个拓扑环带。

- 交替水平交叉$_{2k}(R)$由满足以下条件的元素 $(S_+, S_-) \in \mathfrak{R}$ 组成：Left_R 包含 $2k$个不同的顶点

$$s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, \ldots, s_k^+, s_k^- \tag{289}$$

这些顶点按降序排列，且每个 $s_i^{\#}$ 都可以通过 $S_{\#} \cap R$中的一条路径与 Right_R 路径连通。

- $\text{AltVer}_{2k}(R)$的定义方式相同：它由满足以下条件的元素 $(S_+, S_-) \in \mathfrak{R}$ 组成：Top_R包含 $2k$ 个不同的顶点 $s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, \ldots, s_k^+, s_k^-$，这些顶点从左到右排列，且每个 $s_{\#\, i}$ 都可以通过 $S_{\#}$ $\cap R$中的一条路径与 Bottom_R 路径连通。
- 交替回路$_{2k}(A)$ 包含元素 $(S_+, S_-) \in \mathfrak{R}$，满足我们可以找到 $2k$ 个不相交的 A 回路，这些回路按从外到内的顺序排列，且回路交替包含于 S_+ 和 S_- 中，第一个回路属于 S_+。
- 交替臂$_{2k}(A)$ 的定义类似；在这种情况下，臂按环形排列，但不排序；不存在最上方、最左方或最外侧交叉或回路的概念。

参见图 14中的示意图。

我们将对不同的集合使用这些定义。因此，我们引入以下记号 n.

对于 $\mathbb{R}^2$ 的任意随机子集 α，记 $\text{Hor}^{\alpha}(R) := \{\alpha \in \text{Hor}(R)\}$，其他事件也类似。如果 α 是 $F(\mathbb{Z}^2)$ 的随机子集，那么我们将 α 视为 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集，它由连接属于 $\alpha \subset F$ $(\mathbb{Z}^2)$ 的最近邻面中心的所有线段的并集定义。

现在假设 $\bar{\alpha} = (\alpha^+, \alpha^-)$ 是一个随机渗流对。最后，对于上述定义的四个事件中的每一个，我们再引入两个记号。与上文类似，引入

$$\text{AltHor}_{2k}^{\bar{\alpha}}(R) := \{\bar{\alpha} \in \text{AltHor}_{2k}(R)\}, \tag{290}$$

$$\#\text{AltHor}^{\bar{\alpha}}(R) := \max\{2k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} : \bar{\alpha} \in \text{AltHor}_{2k}(R)\}. \tag{291}$$

这些记号也自然适用于另外三个事件。

16.2 自旋构型的回路估计

过去六十年来，渗流理论取得了显著进展。对于平面伯努利渗流，20 世纪 80 年代的研究表明 [SW78；Rus78]（另见 [KT25]和

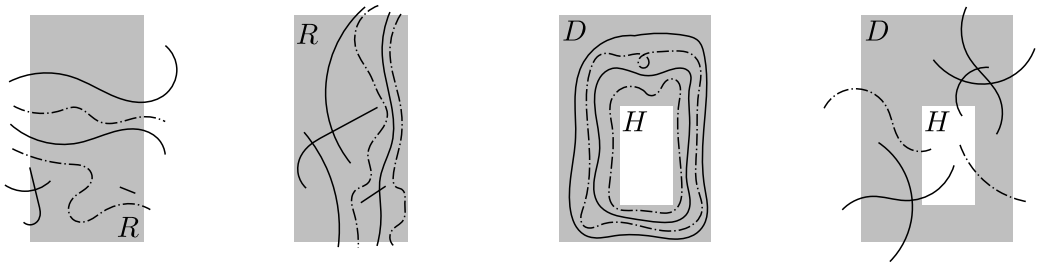


图14：交替水平穿越$_4(R)$、AltVer$_4(R)$、交替回路$_4(D \setminus H)$和交替臂$_4(D \setminus H)$的元素。实线表示 ω^+；虚线 ω^-。

其中的参考文献），在临界性下，纵横比固定的矩形具有穿越概率——也就是说，渗流构型中存在连通分支穿越该矩形的概率——当矩形的尺寸趋于无穷时，这些概率始终与 0 和 1 保持一致的正距离。这反映了临界区制下的连通分支在性质上呈现无标度行为，并具有分形式几何性质。

Russo–Seymour–Welsh（RSW）理论最初是为伯努利渗流发展起来的，如今已成为分析临界现象不可或缺的工具。在过去十五年间，该理论得到显著扩展，涵盖了许多相依渗流模型 [DHN11；DST17；DT15；DTT18；DMT21；DT19；Lam23；KT23]。在这一更广泛的背景下，必须特别关注给定矩形内部的构型与其外部之间的相依性。因此，要使穿越估计适用，它们必须对边界条件保持一致。

研究大型连通分支的形成时，环域比矩形更便于进行几何分析。在这种设定下，我们关注渗流构型中是否存在一条始终位于环域内、并环绕其内边界的路径。本节将始终采用这一环形框架。

本小节给出了我们渗流型论证所需的关键 RSW 型输入。下面的定理表明，即使边界条件最不利（即 $+$ 边界条件），ω^- 仍满足 RSW 型估计。

对于任意矩形 R，我们将 μ_R^+ 记作 $\mu_{\mathcal{D}}^+$，其中 $\mathcal{D}$ 是最大的偶域，其面中心均包含在 R 中。

定理 16.4（回路估计）。存在一个常数 $c_{\mathrm{circuit}} > 0$（与$\mathbf{c} \in [1,2]$无关），使得对于任意 $r \in [4,\infty)$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\mu^+_{\mathrm{Ball}_{2r}(x)}[\mathrm{Circuit}^{\omega^-}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))] \geq c_{\mathrm{circuit}}. \tag{292}$$

交换 $+$ 和 $-$ 后，同一不等式仍然成立。

该结果表明，即使在最不利的边界条件下（就增函数而言），ω^--回路出现的概率仍一致地为正。边界条件上的一致性使该结果具有很强的灵活性。

该定理最初由 [Dum+24证明，见定理 1。4]。该文章利用 Bethe Ansatz 得到的一个输入推导出某些穿越估计，随后利用 FKG 不等式（针对高度函数的绝对值）将这些穿越估计转化为回路估计。

第二种不依赖 Bethe Ansatz 的证明由 [GL25], 通过重整化不等式给出。这一技巧最初由 [DST17] 在随机簇模型的背景下使用。重整化不等式基本上断言，如果该定理不成立，那么回路概率会随半径增大而指数级快速衰减 r，这反过来意味着该模型是局域化的（与已知的去局域化结论矛盾）。

现在我们开始证明。尽管定理 16.4 与 [Dum+24，定理 14]本质上完全相同，但这两个定理是在略有不同的背景下表述的。现在我们将把 [Dum+24，定理 14] “翻译”为定理 16.4。读者初次阅读时可以跳过这个技术性证明。我们从一个引理开始。

回顾一下，事件 $\mathrm{AltCircuit}_{20}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2n,\ n})$ 表示该环域包含 20 个回路，这些回路（从外向内）依次交替属于 ω^+、ω^-、ω^+ 等。

引理 16.5。 存在常数 $c>0$ 和 $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$（均与 $\mathbf{c}\in[1,2]$ 无关），使得对每个 $n\geq N$，

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\mathrm{AltCircuit}_{20}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2n,n})]\geq c. \tag{293}$$

证明。第一个平移问题源于边界条件在以下两种情形中施加方式不同：[Dum+24]中，[Dum+24]边界条件施加在由 F（$\mathbb{Z}^2$）-路径上的相邻面上，而不是施加在由 $F_\circ$-路径上的对角相邻的偶面上，后者正是我们在这里采用的做法。

固定 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $\mathcal{D}^n$ 表示面心包含于球 $\mathrm{Ball}_{(2n+2)}$ 中的最大偶域。令 γ^n 表示包围最大面积的自避免 $F(\mathcal{D}^n)$-回路（该路径交替经过偶面和奇面）。不难看出，作为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，球 Ball_{2n} 被 γ^n 包围。

由于 γ^n 经过的每个面都位于 $\partial\mathcal{D}^n$ 上或与其相邻，因此我们有

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\{|h|_{\gamma^n}|\leq 1\}]=1. \tag{294}$$

这是个好消息，因为条件测度 $\mu^{+\,\text{球}_{(2n+2)}}[\,\cdot\,|\,h|_{\gamma^n}]$ 具有类似于 [Dum+24]中的边界条件。现在我们可以直接应用 [Dum+24定理 14]，取 $\ell=1$和 $k=100$，从而找到一个常数 $c>0$，使得当 n充分大时，

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}\left[\mathrm{Circuit}^{\{h\geq 100\}}(\mathrm{Annulus}_{2n,n})\middle|h|_{\gamma^n}\right]\geq c. \tag{295}$$

特别地，

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\mathrm{Circuit}^{\{h\geq 100\}}(\mathrm{Annulus}_{2n,n})]\geq c. \tag{296}$$

由于 $\mathrm{Annulus}_{2n,\ n}$ 几乎必然包含一个 $\{h\leq 10\}$ 的回路，介值定理断言我们可以在该环域中找到高度为 $k=12$、14、……、98 的 ω^k-回路。这证明了该断言，因为这些回路交替属于 ω^+ 和 ω^-。 □

定理*16.4*的证明。设 N 与 c 由引理16.5给出。我们区分两种情形：要么 $r\leq N$，要么 $r>N$。

步骤1：情形 $r\leq N$。在任意测度 $\mu^+_{\mathcal{D}}$ 下，与 $\partial\mathcal{D}$ 不相邻的每条边以某个统一的正概率 $\eta>0$ 成为 ω^-- 开放的，该概率独立于 $\mathcal{D}$ 和所选取的边。因此，利用 ω^- 的 FKG 不等式，可得统一下界为 η^M，其中 M 是在满足 $r\leq N$ 的环带内最小回路长度的上确界。

步骤 2：情形 $r > N$。 不妨设 $x \in [-2,2]^2$。令 $n = \lceil r \rceil$。则

$$\mathrm{AltCircuit}_{20}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2n,n}) \subset \mathrm{AltCircuit}_{2}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x)). \tag{297}$$

因此，该断言蕴含

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\mathrm{AltCircuit}_{2}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))] \geq c. \tag{298}$$

令 γ 表示上述环域中最大的自回避 ω^{+}-回路（若不存在这样的回路，则取 $\gamma := \emptyset$），并令 $\mathcal{D}_\gamma \subset$球$_{2r}(x)$表示相应的偶域（从而 $\partial\mathcal{D}_\gamma = \gamma$）。由塔式性质与马尔可夫性质，我们有

$$\begin{aligned}&\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\mathrm{AltCircuit}_{2}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))] \\ &\qquad = \int_{\{\gamma\neq\emptyset\}} \mu^{+}_{\mathcal{D}_\gamma}[\mathrm{Circuit}^{\omega^{-}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))]\,\mathrm{d}\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{(2n+2)}}[\gamma] \geq c.\end{aligned} \tag{299}$$

由于 $\mu^{+}_{\mathcal{D}}[$回路$^{\omega^{-}}$(环域$_{2r,\ r}(x))]$ 关于 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}_\gamma \subset$球$_{2r}(x)$ 几乎必然递增，由推论15.6可得

$$\mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{2r}(x)}[\mathrm{Circuit}^{\omega^{-}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))] \geq c. \tag{300}$$

至此完成第二步的证明。综合这两步，便在 $c_{\mathrm{circuit}} := \eta^{M} \wedge c$下建立了该定理。

□

我们记下前一定理与FKG不等式相结合的一个简单推论。这一陈述在后文中将会很方便。

推论 16.6 （回路估计）. 对任意 $r \in [4,\infty)$ 与 $x \in \mathbb{R}^2$，以及对任意偶域 $\mathcal{D}$，使得 $\partial\mathcal{D}$ 包围球$_{2r}(x)$，我们有

$$\mu^{+}_{\mathcal{D}}[\mathrm{Circuit}^{\omega^{-}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))|\mathcal{E}] \geq c_{\mathrm{circuit}} \tag{301}$$

对于任意事件 $\mathcal{E}$，只要它可由偶自旋以及不与球$_{2r}(x)$相交的边来测量。同一不等式在将 ω^{-} 替换为 ω^{+}后仍然成立。

证明。事件 $\mathcal{E}$ 可以写成有限个 ○格事件的划分，这些事件可由偶自旋以及不与球$_{2r}(x)$相交的边来测量。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{E}$ 本身也具有这种形式。令 $\gamma \subset E$。表示球$_{2r}($ $x)$中最大偶域的边界。由 $\mu^{+}_{\mathcal{D}}[\cdot|\mathcal{E}]$的 FKG 不等式（命题15.4），可得 $\mu^{+}_{\mathcal{D}}[\cdot|\mathcal{E}]$

$$\mu^{+}_{\mathcal{D}}[\text{回路}^{\omega^{-}}(\text{环域}_{2r,\ r}(x))|\mathcal{E}] \geq \mu^{+}_{\mathcal{D}}[\text{回路}^{\omega^{-}}(\text{环域}_{2r,\ r}(x))|\mathcal{E}\cap\{\gamma\subset\omega^{+}\}] \tag{302}$$

$$= \mu^{+}_{\mathrm{Ball}_{2r}(x)}[\mathrm{Circuit}^{\omega^{-}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))] \tag{303}$$

$$> c_{\mathrm{circuit}}. \tag{304}$$

等式 只是马尔可夫性质；右侧的不等式是定理16.4。 □

17 全平面自旋表示（包括定理 4.10）

前面的回路估计使我们能够定义自旋表示的全平面类比。

17.1 全平面中的定义

我们定义自旋表示的无限体积版本，并证明在有限体积中得到的性质也适用于无限体积情形。引入集合

$$\Omega_{\mathbb{Z}^2} := \{\pm\}^{F_\circ} \times \{0,1\}^{E_\circ} \times \{\pm\}^{F_\bullet} \tag{305}$$

定理 17.1（全平面极限）。存在唯一的概率测度 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$，定义在 $\Omega_{\mathbb{Z}^2}$ 上，使得对任意关于有限多个自旋和边可测的随机变量 X，

$$\lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2} \mu_{\mathcal{D}}^{+}[X] = \lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2} \mu_{\mathcal{D}}^{-}[X] = \mu_{\mathbb{Z}^2}[X]. \tag{306}$$

此外，$\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 满足以下性质：

（*i*） $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 在 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$-几乎必然意义下不含无界连通分支。（*ii*）条件自旋翻转性质对于 $\sigma^\bullet$（类似于引理 *14.7*），（*iii*）马尔可夫性质（类似于引理*14.12*），（*iv*）极域的马尔可夫性质（类似于引理 *14.13*），（*v*）*FKG* 不等式（类似于命题*15.4*），（*vi*）回路估计（类似于推论 *16.6*）。

注 17.2。我们尚未证明 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$（定理 2.2）的良定义性。这将在稍后的第18章节中完成，在那里我们还证明 h 在 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 中的梯度的分布恰好是 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$。这促使我们关注测度 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$。

在证明定理 17.1之前，我们先引入一个引理。

引理 17.3。将测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 和 $\mu_{\mathcal{D}}^{-}$ 限制在偶自旋和边上，它们收敛到相同的极限，我们将其记为$\mu_{\mathbb{Z}^2,\,\circ}$。

证明。推论 15.6 表明，对于任意 $\circ$-递增的正随机变量 X，若其关于有限多个自旋和边可测，则下列极限

$$\ell^- := \lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2} \mu_{\mathcal{D}}^{-}[X]; \qquad \ell^+ := \lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2} \mu_{\mathcal{D}}^{+}[X] \tag{307}$$

均定义良好（分别构成递增序列和递减序列），并且满足 $\ell^- \le \ell^+$。因此，只需证明另一个不等式 $\ell^+ \le \ell^-$。我们将通过证明以下事实来做到这一点：即使在 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}[X]$下，随着 $\mathcal{D}$ 趋于 $\mathbb{Z}^2$（这要用到推论 16.6），在 ω^- 中存在一个回路包围用于测量X的顶点的概率趋于 1。

更正式地说，固定 $r \ge 4$ 足够大，使得 X 可由 球$_{r-2}$中的自旋和边决定。定义事件 $\mathcal{A}_{n,\,m}$:= 回路$^{\omega^-}$(球$_{2^m r}$ \球$_{2^n r}$)。固定 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。若 $\mathcal{D}$ 是一个周界包围 球$_{2^m r}$的偶域，则推论 16.6 表明

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\mathcal{A}_{n,n+1} | (\mathcal{A}_{n+1,m})^c] \ge c_{\text{circuit}} \tag{308}$$

对于任意 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ m-1$。通过归纳法，可得

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\mathcal{A}_{0,m}] \ge 1 - (1 - c_{\text{circuit}})^m. \tag{309}$$

当 $m \to \infty$ 时，右端趋于 1。令 γ^m 表示对 $\mathcal{A}_{0,\,m}$ 作出贡献的最大自避ω^-回路（若该事件发生），否则令 $\gamma^m := \emptyset$。那么

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{0,m}} \cdot X] = \int_{\{\gamma^m \neq \emptyset\}} \mu_{\mathcal{D}_{\gamma^m}}^{-}[X]\, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{D}}^{+}[\gamma^m] \le \ell^- \tag{310}$$

其中 $\mathcal{D}_{\gamma^m}$ 是边界为 γ^m 的偶域。恒等算子即马尔可夫性质，不等式则再次由推论 15.6 得出。若先取 $\mathcal{D} \nearrow \mathbb{Z}^2$，再取 $m \to \infty$，则左端收敛到 ℓ^+，从而证明了所需的不等式。引理得证。

□

定理的证明 *17.1*。 按照前一个引理的证明思路，我们注意到，推论 16.6 意味着 $\mu_{\mathbb{Z}^2,\circ}$-几乎必然地， $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 的所有连通分支都是有界的。因此，引理 14.7也适用于全平面极限，而 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 只需通过对$\mathbb{R}^2 \setminus \omega$的每个连通分支中的奇自旋 $\sigma^\bullet$ 抛硬币，即可由$\mu_{\mathbb{Z}^2,\circ}$ 得到。结果中所述的性质现在可由$\mu^+_{\mathcal{D}}$ 和$\mu^-_{\mathcal{D}}$ 的性质立即推出（通过取极限）。

□

17.2 翻转支配（定理4.10）

现在无限体积测度已经定义，我们顺便推导出翻转支配性质（顺便提及）。（事实上，我们只形式化地证明引理 h 在 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 和 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ 中的分布相同，见18.7。）

定理的证明 *4.10*。 证明见图 15。固定 $F(\mathbb{Z}^2)$-回路 γ，并按定理陈述中的定义取 F_γ。固定 $n \in 2\mathbb{Z}$。只需证明：对于任意包含 γ 的偶域 $\mathcal{D}$，以及任意可根据 $h|_{F(\mathcal{D})\setminus F_\gamma}$测定的正概率事件 $\mathcal{E} \subset \{h|_\gamma \le n\}$，高度函数 $2n - h_{F_\gamma}$在 $h|_{F_\gamma}$下随机支配 $\mu^+_{\mathcal{D}}[\cdot\,|\mathcal{D}]$。

> 其思路是只需探索 γ 内最外层的 ω_n-环。这些环可能相交γ；这并不是问题。给定这次探索：
>
> - 未揭示的高度（被 ω_n-环包围）关于 n 呈翻转对称性，
> - 已揭示的高度至多为 n。
>
> 这便推出所需的随机支配。

□

18 环面与圆柱自旋表示（定理 2.2）

本章节将上文所发展的分析推广到环面与圆柱的情形。虽然不会出现本质性的困难，但在定义相应的测度时仍需特别小心，以保持FKG性质。为完整起见，我们在下文给出相关结果。

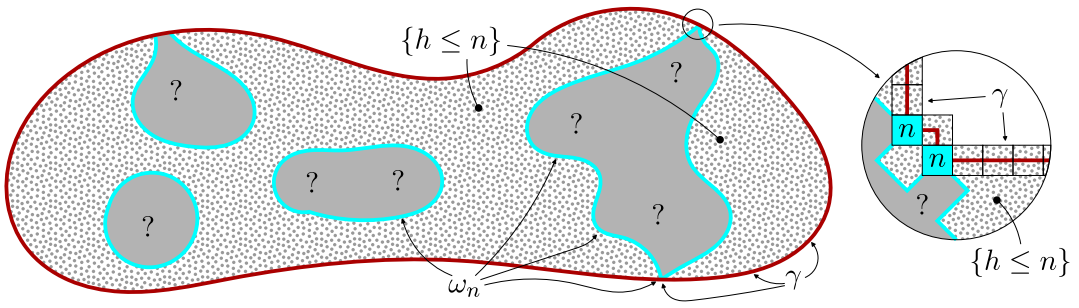


图 15：翻转支配：在未探索区域，高度 n 具有完美的翻转对称性；在已探索区域，高度至多为 n。

18.1 环面上的定义

我们希望将某个偶域 $\mathcal{D}$ 之外的固定边界条件替换为圆柱$\mathbb{T}_{M}$上的周期性边界条件，L 如引言中所定义。图 $F(\mathbb{T}_{M,L})$、$F_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})$以及 $F_{\bullet}(\mathbb{T}_{M,L})$ 以显然的方式定义，类似于它们针对 $\mathcal{D}$ 在第14章节中的定义。

De定义 18.1 （环面自旋测度）。 对于任意环面 $\mathbb{T}_{M,L}$，令 $\Omega = \Omega^{\mathbb{T}_{M,L}}$ 表示 e sam样本空间

$$\Omega := \{\pm\}^{F_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})} \times \{0,1\}^{E_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})} \times \{\pm\}^{F_{\bullet}(\mathbb{T}_{M,L})}. \tag{311}$$

一个典型元素记为 $(\sigma_{\circ}, \omega, \sigma_{\bullet})$。我们常将 ω与集合 $\{\omega = 1\} \subset E_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})$ 等同，并使用标准的渗流术语。引入一个新的特殊事件

$$\mathcal{E}_8 := \{\text{the height gain of } h \text{ along any closed } F(\mathbb{T}_{M,L})\text{-circuit, belongs to } 8\mathbb{Z}\}. \tag{312}$$

定义在 $(\sigma_{\circ}, \omega, \sigma_{\bullet}) \in \Omega$ 上的概率测度 $\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}$ 如下：

$$\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[(\sigma_{\circ}, \omega, \sigma_{\bullet})] \propto \mathbb{1}[(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}) \in \mathcal{E}_8] \cdot \mathbb{1}[\omega \subset A(\sigma_{\circ})] \tag{313}$$

$$\cdot \mathbb{1}[xy \in \omega \text{ 或 } xy^* \in A(\sigma_{\bullet}) \text{（或两者兼有），对任意 } xy \in E_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})] \tag{314}$$

$$\cdot \mathbf{c}^{\#A(\sigma_{\circ})} \cdot \left(\tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#\omega} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{\mathbf{c}}\right)^{\#(A(\sigma_{\circ}) \setminus \omega)}. \tag{315}$$

注记 18.2。 对比定义 18.1 与定义 14.5。唯一的区别是，我们删去了方程 (238) 中前两个指示函数（它们与 $\partial\mathcal{D}$上的边界条件有关），并加入了一个关于事件 $\mathcal{E}_8$ 的指示函数（该事件约束了环绕环面非平凡圈的环上的高度增量）。

注记 18.3。 来自 $\mu_{\mathbb{T}_{M,\,L}}$ 的样本可自然地解释为$\mathbb{T}_{M,\,L}$上的六顶点构型，但其诱导分布并非由引言中定义的测度$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\,L}}$ 给出。原因如下。在$\mathbb{P}_{\mathbb{T}_{M,\,L}}$中，箭头构型以正概率在某些非平凡环路上产生高度增量。要使自旋表示定义良好，非平凡环路上的高度增量必须属于 $4\mathbb{Z}$；但在先前的定义中，我们还进一步约束高度增量，使其属于 $8\mathbb{Z}$ （通过事件 $\mathcal{E}_8$）。这样做是为了使 FKG 不等式成立（下文将对此作更详细的讨论）。

18.2 环面上的马尔可夫性质与 FKG 不等式

我们先陈述一个马尔可夫性质。映射 $\pi_{\mathcal{D}}$ 和 $\pi^{c}_{\mathcal{D}}$ 的定义与之前相同。证明与原证明（引理 14.12）完全相同。

引理 18.4 (环面马尔可夫性质)。 考虑一个环面 $\mathbb{T}_{M,L}$ 以及一个偶域 $\mathcal{D}$，使得（作为 $\mathbb{T}_{M,L}$ 的子集） $\partial\mathcal{D}$ 是 $F_{\circ}(\mathbb{T}_{M,L})$中的一个可收缩自避回路。对于$\# \in \{\pm\}$,

- 分布 $\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[\cdot\,|\{\partial\mathcal{D} \subset \omega_{\#}\}]$ 在 $\pi_{\mathcal{D}}(\sigma_{\circ}, \bar{\omega}, \sigma_{\bullet})$ 下与 $\mu_{\#\,\mathcal{D}}$ 在 $(\sigma_{\circ}, \bar{\omega}, \sigma_{\bullet})$ 下相同 ，
- 随机变量 $\pi_{\mathcal{D}}$和 $\pi^{c}_{\mathcal{D}}$ 在 $\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[\cdot\,|\{\partial\mathcal{D} \subset \omega_{\#}\}]$中相互独立。

我们还提及一个 FKG 不等式。

引理 18.5 （环面FKG不等式）。 考虑环面 $\mathbb{T}_{M,\,L}$ 以及一个 $\circ$-格事件 $\mathcal{E}$。若$\mu_{\mathbb{T}_{M,\,L}}[\mathcal{E}] > 0$，则条件概率测度 $\mu_{\mathbb{T}_{M,\,L}}[\cdot\,|\mathcal{E}]$ 满足 $\circ$-*FKG*。

证明。 证明与原证明（命题15.4）完全相同。不过，有一个关键点需要注意。由于拓扑并非平凡，分解为两个独立的伊辛模型要复杂一些。然而可以验证，对于上文定义的测度 $\mu_{\mathbb{T}_{M,\,L}}$，方程（261）中的分解在环面上仍然成立（计算连通分支数量时，只需将环境空间 $\mathbb{R}^2$替换为 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/M\mathbb{Z})$）。关键的是，方程（261）仍然成立，这要归功于定义 $\mathcal{E}_8$ 18.1中的事件，否则就不成立。详情请参阅 [GL25，第 5]节。

□

18.3 环面上的回路估计

借助马尔可夫性质和 FKG 不等式，我们基本上可以将测度带回到之前讨论的有限区域设置中。现在我们来说明如何做到这一点。

引理 18.6 （环面回路估计）。 固定 M， L。那么，对于任意 $4 \le r < (M \wedge L)/4$ 和$x \in \mathbb{R}^2$,

$$\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[\mathrm{Circuit}^{\omega^-}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))|\mathcal{E}] \ge c_{\mathrm{circuit}} \tag{316}$$

对于任意事件 $\mathcal{E}$，该事件仅由偶自旋以及不与球$_{2r}$（x）相交的边决定。将 ω^- 替换为 ω^+后，同样的不等式仍然成立。

证明。 证明与推论 16.6 的证明完全相同。 □

18.4 圆柱上的定义和主要性质

回顾圆柱$_L$ 和 $\mathbb{P}_{\mathrm{Cyl}_L}$的定义。图 F(圆柱$_L$)、 $F_\circ$(圆柱$_L$)和 $F_\bullet$(圆柱$_L$)的定义显而易见，与它们在 $\mathcal{D}$ 和$\mathbb{T}_{M,\,L}$中的定义类似。

引理 18.7 (环面极限)。 以下所有结论均成立。

(i) 全平面极限。 对于任意一个由有限多个自旋和边决定的可测随机变量 X，

$$\lim_{M,L\to\infty} \mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[X] = \mu_{\mathbb{Z}^2}[X], \tag{317}$$

其中 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 是第 *14* (定理*17.1*) 节中定义的测度。

(ii) 圆柱极限。 对于任意 $L \in 2\mathbb{Z}_{\ge 1}$，样本空间上存在一个概率测度$\mu_{\mathrm{Cyl}_L}$

$$\Omega_{\mathrm{Cyl}_L} := \{\pm\}^{F_\circ(\mathrm{Cyl}_L)} \times \{0,1\}^{E_\circ(\mathrm{Cyl}_L)} \times \{\pm\}^{F_\bullet(\mathrm{Cyl}_L)} \tag{318}$$

使得对于任意一个由有限多个自旋和边决定的可测随机变量 X，

$$\lim_{M\to\infty} \mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[X] = \mu_{\mathrm{Cyl}_L}[X]. \tag{319}$$

此外，以下各项均成立：

- 马尔可夫性质（引理 *18.4*）保持到极限中，
- *FKG* 不等式（引理 *18.5*）保持到极限中，
- 回路估计（引理 *18.6*）保持到极限中，
- 对于 $\sigma^\bullet$，条件自旋翻转性质（引理 *14.7*）成立，
- 作为六顶点构型上的测度，$\mu_{\mathrm{Cyl}L}$ 等于 $\mathbb{P}_{\mathrm{Cyl}L}$。

(iii) 作为圆柱测度极限的全平面。我们有

$$\lim_{L\to\infty} \mu_{\mathrm{Cyl}_L}[X] = \mu_{\mathbb{Z}^2}[X] \tag{320}$$

对于任何仅依赖有限个自旋和边的可测随机变量 X，由第一项可知。如果 X 也关于 h可测，那么我们还有

$$\lim_{L\to\infty} \mu_{\mathrm{Cyl}_L}[X] = \mu_{\mathbb{Z}^2}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}[X]. \tag{321}$$

特别是，定理 2.2 成立。

证明。 第一项的证明与定理17.1的证明相同：只需利用回路估计（引理18.6）和马尔可夫性质（引理18.4），比较测度 $\mu_{\mathbb{T}_{M,\,L}}$ 与测度$\mu^{+}_{\mathcal{D}}$，其中偶域 $\mathcal{D}$足够大。

由于第一项中的极限可以按任意顺序取，第三项显然由前两项推出。因此，我们着重讨论第二项。

回顾引言，{平衡} 表示构型平衡这一事件，也就是说，每一列水平箭头中，一半箭头向左，另一半向右。此事件约束全局拓扑，且等价于：沿任何一个在垂直方向上绕行、但不在水平方向上绕行的闭合 F（Cyl$_L$）回路，高度增量均为 0。该极限

$$\lim_{M\to\infty} \mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[\,\cdot\,|\{\text{balanced}\}] \tag{322}$$

是定义良好的，且等于 $\mathbb{P}_{\mathrm{Cyl}_L}$，因为我们本质上处理的是一条常返马尔可夫链。因此，我们必须证明在 $M\to\infty$ 极限下，{平衡} 具有较高的概率。

现在我们作如下观察：如果对于某个 $n\in\mathbb{Z}$，切片 $[n,n+1]\times(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ 包含一条非平凡的 ω-路径，那么沿着该路径，高度函数的梯度为零，因此事件 {平衡}发生。将该事件记为 S_n。

如前所述，即使对与某条边不相 incident 的所有边的状态进行条件化，也很容易找到一个统一的下界 $\eta>0$，使得一条边为 ω^{+}-开放的概率至少为该下界。这意味着，对于任意 $k=0$、.....、$M/2-1$，我们有

$$\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[S_{2k}|(S_0\cup S_2\cup S_4\cup\cdots\cup S_{2k-2})^c] \geq \eta^L, \tag{323}$$

因此

$$\mu_{\mathbb{T}_{M,L}}[\{\text{balanced}\}] \geq 1-(1-\eta^L)^{M/2}. \tag{324}$$

显然，当 M 趋于无穷时，这些下界趋于 1。

前三个性质显然可以传递到极限，而最后一个性质已在上文证明。对于 $\sigma^{\bullet}$ 的条件自旋翻转性质并不明显（由于事件 $\mathcal{E}_8$，它在环面上并不成立），但得益于圆柱上的六顶点模型的马尔可夫链结构，该性质在极限中得以恢复。

□

19 交叉计数界（定理 4.9）

本章节旨在建立交替矩形穿越数量的对数线性界（见下述陈述）。我们还将证明臂事件的对数二次界（引言中的定理 4.9）。

19.1 矩形穿越情形

我们首先给出一个关于交叉计数的（远非最优）界。

回忆一下，#AltHor$^{\omega}(R)$ 统计矩形 R 中交替水平交叉的数量。

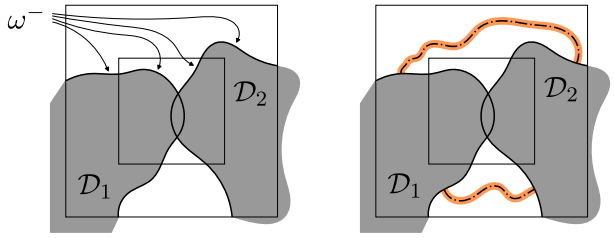


图 16：引理 19.4。假设我们想要将一个 ω^--渗流连接到一段 ω^--开放边界，但我们已对区域并集内部的某个“混乱”事件进行了条件化 $\mathcal{D}_i$ （阴影区域）。该引理告诉我们，仍然可以开放与边界相连的部分回路。证明利用极域的马尔可夫性质，消除对不利事件的条件化。

引理19.1 （矩形穿越计数的对数线性界）。 存在一个常数$c_{\mathrm{lin}} \in$ （0，1）（与$\mathbf{c} \in [1,2]$无关），具有以下性质。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及任意矩形 $R := [\![w \times \rho w]\!] + u$，其中 $w \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ 和 $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 1}$，且 $u \in \mathbb{R}^2$，

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\#\mathrm{AltHor}^{\bar{\omega}}(R) \geq 2n\}|\mathcal{E}] \leq (1 - c_{\mathrm{lin}}^{\rho})^n, \tag{325}$$

其中， $\mathcal{E}$ 是一个可由距 ℓ^∞至少为 $w/5$的 R处的偶自旋和边确定的事件。

此外，只要$2(\rho + \frac{1}{5})w \leq L$，将 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$替换为μ_{Cyl_L}后，同样的界仍然成立；此时将 R 视为圆柱上的一个矩形。类似的界也适用于矩形的垂直穿越，无论是在全平面还是在圆柱上。

注 19.2。 在矩形与用于确定 $\mathcal{E}$ 的自旋或边之间要求有一个宏观缓冲区，是此类结果中的标准做法。事实上，如果允许 $\mathcal{E}$ 依赖于 R之外的所有边和自旋，那么没有这样的缓冲区时，结论可能不成立。

注 19.3。 在引理的背景下，对 n 求和可得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\#\mathrm{AltHor}^{\bar{\omega}}(R)|\mathcal{E}] \leq 2c_{\mathrm{lin}}^{-\rho}. \tag{326}$$

为了证明这个关于矩形穿越的引理，我们首先需要一个加强版的回路估计：允许环域部分被“划伤”，前提是剩余区域上诱导的边界条件是有利的。图 16 展示了这一变体。

引理 19.4 (部分回路估计)。 固定 $r \in [4, \infty)$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$，并考虑以下设置。

- 令 $(\mathcal{D}_i)_i$ 表示一个有限的偶域族。
- 令 $\mathcal{B}$ 表示 $\cup_i \partial\mathcal{D}_i$ 中包含于球$_{2r}(x)$ 的边集。
- 令 $\mathcal{U}$ ： $= \cup_i E_\circ(\mathcal{D}_i)$。

那么，对于任意由包含在 $\mathcal{U}$ 中的偶自旋和边决定的可测事件 $\mathcal{E}$，且满足 $\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E} \cap \{\mathcal{B} \subset \omega^-\}] > 0$，我们有

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{\omega^- \cup \mathcal{U}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x))|\mathcal{E} \cap \{\mathcal{B} \subset \omega^-\}] \geq c_{\mathrm{circuit}}. \tag{327}$$

证明。不失一般性， $\mathcal{E}$ 是一个 $\circ$格事件。令 γ 表示包围球$_{2r}(x)$的最小自回避偶回路。利用 FKG 不等式，我们可以

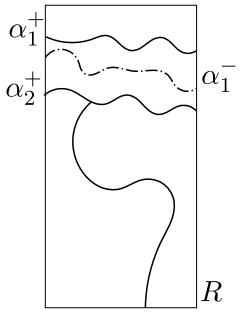


图 17：从上往下探索路径时，每当我们探索到一条 ω^+-水平穿越，就有一个统一的正概率使这条穿越连接到底部，从而阻止任何进一步的水平 ω^+-穿越出现。

进一步假设 $\mathcal{E}$ 满足以下“最坏情况”描述： $\gamma \subset \mathcal{U}$，且$\mathcal{E} \subset \{\gamma \subset \omega^+\}$。我们现在断言

$$\begin{aligned}
&\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{\omega^- \cup \mathcal{U}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x)) | \mathcal{E} \cap \{\mathcal{B} \subset \omega^-\}] && (328)\\
&\quad = \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{\omega^- \cup \mathcal{U}}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x)) | \{\gamma \subset \omega^+\} \cap \{\mathcal{B} \subset \omega^-\}] && (329)\\
&\quad \geq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{\omega^-}(\mathrm{Annulus}_{2r,r}(x)) | \{\gamma \subset \omega^+\}] && (330)\\
&\quad \geq c_{\mathrm{circuit}}. && (331)
\end{aligned}$$

等式来自马尔可夫性质（引理 14.12）以及极域的马尔可夫性质（引理 14.13）。第一个不等式来自事件包含和 FKG。第二个不等式来自回路估计（推论16.6）。

□

引理 *19.1* 的证明。 定义两个路径序列如下：

- α_1^+ 是 R的最高水平 ω^+-穿越，
- α_i^-是 R 中位于 α_i^+下方的最高水平 ω^--穿越，其中 $i = 1, 2, \ldots\ldots$，
- α_i^+是 R 中位于 α_{i-1}^-下方的最高水平 ω^+-穿越，其中 $i = 2, 3, \ldots\ldots$，
- 如果这样的交叉不存在，我们就将它（以及之后所有的交叉）设为 $\emptyset$.

注意， $\{\#\text{交替水平交叉}^{\bar{\omega}}(R) \geq 2n\} = \{\alpha_n^- \neq \emptyset\}$。对于引理 19.1，只需证明对任意 i，都有

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\alpha_i^- \neq \emptyset\} | \mathcal{E} \cap \{\alpha_i^+ \neq \emptyset\}] \leq 1 - c_{\mathrm{lin}}^{\rho} \tag{332}$$

对某个固定的 $c_{\mathrm{lin}} \in (0,1)$。

我们根据 w 的取值分两种情况讨论。先假设 $w \leq 1000$。令$\eta > 0$ 为一个一致常数，使得即使在对 $\mathcal{E}$ 和所有其他偶自旋进行条件化之后，偶自旋为 $+$ 的概率仍至少为η。于是

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\text{all even spins in } R \text{ below } \alpha_i^+ \text{ are valued } +\} | \mathcal{E} \cap \{\alpha_i^+ \neq \emptyset\}] \geq (\eta^{1000000})^{\rho}. \tag{333}$$

由于此事件与 $\{\alpha_i^- \neq \emptyset\}$ 不相交，任意取值 $c_{\mathrm{lin}} \leq \eta^{1000000}$ 都可以。

剩下的情形（也更有趣）是 $w > 1000$。至少应用引理 19.4 次$\lfloor 100\rho \rfloor$，并应用 FKG 不等式，我们注意到以至少 的概率$(c_{\mathrm{circuit}}^{100})^{\rho}$，路径 α_i^+会在矩形内与 底部$_R$ 相连（见备注 16.2 和图 17）。在这种情况下，事件 $\{\alpha_i^- \neq \emptyset\}$不可能发生。

这证明了值 $c_{\mathrm{lin}} = \eta^{1000000} \wedge c_{\mathrm{circuit}}^{100}$ 是有效的。 □

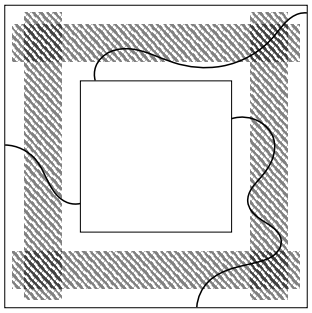


图18：将环域臂化归为矩形穿越的示意图。每条臂还会沿“容易”的方向穿越四个矩形 R_1、R_2、R_3 和 R_4 中的一个。

19.2 环域臂事件

现在我们将先前的结果应用到臂交叉环域的情形。对于 $r \in \mathbb{R}_{\geq 4}$、$R \in \mathbb{R}_{\geq 2r}$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$，定义随机变量

$$K_{R,r,x} := (1 - \mathbb{1}_{\mathrm{AltCircuit}_2^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{R,r}(x))}) \vee \#\mathrm{AltArm}^{\bar{\omega}}(\mathrm{Annulus}_{R-1,r+1}(x)), \tag{334}$$

粗略地说，该随机变量统计的是从环域内部向外部的交替穿越次数。注意，这个随机变量相对于完全包含在 $\mathrm{Annulus}_{R,r}(x)$ 中的偶边所生成的 σ-代数是可测的。

引理 19.5（臂指数的线性界）。存在一个常数 $c'_{\mathrm{arm}} > 0$（独立于 $\mathbf{c} \in [1,2]$），使其具有以下性质。对于 $r \in \mathbb{R}_{\geq 4}$、$R \in \mathbb{R}_{\geq 2r}$、$x \in \mathbb{R}^2$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{K_{R,r,x} \geq n\} | \mathcal{E}] \leq (r/R)^{c'_{\mathrm{arm}} n} \tag{335}$$

对于任意满足 $\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E}] > 0$ 的 $\mathcal{E}$，只要其相对于不与球 R（x）相交的偶自旋和边是可测的。

如果以 μ_{Cyl_L} 替换 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$，则同样的界仍然成立，前提是 $L > 2R$。

注 19.6. 在引理的背景下，对 n 求和可得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[K_{R,r,x} | \mathcal{E}] \leq \frac{(r/R)^{c'_{\mathrm{arm}}}}{1 - 2^{-c'_{\mathrm{arm}}}}. \tag{336}$$

证明。只需考虑 $R = 2^m r$的情形。我们先对 $m = 1$证明这一点。

我们先证明，以一致的正概率，$K_{R,r,x} = 0$。由于事件 $\mathrm{AltCircuit}_2^{\bar{\omega}}$(环域$_{R,r}(x)$) 会阻止任何臂出现，因此只需证明该事件以一致的正概率发生。若 $r \leq 100$，那么我们只需在环域$_{R,r}(x)$中选取两个不相交的偶回路，并对它们分别以 ω^+ 和 ω^- 开放的概率给出下界（参见引理19.1证明中 $w \leq 1000$的部分）。对于$r > 100$，我们可以结合 1000 个回路估计（推论 16.6）和 FKG 不等式，证明 $\mathrm{AltCircuit}_2^{\bar{\omega}}$(环域$_{R,r}(x)$) 发生的概率至少为 $c_{\mathrm{circuit}}^{1000}$（另见引理19.1证明中 $w > 1000$的部分）。

为完成 $m = 1$这一情形的证明，只需找到常数 $c > 0$ 和$N \in 20\mathbb{Z}_{\geq 1000}$，使得对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{K_{R,r,x} \geq Nn\} | \mathcal{E}] \leq e^{-cn}. \tag{337}$$

注意到，连接球$r(x)$与 ∂球$_R(x)$的任意连续路径，必然沿“容易”方向至少穿越以下四个矩形之一：

$$R_1 := ([5r/4, 6r/4] \times [-7r/4, 7r/4]) + x \tag{338}$$

及其图像 R_2， R_3， R_4，由绕 $\frac{\pi}{2}$ 角的旋转 π、 $\frac{3\pi}{2}$ 以及绕 x 定义。参见图18 进行说明。特别地，我们得到

$$\{K_{R,r,x} \geq Nn\} \subseteq \text{交替水平交叉}_{\frac{\omega_{Nn}}{10}}(R_1) \cup \text{交替垂直穿越}_{\frac{\omega_{Nn}}{10}}(R_2) \cup \text{交替水平交叉}_{\frac{\omega_{Nn}}{10}}(R_3) \cup \text{交替垂直穿越}_{\frac{\omega_{Nn}}{10}}(R_4) \tag{339}$$

（除以10 已经绰绰有余；安全裕度可以弥补因定义方式而可能损失的几次穿越）。引理19.1 于是推出

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{K_{R,r,x} \geq Nn\}|\mathcal{E}] \leq 4(1 - c_{\text{lin}}^{14})^{Nn/20}. \tag{340}$$

接下来，很容易找到合适的 c 和 N。这就完成了 $m = 1$ 的情形。对于一般情形 $m \geq 1$，注意到

$$K_{2^m r,r,x} \leq \min_{i=0,\ldots,m-1} K_{2^{i+1}r,2^i r,x}, \tag{341}$$

然后在 m 个互不相交的同心环域上使用 $m = 1$ 情形 m 次。 □

引言中的定理4.9 是以下更强结果的直接推论。

随机变量$K_{R,\ r,\ x}$ 已在方程（334）中定义。以下引理改进了引理19.5。

定理 19.7（臂指数的二次界）。对于任意 $\mathbf{c} \in [1, 2]$，存在一个常数 $c_{\text{arm}} \in (0, 10^{-9})$，使得以下性质成立。对于 $r \in \mathbb{R}_{\geq 4}$、 $R \in \mathbb{R}_{\geq 2r}$、 $x \in \mathbb{R}^2$ 和$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{K_{R,r,x} \geq n\}|\mathcal{E}] \leq (r/R)^{c_{\text{arm}} n^2} \tag{342}$$

对于任意 $\mathcal{E}$ 相对于偶自旋以及不与球$_R(x)$相交的边可测的事件。

如果将 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 替换为μ_{Cyl_L}，则相同的界仍然成立，前提是 $L > 2R$。

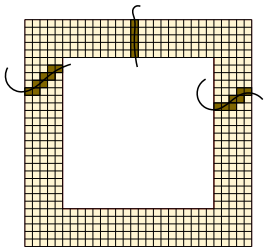


图19：环域 Annulus$_{3r/2,\ r}(x)$的每条臂都必须接触大量小盒子，从而在这些较小的盒子周围形成臂事件。

证明。 与引理 19.5的证明一样，只需考虑 $R = 2r$的情形。我们还假设 $x = (0,0)$；这对证明没有影响。

回忆一下臂指数线性界引理 c'_{arm} 中的常数19.5。由于引理 19.5 已处理方程 (342) 在 n 取较小值时的情形，因此只需考虑 $n = 100 \cdot K \cdot 2^k$ 对整数 $k \geq 1$成立的情形，其中 K 是一个稍后确定的常数。

令 $\bar{r} := 2^{-k-2} \cdot r$。环域 $\mathsf{Annulus}_{3r/2,r}(x)$ 恰好可以铺成 $5 \cdot 2^{2k+2}$ 个边长为 $2\bar{r}$ 的正方形。记 S 为这些正方形的中心集合。现在，对于任意属于 $\mathsf{Arm}(\mathsf{Annulus}_{3r/2,r})$ 的渗流 $\omega \subset \mathbb{R}^2$，我们可以找到至少 2^k 个元素u_1，……，u_{2^k}，它们属于 S，且对于每个 $i = 1$，……，2^k，均有 $\omega \in \mathsf{Arm}(\mathsf{Annulus}_{2\bar{r},\bar{r}}(u_i))$；见图19。由鸽巢原理论证可得

$$K_{2r,r,x} \geq n \implies \sum_{u \in S} K_{2\bar{r},\bar{r},u} \geq 25 \cdot K \cdot 2^{2k}. \tag{343}$$

We 必须证明右侧的事件发生的 $\mu_{\mathbb{Z}^2}[\cdot|\mathcal{E}]$-概率至多为 $2^{-c_{\mathrm{arm}}n}$ [2].

如果盒子 (球$_{2\bar{r}}(u))_{u \in S'}$ 互不相交，我们就称集合 $S' \subset S$ 具有分离性 。我们将使用引理 19.5 中的以下结果：存在某个固定常数 $p > 0$，使得对于任意具有分离性的 $S' \subset S$，$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\cdot|\mathcal{E}]$ 中的随机变量 $(K_{2\bar{r},\bar{r},u})_{u \in S'}$ 都被一个独立同分布的随机变量族随机支配，该族中的随机变量服从参数为 p 的几何分布。

记 $\mathcal{S}$ 为将 S 划分成 25 个具有分离性的子集的一种划分。由鸽巢原理可知

$$\mu\Big[\Big\{\sum_{u \in S} K_{2\bar{r},\bar{r},u} \geq 25 \cdot K \cdot 2^{2k}\Big\}\Big|\mathcal{E}\Big] \leq 25 \max_{S' \in \mathcal{S}} \mu\Big[\Big\{\sum_{u \in S'} K_{2\bar{r},\bar{r},u} \geq K \cdot 2^{2k}\Big\}\Big|\mathcal{E}\Big]. \tag{344}$$

右侧的概率可以用以下事件的概率作为上界：$5 \cdot 2^{2k+2}$ 个参数为 $p > 0$ 的独立同分布几何随机变量之和至少为 $K \cdot 2^{2k}$。根据标准的大偏差估计，当 K 是足够大的固定常数（仅依赖于 p）时，该概率按 $e^{-c2^{2k}}$ 的速度衰减，其中 $c > 0$ 为某个常数。由于 n 的阶为 2^k，这就得到了所需的二次界。 □

20 水平线树与分支函数

20.1 水平线树的启发式说明

在正式描述水平线树之前，我们先类比高斯自由场，再对定义中至关重要的组合结构作一些初步说明。

关于高斯自由场与 CLE(4) 的耦合讨论。 零边界条件下圆盘中的高斯自由场与CLE(4) [BP25] 自然耦合。给定 CLE(4) 环后，我们以逆时针或顺时针方向为其定向（彼此独立且概率相等）。从某种意义上说，高斯自由场等于某个常数 λ 乘以环绕各点的环的净绕数。在这一图景中，两点之间的条件方差等于 λ^2 环绕这两点的环的数量。

我们也可以将 CLE(4) 环看作一棵有根树：根是整个圆盘，其他树顶点是圆盘中边界为 CLE(4) 环的单连通子集；每个树顶点都指向其父节点，即严格包含它的最小树顶点。圆盘中的每个点都可以关联到包含它的树顶点集合，这可以理解为一条从根开始向下延伸的树路径（可以是有限或无限的，通常是无限的）。在这一形式体系中，环的数量（因而也包括条件协方差）可以用两点对应的树路径的最近公共祖先的深度来表示。

在实践中，我们将关注高度差乘积的期望。圆盘上两点之间的高度差自然地表示为一条

它们之间的树路径。这条树路径在两端可以是有限的，也可以是无限的（对于典型的点，它是一条双向无限路径）。自然路径 $x \to y$ 是从 x 到 x 与 y的最近公共祖先的树路径，以及从该祖先到 y的树路径的拼接。于是， k 个高度差之乘积的条件期望等于某个函数，该函数由 k 条树路径彼此相交的方式决定。

关于水平线树组合结构的注记。现在我们置身于测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 的情形中，这意味着边界高度等于 0。暂且假设我们探索最外层的 $\omega_{\circ}^{-}$-回路。那么，以下各项均成立：

- 在每个 $\omega_{\circ}^{-}$-回路上，高度等于 $+2$ 或 -2，具体取决于回路外部奇自旋的取值，
- 每个连通分支上的奇自旋 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 都是公平硬币抛掷的结果（引理 14.7），
- 马尔可夫性质（引理 14.12）蕴含一种更新性质：在每个回路$\partial\mathcal{B}$内，自旋和边在 $\mathcal{B}$ 内的条件分布由 $\mu_{\mathcal{B}}^{-}$ 给出（这不过是$\mu_{\mathcal{B}}^{+}$ 将所有偶自旋翻转后的结果）。

这使得我们能够定义一种树结构，它与上文为高斯自由场定义的树有些相似。同时，两者也存在一些差异。

- 在离散情形下，这棵树是有限的，因此处理起来更容易。
- 最外层 ± 2回路的 $\omega_{\circ}^{-}$-标签并非独立的，因为有时两个这样的回路会被引理中同一个奇自旋连通分支包围14.7，此时它们具有相同的标签。
- 奇回路与偶回路有一种定义：从 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 开始，先考察最外层的 $\omega_{\circ}^{-}$-回路，然后在每个回路内考察最外层的 $\omega_{\circ}^{+}$-回路，依此类推。这个奇偶性问题与 ± 2-标签无关（更准确地说，奇偶性问题与偶自旋的奇偶性有关，而 ± 2-标签则与奇自旋有关）。
- 单靠树结构无法确定某个面的精确高度；有时我们需要进行小幅修正，例如当面本身是奇面时（这时需要进行形如 ± 1 的修正）。

这些问题使树结构的定义略微复杂化（参见定义之后的评论）。尽管如此，我们仍然可以像 GFF 情形中的树那样运用相同的思路来界定相关性，例如我们将在下一节中看到的那样。

20.2 层线树的形式化定义

定义 20.1 （层线树）。 考虑从某个偶域 $\mathcal{D}$ 上的测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 中取出的一个样本 $(\sigma_{\circ}, \bar{\omega}, \sigma_{\bullet})$。与之关联的层线树 $\mathcal{X} = (V_{\circ}(\mathcal{X})\ V_{\bullet}(\mathcal{X})\ E(\mathcal{X}))$ 是一棵有根有向树，定义如下。

- 偶 顶点 $V_{\circ}(\mathcal{X})$ 定义如下。– 首先，它有一个二分划分 $V_{\circ}(\mathcal{X}) = V_{\circ}^{+}(\mathcal{X}) \cup V_{\circ}^{-}(\mathcal{X})$。– $V_{\circ}^{+}(\mathcal{X})$ 是 $\{\sigma_{\circ} = +\}$ 的划分，当且仅当两个面属于 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_{\circ}^{-}$ 的同一个连通分支时，它们才属于该划分的同一部分。– $V_{\circ}^{-}(\mathcal{X})$ 是 $\{\sigma_{\circ} = -\}$ 的划分，当且仅当两个面属于 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_{\circ}^{+}$ 的同一个连通分支时，它们才属于该划分的同一部分。– 树的根是 $V_{\circ}^{+}(\mathcal{X})$ 中包含 $\partial\mathcal{D}$ 的部分。
- 树的奇数顶点 $V_{\bullet}(\mathcal{X})$ 由 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 的有界连通分支构成。
- 每个顶点（根除外）恰有一条出边：

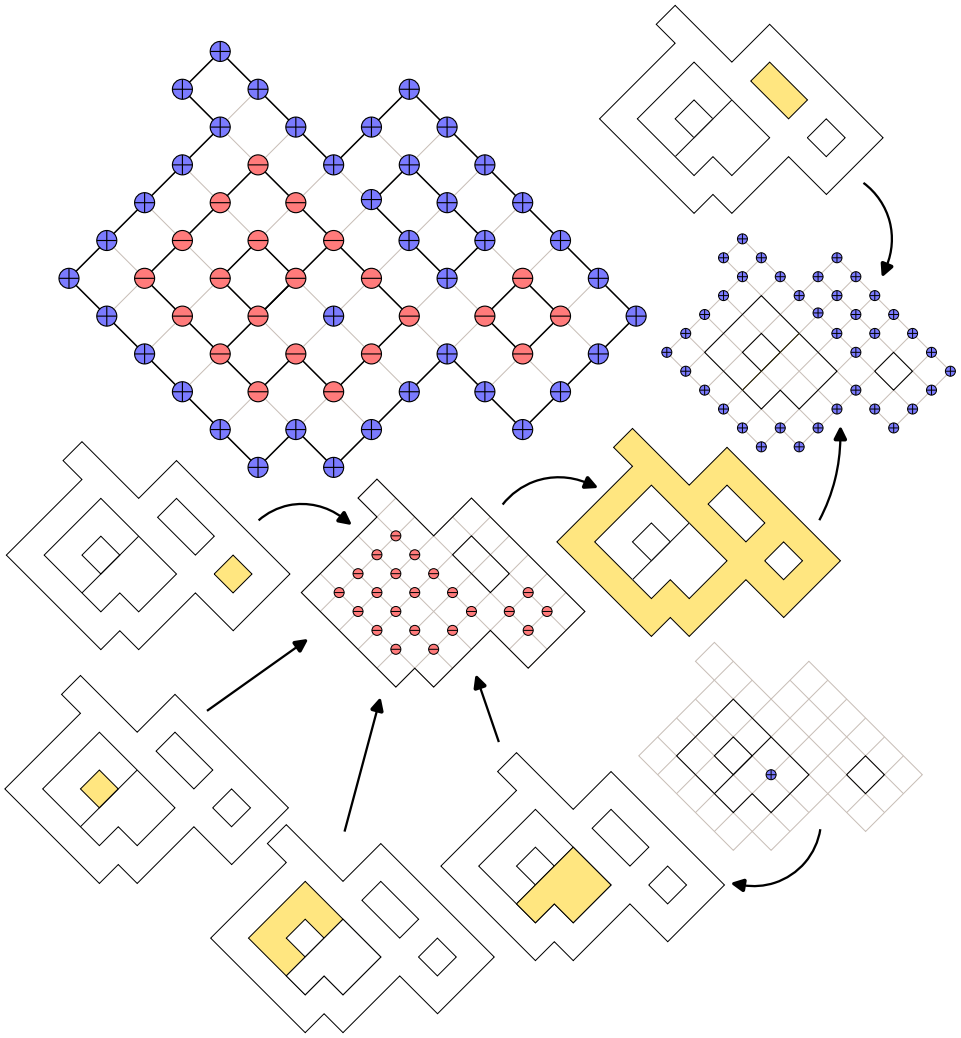


图 20：与构型（$\sigma_\circ$，$\bar{\omega}$）相关联的有向水平线树 $\mathcal{X}$。

– 每个奇 顶点 $v_\bullet$ 都指向包含连通分支 $v_\bullet \subset \mathbb{R}^2 \setminus \omega$外边界的偶 顶点 $v_\circ$，– 每个标记为 $\pm$的偶 顶点 $v_\circ$ 都指向满足以下条件的奇顶点 $v_\bullet$：

* $v_\circ$ 和 $v_\bullet$ 位于 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega^{\mp}$的同一个连通分支 C 中，
* $v_\bullet$ 是唯一一个指向 $V_\circ^{\mp}(\mathcal{X})$ 的此类奇顶点（事实上，同一连通分支 C 中的其他奇顶点都指回 $v_\circ$）。

对于除根以外的每个顶点 v，我们用 $p(v)$ 表示其父顶点。顶点的深度定义为它到根的距离。注意，$V_\circ^+(\mathcal{X})$、$V_\circ^-(\mathcal{X})$ 和$V_\bullet(\mathcal{X})$ 中的顶点深度分别为 $4\mathbb{Z}$、$4\mathbb{Z}+2$和 $2\mathbb{Z}+1$。还要注意，每个奇顶点至多有一个子节点指向它。

注 20.2。奇自旋也作为奇顶点纳入树中。这便于定义图的每个面上的高度函数。

注 20.3. 偶顶点的定义与上述非正式示意图不同。一个令人惊讶之处在于，两个 ω^+ 回路可以彼此环绕，却仍属于树中的同一个偶顶点。这是自然的，因为若没有 ω^- 回路将二者隔开，就不会形成高度差。

最终，该定义的设定方式使得下述引理成立 .

下述引理表明，在 $\mathcal{X}$的条件下， $h(v)$的分布在 v 的深度为 $2k$时由 k次独立的取值为 ± 2的抛硬币之和给出，而在 v 的深度为 $2k+1$时由 k 次独立的取值为± 2的硬币与一枚取值为 ± 1的硬币之和给出。

引理 20.4（水平线树的基本性质）。 令 $\mathcal{D}$ 表示一个偶域，并考虑 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 。则以下各项均成立。

(*i*) $\mathcal{X}$ 关于 $(\sigma_{\circ}、\bar{\omega})$ 可测； (*ii*) 在给定 $\mathcal{X}$ 的条件下，为每个元素 $X \in V_{\bullet}(\mathcal{X})$ 附加一个独立的公平硬币抛掷 $\sigma_{\bullet}(X)$ ，从而对于每个 $x \in X$，有 $\sigma_{\bullet}(x) = \sigma_{\bullet}(X)$ ，

(*iii*) h 几乎必然在 $\mathcal{X}$ 的每个顶点上为常数，

(*iv*) 在给定 $\mathcal{X}$ 的条件下，高度函数 h 具有如下分布：

- $h(r) = 0$ 在根顶点 r 上，
- $(h(v_{\bullet}) - h(p(v_{\bullet})))_{v_{\bullet} \in V_{\bullet}(\mathcal{X})}$ 具有独立的公平 ± 1-值硬币抛掷的分布，
- $h(v_{\circ}) - h(p(v_{\circ})) = h(p(v_{\circ})) - h(p(p(v_{\circ})))$ 对任意偶非根顶点 $v_{\circ}$。

在此，我们回顾 $p(v)$ 表示父顶点，如定义*20.1*中所引入 .

证明。 尽管该引理很重要，其证明可直接由定义得出。性质 (i) 是直接的，因为该定义仅涉及 $(\sigma_{\circ}, \bar{\omega})$。对于性质 (ii)，注意到奇顶点恰好是 $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ 的连通分支，因此引理 14.7适用。性质 (iii) 与 (iv) 由自旋与高度函数之间的关系得出，详见方程 (247)。

□

定义 20.5（树路径）。 设 $\mathcal{D}$ 表示一个偶域，并考虑 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 中的水平线树 $\mathcal{X}$。对任意 $u, v \in F(\mathcal{D})$，我们将树路径 p^{uv} 定义为 $\mathcal{X}$ 中从包含 u 的顶点出发、到包含 v 的顶点结束的唯一路径。它被视为 $\mathcal{X}$ 的一组顶点。

20.3 分支函数

我们现在引入一个便于分析高度函数协方差结构的工具。

定义 20.6（分支函数）. 设 $\mathcal{D}$ 表示一个偶域。考虑 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 中的水平线树 $\mathcal{X}$ 。设 $p^{u\partial\mathcal{D}}$ 为从 u 到 $\partial\mathcal{D}$的唯一 $\mathcal{X}$-路径。分支函数是随机的 $\mathcal{X}$-可测函数

$$\psi = \psi_{\mathcal{D}} : F(\mathbb{Z}^2) \times F(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{Z},\ (u,v) \mapsto \begin{cases} |p^{u\partial\mathcal{D}} \cap p^{v\partial\mathcal{D}}| - 1 & \text{if } u, v \in F(\mathcal{D}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{345}$$

其对角线记为

$$\psi^* = \psi^*_{\mathcal{D}} : F(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{Z},\ u \mapsto \psi_{\mathcal{D}}(u,u) = \begin{cases} \text{the } \mathcal{X}\text{-depth of } u & \text{if } u \in F(\mathcal{D}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{346}$$

引理 20.7（分支函数的基本性质）. 分支函数 ψ 及其对角线 ψ^* 满足以下性质。

(i) ψ^* 是从 $F(\mathcal{D})$ 到 $\mathbb{Z}$ 的图同态，并且在 $\partial\mathcal{D}$上等于 0 。*(ii)* ψ^* 保持面的奇偶性。*(iii)* 给定 $\mathcal{X}$ 时， ψ^* 等于在 h 的所有可能实现上取 h 的最大值。

(iv) ψ 按如下方式表示每一对面的条件协方差：

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}[h(u)h(v)|\mathcal{X}] = \begin{cases} 4k & \text{if } \psi(u,v) = 2k, \\ 4k+1 & \text{if } \psi(u,v) = 2k+1 \text{ and } \psi^*(u) = \psi^*(v) = 2k+1, \\ 4k+2 & \text{if } \psi(u,v) = 2k+1 \text{ and } \psi^*(u) \vee \psi^*(v) > 2k+1. \end{cases} \tag{347}$$

证明。 前两条由定义直接得到。给定 $\mathcal{X}$ 后，高度函数通过为每个 $\sigma_\bullet(X)$ 采样标签 $X \in V_\bullet(\mathcal{X})$ 并为每个奇面赋予自旋而得到（参见引理 20.4 证明之后的注释）。容易看出，若选择标签 $\sigma_\bullet(X)$，使高度函数达到最大值，则得到$h = \psi^*$。

对于第四个性质，我们将其与本章节开头勾勒的高斯自由场图景联系起来。每个奇顶点通过抛掷独立公平硬币来标记为 $\pm$。每个ω^+/ω^--回路对应一个 ± 2 的高度增量，因此 $h(u)$ 与 $h(v)$ 的条件协方差（粗略地说）等于同时环绕 u 和 v 的交替 ω^+/ω^--回路的数量的 4 倍。在高度为奇数时，我们必须更加谨慎，因为总高度还包含一个额外的 ± 1 贡献。为了区分公式 (347) 中的第二种和第三种情况，请注意，由于没有奇 $\mathcal{X}$-顶点拥有多个子节点，$\psi(u,v) = 2k+1$ 意味着 u 或 v 在树中的深度为 $2k+1$。

□

定义 20.8（极大区域）。 令 $D \subset \mathbb{R}^2$ 表示任意单连通集，并考虑一个偶自旋构型（$\sigma_\circ$, $\bar{\omega}$）。令 $\mathcal{M}^+(D)$ 表示满足以下两个条件的极大偶区域 $\mathcal{D}$：

$$\partial\mathcal{D} \subset D \qquad \text{and} \qquad \partial\mathcal{D} \subset \omega^+. \tag{348}$$

集合 $\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$ 的定义类似，只需将 ω^+ 替换为 ω^-。

我们还令 $\partial\mathcal{M}^{\pm}(D) \subset \mathbb{R}^2$ 表示所有 $\mathcal{D} \in \mathcal{M}^{\pm}(D)$ 对应的 $\partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ 的并集。

引理 20.9（分支函数的递归关系）。 考虑所有偶区域上各测度（$\mu_{\mathcal{B}}^{+}$）$_{\mathcal{B}}$ 的独立耦合。更准确地说，定义概率测度 $\mathbb{P} := \prod_{\mathcal{B}} \mu_{\mathcal{B}}^{+}$，其中乘积取遍所有偶区域。令 $\mathcal{D}$ 表示一个固定的偶区域。那么，在概率测度 $\mathbb{P}$ 下，$\psi_{\mathcal{D}}$ 和 $(\psi_{\mathcal{D}} \wedge 2) + \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}^-(\mathcal{D})} \psi_{\mathcal{B}}$ 具有相同的分布。

证明。 假设我们只探索区域 $\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$，以及这些区域并集 $\cup\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$之外发生的一切。在给定 $\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$的条件下，$\cup\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$内部的构型服从独立乘积分布

$$\prod_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}^-(\mathcal{D})} \mu_{\mathcal{B}}^{-} \tag{349}$$

（这由空间马尔可夫性质可得）。注意，根据 $\mathcal{M}^-(\mathcal{D})$的定义，以及每个较小区域内的独立翻转对称性，我们得到

$$\psi_{\mathcal{D}}(u,v) \le 2 \tag{350}$$

对于任意 u, v，除非 u 和 v 属于同一个区域 $\mathcal{B} \in \mathcal{M}^-(\mathcal{D})$。此外，如果 u 和 v属于同一个区域 $\mathcal{B} \in \mathcal{M}^-(\mathcal{D})$，那么

$$\psi_{\mathcal{D}}(u,v) = 2 + \psi_{\mathcal{B}}(u,v). \tag{351}$$

由方程（349）即可得到该引理。 □

最后，我们总结分支函数的两个有用性质。

Lemma 20.10 （分支函数的单调性）**.** 以下成立。

(i) ***FKG*** 不等式。 ψ 的分布在任意测度 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 中满足 *FKG* 不等式，*(ii)* 区域单调性。 ψ 在 $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ 中的分布关于区域 $\mathcal{D}$ 随机递增。

证明。 我们证明 $\psi \wedge 2k$ 对所有 $k \geq 1$ 都满足这两个性质，通过对 k使用归纳法。基础情形 $k = 1$ 很容易，因为 $\psi \wedge 2$ 是三元组 $(\sigma_{\circ}, \omega^{+}, -\omega^{-})$ 的递减函数，而对此这两个性质已由 $\circ$-FKG 得知（见引理15.2与15.6）。

By similar 原因 i$^{\text{ng, t}}$ he law of $\cup\mathcal{M}^{-}(\mathcal{D})$ i n $\mu_{\mathcal{D}}^{+}$ is al^{因此随机}hastically i$_{\text{递增}}$ ing i n $\mathcal{D}$。现在开始归纳步骤：假设 $\psi \wedge 2k$ 满足这两个性质。那么，$\sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}^{-}(\mathcal{D})}(\psi_{\mathcal{B}} \wedge 2k)$ 关于 $\cup\mathcal{M}^{-}(\mathcal{D})$ 是递增的，并且满足 FKG 不等式。根据塔式性质（例如，参见命题 15.4 的证明中关于在 $\cup\mathcal{M}^{-}(\mathcal{D})$条件化下的 FKG 不等式），可得

$$(\psi_{\mathcal{D}} \wedge 2) + \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}^{-}(\mathcal{D})} (\psi_{\mathcal{B}} \wedge 2k) = \psi_{\mathcal{D}} \wedge (2k+2). \tag{352}$$

也满足这两个性质。至此，归纳步骤和证明均告完成。 □

21 全平面中的正则性估计（定理 4.5）

现在我们可以证明定理4.5中陈述的正则性估计。证明分为三个步骤：首先，我们用水平线树表示相关函数 Φ_k （第 21.1 小节）；其次，我们介绍一种将水平线树的几何性质与臂事件联系起来的方法（第 21.2 和 21.3 小节）；最后，我们利用这一联系来估计相关函数（第 21.4 小节）。

21.1 用水平线树界定 k 点相关性

回顾定义 20.5。我们先证明以下引理。

引理 21.1。 固定 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $\boldsymbol{u} \in (F(\mathbb{Z}^2))^{2k}$，并令 $\mathcal{D}$ 表示一个包含 $\boldsymbol{u}$ 中所有面的偶域。那么

$$\Big|\mu_{\mathcal{D}}^{+}\Big[\prod_{i=1}^{k}(h(u_i') - h(u_i))\Big]\Big| \leq 2^k \sum_{\pi} \mu_{\mathcal{D}}^{+}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_i u_i', u_j u_j')\Big], \tag{353}$$

其中，和遍历 $\{1, \ldots, k\}$ 的所有配对，且 $I(vv', zz')$: $= |p^{vv'} \cap p^{zz'} \cap V_{\bullet}(\mathcal{X})|$。这里， $p^{zz'}$ 指从 z 到 z' 的唯一 $\mathcal{X}$ 路径。

证明。 思路是对给定 $\mathcal{X}$ 时高度差乘积的条件期望作界。这个条件期望可以如下界定。高度差 $h(u_i') - h(u_i)$ 可写为

$$h(u_i') - h(u_i) = \sum_{n=0}^{|p^{u_i u_i'}|-1} h(p_{n+1}^{u_i u_i'}) - h(p_n^{u_i u_i'}) \tag{354}$$

其中 $|\cdot|$ 表示路径长度。

我们通过对 353 的左端进行条件化 $\mathcal{X}$，并将每个高度差写成前一个展示方程中的形式，来分解左端。然后，我们针对乘积展开这个和。最后，我们得到若干项的和，每一项都是形如 $h(p_{n+1}^{u_iu_i'}) - h(p_n^{u_iu_i'})$ 的项的（整数）次幂之积。和中的每一项的贡献为 -1、0 或 1，因此只需给出非零贡献项数的上界。

由于 h 在 $\mathcal{X}$ 的边上的增量仅在与同一奇顶点关联的边上相互作用，因此若 $I(vv',\ zz')$，则有：$= |p^{vv'} \cap p^{zz'} \cap V_\bullet(\mathcal{X})|$，

$$\left|\mu_{\mathcal{D}}^{+}\left[\prod_{i=1}^{k}(h(u_i') - h(u_i))\middle|\mathcal{X}\right]\right| \le \sum_{\pi}\prod_{ij\in\pi} 4I(u_iu_i', u_ju_j'), \tag{355}$$

其中 π 遍历 $\{1,\dots,k\}$ 的配对，且路径被视为 $V(\mathcal{X})$的子集。

显然 $|\pi| = k/2$。由塔式性质可得

$$\left|\mu_{\mathcal{D}}^{+}\left[\prod_{i=1}^{k}(h(u_i') - h(u_i))\right]\right| \le 2^k \sum_{\pi}\mu_{\mathcal{D}}^{+}\left[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu_i', u_ju_j')\right], \tag{356}$$

其中 $I(u_iu_i',\ u_ju_j')$被视为随机变量。 □

21.2 正则性估计的关键输入

我们现在希望对方程（353）的右端给出上界。虽然适当的界需要一些几何分析，但其关键思想相当简单，并将在下述引理中说明。

引理 21.2. 设 u、u'、v、$v' \in \mathbb{Z}^2$ 表示包含在某个有限区域 $\mathcal{D}$ 中的四个点。则以下各项均成立。

(i) 假设 $\{u,u'\}$ 包含在 $\mathbb{R}^2 \setminus$ 环域$_{R,\ r}(x)$ 的一个连通分支中，而 $\{v,v'\}$ 位于另一个连通分支中，其中 $r \ge 4$、$R \ge 2r$ 与 $x \in \mathbb{R}^2$。则

$$I(uu', vv') \le 4K_{R,r,x}, \tag{357}$$

其中$K_{R,\ r,\ x}$ 按方程 (334) 所定义，计算环域中的交替臂。*(ii)* 若 u 与 u' 为邻点（或 v 与 v'），则

$$I(uu', vv') \le 4. \tag{358}$$

证明。第二部分很容易：若 $u \sim u'$，则 $I(\,\cdot\,) \le |p^{uu'} \cap V_\bullet(\mathcal{X})| \le 4$。对于第一部分，注意到当我们沿路径 $p^{uu'} \cap p^{vv'}$ 行进时，会发现交替的 ω-回路，其中每一条都具有将 u 与 u' 分离、并将 v 与 v' 分离的性质。特别地，每一条这样的回路都在环域中产生一条臂。因子 4 绰绰有余。由此即得所需结果。 □

为了给方程（353）右端项作界，我们希望按如下方式进行：若能为每一对 $ij \in \pi$ 找到一个环域，使得这些 $|\pi| = k/2$ 环域两两不相交，那么只需应用前一个引理和注记19.6，即可给臂事件数乘积的期望作界。

对于一般情形（某些点对之间的尺度分离较小），我们必须做更多工作。为了将问题化归到尺度分离良好的情形，我们还要进一步分解每个变量 $I(\,\cdot\,)$。这个随机变量显然满足三角不等式$I(vv'', zz') \le I(vv', zz') + I(v'v'', zz')$。在下一小节中，我们将分解方程（353）的右侧，直到可以将引理 21.2 与引理 19.5结合使用。

21.3 以合适的方式组织这些点

下面这个引理的目的大致如下：如果点 a, a', b, b' 之间的尺度分离不理想，那么我们可以找到一条从 a 到 a' 的路径，使得对路径的每一步（相对于 $\{b, b'\}$），我们都可以应用引理 21.2 的两种情形之一。最短的适当路径称为最优路径。

引理 *21.3.* 回忆方程 *(29)* 中的离散尺度分离函数 $S'_{\mathbb{R}^2}$。那么对于每个 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，都存在一个常数 $N_k \in \mathbb{R}_{>0}$，具有以下性质。对于 $\mathbb{Z}^2$ 中满足 $|a'-a| \leq |b'-b|$ 的任意两对点 $\{a, a'\}$ 和 $\{b, b'\}$，存在一条路径 $p = (p(n))_{0\leq n\leq \ell} \subset \mathbb{Z}^2$，其长度不超过 $N_k \cdot S'_{\mathbb{R}^2}(\{a, a'\}, \{b, b'\})$，从 a 到 a'，使得对于每个 $0 \leq n \leq \ell - 1$，以下两种情况之一成立：

- $\gamma(n)$ 和 $\gamma(n+1)$ 互为邻点，
- $S_{\mathbb{R}^2}(\{\gamma(n)\ \gamma(n+1)\}, \{b, b'\}) \geq 20k^2$。这

样的最短路径称为最优。

下界 $20k^2$ 对尺度分离而言，在此处可能显得任意。其选取由下述问题所启发。大致而言，我们希望这些环带互不重叠，以便应用引理 19.5。若尺度分离足够大，则可提取出适当的不交 环带。这一点在下述“收缩圆环”引理中得到证明，初次阅读时可跳过该引理。

引理 *21.4*（收缩圆环引理）。固定 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 以及一族满足 $R_i/r_i \geq e^{40N^2}$ 的 $(R_i, r_i, x_i)_{i=1,\dots,N} \subset (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$。则我们可找到某些 $(R'_i, r'_i)_{i=1,\dots,N} \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$，使得：*(i)* 半径满足 $r_i \leq r'_i \leq R'_i \leq R_i$，*(ii)* 对每个 i，半径满足 $R'_i/r'_i = \sqrt[4N^2]{R_i/r_i} \geq e^{10}$，*(iii)* 环带 $(\mathrm{Annulus}_{R'_i, r'_i}(x_i))_{i=1,\dots,N}$ 两两不交。

证明。设 $Q = 2N^2$ 和 $\rho_i := \sqrt[2Q]{R_i/r_i} = \sqrt[4N^2]{R_i/r_i} \geq e^{10}$。令 $\mathbb{P}$ 表示随机元素 $s \in \{0, \dots, Q-1\}^N$ 上的均匀概率测度。定义随机圆环

$$A_i := \mathrm{Annulus}_{R'_i, r'_i}(x_i); \qquad R'_i := R'_i(s_i) := r_i \cdot \rho_i^{2s_i+2}; \qquad r'_i := r'_i(s_i) := r_i \cdot \rho_i^{2s_i+1} \tag{359}$$

在此概率空间中。这些半径显然满足前两个性质；只需证明这些圆环以正 $\mathbb{P}$-概率互不相交，而根据 $\mathbb{P}[\{A_i \cap A_j \neq \emptyset\}] \leq 2/N^2$，对任意不同的 i 和 j，这一点即可推出。

现在来证明这一事实。固定 $i \neq j$，并令 $O \subset \{0, \dots, Q-1\}^2$ 表示导致圆环重叠的点对 $(s_i,\ s_j)$ 的集合。固定 $(a,\ b) \in O$；于是我们断言：

$$O \cap \{(a', b') : a' > a,\ b' \leq b\} = \emptyset \qquad \text{or} \qquad O \cap \{(a', b') : a' \leq a,\ b' > b\} = \emptyset. \tag{360}$$

事实上，不妨设（如有必要，交换 i 和 j），$R'_i(a) \geq R'_j(b)$。于是可以看出，对于任意 $a' > a$ 和 $b' \leq b$，环域 $\mathrm{Annulus}_{R'_i(a')\ r'_i(a')}(x_i)$ 与球 $\mathrm{Ball}_{R'_j(b)}(x_j)$ 不相交，因此也与环域 $\mathrm{Annulus}_{R'_j(b')\ r'_j(b')}(x_j)$ 不相交。

有了（360），我们得到 $|O| \leq 4Q$。这意味着所需的界 $\mathbb{P}[\{A_i \cap A_j \neq \emptyset\}] \leq 4Q/Q^2 = 2/N^2$，从而完成引理的证明。 □

21.4 正则性估计的证明

现在，我们可以开始深入证明定理 4.5了。

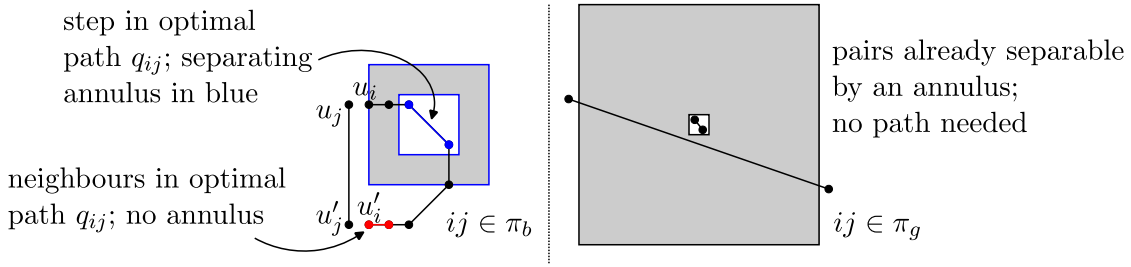


图21：左：从 u_i 到 u'_i 的一对 $ij \in \pi_b$ 的最优路径 q_{ij}。右：如果 $ij \in \pi_g$，则无需最优路径。

定理 4.5的证明。回顾一下，h 的分布在 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}^2}$ 中相同（引理18.7）。因此，我们只需对具有 $+$边界条件的偶域中的相关性进行界定，然后令区域趋于 $\mathbb{Z}^2$，即可得到所需结果。从现在起，我们固定一个足够大的偶域 $\mathcal{D}$，使其包含 $\boldsymbol{u}$中的所有点。

根据引理 21.1，只需对每个 π进行界定，

$$\mu^+_{\mathcal{D}}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big]. \tag{361}$$

下文中，我们将把 π 在（353）中视为由有序对 $ij = (i, j)$ 组成的集合，其中我们对每一对进行排序，使得 $|u'_i - u_i| \le |u'_j - u_j|$。对于每个 $ij \in \pi$，令 q_{ij} 表示从u_i 到 u'_i 的最优路径（相对于这一对 $\{u_j, u'_j\}$）。记 $|q_{ij}|$ 为该路径的长度（该量可由引理21.3界定）。将 π 中的各对划分为两个集合，如下所述。

- 集合 π_g 定义为“良好”对的集合，即满足$S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i, u'_i\}, \{u_j, u'_j\}) \ge 20k^2$的对 ij。这意味着，对于任意$ij \in \pi_g$，$|q_{ij}| = 1$ 自动成立。
- 剩下的配对都是“坏对”；坏对的集合记为 π_b。对于 $ij \in \pi_b$，仍有可能出现 $|q_{ij}| = 1$ for $ij \in \pi_b$，即当 u_i 和 u'_i 是邻点时。

定义 $\mathcal{I}(\pi) := \prod_{ij\in\pi}\{0, \dots, |q_{ij}| - 1\}$；路径分解得出

$$\mu^+_{\mathcal{D}}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big] \le \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(\pi)} \mu^+_{\mathcal{D}}\left[\prod_{ij\in\pi} I(q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij})q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij}+1), u_ju'_j)\right]. \tag{362}$$

接下来，我们将使用 $I(\cdot)$ 引理 21.2来界定这些随机变量。我们区分三种情况（见图21）。

(i) 如果 $ij \in \pi_b$和 $q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij})$ 以及 $q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij}+1)$ 是邻点，那么 $I(\cdot) \le 4$是确定性的。

(ii) 如果 $ij \in \pi_b$ 且这两个面不是邻点，那么存在一个环域$A_{ij\boldsymbol{n}} := \text{Annulus}_{R_{ij\boldsymbol{n}}, r_{ij\boldsymbol{n}}}(x_{ij\boldsymbol{n}})$，使得 $\{q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij})q_{ij}(\boldsymbol{n}_{ij}+1)\}$ 包含在 $\mathbb{R}^2 \setminus A_{ij\boldsymbol{n}}$的一个连通分支中，而 $\{u_j, u'_j\}$ 位于另一个连通分支中，并且满足 $R_{ij\boldsymbol{n}}/r_{ij\boldsymbol{n}} \ge e^{10k^2}$。在这种情况下，引理 21.2 给出

$$I(\cdot) \le 4K_{R_{ij\boldsymbol{n}}, r_{ij\boldsymbol{n}}, x_{ij\boldsymbol{n}}}. \tag{363}$$

(iii) 如果 $ij \in \pi_g$，那么我们可以像处理前一种情况那样进行论证，只不过可以选择环域，使得 $R_{ij\boldsymbol{n}}/r_{ij\boldsymbol{n}} \ge e^{S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u'_i\},\ \{u_j,u'_j\})/2} \ge e^{10k^2}$。

对于情形（ii）中的配对，记作 $\pi_{b,\ \boldsymbol{n}} \subset \pi_b$，我们得到

$$\mu^+_{\mathcal{D}}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big] \le 4^k \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(\pi)} \mu^+_{\mathcal{D}}\left[\prod_{ij\in\pi_g\cup\pi_{b,\boldsymbol{n}}} K_{R_{ij\boldsymbol{n}}, r_{ij\boldsymbol{n}}, x_{ij\boldsymbol{n}}}\right]. \tag{364}$$

如果这些环带互不重叠，则利用备注 19.6 很容易对右端进行上界估计，但我们的构造并不能保证它们不相交。因此，我们应用收缩圆环引理（引理 21.4），借助 $N = k/2$ 找到一族互不重叠的环带$A'_{ij\boldsymbol{n}} := $ 环域$_{R'_{ij\boldsymbol{n}},\ r'_{ij\boldsymbol{n}}}(x_{ij\boldsymbol{n}}) \subset A_{ij\boldsymbol{n}}$（其中 $ij \in \pi_g \cup \pi_{b,\ \boldsymbol{n}}$），其半径为 $r_{ij} \geq 4$ 和 $R'_{ij\boldsymbol{n}}/r'_{ij\boldsymbol{n}} = \sqrt[k^2]{R_{ij\boldsymbol{n}}/r_{ij\boldsymbol{n}}} \geq e^{10}$。

由于纳入了这些环带，先前的估计变为

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big] \leq 4^k \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(\pi)} \mu_{\mathcal{D}}^{+}\left[\prod_{ij\in\pi_g\cup\pi_{b,\boldsymbol{n}}} K_{R'_{ij\boldsymbol{n}},r'_{ij\boldsymbol{n}},x_{ij\boldsymbol{n}}}\right]. \tag{365}$$

右边的期望现在可以如下界定：首先界定外半径最大的环域上 $K_{(\,\cdot\,)}$ 的期望，然后是外半径次大者上 $K_{(\,\cdot\,)}$ 的条件期望，依此类推。引理19.5 （更确切地说是注记19.6）断言，在此过程中，每个$K_{R'_{ij\boldsymbol{n}},\ r'_{ij\boldsymbol{n}},\ x_{ij\boldsymbol{n}}}$ 的条件期望均以$(R'_{ij\boldsymbol{n}}/r'_{ij\boldsymbol{n}})^{-c_{\mathrm{arm}}}/(1-2^{-c_{\mathrm{arm}}})$为界。因此我们得到

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big] \leq \frac{4^k}{(1-2^{-c_{\mathrm{arm}}})^{k/2}} \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(\pi)} \prod_{ij\in\pi_g\cup\pi_{b,\boldsymbol{n}}} (R'_{ij\boldsymbol{n}}/r'_{ij\boldsymbol{n}})^{-c_{\mathrm{arm}}}. \tag{366}$$

利用 $R'_{ij\boldsymbol{n}}/r'_{ij\boldsymbol{n}}$ 的下界，这些下界由引理21.4 与引理21.3 给出（后者界定 $|q_{ij}|$，因而也界定 $|\mathcal{I}(\pi)|$），我们得到界

$$\mu_{\mathcal{D}}^{+}\Big[\prod_{ij\in\pi} I(u_iu'_i, u_ju'_j)\Big] \leq C_k \prod_{ij} \begin{cases} e^{-(c_{\mathrm{arm}}/2k^2)S_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u'_i\},\{u_j,u'_j\})} & \text{if } ij\in\pi_g, \\ 1 \vee -S'_{\mathbb{R}^2}(\{u_i,u'_i\},\{u_j,u'_j\}) & \text{if } ij\in\pi_b. \end{cases} \tag{367}$$

正如证明前言中所述，这蕴含该断言，因为可以令 $\mathcal{D}$ 趋于 $\mathbb{Z}^2$，并对每个 π 求和，从而得到 $|\Phi_k(\boldsymbol{u})|$的一个界。 □

22 正则性估计（圆柱，推论 4.7）

相较于定理 4.5 的证明，这个证明相当直接。除了圆柱相对于点间距离非常细的情形（见图 22 右图）外，我们基本上可以按照全平面情形来处理。在这种情况下，我们必须稍微修改证明。这个修改十分自然：我们不再计算环域中的交替臂，而是计算穿过细子圆柱的交替臂。这样得到的界甚至比所需的更好。

推论 （34） 中方程 4.7 的证明。我们先证明存在某个常数 C 使得

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(k,0),(2k,0),(3k,0))| \leq C \tag{368}$$

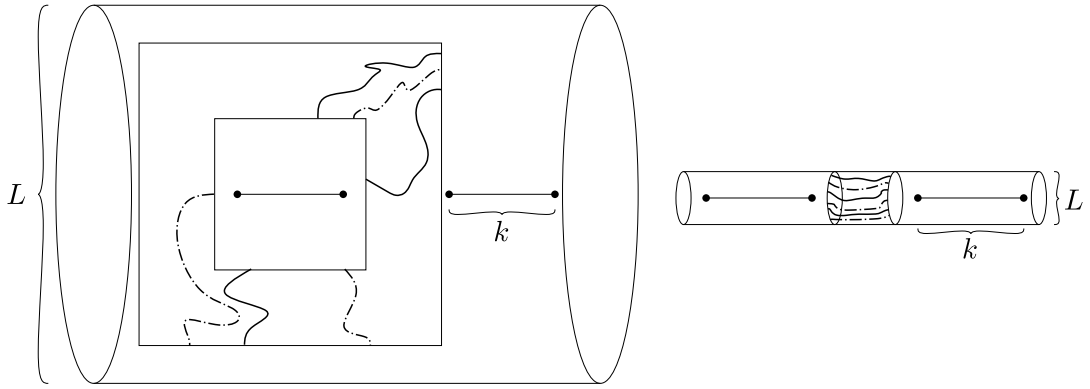
对任意 k 和 L 均成立。固定 $N = 10^9$。为简便起见，我们分三种情形讨论。

当 k（$k \leq N$）取较小值时。若 $k \leq N$，则 $\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,\ 2}((0,\ 0),\ (k,\ 0),\ (2k,\ 0),\ (3k,\ 0)) \leq N^2$。

取值为 k 较大，但小于圆柱（$N < k \leq L/40$）。这就是“全平面情形”。令 $u := (k/2,\ \mathbf{0})$，$r = 5k/8$，并令 $R = 2r = 5k/4$。仿照定理 4.5 （第 21 章节）的证明，我们可以得出

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(k,0),(2k,0),(3k,0))| \leq 8\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K_{R,r,u}], \tag{369}$$

其中 $K_{R,\ r,\ u}$ 定义于（334）中；参见图 22。根据备注 19.6，该期望一致有界。



Case $L \geq 40k$ Case $L < 40k$

图 22：圆柱的正则性估计

当 k 处于圆柱的尺度上时（$k > N \vee (L/40)$）。这就是“圆柱体情形”。为了说明这种情形为何有所不同，暂且假设 L 实际上远小于 k （例如， $L \approx k/100$）。由此产生的问题是，前一种情形中考虑的环域会在圆柱上绕行许多圈，因此我们之前使用的估计不再适用。为了解决这个问题，我们将用一种不同的形状取代环域，以利用圆柱的拓扑性质。这样可以得到一个更好的上界，尽管对我们的目的而言，常数界已经足够。

定义子圆柱 $A = [\frac{5}{4}k, \frac{7}{4}k] \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})] \subset \mathrm{Cyl}_L$，并令 K 表示取最大值的 $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 值随机变量，其定义满足 A 具有 K 个交替 $\bar{\omega}$ 从左到右的交叉（见图 22）。注意，和 交替臂$_K^{\bar{\omega}}(A)$的定义一样，由于 A 的拓扑结构，并不存在真正意义上的最高或最左交叉。

像之前那样论证，我们得到

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(k,0),(2k,0),(3k,0))| \leq 8(1+\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K]). \tag{370}$$

重要的是，$L/\frac{1}{2}k$的纵横比 A有上界，这得益于我们的假设。因此，我们可以像之前那样论证，得到 K 具有指数衰减尾部，且该结论对 k 和 L 的选择一致成立（受纵横比上界的限制）。由此得到所需的 $\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K]$一致上界；根据备注 19.6，它也一致有界。 □

注 22.1. 虽然并非必要，但在最后这种情况下，很容易看出相关函数的上界会随 k/L呈指数级衰减。这与转移矩阵视角所带来的直觉一致： $T(0)$ 的特征值是L次单位根，因此它们不可能太接近 1（除非等于 1）。这显而易见，因为 $T(0)^L$ 是恒等算子。对于厄米矩阵 $T(\pi/2)$ 的特征值，则不存在这样一句话就能完成的证明；不过，利用 RSW 型论证可以证明，在区间 $(1-\varepsilon/L,1)$ 内没有特征值。

推论 (35) 中的方程 4.7的证明。 我们旨在证明，对于任意 $L \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意整数 $0 < \ell \leq L/2$ 和 $k \geq \ell/8$,

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(0,\ell),(k,0),(k,\ell))| \leq C(\ell/k)^c. \tag{371}$$

再次，我们分为三种情况。

的取值 $k \le 10^6\ell$。只需证明相关函数有一致常数界即可。如果 $\ell \le 1000$，则结论显然成立。假设 $\ell > 1000$。令

$$K := \#\mathrm{AltArm}^{\bar{\omega}}(A); \tag{372}$$

$$A := \left([\![\ell/10]\!] \times [-\tfrac{\ell}{3}, \tfrac{4\ell}{3}]\right) \setminus \left([\![\ell/20]\!] \times [-\tfrac{\ell}{6}, \tfrac{7\ell}{6}]\right). \tag{373}$$

因此，相关函数有如下界：$8(1 + \mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K])$。证明$\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K]$一致有界并不困难，只需仿照引理19.5的证明进行推导即可。

满足 $k > 10^6\ell$ **的取值** $\sqrt{\ell k} \le L$。这就是"全平面情形"。固定 $r := 4\ell \ge 4$以及 $R := \frac{1}{10}\sqrt{\ell k}$。回顾引理 19.5的陈述中$K_{r,\ R,\ (0,\ell/2)}$ 的定义（粗略地说，它统计环域内从内侧到外侧的交替穿越次数）。圆柱上的水平线树图景也可以建立：不展开细节，不难看出，两点相关函数有如下界：每对点之间的交替回路数（引理 21.2），而该数量又有如下界（见图 22 左图）

$$8\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K_{r,R,(0,\ell/2)}] \le \frac{(r/R)^{c_{\mathrm{arm}}}}{1 - 2^{-c_{\mathrm{arm}}}} \propto (\ell/k)^{c_{\mathrm{arm}}/2}, \tag{374}$$

这是一个所需形式的上界。

满足 $k > 10^6\ell$ **的值** $\sqrt{\ell k} > L$。这是"圆柱体情形"。首先注意到$k/L \ge \sqrt{k/\ell} \ge 1000$。定义子圆柱体

$$U_0 := [L, 2L] \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z}); \tag{375}$$

$$U_1 := [3L, k - L] \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z}). \tag{376}$$

记 K 为取最大值的 $2\mathbb{Z}_{\ge 0}$值随机变量，使得交替臂事件$\bar{\omega}_K(U_0)$发生。记 $\mathcal{E}$:=回路$^{\omega}(U_1)$。那么，相关函数有如下上界：

$$8\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}^c}(1 + K)]. \tag{377}$$

然而，条件期望 $\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[K|\mathcal{E}^c]$ 一致有界，且概率$\mu_{\mathrm{Cyl}_L}[\mathcal{E}^c]$ 随 k/L呈指数级趋于零。因此，我们得到如下形式的上界：

$$|\Phi_{\mathrm{Cyl}_L,2}((0,0),(0,\ell),(k,0),(k,\ell))| \le Ce^{-ck/L} \le Ce^{-c\sqrt{k/\ell}}. \tag{378}$$

拉伸指数衰减甚至比所需的多项式衰减更强。 □

23 混合估计（定理4.8）

本章节分为两个小节。第一小节包含混合估计的主要证明。第二小节进一步分析高度函数的协方差结构；这一结构将在主要证明的最后一步中用到。关于协方差结构的思路也会用在最后一节（第26节）。

23.1 证明的主要部分

定理的证明 *4.8*。固定 $\mathbf{c} \in [1, 2]$，$k \in 2\mathbb{Z}_{\ge 3}$，以及 $\varepsilon := 1/10^9$ 在本章节中。考虑 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_k$。

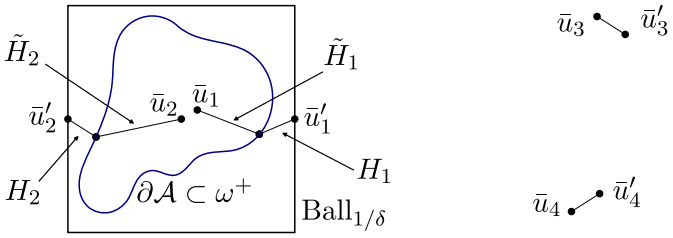


图 23：这些点的位置满足：对于 $i \geq 3$，点对 $(\bar{u}_i,\ \bar{u}_i')$ 的直径相对较小，且彼此之间以及与点 $(0,\ 0)$ 相距较远。为了证明~混合估计，将高度差 $h(\bar{u}_i) - h(\bar{u}_i')$ 写成 $H_i + H_i$（$i = 1,\ 2$）较为方便，如图所示。

步骤1：将点方便地放置在 $\boldsymbol{u}$。 我们首先说明，不失一般性，$\boldsymbol{u}$ 满足以下条件（参见图 23）：

- $u_2 = (0,\ 0),\ u_2' = (-1,\ 0),\ u_1' = (1,\ 0)$,
- $|u_i - u_j| \geq 1/\varepsilon^2$ 对于任意互异的 $i,\ j \geq 2$,
- $|u_i' - u_i| \leq \varepsilon^2$ 对于任意 $i \geq 3$。

事实上，通过平移该系统，我们可以假设 $u_2 = (0,\ 0)$。将每一对 $(u_i,\ u_i')$ 分解为由微小步长构成的路径（如命题 7.2 的证明中那样），并利用关联函数的可加性，我们可以假设 $\inf_{i\neq j} |u_j - u_i| / \sup_i |u_i' - u_i| \geq \varepsilon^5$。随后，我们可以对系统重新缩放，使第二和第三个性质成立。最后，由于可加性和正则性界，我们试图证明的结论不取决于 u_1' 和 u_2' 的位置，因此可以按断言中所述选择它们。

回忆一下，u_1 是我们感兴趣的变量，而我们希望令 u_1 趋于 $(0,\ 0) = u$ $_2$.

步骤 2：分裂高度增量。 考虑 $|u_1| < \varepsilon$ 和 $\delta < \varepsilon^2$，并记作$\boldsymbol{w} := (u_3,\ u_3',\ \ldots\ldots) \in \mathcal{D}_{k-2}$。记 $\bar{u}_i \in F(\mathbb{Z}^2)$ 为对应于 u_i/δ 的面，并类似地定义$\bar{u}_i'$和 $\bar{\boldsymbol{w}}$。现在只需找到一个普适常数 $C < \infty$（仅取决于k），使得 $|(\star)| \leq C$，其中

$$(\star) := |\Phi_k(\bar{u}_1, \bar{u}_1', \bar{u}_2, \bar{u}_2', \bar{\boldsymbol{w}}) - \Phi_2(\bar{u}_1, \bar{u}_1', \bar{u}_2, \bar{u}_2')\Phi_{k-2}(\bar{\boldsymbol{w}})|. \tag{379}$$

我们用自旋测度 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$来重新表述关联函数。证明中的关键步骤是考虑随机区域 $\mathcal{A}$，它被定义为满足以下条件的唯一最大偶域 $0 = \bar{u}_2 \in F(\mathcal{A})$ 和 $\partial\mathcal{A} \subset \omega^+ \cap$ 球$^{(1/\delta)}$。我们令 $\mathcal{A} = \emptyset$，并且当这样的偶域不存在时，令 $\partial\mathcal{A} = \{\bar{u}_2\}$。注意，几乎必然 h 在 $\partial\mathcal{A}$ 上为常数；将这个常数值记作$h(\partial\mathcal{A})$。定义以下随机变量（参见图 23）：

$$\begin{aligned}
P &:= \textstyle\prod_{i=3}^{k} (h(\bar{u}_i') - h(\bar{u}_i)); & a &:= \begin{cases} h(\partial\mathcal{A}) & \text{if } F(\mathcal{A}) \ni \bar{u}_1, \\ h(\bar{u}_1) & \text{otherwise;} \end{cases} \\
H_1 &:= a - h(\bar{u}_1'); & \tilde{H}_1 &:= h(\bar{u}_1) - a; \\
H_2 &:= h(\partial\mathcal{A}) - h(\bar{u}_2'); & \tilde{H}_2 &:= h(\bar{u}_2) - h(\partial\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

于是，

$$\Phi_k(\bar{u}_1, \bar{u}_1', \bar{u}_2, \bar{u}_2', \bar{\boldsymbol{w}}) = \mu_{\mathbb{Z}^2}[P(H_1 + \tilde{H}_1)(H_2 + \tilde{H}_2)]; \tag{380}$$

$$\Phi_2(\bar{u}_1, \bar{u}_1', \bar{u}_2, \bar{u}_2') = \mu_{\mathbb{Z}^2}[(H_1 + \tilde{H}_1)(H_2 + \tilde{H}_2)]; \tag{381}$$

$$\Phi_{k-2}(\bar{\boldsymbol{w}}) = \mu_{\mathbb{Z}^2}[P]; \tag{382}$$

$$(\star) = \mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P, (H_1 + \tilde{H}_1)(H_2 + \tilde{H}_2)]. \tag{383}$$

步骤 3：将 $(\star)$ 改写为有界项的有限和。 在给定 $\partial\mathcal{A}$的条件下，˜ ˜适用关于 $\mathcal{A}$ 的马尔可夫性质。这意味着，元组 (P, H_1, H_2) 与 (H_1, H_2) 相互独立。此外，由于翻转对称性（引理14.7），我们知道第二个元组的均值为零。因此，得到

$$(\star) = \mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P, H_1H_2 + \tilde{H}_1\tilde{H}_2] = \mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P, H_1H_2] + \mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P, \tilde{H}_1\tilde{H}_2]. \tag{384}$$

˜ ˜由于在给定 $\mathcal{A}$ 的条件下，P 和 H_1H_2 相互独立，因此右侧的第二项有如下界：

$$\left|\mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}\left[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\mathcal{A}], \mu_{\mathbb{Z}^2}[\tilde{H}_1\tilde{H}_2|\mathcal{A}]\right]\right| \le \sqrt{\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\mathcal{A}]^2]\,\mathrm{Var}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[\tilde{H}_1\tilde{H}_2|\mathcal{A}]]}. \tag{385}$$

合并可得

$$|(\star)| \le |\mathrm{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P, H_1H_2]| + \sqrt{\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\mathcal{A}]^2]\,\mathrm{Var}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[\tilde{H}_1\tilde{H}_2|\mathcal{A}]]}. \tag{386}$$

要得到方程 (379，只需证明 (386) 右侧出现的三个概率项均有一个普适常数上界（该上界仅依赖于 k）。这并非易事，也并不简单。因此，下面将在引理 23.1、23.2和23.4中分别处理这三项。

□

23.2 引理的证明

引理 23.1。 在定理 *4.8*的证明背景下（特别是方程 (386)），存在一个常数 $C < \infty$（仅依赖于 k），使得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\mathcal{A}]^2] \le C. \tag{387}$$

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是 ω^+-可测的，我们得到

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\mathcal{A}]^2] \le \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\sigma_\circ, \bar{\omega}]^2]. \tag{388}$$

回顾第 20 节中水平线树的定义。我们将仿照第 21 节中正则性估计的论证。设 $\mathcal{D}$ 是一个极大的区域。在第 21 节中，我们在方程 (355) 中论证了

$$|\mu_{\mathcal{D}}^+[P|\mathcal{X}]| \le \sum_{\pi} \prod_{ij\in\pi} 4I(\bar{u}_i\bar{u}_i', \bar{u}_j\bar{u}_j'), \tag{389}$$

其中 π 遍历 $\{3, 4, \dots, k\}$ 的所有配对。在第 21 节中，我们的最终目标是对右端取一阶矩并加以界定，而现在我们要对其二阶矩加以界定。

这可直接由引理 19.5 得出。事实上，在后面的第 21 节（方程（363））中，我们将每个交点计数都用围绕 $\bar{u}_i$ 的臂计数进行了界定：

$$I(\bar{u}_i\bar{u}_i', \bar{u}_j\bar{u}_j') \le 4K_{(1/\delta),(\varepsilon/\delta),\bar{u}_i}. \tag{390}$$

令 $\mathcal{D}$ 收敛到 $\mathbb{Z}^2$，可得

$$|\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\sigma_\circ,\bar{\omega}]| \le \sum_{\pi} \prod_{ij\in\pi} 16K_{(1/\delta),(\varepsilon/\delta),\bar{u}_i}. \tag{391}$$

但与 $\bar{u}_i$ 对应的环带彼此不重叠，因此我们可以使用关于 $K_{(\cdot)}$ 的尾部的（指数）界19.5（该界给出了每个 $K_{(1/\delta)、(\varepsilon/\delta)、\bar{u}_i}$ 的二阶矩界），从而得到随机变量$\mu_{\mathbb{Z}^2}[P|\sigma_\circ,\bar{\omega}]$ 的二阶矩具有普适上界（该上界只依赖于 k 和 $\mathbf{c}$）。 □

下面讨论引理23.2，它稍微复杂一些，但所依据的思路类似 s.

引理 23.2。在相同的背景下（即方程 (386)的背景下），存在一个常数 $C<\infty$（仅依赖于 k），使得

$$|\operatorname{Cov}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[P,H_1H_2]| \le C. \tag{392}$$

在深入证明之前，我们先陈述一个方便的中间结果。

引理 23.3。在相同的背景下（即方程 (386)的背景下），存在一个常数 $C<\infty$使得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[H_1H_2|\sigma_\circ,\bar{\omega}]^2] \le C. \tag{393}$$

证明。由于 $\partial\mathcal{A}\subset\omega^+$，集合 $\partial\mathcal{A}$ 包含于单个 $\mathcal{X}$-顶点中。将 $\partial\mathcal{A}$ 与该$\mathcal{X}$-顶点等同。因此，考虑从 $\bar{u}_2'$到 $\partial\mathcal{A}$的唯一 $\mathcal{X}$-路径是有意义的，我们将其记为 $p^{\bar{u}_2'\partial A}$。

设 $\mathcal{D}$ 表示一个极大的区域。仿照章节21 （方程（355））中的论证，我们观察到

$$|\mu_{\mathcal{D}}^{+}[H_1H_2|\mathcal{X}]| \le 4|p^{\bar{u}_2'\partial\mathcal{A}}\cap p^{\bar{u}_1'\bar{u}_1}\cap V_\bullet(\mathcal{X})|. \tag{394}$$

注意， $p^{\bar{u}_2'\partial\mathcal{A}}$是 $\mathcal{X}$-路径 $p^{\bar{u}_2'\bar{u}_2}$的一个截断版本，这将对我们有利。上式右端是一个随机变量，我们的目标是用一个普适常数来控制其二阶矩。

定义如下几何对象（如图24所示）：

$$S:=\operatorname{Ball}_{\frac{1}{\delta}};\qquad A:=\operatorname{Annulus}_{\frac{4}{\delta},\frac{1}{\delta}};\qquad R^1:=[\tfrac{1}{2\delta},\tfrac{1}{\delta}]\times[-\tfrac{4}{\delta},\tfrac{4}{\delta}], \tag{395}$$

以及 R^2、 R^3、 R^4，即 R^1 绕(0,0)以角度 $\pi/2$、 π和 $3\pi/2$ 所作的旋转。

可以验证（通过分析图24），任何自回避环 $\gamma\subset\mathbb{R}^2$ 若恰好环绕点对 $\{\bar{u}_1,\bar{u}_1'\}$ 中的一个点以及 $\{\bar{u}_2,\bar{u}_2'\}$ 中的恰好一个，则满足以下三个性质之一：

1. $\gamma\subset S$, 2. γ 水平穿越 R^1 或 R^3，或 R^2 或 R^4 垂直穿越，3. γ 实现了 A的臂事件。

为对方程 (394) 给出上界，我们注意到，每个 ω-连通分支在 $p^{\bar{u}_2'\partial\mathcal{A}}\cap p^{\bar{u}_1'\bar{u}_1}\cap V_\circ(\mathcal{X})$ 中都必须至少对应上述三种情况之一。事实上，根据 $\mathcal{A}$的定义，这类连通分支至多有两个包含在 S中。因此，我们得到

$$|p^{\bar{u}_2'\partial\mathcal{A}}\cap p^{\bar{u}_1'\bar{u}_1}\cap V_\bullet(\mathcal{X})| \le Q, \tag{396}$$

其中

$$Q:=24+\left(\sum_{i=1,3}\#\mathrm{AltHor}^{\bar{\omega}}(R^i)\right)+\left(\sum_{i=2,4}\#\mathrm{AltVer}^{\bar{\omega}}(R^i)\right)+\#\mathrm{AltArm}^{\bar{\omega}}(A). \tag{397}$$

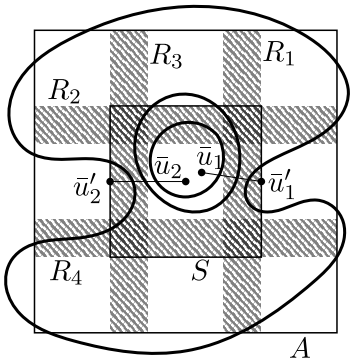


图 24：对于引理 23.3，每一条恰好包围每一对中一个点的环路，必须要么包含在环域的内边界（小正方形）之内，要么沿容易方向穿越四个矩形之一，要么实现该环域的一个臂事件。该图为这三种情形各给出一个例子。

项 24 用于补偿 S 中可能存在的分量（最多两个），以及我们在统计穿越时可能因边界效应而遗漏的其他一些分量（例如，在我们的定义中，我们总是规定从最高的 ω^+-交叉开始计数，因此会遗漏一个可能更高的 ω^--交叉）。

综合上述界，并令 $\mathcal{D}$ 趋于 $\mathbb{Z}^2$，即得

$$|\mu_{\mathbb{Z}^2}[H_1H_2|\sigma_\circ,\omega]| \le 4Q. \tag{398}$$

只需证明 $4Q$ 具有一致有界的二阶矩。这由引理 19.1（关于矩形穿越数目的尾部）以及引理 19.5 （关于臂数目的尾部）可得。

□

我们现在可以证明引理 23.2。

引理 *23.2* 的证明。引理23.1 与23.3 表明，条件期望 P 与 H_1H_2 的期望值是一致有界的（因为其二阶矩如此）。因此这些期望值的乘积是有界的，只需给出这两个条件期望之积的期望的界。

通过类似之前的论证，我们得到

$$\left|\mu^+_{\mathcal{D}}[PH_1H_2|\mathcal{X}]\right| \le \sum_{\pi}\prod_{ij\in\pi} 4I(\bar{u}_i\bar{u}'_i,\bar{u}_j\bar{u}'_j), \tag{399}$$

其中，我们不严谨地将 $\bar{u}_2$ 写作 $=\partial\mathcal{A}$。求和遍历 $\{1,\dots,k\}$ 的所有配对。只需分别估计与每个配对 π 相对应的项即可。

首先假设 $\{1,2\}\notin\pi$。那么，可以对每一对进行排序，使得 $i\neq 1,\ 2$ 对于任意$ij\in\pi$。由此可以利用引理 23.1 对每个因子进行估计，从而得到

$$\lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2}\mu^+_{\mathcal{D}}[\prod_{ij\in\pi}4I(\bar{u}_i\bar{u}'_i,\bar{u}_j\bar{u}'_j)] \le \mu_{\mathbb{Z}^2}[\prod_{ij\in\pi}16K_{(1/\delta),(\varepsilon/\delta),\bar{u}_i}]. \tag{400}$$

利用引理 19.5，这便得到了所需的一致上界。

现在假设 $\{1,2\}\in\pi$。那么，通过类似前一个证明的论证，我们得到

$$\lim_{\mathcal{D}\nearrow\mathbb{Z}^2}\mu^+_{\mathcal{D}}[\prod_{ij\in\pi}4I(\bar{u}_i\bar{u}'_i,\bar{u}_j\bar{u}'_j)] \le \mu_{\mathbb{Z}^2}[4Q\prod_{ij\in\pi\setminus\{\{1,2\}\}}16K_{(1/\delta),(\varepsilon/\delta),\bar{u}_i}], \tag{401}$$

再次应用我们对臂和交叉的界，即可得出其一致有界。 □

剩下需要界定方程（386）中的最后一项。这一证明截然不同。

引理 23.4。 在与方程 (386)相同的背景下，存在某个普适常数$C > 0$ （仅取决于 $\mathbf{c}$ 和 k），使得

$$|\operatorname{Var}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[\mu_{\mathbb{Z}^2}[\tilde{H}_1\tilde{H}_2|\mathcal{A}]]| \le C. \tag{402}$$

证明。 由定义以及关于 $\mathcal{A}$的马尔可夫性质可立即得到

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\tilde{H}_1\tilde{H}_2|\mathcal{A}] = X_{\bar{u}_1,\bar{u}_2}(\mathcal{A}); \tag{403}$$

其中

$$X_{v_1,v_2}(\mathcal{A}) := \begin{cases} \mu^+_{\mathcal{A}}[h(v_1)h(v_2)] & \text{if } F(\mathcal{A}) \ni v_1, v_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{404}$$

记 $X := X_{v_1,\ v_2}$。注意， X 是区域的递增函数。事实上， $X(\mathcal{D})$可以表示为分支函数 ψ 的某个递增函数的期望（见引理 20.7），而分支函数会随着区域的选择而随机递增（引理 20.10 ）。

为证明该引理，我们将证明以下更强的结论。存在一个常数 $C < \infty$ （仅取决于 $\mathbf{c}$），具有以下性质。令 $B \subset \mathbb{R}^2$表示任意有界单连通集，并固定任意两个面 v_1， $v_2 \in F(\mathbb{Z}^2)$（不失一般性，设 v_2为 $(0,\ 0)$ 处的面）。令 $\mathcal{B}$ 表示满足 $\partial\mathcal{B} \subset B$ 且满足 $v_2 \in F(\mathcal{B})$（若 v_2 存在）的最大偶域；若不存在，则令 $\mathcal{B} = \emptyset$。于是，我们断言

$$\operatorname{Var}_{\mu_{\mathbb{Z}^2}}[X_{v_1,v_2}(\mathcal{B})] \le C. \tag{405}$$

区域的单调性表明，(405) 蕴含 (402)。现在我们将证明方程 (405。

令 $\mathcal{D}_n$ 为包含在球 Ball_{e^n}中的最大偶域。我们断言，递增函数

$$q : \mathbb{Z}_{\ge 1} \to \mathbb{R},\ n \mapsto X(\mathcal{D}_n) \tag{406}$$

是利普希茨函数，且具有统一的利普希茨常数。由于 $q_n \le 8^n$，只需证明对于所有 $n \ge 100$，增量 $q_{n+1} - q_n$ 有界（对所有输入数据一致有界）。

考虑测度 $\mu^+_{\mathcal{D}_{n+1}}$。令 $\mathcal{B}$ 表示包含 v_2且满足 $\partial\mathcal{B} \subset \omega^-$的最大偶域。由回路估计，存在某个统一的概率$p > 0$，使得以至少 p 的概率，偶域 $\mathcal{D}_n$ 包含一个 ω^+-回路，该回路包围 $(0,\ 0)$ 并与 $\partial\mathcal{D}_{n+1}$相连。由包含关系，事件 $\{\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_n\}$ 的概率也至少为 p。由递归（引理 20.9）和单调性（引理 20.10），可得

$$q_{n+1} \le 4 + \mu^+_{\mathcal{D}_{n+1}}[X(\mathcal{B})] \le 4 + pX(\mathcal{D}_n) + (1-p)X(\mathcal{D}_{n+1}) = 4 + pq_n + (1-p)q_{n+1}. \tag{407}$$

这就得到了所需的一致利普希茨界 $q_{n+1} - q_n \le 4/p$。

最后，定义

$$\mathrm{Scale}(\mathcal{B}) := 0 \vee \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 1} : \mathcal{D}_n \subset \mathcal{B}\}. \tag{408}$$

要完成证明，只需证明：

- $\mathrm{Scale}(\mathcal{B})$ 的方差一致有界，并且
- $|X(\mathcal{B}) - q_{\text{尺度}(\mathcal{B})}|$ 一致有界。

引理 19.5表明，尺度(B)–尺度$(\mathcal{B})$的二阶矩一致有界（从外向内探索时，在每个尺度上，我们都以一致的正概率找到所需的 ω^{+}-回路，且该概率独立于过去）。这意味着尺度$(\mathcal{B})$ 的方差也一致有界。

只需证明第二个结论。由于 X 是一个递增函数，只需对 $X(\mathcal{B}) - X(\mathcal{D}_{\mathrm{Scale}(\mathcal{B})})$ 给出一致的上界。按照上文证明利普希茨性质的思路，我们可以找到某个一致的 $p' > 0$，使得

$$\mu_{\mathcal{B}}^{+}\left[\left\{\begin{array}{l}\text{there is some } \omega^{-} \cap \mathcal{D}_{\mathrm{Scale}(\mathcal{B})}\text{-circuit around } v_2 \\ \text{that is also connected to } \partial\mathcal{B}\end{array}\right\}\right] \geq p'. \tag{409}$$

仿照上文的做法，我们可以推出

$$X(\mathcal{B}) \leq 4 + p'X(\mathcal{D}_{\mathrm{Scale}(\mathcal{B})}) + (1-p')X(\mathcal{B}) \qquad \text{and} \qquad X(\mathcal{B}) - X(\mathcal{D}_{\mathrm{Scale}(\mathcal{B})}) \leq 4/p'. \tag{410}$$

证明至此完成。 □

E 部分
要素 2：尺度不变性概览

定理 4.4 在第 24 章节中得到证明；定理 4.3 在第 25–26 章中得到证明。

24 自由能二阶导数（定理 4.4）

在 [Dum+22 中，定理 2]证明了，只要 $f \in \mathsf{c}0$，自由能在 $\mathbf{c} \in [0,2]$处二阶可微，其导数的值取决于参数 $\mathbf{c}$。此外，在该文章中，二阶导数 $f''(0)$ 得到了刻画，但未明确计算。我们将在下文给出明确计算。定理 4.4 是命题 24.1和下文引理24.3 的直接推论。

本章节中的陈述采用六顶点模型的另一种参数化方式，即方程（20）中给出的方式。回顾一下，这相当于 $\Delta = -\cos\zeta$。

在本章节中，我们采用如下约定：任意 $F \in L^1(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换记为 $\widehat{F}$，其中 $\widehat{F}$：$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 定义为 $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} F(x)\mathrm{d}x$。

24.1 化为 Wiener–Hopf 方程

下面的命题本质上见于 [Dum+22]，但其中并未以这种形式表述。下面我们将说明如何从 [Dum+22]中陈述的（中间）结果推导出该命题。

命题 24.1 ([Dum+22])。 对于任意固定的 $\zeta \in [0, 2\pi/3]$，令 $T\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为下列方程的唯一$L^1(\mathbb{R})$-解：

$$T(x) - \int_0^\infty R(x-y)T(y)dy = \mathfrak{e}(x), \tag{411}$$

其中 $\mathfrak{e}$ 和 R 由表3给出（特别是，R 通过其傅里叶变换定义）。于是

$$f''(0) = -2\frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathfrak{e}(x)}{\mathfrak{e}(0)}T(x)\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{\pi}{\pi-\zeta}\displaystyle\int_0^\infty T(x)\mathrm{d}x\right)^2} \qquad \textit{where} \qquad \frac{\mathfrak{e}(x)}{\mathfrak{e}(0)} = \begin{cases} e^{-\frac{\pi}{\zeta}x} & \textit{if } \zeta > 0, \\ e^{-\pi x} & \textit{if } \zeta = 0. \end{cases} \tag{412}$$

	$\zeta = 0$	$\zeta \in (0, \frac{2}{3}\pi]$
$\widehat{R}(t)$	$\frac{e^{-\frac{\lvert t\rvert}{2}}}{2\cosh(\frac{t}{2})}$	$\frac{\sinh((\pi-2\zeta)\frac{t}{2})}{2\sinh((\pi-\zeta)\frac{t}{2})\cosh(\zeta\frac{t}{2})}$
$1-\widehat{R}(t)$	$\frac{e^{\frac{\lvert t\rvert}{2}}}{2\cosh(\frac{t}{2})}$	$\frac{\sinh(\pi\frac{t}{2})}{2\sinh((\pi-\zeta)\frac{t}{2})\cosh(\zeta\frac{t}{2})}$
$\mathfrak{e}(x)$	$e^{-\pi x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$	$\frac{1}{\zeta}e^{-\frac{\pi}{\zeta}x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$
$\widehat{\mathfrak{e}}(t)$	$\frac{1}{\pi+it}$	$\frac{1}{\pi+i\zeta t}$
$\alpha(t),\quad t\in\mathbb{H}^+$	$\left(\frac{1}{e}\frac{-\mathrm{i}t}{2\pi}\right)^{\frac{-\mathrm{i}t}{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}t}{2\pi})}$	$(1-\frac{\zeta}{\pi})^{-\mathrm{i}(1-\frac{\zeta}{\pi})\frac{t}{2}}\cdot(\frac{\zeta}{\pi})^{-\mathrm{i}\frac{\zeta}{\pi}\frac{t}{2}}\frac{\Gamma(1-\mathrm{i}\frac{t}{2})}{\Gamma(1-\mathrm{i}(1-\frac{\zeta}{\pi})\frac{t}{2})}\frac{\sqrt{2(\pi-\zeta)}}{\Gamma(1_{2}-\mathrm{i}\frac{\zeta}{\pi}\frac{t}{2})}$
$\alpha_+(0)^2$	$2 = 2\frac{\pi-\zeta}{\pi}$	$2\frac{\pi-\zeta}{\pi}$

表 3：情形 $\zeta = 0$ 和 $\zeta > 0$下关键量的汇总。字母 Γ 指欧拉伽马函数。

注24.2。积分方程的基本性质已在 [Dum+22的命题25和 27]中讨论。注意，积分核 R 具有恒定符号，且积分$\widehat{}$等于 $R(0) \in [-1/2, 1/2]$。根据杨氏卷积不等式，积分方程（411）是压缩映射，因此存在唯一的 $L^1(\mathbb{R})$-解，可写为 $T = \sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{R}^k(\mathfrak{e})$其中 $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}) := R*(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\mathfrak{a})$。

此外，如果 $\zeta > 0$，那么积分核 R 具有指数衰减尾部，解 T也具有指数衰减尾部。情形 $\zeta = 0$ 类似；积分核 R 和 T 的尾部阶为 $O(x^{-2})$。

我们强调，要解（411），首先将其限制在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上，在 $L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上求解，然后利用关系式 $T(x) = \int_0^{\infty} R(x-y)\,T(y)\,dy$ 将 T延拓到 $\mathbb{R}_{<0}$。

证明。首先，[Dum+22，方程（60）] 定义了一个函数 δf 并将其与 $f''(0)$ b联系起来 y

$$f''(0) = -\lim_{\alpha\searrow 0}\frac{2}{\alpha^2}\cdot\delta f\big(Q\big(\tfrac{1-\alpha}{2}\big)\big). \tag{413}$$

函数 Q 定义于 [Dum+22中，方程（16）]，但这对我们并不重要。 $f\big(Q\big(\frac{1-\alpha}{2}\big)\big)$ 当 $\alpha\searrow 0$时的渐近行为随后在 [Dum+22~~第~~7节中计算得到。2]对于 $0 \leq c < 2$以及 [Dum+22，第7节中3] 对于 $c = 2$。将它们与（413）结合，我们得到

$$f''(0) = -\frac{2}{C_\Delta^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathfrak{e}(x)}{\mathfrak{e}(0)}T(x)dx, \tag{414}$$

其中 C_Δ 在 [Dum+22第 7]节开头定义。 C_Δ 的值由 [Dum+22命题 25]计算得出：

$$C_\Delta = \frac{\pi}{\pi-\zeta}\int_0^{+\infty}T(\lambda)d\lambda. \tag{415}$$

将其代入（414），得到（412）。 □

接下来几个章节的目的是计算方程（412）中的积分之比，或等价地推导出以下结果。结合前面的命题，它蕴含定理4.4。

引理24.3。 对任意 $\zeta \in [0, 2\pi/3]$ （对应于$\mathbf{c} \in [1, 2]$），我们有

$$\frac{\int_0^\infty \frac{\mathfrak{e}(x)}{\mathfrak{e}(0)} T(x)\mathrm{d}x}{\left(\int_0^\infty T(x)\mathrm{d}x\right)^2} = \frac{\pi^2}{4(\pi-\zeta)}. \tag{416}$$

我们分几个步骤进行。首先，将 Wiener–Hopf 方程改写为傅里叶空间中的形式。然后，用精心选取的黎曼–希尔伯特问题的解来表示 T。这一新的表达式使我们能够显式计算方程（412）中的比值。

24.2 Wiener–Hopf 方程的傅里叶变换

方程（411）是一个可以通过 Wiener–Hopf 方法显式求解的积分方程 [WH31], 参见 [AF03，第 7.4 页。1] 以了解现代阐述。令 $T = T_\uparrow - T_\downarrow$ 其中$T_\uparrow := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} T$ 并且 $T_\downarrow := -\mathbb{1}_{\mathbb{R}_{<0}} T$。于是， $T_\uparrow$ 和 $T_\downarrow$ 的傅里叶变换分别延拓为下半平面和上半平面上的全纯函数。方程（411）随后可改写为傅里叶空间中的形式，从而得到相应全纯延拓的黎曼–希尔伯特问题。该黎曼–希尔伯特问题可以唯一且显式地求解，而 T 的解由傅里叶逆变换给出。完成这一步后，便可直接计算（412）中两个积分的比值。

我们现在实施这一策略。令 $\mathbb{H}^\pm \subset \mathbb{C}$ 表示开上、下半平面。令 $\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$表示定义在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$上的全纯函数 φ 的集合，其中 $\varphi|_{\mathbb{H}^+}$可连续延拓到 $\bar{\mathbb{H}}^+$，且 $\varphi|_{\mathbb{H}^-}$ 可连续延拓到 $\bar{\mathbb{H}}^-$。对于任意这样的 $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$，我们通过以下方式在 $\mathbb{R}$ 上定义连续函数 φ_+ 和 φ_-

$$\varphi_\pm(t) := \lim_{\lambda \to 0^+} \varphi(t \pm \mathrm{i}\lambda). \tag{417}$$

在 Wiener–Hopf 方程的背景下，定义

$$\tilde{T} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \tilde{T}_\uparrow(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} T_\uparrow(x)\mathrm{d}x & \text{if } t \in \mathbb{H}^-, \\ \tilde{T}_\downarrow(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} T_\downarrow(x)\mathrm{d}x & \text{if } t \in \mathbb{H}^+. \end{cases} \tag{418}$$

~ ~注意，根据控制收敛定理，$T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$；根据分部积分，$\lim_{|t|\to\infty} T(t) = 0$；根据傅里叶变换的定义，$T_- = T_\uparrow$ 和 $T_+ = T_\downarrow$。

在傅里叶空间中，方程 (411) 写作

$$(1-\widehat{R})\widehat{T}_\uparrow - \widehat{T}_\downarrow = (1-\widehat{R})\tilde{T}_- - \tilde{T}_+ = \widehat{\mathfrak{e}}. \tag{419}$$

~我们将在下文看到，该方程存在唯一解 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$，且当 $|t| \to \infty$ 时趋于 0。我们通过两个黎曼–希尔伯特问题显式求解：首先求解一个不含驱动项 $\mathfrak{e}$ 的方程变体，然后利用第一个解来求解一个包含该驱动项的第二个黎曼–希尔伯特问题。

24.3 两个黎曼–希尔伯特问题

分支切割将开始发挥作用。我们将定义 α 中涉及的伽马函数 Γ视为右半平面 $\{t \in \mathbb{C}$ 上的全纯函数：$\mathrm{Re}(t) > 0\}$；并将函数 $t \mapsto t^t$ 视为集合 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$上的全纯函数。请回想，$t \mapsto t^t$ 连续延拓到点 $t = 0$，并在该点取值为 1。

定义 $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ 如下：

$$\alpha(t) := \begin{cases} \text{the value given by Table 3} & \text{if } t \in \mathbb{H}^+, \\ 1/\alpha(-t) & \text{if } t \in \mathbb{H}^-. \end{cases} \tag{420}$$

引理 24.4 (第一类黎曼-希尔伯特问题)。 函数 α 满足以下性质：

(i) 函数 α 和 $\alpha_\pm$ 均不为零，*(ii)* 函数 α 满足 极限$\lim_{|t|\to\infty}\alpha(t)=1$，*(iii)* 我们有 $\alpha_-/\alpha_+ = 1-R$。

证明。 我们将 Γ 视为一个在右半平面上处处不为零的全纯函数，而斯特林近似给出的估计相差一个 $1+o(1)$ 阶的因子，其中$|t|\to\infty$。前两个性质可通过基本运算得出。

最后，我们必须证明，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，都有

$$\frac{\alpha_-(t)}{\alpha_+(t)} = \frac{1}{\alpha_+(-t)\alpha_+(t)} = (1-\widehat{R})(t). \tag{421}$$

这是由以下众所周知的恒等式直接得出的

$$\Gamma(1+\mathrm{i}\lambda)\Gamma(1-\mathrm{i}\lambda) = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}; \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\lambda)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\lambda)}, \tag{422}$$

这些恒等式对任意 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{i}\mathbb{Z}$ 均成立。 □

引理24.4 可将（419）改写为

$$\alpha_-\tilde{T}_- - \alpha_+\tilde{T}_+ = \alpha_+\widehat{\mathfrak{e}}. \tag{423}$$

引理 24.5。 方程存在唯一解 $G\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$

$$G_- - G_+ = \alpha_+\widehat{\mathfrak{e}} \tag{424}$$

满足 无穷远处的极限$\lim_{|t|\to\infty}G(t)=0$。特别地，有 $T=G/\alpha$ 和 $T_\uparrow(t)=\alpha_+(-t)G_-(t)$.

证明。 方程（423）表明， $G=\alpha T$ 是方程（424）的一个解。该解还满足 $T_\uparrow(t)=T_-(t)=G_-(t)/\alpha_-(t)=\alpha_+(-t)G_-(t)$。

只需证明解 G 的唯一性即可。设 $G'\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ 表示另一个解。那么 $D:=G-G'\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ 满足

$$D_- - D_+ = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{|t|\to\infty} D(t) = 0. \tag{425}$$

第一个关系表明， D 可连续延拓到 $\mathbb{C}$ ，根据莫雷拉定理，该延拓是一个整函数。由于无穷远处的极限为 0，根据第二个关系，我们得到 $D=0$ 和 $G=G'$ 。

□

引理 24.6. 我们有 $T_\uparrow = T_-$。函数 $T_\uparrow = T_-$ 和 $T|_{\mathbb{H}^-}$ 具有如下显式形式

$$\widehat{T}_\uparrow(t) = \alpha_+(-t)\alpha(t_\zeta)\widehat{\mathfrak{e}}(t); \qquad \tilde{T}_\uparrow|_{\mathbb{H}^-}(t) = \alpha(-t)\alpha(t_\zeta)\widehat{\mathfrak{e}}(t). \tag{426}$$

证明。 方程 (424) 的唯一解 $G\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ 为

$$G(t) := \big(\alpha(t_\zeta) - \alpha(t)\mathbb{1}_{\mathbb{H}^+}(t)\big)\widehat{\mathfrak{e}}(t) \qquad \text{where} \qquad t_\zeta := \begin{cases} \mathrm{i}\pi/\zeta & \text{if } \zeta>0, \\ \mathrm{i}\pi & \text{if } \zeta=0, \end{cases} \tag{427}$$

是 $\widehat{\mathfrak{e}}$ 在 $\mathbb{C}$中的唯一极点。事实上，函数 G 由 (427) 定义，显然是全纯的，且满足所需的无穷远处的极限。跳跃条件很容易验证。

$T_\uparrow$ 和 $T_\uparrow|_{\mathbb{H}^-}$ 的表达式现在可由前一个引理得出。 □

24.4 引理 24.3 的证明

现在我们可以证明引理24.3。

˜引理 *24.3* 的证明。 回忆一下， $T|_{\mathbb{H}^-}$ 是一个全纯函数，并且可以连续延拓 ˆ到实直线，在实直线上它等于 $T_\uparrow$。因此，在第三个等号中使用引理 24.6 可得

$$\int_0^\infty T(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} T_\uparrow(x)\mathrm{d}x = \widehat{T}_\uparrow(0) = \alpha_+(0)\alpha(t_\zeta)\widehat{\mathfrak{e}}(0) = \tfrac{1}{\pi}\alpha_+(0)\alpha(t_\zeta). \tag{428}$$

因此，根据表 $\alpha_+(0)$ 中给出的3 的值以及恒等式

$$\int_0^\infty \mathfrak{e}(x)T(x)\mathrm{d}x = \frac{|t_\zeta|}{2\pi^2}\alpha(t_\zeta)^2. \tag{429}$$

为证明后者，首先注意到 $T_\uparrow$ 和 $\mathfrak{e}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$。事实上，我们已经知道 $T \in L^1(\mathbb{R})$。由于 $T_\uparrow$ 也有界，因此得到 $T_\uparrow \in L^2(\mathbb{R})$。对于 $\mathfrak{e}$，断言显然成立。

因此，可以利用普朗谢雷尔定理得到

$$\int_0^\infty \mathfrak{e}(x)T(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{e}(x)T_\uparrow(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathfrak{e}}(-t)\widehat{T}_\uparrow(t)\mathrm{d}t. \tag{430}$$

˜ ˆ现在， $T|_{\mathbb{H}^-}$ 是全纯函数，并且可以连续延拓到 $\mathbb{R}$，在那里它等于 $T_\uparrow$。由柯西定理可知，对于某个足够小的 $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\infty \mathfrak{e}(x)T(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}-\varepsilon\mathrm{i}} \widehat{\mathfrak{e}}(-t)\tilde{T}(t)\mathrm{d}t. \tag{431}$$

（我们利用被积函数是 $O(1/t^2)$，如 $|t| \to \infty$ 所示。）柯西积分公式（再次利用 $O(1/t^2)$衰减）给出

$$\int_0^\infty \mathfrak{e}(x)T(x)\mathrm{d}x = \frac{|t_\zeta|}{\pi}\tilde{T}(-t_\zeta) = \frac{|t_\zeta|}{\pi}\alpha(t_\zeta)^2\widehat{\mathfrak{e}}(-t_\zeta) = \frac{|t_\zeta|}{2\pi^2}\alpha(t_\zeta)^2. \tag{432}$$

这恰好就是（429），因此证明完成。 □

25 定理4.3的证明

本章节证明定理 4.3。证明依赖要素3（部分 D）。具体而言，我们使用臂指数的界（定理 4.9 ）以及翻转支配（定理 4.10 ）。最后，命题 25.3 发挥了重要作用 —— 它在本章节中陈述，但其证明推迟到第 26章。

证明结构如下。我们首先给出一个预备恒等式，将自由能与大偏差原理联系起来。随后，我们介绍一种策略的直观版本，其中存在一些明显的缺陷。这为我们的严格证明提供了指引；该证明由三个步骤组成。第一步涉及命题 25.3，因此将其推迟到章节 26。

25.1 预备恒等式

我们首先引入 h的恒定偶高度回路这一概念。它是 γ 中由边组成的一个回路，具有如下性质：端点之间的高度差等于零。根据定义， γ 中与端点对应的所有面具有相同的高度，我们将其记为 $h(\gamma)$。我们将该回路的每条边视为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条线段，连接两个对应面的中心；因此，通过这种方式，回路本身可以看作 $\mathbb{R}^2$ 的一个随机子集。

考虑一个拓扑环带，即一个有界且在拓扑上等价于环带的子集 $A \subset \mathbb{R}^2$。对于任意拓扑环带 A 和任意 $k > 0$，定义

$$\mathrm{Circuit}^{+k}(A) := \left\{ \begin{array}{l} A \text{ contains two even height circuits } \gamma_0, \gamma_+ \text{ of } h \text{ with nontrivial} \\ \text{winding in } A, \text{ such that } \gamma_0 \text{ is the outermost even height circuit} \\ \text{included in } A, \text{ and such that } h(\gamma_+) - h(\gamma_0) \geq k \end{array} \right\}. \quad (433)$$

注意，这个事件可以通过 h 的梯度来确定，也就是说，它具有定义良好的 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$-概率。我们首先给出刻画 $f''(0)$ 的另一种方法，其中 f 是自由能。

命题 25.1 （变分原理）。 对于 $\alpha \in (0,1)$，我们有

$$\lim_{\rho\to\infty} \lim_{L\to\infty} \frac{1}{4\rho L^2} \log \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+\alpha L}(A_{\rho,L})] = f(\alpha) - f(0), \quad (434)$$

w此处 $A_{\rho,\ L}: = [\![(\rho+1)\ L \times L]\!] \setminus [\![\rho L \times 0]\!]$，而 $[\![a \times b]\!]$的定义见方程 (278) .

命题 25.1 可以理解为一个变分原理。它告诉我们，在大小为 L 的区域中，高度函数出现量级为 L 的偏差的可能性，可以用自由能泛函来表示（它给出了系统在不同斜率下的熵）。对于高度函数，这一原理最早由 Cohn、Kenyon 和 Propp 在多米诺骨牌铺砌模型的背景下建立 [CKP01] （多米诺骨牌铺砌模型是可积的，但变分原理的证明并未用到其可积结构）。命题 25.1证明所需的所有关键要素都已见于 [CKP01]。之后，Sheffield 在一项工作中证明了适用于一般有限程情形（包括六顶点模型）的变分原理 [She05]。最后，我们提及 [LT24]，，该文也为可能具有无限程的高度函数（同样包括六顶点模型）建立了变分原理。因此，命题 25.1 的证明可见于以下任一参考文献 [CKP01；；24]；此处不再赘述。

25.2 天真的策略及其问题

为了说明我们证明定理 4.3 的策略，我们先借助两个合理但并非完全正确的假设“证明”这一结果；至少在现阶段，我们还无法对它们作出严格论证。下文中， $\approx$ 表示这些事件的概率在相关精度范围内相同。

首先假设

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A_{\rho,L})] \approx \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{ \begin{array}{l} \text{the average of } h \text{ on the line segment } [\![\rho L \times 0]\!] \text{ minus} \\ \text{the average of } h \text{ on } \partial[\![(\rho+1)L \times L]\!] \text{ is at least } k \end{array} \right\}\right]. \quad (435)$$

如果这一假设成立，那么高斯自由场收敛（定理 4.3中的一个假设）以及一项很容易精确化的高斯自由场计算（我们稍后会完整地进行这项计算

细节），就意味着对于固定的 k，我们有

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A_{\rho,L})]$$
$$\approx \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\begin{Bmatrix}\text{the average of } h \text{ on the line segment } [\![\rho L\times 0]\!] \text{ minus}\\ \text{the average of } h \text{ on } \partial[\![(\rho+1)L\times L]\!] \text{ is at least } k\end{Bmatrix}\right] \approx e^{-\frac{(4\rho)k^2}{2\sigma^2}}. \quad (436)$$

现在我们再作一个更为乐观的假设：假设即使将 $k=\alpha L$ 设为某个值，而非固定 k，先前的公式仍然成立。这个假设实在过于大胆，因为高斯自由场收敛适用于概率为常数量级的事件，而将 $k=\alpha L$ 设为某个值则意味着进入大偏差机制。

这样的假设将使我们能够结合方程 (434) 和 (436)，再利用 $k=\alpha L$得到

$$f(\alpha)-f(0)\approx -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}. \quad (437)$$

由于 f 在 $\alpha=0$处二阶可微，这等价于定理 4.3。

在本章节余下部分，我们将介绍定理 4.3的严格证明。该证明并未真正确立前述两个假设，但其思路受到相同思想的启发。注意，等式 $\sigma^2=-1/f''(0)$ 可以看作两个不等式的结合；遗憾的是，在每个步骤中，我们都必须分别处理这两个不等式。

25.3 步骤1. 将大偏差事件分裂为“独立”事件 s

这一步规避了第二个假设所带来的问题。我们实质上把概率量级为 e^{-cL^2} 的大偏差事件分裂成 $O(L^2)$个概率量级为 e^{-c}的“独立”事件。

定义 25.2 (拉直环域). 一条 η-拉直路径 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条路径，它是方格晶格图 $\eta\mathbb{Z}^2$的若干线段之并。一个(ρ,η)-拉直环域是拓扑环带 $A\subset[\![\rho+1]\!]\times\mathbb{R}$，其内边界与外边界均为$\eta$-拉直路径，且内边界穿越竖直带 $[-\rho,\rho]\times\mathbb{R}$。

命题 25.3 (分裂)。固定 $\mathbf{c}\in[1,2]$。

(i) 直线界。 对于固定的 ρ、 k、 $N\in 1000\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 且满足 $N\ge 2k$,

$$\log \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A_{\rho,N})]\le 4\rho N^2\Big(f(\tfrac{k-24}{N})-f(0)\Big). \quad (438)$$

特别是,

$$\limsup_{k\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\tfrac{1}{4\rho k^2}\log \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A_{\rho,N})]\le \frac{1}{2}f''(0). \quad (439)$$

(ii) 卷曲界。 对于固定的 $\rho\in 2\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 和 $\varepsilon\in(0,1/100)$，存在常数 $\eta>0$ 和$C, r=r(\rho,\varepsilon)<\infty$，使得当 $k\in 2\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 充分大且$N\in 2\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 充分大时（取决于 k），有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(\max_{(A_i)\in\mathfrak{A}(r,\rho,\eta,\varepsilon,n)}\prod_i \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+2\lceil(1-\varepsilon)k\rceil}(NA_i)]\Big)$$
$$\ge 4(\rho+1)N^2\Big(f(\tfrac{2(k+4)}{N})-f(0)\Big)+200k^2\log c_{\mathrm{circuit}}-C, \quad (440)$$

其中 $\mathfrak{A}(r,\rho,\eta,\varepsilon,n)$ 是所有由 $\lceil(1-\varepsilon)n\rceil$ 个互不相交的(ρ,η)-拉直环带 A_i 组成的族的集合，这些环带对应于 $1\le i\le\lceil(1-\varepsilon)n\rceil$，直径至多为 $2r=2r(\rho,\varepsilon)$，且包含在 $[\![(\rho+1)\times n]\!]$中。

特别地，

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(\rho+1)nk^2}\log\Big(\max_{(A_i)\in\mathfrak{A}(r,\rho,\eta,\varepsilon,n)}\prod_i\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+2\lceil(1-\varepsilon)k/2\rceil}(NA_i)]\Big)$$
$$\geq\frac{1}{2}f''(0)+\frac{100}{\rho+1}\log c_{\mathrm{circuit}}. \quad (441)$$

命题25.3 的证明推迟到第26节。现在我们转向证明的第二部分，它对应于对我们所作第一项假设的一种变体。

25.4 步骤 2. 回路事件的高斯自由场对应物

首先要注意，我们的第一项假设尚未得到明确界定，因为“平均值”的概念需要引入一个概率测度，而我们并未明确这样做。事实证明，从高斯自由场的角度来看，概率测度有一种唯一自然的选择。我们先来描述这一选择。在本小节中，我们将在任意拓扑环带 $A\subset\mathbb{R}^2$ 的一般情形下进行讨论。

对于任意拓扑环带 A，令 $\partial_{\mathrm{ext}}A$ 表示其外边界，令 $\partial_{\mathrm{int}}A$ 表示其内边界。引入函数

$$H_A\colon\mathbb{R}^2\to[0,1],\quad x\mapsto\mathbb{P}[\{\text{从 } x \text{ 出发的布朗运动在 } \partial_{\mathrm{ext}}A\}].\text{之前到达 } \partial_{\mathrm{int}}A \quad (442)$$

这是.....的唯一有界调和延拓

$$\partial A\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1 & \text{if } x\in\partial_{\mathrm{int}}A,\\ 0 & \text{if } x\in\partial_{\mathrm{ext}}A,\end{cases} \quad (443)$$

到 $\mathbb{R}^2$。令 ν_A 表示与 A 相关的“拉普拉斯测度”：其定义为 $\nu_A:=-\Delta H_A$，也可以刻画为支撑在 ∂A 上的唯一有限符号测度，使得对任意光滑紧支撑函数 $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，都有

$$\int F(x)\mathrm{d}\nu_A(x)=\int\nabla F(x)\cdot\nabla H_A(x)\mathrm{d}x. \quad (444)$$

将 $\nu_A:=\nu_A^+-\nu_A^-$ 分解，其中右侧两项都是（正）有限测度。根据定义，ν_A^+ 支撑在 $\partial_{\mathrm{int}}A$上，而 ν_A^- 支撑在 $\partial_{\mathrm{ext}}A$上。此外，方程 (444) 结合 $F=H_A$ 表明

$$\nu_A^+(\partial_{\mathrm{int}}A)=\nu_A^-(\partial_{\mathrm{ext}}A)=\int|\nabla H_A(x)|^2\mathrm{d}x=:\mathrm{Dirichlet}(H_A). \quad (445)$$

定义

$$\varphi_A:=\frac{1}{\mathrm{Dirichlet}(H_A)}\nu_A. \quad (446)$$

该测度经过归一化，具体而言，它可分解为两个支撑不相交的概率测度之差 $\varphi_A^+-\varphi_A^-$。现在可以陈述本小节的主要结果了。回顾一下，收敛序列 是一个趋于零的序列 $(\delta_n)_n$，使得 $h^{(\delta_n)}$ 收敛到高斯自由场的某个倍数。

命题 25.4 （第一个假设的形式化版本）。对于 $(\delta_n)_n$ 一个收敛序列和 A 一个拓扑环域，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k^2}\log\frac{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\{\langle h,\varphi_{A/\delta_n}\rangle\geq k\}]}{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A/\delta_n)]}=0. \quad (447)$$

在下文中， Γ 表示（在2.3章节的意义下）定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个标准化高斯自由场。为了证明前一个命题，我们首先需要了解随机变量 $\langle \Gamma、\ \varphi_A\rangle$的一些非常基本的性质。

引理 25.5 （高斯自由场分析 $\langle \Gamma, \varphi_A\rangle$）。 对于每个拓扑环带 A,

（i）随机变量 $\langle \Gamma, \varphi_A\rangle$ 服从分布 $\mathcal{N}$（$0, 1/$ 狄利克雷(H_A)），（ii）我们有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} \log \mathbb{P}[\{\langle \Gamma, \varphi_A\rangle \geq k\}] = -\frac{1}{2} \operatorname{Dirichlet}(H_A), \tag{448}$$

（iii）高斯过程 Γ 可以分解为以下各项之和

$$\Gamma = \Gamma^A + \langle \Gamma, \varphi_A\rangle H_A, \tag{449}$$

其中 Γ^A 是一个独立于 $\langle \Gamma, \varphi_A\rangle$的高斯过程。

证明。 任取有限狄利克雷能量广义测试函数 μ。由于格林函数$G_{\mathbb{R}^2}$ 是负拉普拉斯算子的逆，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dirichlet}(H_A) \operatorname{Cov}[\langle \Gamma, \varphi_A\rangle, \langle \Gamma, \mu\rangle] &= \operatorname{Cov}[\langle \Gamma, \nu_A\rangle, \langle \Gamma, \mu\rangle] && (450)\\
&= \int G_{\mathbb{R}^2}(x, y)\, \mathrm{d}\nu_A(x)\, \mathrm{d}\mu(y) && (451)\\
&= \int \mathrm{d}\mu(y)((-\Delta)^{-1}(-\Delta)H_A)(y) && (452)\\
&= \int H_A(y)\, \mathrm{d}\mu(y). && (453)
\end{aligned}$$

特别地，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[\langle \Gamma, \varphi_A\rangle, \langle \Gamma, \varphi_A\rangle] &= \frac{1}{\operatorname{Dirichlet}(H_A)^2} \int H_A(y)\, \mathrm{d}\nu_A(y) && (454)\\
&\overset{(444)}{=} \frac{1}{\operatorname{Dirichlet}(H_A)^2} \int |\nabla H_A(y)|^2 dy && (455)\\
&= \frac{1}{\operatorname{Dirichlet}(H_A)}; && (456)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[\langle \Gamma, \varphi_A\rangle, \langle \Gamma, \delta_x - \varphi_A^-\rangle] &= \frac{1}{\operatorname{Dirichlet}(H_A)} \int H_A(y)\, \mathrm{d}(\delta_x - \varphi_A^-)(y) && (457)\\
&= \frac{H_A(x)}{\operatorname{Dirichlet}(H_A)}. && (458)
\end{aligned}$$

（i）由（456）得出。（ii）由（i）得出。现在我们来看（iii）。由于 Γ 是一个中心化高斯过程，因此显然可以将其分解为以下形式$\Gamma = \Gamma^A + \langle \Gamma,\ \varphi_A\rangle F$。只需证明 $F = H_A$，这可由（456）和（458）得出。 □

下一个引理是前一个引理的直接推论。

引理 25.6。对于收敛序列（δ_n）$_n$ 以及拓扑环带 A,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^2} \log \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \geq k\}] &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} \log \mathbb{P}[\{\langle \sigma\Gamma, \varphi_A\rangle \geq k\}] && (459)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} \operatorname{Dirichlet}(H_A), && (460)
\end{aligned}$$

其中， σ^2 是沿$(\delta_n)_n$的极限高斯自由场的方差。

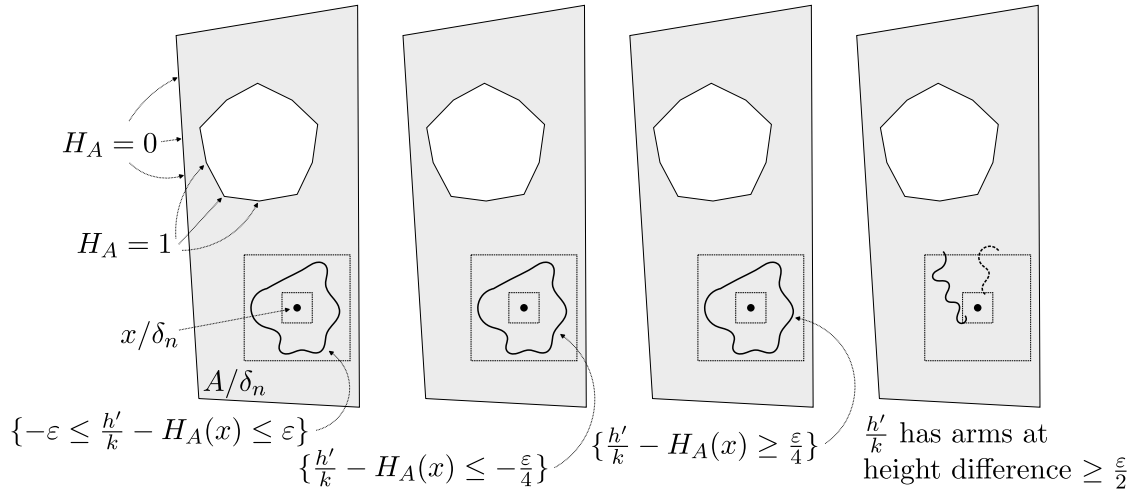


图25：根据拓扑学考量，缩放高度函数 $(h')^{(\delta_n)}/k$必定会发生以下三个事件之一：引理 25.7 陈述中的事件（左图）、证明中的事件 $E_- \cup E_+$（中间图），或证明中的事件 E_*（右图）。

接下来的引理将完成主要工作。下文中，将 $F(\mathbb{Z}^2)$的子集视为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，方法是取连接相邻面的中心的线段之并集。

引理 25.7。固定$\mathbf{c} \in [1,2]$。对于任意收敛序列$(\delta_n)_n$、任意拓扑环带A 及任意 $\varepsilon > 0$，我们都可以找到某个常数 $\alpha > 0$，使得以下结论成立。令h' 表示 h 中满足 $\varphi^-_{A/\delta_n}(h') \in [0,2)$ 的代表元（这隐含地依赖于 n）。假设 $x \in A$ 和 $r > 0$ 的选取满足球$r(x) \subset A$。那么，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{\begin{array}{l}\{H_A(x) - \varepsilon \le \frac{h'}{k} \le H_A(x) + \varepsilon\} \text{ contains} \\ \text{a nontrivial circuit in } \mathrm{Annulus}_{r,\alpha r}(x)/\delta_n\end{array}\right\} \middle| \{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \ge k\}\right] = 1. \tag{461}$$

我们先非正式地解释一下这个引理的陈述。高度函数 $h^{(\delta_n)}$ 在有限维分布的意义下收敛到高斯自由场的一个倍数。特别地，在条件测度$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\cdot|\{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \ge k\}]$ 下，$(h')^{(\delta_n)}/k$ 的分布收敛到 $H_A + \sigma\Gamma^A/k$，当 n趋于无穷时（引理 25.5）。这意味着在双重极限下，$(h')^{(\delta_n)}/k$ 收敛到确定性函数 H_A，但仅在有限维分布的意义下。

该引理建立了这种分布收敛与$(h')^{(\delta_n)}/k$ 的水平集中回路的出现之间的联系（这些水平集定义在微观尺度上）。更准确地说，它指出，以高概率，对于任意点 $x \in A$，都可以找到一个微观回路将其围住，且沿着该回路，$(h')^{(\delta_n)}/k$ 的高度接近 $H_A(x)$（图25）。

证明。定义以下三个事件：

$$E_- := \left\{ \begin{matrix} \{\frac{h'}{k} \le H_A(x) - \frac{\varepsilon}{4}\} \text{ contains a nontrivial} \\ \text{circuit in } \mathrm{Annulus}_{r,\alpha r}(x)/\delta_n \end{matrix} \right\}; \tag{462}$$

$$E_+ := \left\{ \begin{matrix} \{\frac{h'}{k} \ge H_A(x) + \frac{\varepsilon}{4}\} \text{ contains a nontrivial} \\ \text{circuit in } \mathrm{Annulus}_{r,\alpha r}(x)/\delta_n \end{matrix} \right\}; \tag{463}$$

$$E_* := \left\{ \begin{matrix} \text{we may find some } a \in 2\mathbb{Z} \text{ such that } \{h + a \le 0\} \subset F(\mathbb{Z}^2) \\ \text{and } \{h + a \ge \frac{\varepsilon}{2}k\} \text{ both contain a path connecting the} \\ \text{two boundary components of } \mathrm{Annulus}_{r,\alpha r}(x)/\delta_n \end{matrix} \right\}. \tag{464}$$

我们断言，若引理陈述中的事件不发生，则事件$E_- \cup E_+ \cup E_*$必然发生。该断言基于拓扑原因（图25）。事实上，若陈述中的事件不发生，那么其中一个

$$\{h'/k - H_A(x) \ge 7\varepsilon/8\} \quad \text{or} \quad \{h'/k - H_A(x) \le -7\varepsilon/8\} \tag{465}$$

必须包含一条环域臂。若事件 $E_- \cup E_+$ 不发生，则两者

$$\{h'/k - H_A(x) \ge -3\varepsilon/8\} \quad \text{and} \quad \{h'/k - H_A(x) \le 3\varepsilon/8\} \tag{466}$$

必须包含一条环域臂。但若 (465) 中的一个以及 (466) 中的两个都包含一条环域臂，则 E_* 就会发生。由此得证。

根据该断言，只需证明事件 E_-、 E_+和 E_* 在极限中各自发生的条件概率都很低。我们先处理 E_* ，方法是为 α选取一个合适的值。注意，臂指数的界（定理 4.9）意味着

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[E_*] \le \alpha^{c\varepsilon^2 k^2/4}. \tag{467}$$

若 α 足够小，则引理 25.6 表明，该概率相对于条件事件的概率可以忽略不计。从现在起，固定这样一个 $\alpha > 0$ 。

只需证明 E_- 发生的条件概率趋于零（ E_+ 的情形类似）。令 π_n 表示以 x/δ_n为圆心、半径为α/δ_n 的圆上的均匀概率测度。根据翻转支配（定理4.10），我们得到

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{ \frac{\langle h, \pi_n - \varphi^-_{A/\delta_n} \rangle}{k} \le H_A(x) - \frac{\varepsilon}{8} \right\} \middle| E_- \cap \{\langle h, \varphi_{A/\delta_n} \rangle \ge k\} \right] \ge \frac{1}{2}. \tag{468}$$

但在不以 E_- 为条件事件的情况下，引理 25.5 告诉我们

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{ \frac{\langle h, \pi_n - \varphi^-_{A/\delta_n} \rangle}{k} \le H_A(x) - \frac{\varepsilon}{8} \right\} \middle| \{\langle h, \varphi_{A/\delta_n} \rangle \ge k\} \right] = 0. \tag{469}$$

E_- 的条件概率趋于零。 □

命题的证明 *25.4*. 考虑一个收敛序列 (δ_n)。令 σ^2 为极限高斯自由场的方差。我们将方程（447）视为两个不等式的组合，并以略有不同的方式处理。更准确地说，只需证明对于固定的 $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\{\langle h, \varphi_{A/\delta_n} \rangle \ge k\}]}{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k+4}(A/\delta_n)]} \ge \tfrac{1}{4}; \tag{470}$$

$$\liminf_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A/\delta_n)]}{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\{\langle h, \varphi_{A/\delta_n} \rangle \ge (1+4\varepsilon)k\}]} \ge \tfrac{1}{4}. \tag{471}$$

方程的证明 (470)。 事实上，我们将使用翻转支配证明对于固定的 k 和 n 该不等式成立。定义 γ_0 为 A/δ_n 中最外层的偶高度回路，并定义 γ_ℓ 为 A/δ_n 中满足 $h(\gamma_\ell) - h(\gamma_0) = \ell$ 的最外层偶高度回路。这些回路可能有定义，也可能没有（若没有定义，则令它们等于 $\emptyset$）。引入事件$C_\ell := \{\gamma_\ell \neq \emptyset\}$。对于 $\ell \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$，定义随机变量

$$X_0 := h(\gamma_0) - \varphi^-_{A/\delta_n}(h); \tag{472}$$

$$X_\ell := \varphi^+_{A/\delta_n}(h) - h(\gamma_\ell). \tag{473}$$

在 C_ℓ 上，我们有

$$\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle = X_0 + \ell + X_\ell. \tag{474}$$

翻转支配（定理 4.10）意味着，对任意偶数 $\ell \geq 4$,

$$\mathbb{P}[\{X_0 \leq 0\} \cap C_\ell] \leq \mathbb{P}[\{X_0 \leq 0\} \cap C_{-\ell+4}] = \mathbb{P}[\{X_0 \geq 0\} \cap C_{\ell-4}], \tag{475}$$

其中等号仅仅来自总体翻转对称性。由于还有 $C_{\ell-4} \subset C_\ell$，我们得到

$$\mathbb{P}[\{X_0 \geq 0\} \cap C_{\ell-4}] \geq \tfrac{1}{2}\mathbb{P}[C_\ell]. \tag{476}$$

再次利用翻转支配（定理 4.10），我们得到

$$\mathbb{P}[\{X_{\ell-4} \geq 0\} | \{X_0 \geq 0\} \cap C_{\ell-4}] \geq \tfrac{1}{2}. \tag{477}$$

综合以上各项，我们得到

$$\mathbb{P}[\{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \geq \ell - 4\}] \geq \mathbb{P}[\{X_0 \geq 0\} \cap C_{\ell-4} \cap \{X_{\ell-4} \geq 0\}] \geq \tfrac{1}{4}\mathbb{P}[C_\ell]. \tag{478}$$

令 $\ell = k + 4$，得到方程（470）。

方程的证明 (471)。 定义 h' 如引理 25.7。利用引理 25.7 以及并集界（另见注记16.2），我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{\begin{array}{l}\{\frac{h'}{k} \leq \varepsilon\} \text{ and } \{\frac{h'}{k} \geq 1 + 3\varepsilon\} \text{ contain} \\ \text{a nontrivial circuit in } A/\delta_n\end{array}\right\} \middle| \{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \geq (1 + 4\varepsilon)k\}\right] = 1. \tag{479}$$

由介值定理，我们由此推出

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left[\left\{\begin{array}{l}\text{there are two even height circuits} \\ \gamma_0, \gamma_+ \text{ winding nontrivially in } A/\delta_n \\ \text{with } h(\gamma_+) - h(\gamma_0) \geq (1 + \varepsilon)k\end{array}\right\} \middle| \{\langle h, \varphi_{A/\delta_n}\rangle \geq (1 + 4\varepsilon)k\}\right] = 1. \tag{480}$$

方程（471）可通过将此与（470）、引理 25.6以及该不等式相结合而得到

$$\mathbb{P}[C_{\ell+2\ell'-4}] \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}[C_\ell \cap C_{-\ell'}] \qquad \text{for any even } \ell \geq \ell' \geq 2, \tag{481}$$

它可用与上文方程（470）的证明相同的方法得到。至此证明完毕。

□

25.5 定理4.3的证明

有了上述准备，该定理的证明基本上归结为对狄利克雷能量的分析。

定理的证明 *4.3*。 考虑一个收敛序列 $(\delta_n)_n$ 并令 σ^2 为相应极限高斯自由场的方差。

证明 $f''(0) \geq -1/\sigma^2$。首先，将命题 25.3 中的直线界与命题 25.4及引理25.6 结合可得

$$\frac{1}{2}f''(0) \geq -\frac{\text{Dirichlet}(H_{A_{\rho,1}})}{4\rho}\frac{1}{2\sigma^2}. \tag{482}$$

引入一个新函数

$$H'_\rho : \mathbb{R}^2 \to [0,1],\ x \mapsto 0 \vee (1 - \text{dist}(x, [\![\rho \times 0]\!])) \tag{483}$$

它在 ∂A_ρ上与$H_{A_{\rho,\ 1}}$ 一致。由于调和函数能使狄利克雷能量最小，

$$\text{Dirichlet}(H_{A_{\rho,1}}) \leq \text{Dirichlet}(H'_\rho) = 4\rho + C, \tag{484}$$

其中 C 是一个与 ρ无关的常数。令 ρ 趋于无穷即可得到结论。

证明 $f''(0) \leq -1/\sigma^2$。考虑命题 25.3**(ii)** 中的卷曲界。重要的是，对于固定的 ρ 和 ε，形状 的 (ρ,η)-拉直环带 A_i 只有有限多个，且其直径至多为 $2r$ （若两个拓扑环带相差一个平移，我们就称它们具有相同的形状）。由于形状只有有限多个，我们可以对每种形状应用命题 25.4和引理25.6 ，从而得到

$$-\lim_{n\to\infty}\min_{(A_i)\in\mathfrak{A}(r,\rho,\eta,\varepsilon,n)}\frac{1}{4(\rho+1)n}\sum_i\frac{\text{Dirichlet}(H_{A_i})}{2\sigma^2} \geq \frac{1}{2}f''(0) + \frac{100}{\rho+1}\log c_{\text{circuit}}. \tag{485}$$

回忆一下， $\mathfrak{A}(r,\ \rho,\ \eta,\ \varepsilon,\ n)$ 是所有如下族的集合：由 $K_n := \lceil(1-\varepsilon)n\rceil$ 个互不相交的（ρ，η)-拉直环带组成， A_i 其直径至多为 $2r$，并且包含于 $[\![(\rho+1)\ \times n]\!]$中。

为了推出 $f''(0) \leq -1/\sigma^2$，由（485），只需证明

$$\sum_{i=1}^{K_n}\text{Dirichlet}(H_{A_i}) \geq 4\rho n(1-\varepsilon)^2, \tag{486}$$

因为 ρ 和 n 可以取任意大，而 ε 可以取任意小。方程（486）可通过直接计算得到，下面将对此进行说明。

固定 $(A_i) \in \mathfrak{A}(r,\ \rho,\ \eta,\ \varepsilon,\ n)$；现在我们将证明（486）。由于这些环带互不相交，我们得到

$$\sum_i\text{Dirichlet}(H_{A_i}) = \text{Dirichlet}\left(\textstyle\sum_i H_{A_i}\right) \geq \int_{[\![\rho\times n]\!]}\left|\nabla_2\left(\textstyle\sum_i H_{A_i}\right)(z)\right|^2\mathrm{d}z. \tag{487}$$

为避免疑义：右侧只在比 $\mathbb{R}^2$ 更小的集合上对垂直导数的平方积分，因此不等式成立。将 $z = (x,\ y)$ 记作这样，我们可以将其明确写为

$$\sum_i\text{Dirichlet}(H_{A_i}) \geq \int_{-\rho}^{\rho}\int_{-n}^{n}\left|\partial_y\left(\textstyle\sum_i H_{A_i}\right)(a,b)\right|^2\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a. \tag{488}$$

现在我们断言，对于固定的 $a \in [-\rho,\rho]$，有

$$\int_{-n}^{n}\left|\partial_y\left(\textstyle\sum_i H_{A_i}\right)(a,b)\right|^2\mathrm{d}b \geq 2n(1-\varepsilon)^2, \tag{489}$$

这显然足以推出方程 (486)。注意， $\sum_i H_{A_i}$ 沿垂直线 $\{a\}\times[-n,n]$ 的全变差至少为 $2K_n \geq 2(1-\varepsilon)n$，因为每个环域对沿这条线的全变差至少贡献 2 。方程 (489) 现在可由下面的引理推出。

□

引理 25.8。 设 $g\colon [-n,n]\to\mathbb{R}$ 表示任意一个连续分段光滑函数，其全变差至少为 $2(1-\varepsilon)n$。那么 $\int g'(x)^2\mathrm{d}x \geq 2n(1-\varepsilon)^2$。

证明。 不妨设 $g(-n)=0$，且 g 单调不减；如有必要，可将其替换为 $\tilde{g}(x):=\int_{-n}^{x}|g'(t)|\,\mathrm{d}t$（该函数具有相同的全变差和狄利克雷能量）。这也意味着 $g(n)\geq 2(1-\varepsilon)n$。然而，给定数值 $g(-n)$ 和 $g(n)$，我们知道哪个函数 $\hat{}g$ 能使一维狄利克雷能量最小：它是一个一维调和函数，也就是线性插值。因此我们得到

$$\int g'(x)^2\mathrm{d}x \geq \int \hat{g}'(x)^2\mathrm{d}x = \frac{g(n)^2}{2n} \geq 2n(1-\varepsilon)^2. \tag{490}$$

证明至此完成。 □

26 分裂的证明（命题25.3）

我们以证明命题25.3中的两个界来结束本文。本节由两个小节组成，分别讨论其中一个界。第一个界的证明比第二个界容易得多。

本节建立在以下思想之上：第14节的一般自旋表示、第20节的水平线树与协方差结构，以及第19 节（定理19.7的证明）中使用的组合论证。

26.1 直线界的证明（命题 25.3(i)）

命题25.3(i) 的证明分为四个步骤。首先，我们将量$\chi := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\text{回路}^{+k}(A_{\rho,\ N})]$ 改写为自旋表示的分支函数。其次，我们利用 FKG 不等式证明（大致而言），在一个极宽的拓扑环带 $A_{2n\rho,\ N}$ 中出现回路的概率至少为 χ^{2n}。第三，我们将这些环带沿垂直方向堆叠起来，以此说明在某个概率下界为 χ 的幂次的大矩形中，可以得到许多水平穿越。最后，我们将最终的量与自由能 $f(\alpha)$ 联系起来。

命题 *25.3(i)* 的证明。取 ρ， k，以及 N。

步骤1：改写为分支函数的形式。回想一下， h在 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}$ 和 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$中的分布相同。我们将只在测度 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$下进行讨论。根据事件包含关系，我们得到

$$\chi := \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+k}(A_{\rho,N})] \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{k/2-4}(A_{\rho,N})]. \tag{491}$$

回顾极大区域的定义（定义 20.8）。令 $\mathcal{D}\in\mathcal{M}^{+}(A_{\rho,N})$ 表示使得 $\partial\mathcal{D}$ 包围 $A_{\rho,N}$ 的内边界的最大区域（若不存在这样的区域，则令 $\mathcal{D}:=\emptyset$）。由塔式性质和马尔可夫性质，我们得到

$$\chi \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{k/2-4}(A_{\rho,N})] = \mu_{\mathbb{Z}^2}\left[\mu^{+}_{\mathcal{D}}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{k/2-4}(A_{\rho,N})]\mathbb{1}[\mathcal{D}\neq\emptyset]\right]. \tag{492}$$

现在，回顾分支函数及其对角线的定义 ψ^*（定义 20.6）。粗略地说， $\psi^*/2$统计了围绕每个点的交替不相交回路数量。由于 交替回路$^{\bar{\omega}}_{k/2-4}(A_{\rho,\ N})\subset$回路$^{\{\psi^*\geq k-12\}}(A_{\rho,\ N})$，我们可以使用前面的界和区域单调性（引理 20.10）将 $\mathcal{D}$推开，从而得到

$$\chi \leq \mu^{+}_{[\![(\rho+1)N\times N]\!]}[\mathrm{Circuit}^{\{\psi^*\geq k-12\}}(A_{\rho,N})]. \tag{493}$$

步骤 2：估计极宽环带中出现回路的概率。我们断言，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，

$$\chi^{2n} \leq \mu^{+}_{[\![(2n\rho+1)N\times N]\!]}[\mathrm{Circuit}^{\{\psi^* \geq k-12\}}(A_{2n\rho,N})]. \tag{494}$$

我们称 $2n$ 为 水平重数。为说明该断言成立，首先注意到，区域单调性和 FKG 不等式（引理 20.10 ）意味着

$$\chi^{2n} \leq \mu^{+}_{[\![(2n\rho+1)N\times N]\!]}\Big[\bigcap_{i=1}^{2n} \mathrm{Circuit}^{\{\psi^* \geq k-12\}}(A_{\rho,N} + ((2i-2n-1)\rho N, 0))\Big] \tag{495}$$

$$\leq \mu^{+}_{[\![(2n\rho+1)N\times N]\!]}[\mathrm{Circuit}^{\{\psi^* \geq k-12\}}(A_{2n\rho,N})]. \tag{496}$$

第二个不等式只是事件包含（见备注 16.2）。

若令 $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^{-}([\![(2n\rho+1)N \times N]\!])$ 表示包含该环域孔洞的最大区域，则边界推移得到

$$\chi^{2n} \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{\{\psi^*_{\mathcal{A}} \geq k-14\}}(A_{2n\rho,N})|\mathcal{E}] \tag{497}$$

对于任意关于 $[\![(2n\rho+1)N \times N]\!]$ 外部偶边可测的事件 $\mathcal{E}$。由事件包含，我们进而得到

$$\chi^{2n} \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltHor}^{\bar{\omega}}_{k-20}([\![2n\rho N \times N]\!])|\mathcal{E}]. \tag{498}$$

步骤 3：将极宽的环带垂直堆叠。固定 ρ'，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。在具有水平重数$2\rho' n$的 $2n$ 个垂直堆叠的矩形中，将前一步骤应用 $2n$ 次。这得到

$$\chi^{4\rho' n^2} \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[E_+ \cap E_-], \tag{499}$$

其中

$$E_{\pm} := \mathrm{AltHor}^{\bar{\omega}}_{n(k-22)}([\![\rho\rho' 2nN]\!] \times \pm[0, 2nN]). \tag{500}$$

步骤 4：将我们的量与自由能联系起来。我们首先断言

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{n(k-23)}(A_{\rho\rho',2nN})|E_+ \cap E_-] \geq c^{n^2N^2} \tag{501}$$

对某个固定的小常数 $c > 0$。我们通过一个直接的有限能量或外科手术论证来证明该断言。事实上，条件化于 $E_+ \cap E_-$，并揭示验证该事件发生所需的边。然后，任何未揭示的偶边仍以一致有界的正概率处于开放状态（除非它连接了两个已知具有相反自旋的顶点）。通过对至多 $100n^2N^2$ 条此类边的状态进行条件化，我们可以将水平穿越连接起来，使得事件 $\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{n(k-23)}(A_{\rho\rho',\ 2nN})$ 发生。这就证明了上述显示式。

因此，我们得到

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{n(k-23)}(A_{\rho\rho',2nN})] \geq c^{n^2N^2} \cdot \chi^{4\rho' n^2}. \tag{502}$$

最后，通过掷硬币（对 $V_\bullet(\mathcal{X})$ 中的每个元素，见引理 20.4）来确定奇自旋，我们得到

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+2n(k-24)}(A_{\rho\rho',2nN})] \geq 2^{-nk} \cdot c^{n^2N^2} \cdot \chi^{4\rho' n^2}. \tag{503}$$

根据变分原理（命题 25.1），先令 n，再令 ρ' 趋于无穷，我们得到

$$f(\tfrac{k-24}{N}) - f(0) \geq \frac{1}{4\rho N^2} \log \chi. \tag{504}$$

这就是所需的不等式。 □

26.2 卷曲界的证明（命题 25.3(ii)）

我们从关键步骤开始证明，这一步称为脊分割（引理26.4）。完成关键步骤后，我们将引理26.4中不等式的一侧与变分原理（命题25.1）联系起来，见下文引理26.6 。最后，我们进行三个简化步骤，将另一侧与命题25.3中的量联系起来。这三个简化步骤分别是：截断区域直径（引理26.12）、解耦（引理26.13）以及环带拉直（引理26.14）。命题25.3 中的卷曲界是引理26.14的直接推论。

下一个引理直接由经由 Bethe Ansatz 得到的自由能的二阶可微性推出（该结果需要精确可积性）。我们希望本章节独立于此类可积性，因此给出该引理的一个仅依赖于回路估计的替代证明。

引理 26.1（经由 RSW 理论得到的自由能下界）。 存在常数$c_{\mathrm{fe}} < \infty$，使得 $f(\alpha) - f(0) \geq -c_{\mathrm{fe}}\alpha^2$对任意 $\alpha < 1$。

证明。 由于 $f(\alpha)$ 是凸函数，只需对 $\alpha \approx 0$ 界定 $f(\alpha)$。回顾命题 25.1。容易看出，事件交替回路$\bar{\omega}_{2\lceil \alpha L/4 \rceil}(A_{\rho,\ L})$ 包含于 $O(\rho L^2\alpha^2)$ 个回路事件的交集之中，因而其概率至少为 $(c_{\mathrm{circuit}})^{O(\rho L^2\alpha^2)}$。这些回路以某种方式组合，从而在拓扑环带中形成交替的ω^+-环与 ω^--环（参见注记 16.2）。在该事件条件下，事件回路$^{+\alpha L}(A_{\rho,\ L})$ 的概率至少为 $e^{-O(\alpha L)}$，因为每条回路以概率 $1/2$ 向上定向。该下界即导出引理中所需的界。

□

26.2.1 脊分割

为了定义更复杂的事件，引入以下概念会很有用。

定义 26.2（局部水平线森林）。 回顾关于水平线树的定义20.1以及关于极大区域的定义20.8 。考虑一个固定的连续区域 $D \subset \mathbb{R}^2$。局部水平线森林 是由水平线树 $\mathcal{L}^D := (\mathcal{X}_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}\in\mathcal{M}^+(D)}$构成的族。这意味着我们首先找出 D 中满足 $\partial\mathcal{D} \subset \omega^+$ 的极大区域 $\mathcal{D}$，然后为每个这样的区域 $\mathcal{D}$ 构造水平线树 $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$。

我们关注某个森林深度处的 ω-回路，也就是说，它们包含在某个水平线树 $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ 中、距离$\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$的根该距离处的一个顶点内。

我们可以用这个概念来定义脊事件。脊事件基本上是指存在某个最外层的 ω^+-回路，其中可以找到交替出现的 ω^+/ω^--回路，并且第 k 个回路仍然包围着一条与 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 交叉的路径。

定义 26.3（脊事件）。 令 $D \subset \mathbb{R}^2$ 表示一个区域，固定 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，并令 $a \leq b$。然后，定义

$$\mathrm{Ridge}^{\bar{\omega}}_k(D,a,b) := \bigcup_p \mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_k(D\setminus p) = \bigcup_p \left\{ \begin{matrix} \text{some } \omega^-\cap D\text{-circuit at forest} \\ \text{depth } 2k-2 \text{ surrounds } p \end{matrix} \right\}, \tag{505}$$

其中并集遍历所有路径 p 从 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 的左侧到右侧（见图 26）。

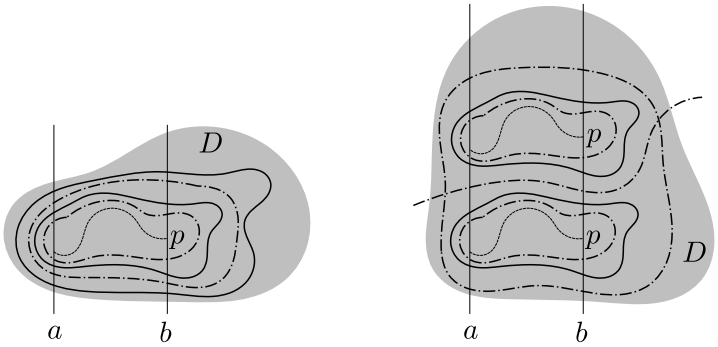


图 26：左：事件 $\mathrm{Ridge}_4^{\bar{\omega}}(D,\ a,\ b)$。右：事件 $\{\#\,\mathrm{Ridge}_2^{\bar{\omega}}(D,\ a,\ b)\ =2\}$。

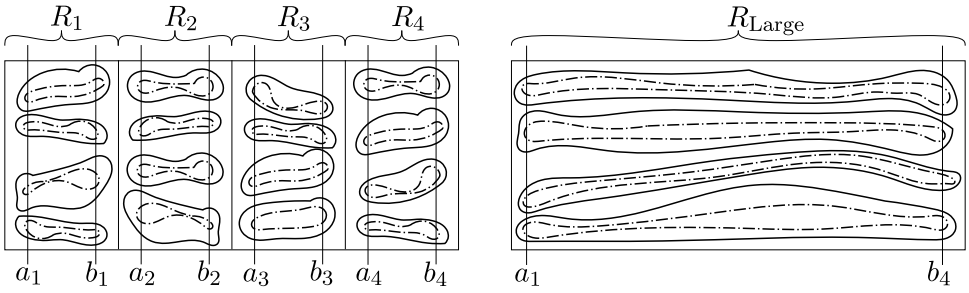


图 27：左：引理 26.4 中的左侧事件。右：引理26 .4.

我们还定义

$$\#\,\mathrm{Ridge}_k^{\bar{\omega}}(D,a,b) := \#\left\{\mathcal{D}\in\mathcal{M}^+(D):\begin{array}{l}\text{some } \omega^-\cap D\text{-circuit at depth } 2k-2 \text{ in } \mathcal{X}_{\mathcal{D}}\\ \text{surrounds some path } p \text{ that crosses } [a,b]\times\mathbb{R}\end{array}\right\}; \tag{506}$$

这只是统计脊事件发生的极大区域的数量。

卷曲界证明中的关键步骤是脊分割 (引理26.4和图27)。这个引理涉及脊事件。在比较的一侧，我们考虑大矩形包含许多极大区域的事件，这些区域包含若干个非常宽的嵌套 ω^+/ω^--回路（图27右侧）。在另一侧，我们将大矩形切分成较小矩形，并考虑较小矩形包含许多极大区域的事件，这些区域包含若干个嵌套的 ω^+/ω^--回路（图27左侧）。

对于 $\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，其中 $k,\ N/k\geq 100$，定义以下矩形：

- 边长为 $4n\rho'(\rho+1)N$ 和 $4nN$ 的矩形为

$$R_{\mathrm{Large}} := [\![2n\rho'(\rho+1)N\times 2nN]\!], \tag{507}$$

- 该矩形可沿垂直方向切分为 $2n\rho'$ 个宽度为 $2(\rho+1)N$、高度为 $4nN$的矩形，我们将它们称为 R_i（从左到右编号），$i=1$、.....、$2n\rho'$，
在 R_i内居中放置一个宽度为 $2\rho N$、高度为 $4nN$ 的矩形，记作 $R_i'\subset R_i$，
分别记 a_i 和 b_i 为 R_i' 左右两侧的横坐标。

定义事件

$$\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n} := \left\{\textstyle\sum_{i=1}^{2n\rho'}\#\,\mathrm{Ridge}_{k-4}^{\bar{\omega}}(R_i,a_i,b_i)\geq 4n^2\rho'\right\}. \tag{508}$$

引理 26.4（脊分割，参见图 27）。对于 $\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足 $k,\ N/k\geq 100$，

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}\left[\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n}\right]\geq (c_{\mathrm{circuit}})^{100k^2n^2\rho'}\cdot\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\#\,\mathrm{Ridge}_k^{\bar{\omega}}(R_{\mathrm{Large}},a_1,b_{2n\rho'})\geq 2n\}]. \tag{509}$$

证明的思路是，如果右侧的事件发生，那么我们就可以通过某种局部方式重新排列渗流 $\bar{\omega}$，从而构造出左侧的事件。具体来说，我们会对稍窄的矩形之间垂直狭缝中的构型进行重新布线。重新布线时，首先探索所需事件（以右侧事件为条件，见图 29），然后利用回路估计得到合适的布线（见图 30）。

在开始证明之前，我们先定义一个探索过程。这个探索过程可能成功，也可能失败，其中 $\mathcal{S}$ 表示它成功这一事件。该事件包含方程 (509) 右侧的事件。探索过程结束后，我们将证明，在给定 $\mathcal{S}$ 的条件下，事件 $\mathcal{E}_{\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n}$ 发生的概率至少为 $(c_{\text{circuit}})^{100k^2n^2\rho'}$。这将推出该引理。

为便于构造，对于任意 $A,\ \omega \subset \mathbb{R}^2$ 以及任意矩形 $R \subset \mathbb{R}^2$，定义集合

$$\mathfrak{B}(A,\omega,R) := \left\{ u \in A \cap R : \begin{array}{l} \{u\} \text{ and } \partial A \text{ do not intersect the same} \\ \text{connected component of } R \setminus \omega \end{array} \right\}; \tag{510}$$

$$\mathfrak{C}(A,\omega,R) := \left\{ D : \begin{array}{l} D \text{ is a connected component of } \mathfrak{B} \text{ intersecting} \\ \text{both the left and right of } R \end{array} \right\}. \tag{511}$$

我们将 $\mathfrak{B}$ 视为点的集合，这些点在 被阻挡 (或 被屏蔽在外)而无法接触到 ∂A，这是由 ω 在 R 内造成的；并将 $\mathfrak{C}$ 视为 穿越 这些被阻挡点的交叉，且位于 R 中。参见图 28。

在下面的构造中，$R'_{i,\ j} \subset R_i$ 定义为一个宽度为 $2(\rho + j/k)N$、高度为 $4nN$ 的矩形，其中心位于 R_i 内。

注记26.5。我们将$R'_{i,\ j}$ 视为在 R'_i 和 R_i之间的“插值”，也就是说

$$R'_i = R'_{i,0} \subset R'_{i,1} \subset \cdots \subset R'_{i,k-1} \subset R'_{i,k} = R_i. \tag{512}$$

在引理的设定中，探索过程由一棵以 R_{Large}为根的树 $\mathcal{T}$ =$(V(\mathcal{T})\ E(\mathcal{T}))$表示。对于每个距根距离为 j的 $x \in V(\mathcal{T})$，令 $\mathcal{N}(x)$表示距根距离为 $j+1$ 的 x 的邻点（字母 $\mathcal{N}$指的是嵌套，原因很快就会明了）。这棵树通过迭代方式构造：显式地构造函数 $\mathcal{N}$ 以及距根距离为 j 的顶点（令 $V_j(\mathcal{T})$表示这个集合），具体如下：

- $\mathcal{N}(R_{\text{大}})$：$= \{\ \mathbb{R}^2 \setminus \partial\mathcal{M}^+(R_{\text{大}})\}$的有界连通分支。
- 对于任意 $A \in V_1(\mathcal{T})$，令 $\mathcal{N}(A)$：$\mathbb{R}^2 \setminus \partial\mathcal{M}^-(A)\}$的有界连通分支。
- 对于任意 $A \in V_2(\mathcal{T})$，令 $\mathcal{N}(A)$：$A,\ \omega^+,\ R'_{i,\ k-2})$,
- 对于任意 $A \in V_3(\mathcal{T})$，令 $\mathcal{N}(A) := \cup_{i=1}^{2n\rho'} \mathfrak{C}(A,\ \omega^-,\ R'_{i,\ k-3})$,

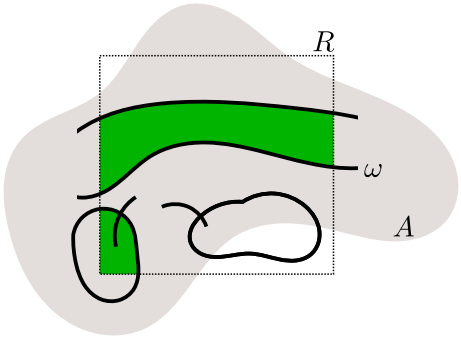


图28：绿色集合表示 $\mathfrak{B}$。只有宽绿色分支属于 $\mathfrak{C}$。

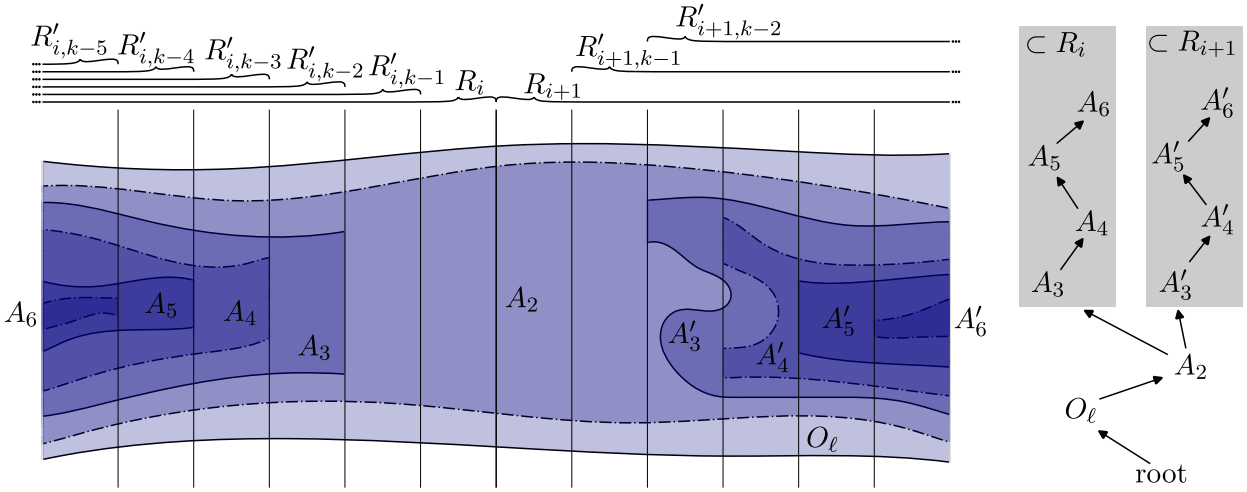


图 29：探索树中的嵌套集合 $\mathcal{T}$（假设 $\mathcal{S}$ 发生）。

• 然后交替重复最后两个步骤，依次使用 $+$ 和 $-$，直到定义出 $V_k(\mathcal{T})$。有了这个定义，我们现在可以证明该引理。

引理的证明 *26.4*。我们先作一些说明。注意，这棵树具有嵌套结构，即对于任意 $A' \in \mathcal{N}(A)$。还要注意，任意 $A \in \cup_{j>2} V_j(\mathcal{T})$ 都包含在某个 R_i 中。我们将 $(V_{j,i})_i$ 记为 $V_j(\mathcal{T})$ 的划分，使得任意 $A \in V_{j,i}$ 都包含在 R_i 中。

令 $\mathcal{S}$ 表示事件

$$\mathcal{S} := \Big\{ \text{存在 } 2n \text{ 个互不相同的元素 } (O_\ell)_{\ell=1,\dots,2n} \subset V_1(\mathcal{T}), \text{ 使得对于每个 } 1 \le \ell \le 2n \text{ 和 } 1 \le i \le 2n\rho', \ O_\ell \text{ 的后代中都包含 } V_{k,i} \text{ 的一个元素} \Big\} \tag{513}$$

图 29 详细展示了这一事件，放大了一个小矩形以及位于两个矩形 O_ℓ 之间的一个元素 R_i 和 R_{i+1}。检查 $\mathcal{S}$ 包含在方程（509）右侧的事件中虽然繁琐，但并不困难。

$$\mathcal{S} \subset \{\#\,\mathrm{Ridge}_k^{\bar{\omega}}(R_{\mathrm{Large}}, a_1, b_{2n\rho'}) \ge 2n\}. \tag{514}$$

为完成该证明，引入事件

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{array}{l} \text{any } A \in \cup_{2<j\le k-2} V_j(\mathcal{T}) \text{ contains an } \omega^+\text{-circuit (if } j \text{ is odd) or} \\ \text{an } \omega^-\text{-circuit (if } j \text{ is even) surrounding all elements of } \mathcal{N}(A) \end{array} \right\}. \tag{515}$$

事件的一个直观印象 $\mathcal{C}$ 在图30中给出。在该图中，我们已经探索了树 $\mathcal{T}$（它与图29所用的实现相同）。点状区域表示已探索集合，在该集合中我们必须揭示自旋和边的状态以构造该树。事件 $\mathcal{C}$ 是如下事件：在未探索集合中，渗流 ω^+ 与 ω^- 将已有线段连接起来，形成所需的回路。在图中，回路由已探索线段（以蓝色标出）和未探索线段（以红色标出）组成。

再次可以验证，虽然过程繁琐，但并不困难：

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{S} \subset \bigcap_{i=1}^{2n\rho'} \{\#\,\mathrm{Ridge}_{k-4}^{\bar{\omega}}(R_i, a_i, b_i) \ge 2n\} \subset \mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n}. \tag{516}$$

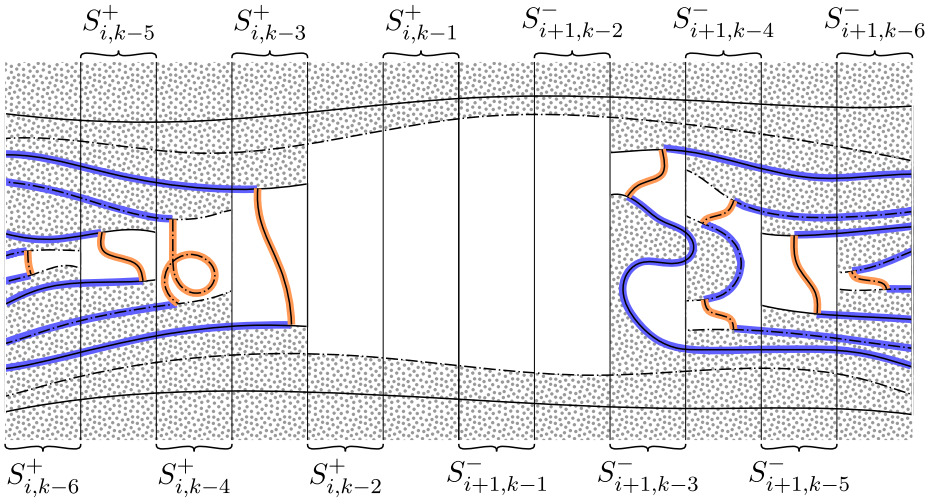


图30：已探索集合（点状区域）与事件 $\mathcal{C}$。

因此，要完成该断言的证明，只需证明：

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{C}|\mathcal{S}] \geq (c_{\text{circuit}})^{100k^2n^2\rho'}. \tag{517}$$

令 η 表示在探索过程中已被揭示的偶边集合。对任意 $i = 1, \ldots\ldots, 2n\rho'$ 以及 $j = 0, \ldots\ldots, k-1$，集合$R'_{i,\,j+1} \setminus R'_{i,\,j}$由宽度为 N/k 、高度为 $4nN$的两条垂直条带组成。记 $S^-_{i,\,j}$ 与$S^+_{i,\,j}$ 分别为左、右带域（见图30）。则

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' := \bigcap_{i=1}^{2n\rho'} \bigcap_{j=3}^{k-2} \bigcap_{\#=\pm} \begin{cases} \text{Ver}^{\omega^+\cup\eta}(S^{\#}_{i,k-j}) & \text{if } j \text{ is odd;} \\ \text{Ver}^{\omega^-\cup\eta}(S^{\#}_{i,k-j}) & \text{if } j \text{ is even.} \end{cases} \tag{518}$$

在图30中，这意味着，例如，$S^+_{i,\,k-3}$ 被已探索（点状）集合与 ω^+ （红色线段）的并垂直穿越。这归结为证明

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{C}'|\mathcal{S}] \geq (c_{\text{circuit}})^{100k^2n^2\rho'}. \tag{519}$$

注意到在每条带域$S^{\#}_{i,\,j}$内，每个未探索区域顶部与底部的边界条件有利于 ω^+ （若 j 为奇数）以及 ω^- （若 j 为偶数）。因此我们可以应用部分回路估计（引理19.4）。每条带域的纵横比（高度除以宽度）等于 $4nk$。从而每条带域中的垂直穿越概率可以（c_{circuit}）^{25nk} 为下界（其中因子25 绰绰有余）。由于共有 $4n\rho'(k-4)$ 条这样的带域，我们便得到所需的界

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{C}|\mathcal{S}] \geq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{C}'|\mathcal{S}] \geq (c_{\text{circuit}})^{4n\rho'(k-4)\cdot 25nk} \geq (c_{\text{circuit}})^{100k^2n^2\rho'}. \tag{520}$$

至此，证明完成。 □

26.2.2 与自由能的联系

为了完成卷曲界的证明，我们必须将引理 26.4 左右两侧的量与命题25.3左右两侧的量联系起来。我们首先通过分析引理 26.4右侧的表达式，将 $\mathcal{E}_{\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n}$ 的概率与自由能联系起来。

引理 26.6（大偏差事件的分析）。 对于 ρ、 k、 $N \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，满足 k， $N/k \geq 100$,

$$\lim_{\rho'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho' n^2}\log \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n}] \geq 16(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N})-f(0)\right)+100k^2\log c_{\text{circuit}}. \tag{521}$$

证明。 我们断言

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\#\,\text{Ridge}_k^{\bar{\omega}}(R_{\text{Large}},a_1,b_{2n\rho'})\geq 2n\}] \geq \tilde{c}^{n^2N^2}\mu_{\mathbb{Z}^2}[\text{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{2n(k+4)}(A_{\rho'(\rho+1),2nN})] \tag{522}$$

$$\geq \tilde{c}^{n^2N^2}\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\text{Circuit}^{+4n(k+4)+8}(A_{\rho'(\rho+1),2nN})]. \tag{523}$$

第二个不等式来自事件包含。第一个不等式由标准的外科手术论证推出（如直线界证明中的步骤 4）。更确切地说，在给定交替穿越事件的条件下，我们可以探索它所诱导的水平矩形穿越。在给定探索结果的条件下，我们现在可以依次打开 $O(n^2N^2)\omega^+/\omega^-$-边，从而实现脊事件。由于每条边以一致为正的概率处于打开状态，因此很容易找到所需的普适常数 $\tilde{c}$。

由变分原理（命题 25.1），

$$\lim_{\rho'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho' n^2}\log \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\text{Circuit}^{+4n(k+4)+8}(A_{\rho'(\rho+1),2nN})]$$

$$= 16(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N})-f(0)\right). \tag{524}$$

现在由前一个引理可得所需的不等式。 □

注 26.7。 由引理 26.1，我们推得

$$\lim_{\rho'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho' n^2}\log \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n}] \geq 100k^2(-c_{\text{fe}}\rho+\log c_{\text{circuit}}). \tag{525}$$

26.2.3 简化步骤

为了弥合事件 $\mathcal{E}_{\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n}$ 与命题 25.3 中的卷曲界之间的差距，我们执行三个简化步骤。

- **直径截断（引理 26.12）**。首先，我们控制每个区域的直径：我们规定每个脊事件的最外层回路的直径与 N 成比例。
- **解耦（引理 26.13）**。接下来，我们将单个概率测度中多个脊的出现，拆分为多个独立概率测度中单个脊的出现。
- **拉直（引理 26.14）**。最后，我们规定脊事件发生在拉直的区域中（定义25.2）。

这些步骤略显技术性。它们的顺序并不重要，而且我们不排除某些步骤可以合并的可能性。

回顾引理26.4。将 R_{Large} 划分为 $4n^2\rho'(\rho+1)$ 个边长为 $2N$的正方形，并令Q 表示这些正方形中心的集合。回顾引理$K_{2N,N,x}$ 中随机变量的定义19.5 (参见定理19.7)。我们先证明以下引理；其证明与定理19.7的证明类似。

引理26.8 (臂事件界)。 令 $\rho, k, N, \rho', n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足 $k, N/k \geq 100$。那么对于任意 $\varepsilon, t > 0$, 有

$$\frac{1}{\rho' n}{}^{2\text{ 对数}}\mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\Big\{\sum_{x\in Q}\Big\lfloor\frac{K_{2N,\quad N\,x}}{\text{数 }2\text{。}\varepsilon k}\Big\rfloor \geq t|Q|\Big\}\Big] \leq 4^{\cdot\ (\rho+1)(1+t(1-c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2k^2/9))\text{ 对}} \tag{526}$$

注 26.9. 特别地，若 $k \geq 9/(\varepsilon\sqrt{c_{\mathrm{arm}}})$，且若

$$t := t_\varepsilon := \frac{1000}{\varepsilon^2 c_{\mathrm{arm}}}(c_{\mathrm{fe}} - \log c_{\mathrm{circuit}}), \tag{527}$$

(回想一下， c_{fe} 来自引理 26.1 且 c_{circuit} 来自定理 16.4)，那么事件 $\{\sum_{x\in Q}\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{\varepsilon k}\rfloor \geq t|Q|\}$ 的概率远小于 $\mathcal{E}_{\rho,\ k,\ N,\ \rho',\ n}$。

证明。 由并集界可得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\Big\{\sum_{x\in Q}\Big\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{\varepsilon k}\Big\rfloor \geq t|Q|\Big\}\Big] \leq \sum_{\substack{T:Q\to\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ \sum_x T_x = \lceil t|Q|\rceil}} \mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\Big\{\Big(\Big\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{\varepsilon k}\Big\rfloor\Big)_x \geq T\Big\}\Big] \tag{528}$$

使用贪心算法找出一个子集 $Q' \subset Q$ ，使得相应的环带互不重叠，且 $\sum_{x\in Q'} T(x) \geq T/9$, 由定理 19.7 可得，对于任意 T,

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\Big\{\Big(\Big\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{\varepsilon k}\Big\rfloor\Big)_x \geq T\Big\}\Big] \leq 2^{-c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2k^2t|Q|/9}. \tag{529}$$

函数 T 的数量由 $2^{(1+t)|Q|}$ 界定，这意味着

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\Big\{\sum_{x\in Q}\Big\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{\varepsilon k}\Big\rfloor \geq t|Q|\Big\}\Big] \leq 2^{(1+t)|Q|-c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2k^2t|Q|/9} = 2^{4n^2\rho'(\rho+1)(1+t(1-c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2k^2/9))}. \tag{530}$$

结论得证。 □

现在，我们使用前一个引理中的定量界来分析事件 $\mathcal{E}_{\rho、\ k、\ N、\ \rho'、\ n}$。首先，我们还需要一些定义。回顾定义 26.2 中水平线森林的定义。

定义 26.10 （带直径截断的局部水平线森林）。考虑一个固定的连续区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 和一个构型（$\sigma_\circ$、$\bar{\omega}$、$\sigma_\bullet$）。回顾， $\omega^\pm \cap D$ 表示 $\omega^\pm$ 中完全包含于 D的边的集合（这些边作为线段嵌入在 $\mathbb{R}^2$中）。令$T_r(\omega^\pm \cap D)$表示 $\omega^\pm \cap D$ 中属于某个直径至多为 $2r$的连通分支的边的集合。令 $\mathcal{M}_r^+(D)$表示满足$\partial\mathcal{D} \subset T_r(\omega^+ \cap D)$，且在此条件下极大的偶域 $\mathcal{D}$ 的集合。带直径截断的局部水平线森林是水平线树 $\mathcal{L}^{D、\ r} := (\mathcal{X}_\mathcal{D})_{\mathcal{D}\in\mathcal{M}_r^+(D)}$构成的族。

定义 26.11 （带直径截断的脊事件）。 事件脊$^{\bar{\omega}}_{k,r}(D, a, b)$与随机变量#脊$^{\bar{\omega}}_{k,r}(D, a, b)$的定义与此前完全相同，只是它们是相对于森林 $\mathcal{L}^{D,r}$ 而非 $\mathcal{L}^D$来定义的。

设 ρ， k， N， ρ'， $n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$满足 $N \geq 100k$。回顾备注 t_ε中 26.9给出的 r 的定义：$= r(\rho,\ \varepsilon)$：$= \frac{1000\rho}{\varepsilon}t_{\varepsilon/8\rho}$，定义事件

$$\mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n} := \left\{\sum_{i=1}^{2n\rho'} \#\,\mathrm{Ridge}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-\varepsilon)k/2\rceil,rN}(R_i, a_i, b_i) \geq (1-\varepsilon)4n^2\rho'\right\}. \tag{531}$$

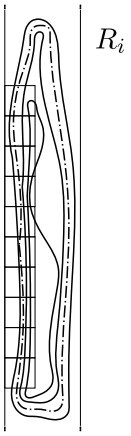


图31：直径截断。若交替回路覆盖很大的垂直距离，则会由此产生许多臂事件（见图左侧的正方形），从而违反引理 26.8中得到的界。

引理 26.12 (直径截断)。 设 $\rho, k, N, \rho', n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足 $N \geq 100k$。固定 $\varepsilon \in (0,\ 1/100)$ 并假设 $k \geq 72\rho/(\varepsilon\sqrt{c_{\mathrm{arm}}})$。于是

$$\lim_{\rho'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho' n^2}\log \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n}] \geq 16(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 100k^2\log c_{\mathrm{circuit}}. \tag{532}$$

证明。 该证明由图 31说明。由引理 26.8，只需证明

$$\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n} \setminus \left\{\sum_{x\in Q}\lfloor\frac{K_{2N,N,x}}{(\varepsilon/8\rho)k}\rfloor \geq t_{\varepsilon/8\rho}|Q|\right\} \subset \mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n}. \tag{533}$$

定义辅助事件

$$\mathcal{A} := \left\{\begin{matrix}\text{the forests } (\mathcal{L}^{R_i})_i \text{ contain at most } 2\varepsilon n^2\rho' \text{ trees}\\ \text{that contain a vertex of depth } 2\lfloor\varepsilon k/4\rfloor \text{ that}\\ \text{has a diameter larger than } 2rN\end{matrix}\right\}. \tag{534}$$

假设 $\mathcal{A}$ 不发生。则每一棵“大”树（即包含一个深度为 $2\lfloor\varepsilon k/4\rfloor$ 的顶点、且直径大于 $2rN$ 的树）至少贡献 $r/2$ 给臂事件（引理 26.8）中的和，因此臂事件必然发生。故只需证明

$$\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n}. \tag{535}$$

然而，这一点不难看出：若 $(\mathcal{L}^{R_i})_i$ 中的一棵树属于在$\mathcal{E}_{\rho,k,N,\rho',n}$ 中被计数的那些树，且不属于在 $\mathcal{A}$ 中被计数的那些树，则它必然包含一棵属于在 $\mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n}$中被计数的那些树的树。 □

L引理 26.13 （解耦步骤）。 按照前一个引理固定 ρ、 ε、 k 和 N 。*Th* *en*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \max_{(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq\lceil(1-\varepsilon)n\rceil}}\prod_i \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Ridge}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-2\varepsilon)k/2\rceil}(\mathcal{D}_i, -\rho N, \rho N)]$$
$$\geq 4(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 100k^2\log c_{\mathrm{circuit}}. \tag{536}$$

其中最大值取遍所有互不相交的偶区域族 $\mathcal{D}_i$ ，这些偶区域的直径至多为 $2r_{\rho,\ \varepsilon}N$，且包含于 $[\![(\rho+1)N \times nN]\!]$ 中。

证明。考虑测度 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$。令 $(\mathcal{D}_{ij})_{j=1,\ \ldots,\ |\mathcal{M}^+_{rN}(R_i)|}$ 表示 $\mathcal{M}^+_{rN}(R_i)$ 中的偶区域族（其中索引 j 的选取始终保持一致，例如可通过对 $\mathbb{R}^2$ 采用字典序来实现）。回忆一下，$(\mathcal{D}_{ij})_j$ 是一个由直径至多为 $2rN$ 且包含于 R_i 中的互不相交偶区域组成的族。证明的思路是证明：

- 通过进一步条件化于脊出现的偶区域的确切数量，我们不会损失太多概率，$\mathcal{D}_{ij}$
- 通过预先选定脊出现的区域，我们不会损失太多概率。$\mathcal{D}_{ij}$

证明主要涉及技术细节，但我们将给出完整的细节。

对于任意偶域 $\mathcal{D}$，令 $\eta_{\mathcal{D}}$ 表示不包含在$\mathcal{D}$中的偶边集合。对于每个 ij，定义事件

$$A_{ij} := \mathrm{Ridge}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-\varepsilon)k/2\rceil,rN}(\mathcal{D}_{ij}, a_i, b_i); \qquad p_{ij} := \mu^+_{\mathcal{D}_{ij}}[A_{ij}]; \tag{537}$$

$$B_{ij} := \{R'_i \text{ is crossed vertically by } \omega^+ \cup \eta_{\mathcal{D}_{ij}}\}; \qquad q_{ij} := \mu^+_{\mathcal{D}_{ij}}[B_{ij}]. \tag{538}$$

注意，A_{ij} 与 B_{ij} 不相交，并且

$$\mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n} = \{\textstyle\sum_{ij} \mathbb{1}_{A_{ij}} \geq (1-\varepsilon)4n^2\rho'\}. \tag{539}$$

令 $T := \lceil(1-\varepsilon)4n^2\rho'\rceil$，并定义事件

$$\mathcal{A} := \{\textstyle\sum_{ij} \mathbb{1}_{A_{ij}} = T\}; \tag{540}$$

$$\mathcal{B} := \{\textstyle\sum_{ij} \mathbb{1}_{B^c_{ij}} = T\}; \tag{541}$$

$$\mathcal{G} := \{\text{the event } A_{ij} \cup B_{ij} \text{ occurs for every } ij\}. \tag{542}$$

我们的首要目标是证明

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{A} \cap \mathcal{G} | \mathcal{E}^*_{\rho,\varepsilon,k,N,\rho',n}] \geq (c_{\mathrm{circuit}})^{100n^2\rho'}. \tag{543}$$

我们首先断言，几乎必然有 $\mu_{\mathbb{Z}^2}$

$$\prod_{ij} q_{ij} = \mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\bigcap_{ij} B_{ij} \Big| (\mathcal{D}_{ij})_{ij}\Big] \geq (c_{\mathrm{circuit}})^{100n^2\rho'}. \tag{544}$$

为证明该断言，我们先使用塔式性质和马尔可夫性质，再利用 FKG 不等式得到

$$\textstyle\prod_{ij} q_{ij} = \Big(\bigotimes_{ij} \mu^+_{\mathcal{D}_{ij}}\Big)\Big[\bigcap_{ij} B_{ij}\Big] \tag{545}$$

$$= \mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\bigcap_{ij} B_{ij} \Big| (\mathcal{D}_{ij})_{ij}\Big] \tag{546}$$

$$= \mu_{\mathbb{Z}^2}\Big[\{\text{each } R_i \text{ is crossed vertically by } \omega^+\} \Big| \Big\{2R_{\mathrm{Large}} \cap \Big(\bigcap_{ij} \eta_{\mathcal{D}_{ij}}\Big) \subset \omega^+\Big\}\Big] \tag{547}$$

$$\geq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\text{each } R_i \text{ is crossed vertically by } \omega^+\}] \tag{548}$$

$$\geq (c_{\mathrm{circuit}})^{100n^2\rho'}. \tag{549}$$

这就证明了该断言。现在，通过运行以下探索过程，证明方程（543）显然易行。我们依次检查 $\mathcal{D}_{ij}$，统计事件 A_{ij}发生的次数。设 Q 表示该次数。若 $Q < T$，则我们首先考察 A_{ij} 是否发生。若未发生，则我们以 B_{ij} 发生为条件（其发生概率至少为

q_{ij}，因为 A_{ij} 和 B_{ij} 互不相交，并且我们知道 A_{ij} 不会发生）。若 $Q = T$，则我们只需以事件 B_{ij} 发生为条件。该算法中额外条件事件的概率乘积显然有下界 $\prod_{ij} q_{ij}$。由方程（544）即可得到所需的下界。结合前一个引理，可得渐近界

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{A}\cap\mathcal{G}] \geq \exp\left[(n^2\rho')\left(16(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 400k^2\log c_{\text{circuit}} + o(1)\right)\right]. \tag{550}$$

现在，注意到 $\mathcal{A}\cap\mathcal{G} = \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$。在给定 $\mathcal{B}$ 的条件下，令 $(\mathcal{D}'_\ell)_{\ell=1,\dots,T} \subset (\mathcal{D}_{ij})_{ij}$ 表示不发生 B_{ij} 的偶域集合。根据塔式性质和马尔可夫性质，我们得到

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{A}\cap\mathcal{B}] = \int_{\mathcal{B}}\prod_{\ell=1}^{T}\mu^+_{\mathcal{D}'_\ell}[A_\ell|B^c_\ell]\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{Z}^2}[(\mathcal{D}'_\ell)_\ell] \leq \max_{(\mathcal{D}_\ell)_\ell}\prod_{\ell=1}^{T}\mu^+_{\mathcal{D}_\ell}[A_\ell|B^c_\ell], \tag{551}$$

其中，最大值取遍所有由 T 个两两不相交的偶域 $\mathcal{D}_\ell$ 组成的族，这些偶域的直径至多为 $2rN$，且每个 $\mathcal{D}_\ell$ 都包含于某个 R_i 中。

Set

$$B_{\mathcal{D}} := \{[\![\rho N]\!]\times\mathbb{R} \text{ is crossed vertically by } \omega^+\cup\eta_{\mathcal{D}}\}. \tag{552}$$

将矩形 $(R_i)_i$ 竖直堆叠后，我们得到以下界：

$$\max_{(\mathcal{D}_\ell)_{1\leq\ell\leq\lceil(1-\varepsilon)4n^2\rho'\rceil}}\prod_\ell \mu^+_{\mathcal{D}_\ell}[\mathrm{Ridge}^{\bar\omega}_{2\lceil(1-\varepsilon)k/2\rceil,rN}(\mathcal{D}_\ell,-\rho N,\rho N)|B^c_{\mathcal{D}}] \geq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{A}\cap\mathcal{G}], \tag{553}$$

其中，最大值取遍由两两不相交的偶域 $\mathcal{D}_\ell$ 组成的元组，这些偶域的直径至多为 $2rN$，且包含于 R_{Stacked} 中：$= [\![(\rho+1)N\times 4n^2\rho' N]\!]$。

沿用证明直线界时从方程（496）推导至方程（497）所采用的相同论证，我们得到，对每个 $\mathcal{D}$ 包含于R_{Stacked}，

$$\mu^+_{\mathcal{D}}[\mathrm{Ridge}^{\bar\omega}_{k+2,rN}(\mathcal{D},-\rho N,\rho N)|B^c_{\mathcal{D}}] \leq \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Ridge}^{\bar\omega}_{k}(\mathcal{D},-\rho N,\rho N)]. \tag{554}$$

结合方程（550）和（553），此不等式即完成了证明。 □

回顾定义 *25.2*中的 拉直路径 和 拉直环带。

引理 26.14 (拉直步骤)。 固定 $\rho\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $\varepsilon\in(0,1/100)$。那么，我们可以找到常数 $\eta\in(0,1/100)$ 以及 $r, C<\infty$，使得以下结论成立。固定 $k, N\in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$，满足 $k\geq 72\rho/(\varepsilon\sqrt{c_{\text{arm}}})$ 和 $N\geq 100k/\eta$。那么，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\max_{(A_i)_{1\leq i\leq\lceil(1-4\varepsilon)n\rceil}}\prod_i \mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+4\lceil(1-8\varepsilon)k/2\rceil}(NA_i)]$$
$$\geq 4(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 200k^2\log c_{\text{circuit}} - C, \tag{555}$$

其中最大值取遍所有由互不相交的 (ρ,η)-拉直环带组成的族 A_i，这些环带的直径至多为 $2r$，且包含于 $[\![(\rho+1)\times n]\!]$。

证明。 固定与上一步相同的 ρ、ε、$r = r_{\rho,\,\varepsilon}$ 和 k。我们先给出一系列简单的界。

固定 $\eta > 0$ 足够小，并假设 $N \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足 $N > 100/\eta$。回忆随机变量 $K_{R、r'、x}$ 的定义，它们来自引理 19.5（另见定理 19.7）。那么，对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$，

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{K_{N/2,2\eta N,x} \geq \varepsilon k/10\}] \leq (4\eta)^{c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2 k^2/100}. \tag{556}$$

对点 $x \in S := (\eta N\mathbb{Z})^2 \cap [\![2(\rho+1)N \times 4r_{\rho,\,\varepsilon}N]\!]$应用并集界，我们推得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\max_{x\in S} K_{N/2,2\eta N,x} \geq \varepsilon k/10\}] \leq 1000\rho r_{\rho,\varepsilon} \cdot (4\eta)^{c_{\mathrm{arm}}\varepsilon^2 k^2/100-2} =: p_{\rho,\varepsilon,\eta,k}. \tag{557}$$

根据事件包含关系，很容易推得

$$\mu_{\mathbb{Z}^2}[\{\max_{x\in[\![(\rho+1)N\times 2r_{\rho,\varepsilon}N]\!]} K_{N,\eta N,x} \geq \varepsilon k/10\}] \leq p_{\rho,\varepsilon,\eta,k}. \tag{558}$$

该事件在 εn 个 n 独立样本中至少发生 $(2(p_{\rho,\,\varepsilon,\,\eta,\,k})^{\varepsilon})^n$ 次的概率至多为 $\eta = \eta_{\rho,\,\varepsilon}$（仅取决于 ρ 和 ε）。当 26.13 足够小时，这一概率远小于前一个引理中的事件（解耦步骤，引理 26.13）的概率。

现在，考虑前一个引理。我们将各个概率的乘积视为乘积测度下一个柱事件 $\mathcal{R}$ 的概率。在这个乘积测度下，概率

$$\mathcal{R} \cap \{\text{在至少 } (1-3\varepsilon)n \text{ 个区域中，贡献给 } K_{N,\eta N,x}\} \text{ 的臂过多} \tag{559}$$

与事件 $\mathcal{R}$ 本身具有相同的渐近行为。通过选择臂出现的区域，我们得到界

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\text{对数} \max_{(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq\lceil(1-3\varepsilon)n\rceil}} \prod_i \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathcal{E}_{\mathcal{D}_i}] \tag{560}$$

$$\geq 4(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 100k^2\log c_{\mathrm{circuit}} - \log 2; \tag{561}$$

其中

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}} := \mathrm{Ridge}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-2\varepsilon)k/2\rceil}(\mathcal{D}_i, -\rho N, \rho N) \cap \{\max_{x\in\mathcal{D}_i} K_{N,\eta N,x} \leq \varepsilon k/10\}. \tag{562}$$

（额外的对数 2 来自区域的组合选择。）

现在来研究事件 $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$。容易看出

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}} \subset \bigcup_A \mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-4\varepsilon)k/2\rceil}(NA), \tag{563}$$

其中并集取遍所有 (ρ,η)-拉直环带 A，使得 NA 完全被 $\partial\mathcal{D}$包围。注意，这类环带的数量至多为 $2^{99\rho r_{\rho,\varepsilon}/\eta^2_{\rho,\varepsilon}}$（只需简单地对可能属于或不属于该环域边界的 $\eta\mathbb{Z}^2$-边数量取上界即可）。因此，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\log \max_{(A_i)_{1\leq i\leq\lceil(1-3\varepsilon)n\rceil}} \prod_i \mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-4\varepsilon)k/2\rceil}(NA_i)] \tag{564}$$

$$\geq 4(\rho+1)N^2\left(f(\tfrac{2(k+4)}{N}) - f(0)\right) + 100k^2\log c_{\mathrm{circuit}} - \frac{100\rho r_{\rho,\varepsilon}}{\eta_{\rho,\varepsilon}}\log 2, \tag{565}$$

其中，最大值取遍所有互不相交的 $(\rho,\ \eta)$-拉直环带族 A_i，每个环域的直径至多为 $2r_{\rho,\,\varepsilon}$，且始终包含在 $[\![(\rho+1)\ \times 2n]\!]$ 中。

为完成证明，只需注意到

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{Circuit}^{+4\lceil(1-8\varepsilon)k/2\rceil}(NA_i)] \geq 2^{-2\lceil(1-4\varepsilon)k/2\rceil}\mu_{\mathbb{Z}^2}[\mathrm{AltCircuit}^{\bar{\omega}}_{2\lceil(1-4\varepsilon)k/2\rceil}(NA_i)], \tag{566}$$

通过翻转与每条层线对应的硬币。这就得到了所需的界。 □

致谢。本项目获得了瑞士国家科学基金会和 NCCR SwissMAP 的资助。HDC 感谢西蒙斯波定位合作项目提供的支持。KKK 的工作得到 ERC 项目 LDRAM：ERC-2019-ADG 项目 884584 的支持。KKK 感谢法国国家科学研究中心以及联合 AND-DFG TSF24 项目 ANR-24-CE92-0033 提供的支持。PL 感谢法国国家研究署（ANR）项目 ANR-23-CPJ1-0150-01 提供的支持。

参考文献

[ADH] E. Averous、H. Duminil-Copin 和 T. He。“簇权为 $q \in [1,4]$ 的临界平面随机簇模型的双臂指数”。准备中的手稿。[AF03] Mark J. Ablowitz 和 A. S. Fokas。《复变数：引论与应用》。剑桥大学出版社，2003年。[Aff86] Ian Affleck。“临界点自由能中的普适项与共形反常”。载于：《物理评论快报》56.7（1986），第746–748页。[Ang+21] Morris Ang、Gefei Cai、Xin Sun 和 Baojun Wu。《共形环系综的可积性：虚数 DOZZ 公式及其他》。2021年。arXiv: 2107.01788 [math-ph].[Ave+a] E. Averous、H.-B. Chen、H. Duminil-Copin、T. He、D. Krachun、I. Manolescu 和 J. Xia。“任意六顶点模型标度极限的旋转不变性（带有$-1 \leq \Delta \leq -\frac{1}{2}$）”。准备中的手稿。[Ave+b] E. Averous、H. Duminil-Copin、T. He 和 D. Krachun。“簇权接近 4 的平面随机簇模型的临界指数”。准备中的手稿。[Bak61] George A. Baker。“帕德逼近法在研究伊辛模型某些磁性方面的应用”。载于：《物理评论》124.3（1961），第768–774页。[Bax72] Rodney J Baxter。“八顶点格点模型的配分函数”。载于：《物理年刊》70.1（1972），第193–228页。[Bax82] Rodney J. Baxter。《统计力学中的精确可解模型》。伦敦；纽约：Academic Press，1982年。[BCN86] H. W. J. Blöte、John L. Cardy 和 M. P. Nightingale。“共形不变性、中心荷与临界性处的普适有限尺寸振幅”。载于：《物理评论快报》56.7（1986），第742–745页。[BFM14a] G. Benfatto、P. Falco 和 V. Mastropietro。“一维费米系统的普适性，I：响应函数与临界指数”。载于：《数学物理通讯》330.1（2014），第153–215页。[BFM14b] G. Benfatto、P. Falco 和 V. Mastropietro。“一维费米系统的普适性，II：卢廷格液体结构”。载于：《数学物理通讯》330.1（2014），第217–282页。[Bil95] Patrick Billingsley。《概率与测度》。第3版。《威立概率与数理统计丛书》。纽约：威立，1995年。593页。

[Bis09] Marek Biskup。“晶格自旋模型中的反射正性与相变”。载于：《当代数学统计物理方法》。Marek Biskup、Anton Bovier、Frank den Hollander、Dima Ioffe、Fabio Martinelli、Karel Netocný、Fabio Toninelli 和 Roman Kotecký 编。柏林、海德堡：施普林格，2009年，第1–86页。[BKW76] R. J. Baxter、S. B. Kelland 和 F. Y. Wu。“Potts模型或 Whitney 多项式与冰型模型的等价性”。载于：《物理学杂志A：数学与一般》9.3（1976），第397–406页。[BL76] Jöran Bergh 和 Jörgen Löfström。《插值空间：导论》。S. S. Chern、J. L. Doob、J. Douglas、A. Grothendieck、E. Heinz、F. Hirzebruch、E. Hopf、S. Mac Lane、W. Magnus、M. M. Postnikov、F. K. Schmidt、W. Schmidt、D. S. Scott、K. Stein、J. Tits、B. L. Van Der Waerden、B. Eckmann 和 J. K. Moser 编。第223卷。《数学科学基础丛书》。柏林、海德堡：施普林格，1976年。[BP25] Nathanaël Berestycki 和 Ellen Powell。《高斯自由场与Liouville量子引力》。《剑桥高等数学研究丛书》。剑桥：剑桥大学出版社，2025年。[BPZ84] A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov。“二维量子场论中的无限共形对称性”。载于：Nuclear Physics B 241.2（1984），第333–380页。[Car08] John Cardy。“共形场论与统计力学”。载于：莱苏什低维统计物理与量子计算精确方法暑期学校（2008年）。[Car86] John L. Cardy。“二维共形不变理论的算符内容”。载于：Nuclear Physics B 270（1986），第186–204页。[Car92] J. L. Cardy。“有限几何中的临界渗流”。载于：《物理学杂志A：数学与一般》25.4（1992），第L201–L206页。[Ces14] Annalisa Cesaroni。“调和函数的可去奇点”。2014年。[CF24] Federico Camia 和 Yu Feng。“二维临界渗流中的对数关联函数”。载于：《高能物理杂志》2024.8（2024），第103页。[Cha+21] Nishant Chandgotia、Ron Peled、Scott Sheffield 和 Martin Tassy。“从 $\mathbb{Z}^2$ 到 $\mathbb{Z}$ 的一致图同态的去局域化”。载于：《数学物理通讯》387.2（2021），第621–647页。[Cha98] L. Chayes。“二维XY模型中的自旋波刚度不连续性”。载于：《数学物理通讯》197.3（1998），第623–640页。[Che+a] H.-B. Chen、H. Duminil-Copin、T. He、F. Jacopin、D. Krachun、I. Manolescu 和 J. Xia。“簇权为 $q = 4$ 的平面随机簇模型的临界指数”。准备中的手稿。[Che+b] H.-B. Chen、H. Duminil-Copin、T. He、D. Krachun、I. Manolescu 和 J. Xia。“簇权为 $q \in [1, 4]$ 的临界平面随机簇模型的单臂指数”。准备中的手稿。[Che+14] Dmitry Chelkak、Hugo Duminil-Copin、Clément Hongler、Antti Kemppainen 和 Stanislav Smirnov。“伊辛界面收敛到 Schramm的SLE曲线”。载于：《数学报告》352.2（2014），第157–161页。

[CHI15] Dmitry Chelkak、Clément Hongler 和 Konstantin Izyurov。“平面伊辛模型中自旋关联的共形不变性”。载于：《数学年刊》181 (2015)，第 1087–1138 页。[CHI22] Dmitry Chelkak、Clément Hongler 和 Konstantin Izyurov。《临界伊辛模型中主场的相关性》。2022。arXiv：2103.10263 [math-ph].[CKP01] Henry Cohn、Richard Kenyon 和 James Propp。“多米诺铺砌的变分原理”。载于：《美国数学会杂志》14.2 (2001)，第 297–346 页。[CN06] Federico Camia 和 Charles M. Newman。“二维临界渗流：完整标度极限”。载于：《数学物理通讯》268.1 (2006)，第 1–38 页。[CN07] Federico Camia 和 Charles M. Newman。“临界渗流探索路径与 SLE6：收敛性证明”。载于：《概率论及其相关领域》139.3 (2007)，第 473–519 页。[CN26] Federico Camia 和 Rongvoram Nivesvivat。《布朗环路汤中的边界算子》。2026。arXiv：2601.02755 [math-ph].[CRV23] Baptiste Cerclé、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas。“Toda共形场论的概率构造”。载于：《亨利·勒贝格年刊》6 (2023)，第 31–64 页。[CS12] Dmitry Chelkak 和 Stanislav Smirnov。“二维伊辛模型的普适性与费米子可观测量的共形不变性”。载于：《数学创见》189.3 (2012)，第 515–580 页。[Dav+16] François David、Antti Kupiainen、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas。“黎曼球面上的 Liouville量子引力”。载于：《数学物理通讯》342.3 (2016)，第 869–907 页。[DGT24] Chiara Damiolini、Angela Gibney 和 Nicola Tarasca。“关于顶点代数中共形块的因子化与向量丛”。载于：《高等师范学院科学年刊》(2024)。[DHN11] Hugo Duminil-Copin、Clément Hongler 和 Pierre Nolin。“二维FK伊辛模型的连接概率与RSW型界”。载于：《纯粹与应用数学通讯》64.9 (2011)，第 1165–1198 页。[DLM18] Hugo Duminil-Copin、Jhih-Huang Li 和 Ioan Manolescu。“等半径图上随机簇模型的普适性”。载于：《电子概率期刊》23 (2018)，第 1–70 页。[DM22] Hugo Duminil-Copin 和 Ioan Manolescu。“平面随机簇模型：标度关系”。载于：《数学论坛：圆周率》10 (2022)，e23。[DMS97] Philippe Di Francesco、Pierre Mathieu 和 David Sénéchal。《共形场论》。当代物理学研究生教材。纽约：施普林格，1997。[DMT21] Hugo Duminil-Copin、Ioan Manolescu 和 Vincent Tassion。“平面随机簇模型：临界相的分形性质”。载于：《概率论及其相关领域》181.1 (2021)，第 401–449 页。[DS09] T. C. Dorlas 和 M. Samsonov。《六顶点模型的热力学极限》。2009。arXiv：0903.2657 [cond-mat]。

[DS11] Bertrand Duplantier 和 Scott Sheffield。“Liouville量子引力与 KPZ”。载于：《数学创见》185.2 (2011)，第 333–393 页。[DS57] Cyril Domb 和 M. F. Sykes。“关于居里点以上铁磁体的磁化率”。载于：《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学辑》240.1221 (1957)，第 214–228 页。[DST17] Hugo Duminil-Copin、Vladas Sidoravicius 和 Vincent Tassion。“平面随机簇模型和波茨模型相变的连续性，其中$1 \leq q \leq 4$”。载于：《数学物理通讯》349.1 (2017)，第 47–107 页。[DT15] H. Duminil-Copin 和 V. Tassion。“平面渗流的 RSW 与盒穿越性质”。载于：IAMP会议论文集 (2015)。[DT19] Hugo Duminil-Copin 和 Vincent Tassion。《平面随机簇模型中交叉概率的重整化》。2019。arXiv：1901.08294 [math].[DTT18] H. Duminil-Copin、V. Tassion 和 A. Teixeira。“临界二维定向渗流的盒穿越性质”。载于：《概率论及其相关领域》171.3 (2018)，第 685–708 页。[Dub11] Julien Dubédat。“阿贝尔自旋模型及相关问题专题”。载于：《概率综述》8 (2011)，第 374–402 页。[Dum+20] Hugo Duminil-Copin、Karol Kajetan Kozlowski、Dmitry Krachun、Ioan Manolescu 和 Mendes Oulamara。《临界平面格点模型中的旋转不变性》。2020。arXiv：2012.11672 [math].[Dum+21] Hugo Duminil-Copin、Maxime Gagnebin、Matan Harel、Ioan Manolescu 和 Vincent Tassion。“平面随机簇模型和波茨模型相变的不连续性，其中 $q > 4$”。载于：《高等师范学院科学年刊》54.6 (2021)，第 1363–1413 页。[Dum+22] Hugo Duminil-Copin、Karol Kajetan Kozlowski、Dmitry Krachun、Ioan Manolescu 和 Tatiana Tikhonovskaia。“关于六顶点模型的自由能”。载于：《数学物理通讯》395.3 (2022)，第 1383–1430 页。[Dum+24] Hugo Duminil-Copin 、 Alex M. Karrila 、 Ioan Manolescu 和 Mendes Oulamara。“六顶点模型高度函数的去局域化”。载于：《欧洲数学会杂志》26.11 (2024)，第 4131–4190 页。[Dum23] Hugo Duminil-Copin。“超立方格子上的（临界）伊辛模型百年回顾”。载于：《国际数学家大会论文集 2022》1 (2023)，第 164–210 页。[DV95] C. Destri 和 H. J. de Vega。“ 格点模型与场论的热力学贝特拟设及有限尺寸修正的统一方法”。载于：Nuclear Physics B 438.3 (1995)，第 413–454 页。[DW25] Chiara Damiolini 和 Lukas Woike。《由有理顶点算子代数的共形块构造模函子》。2025。arXiv：2507.05845 [math].[dW85] H. J. de Vega 和 F. Woynarovich。“贝特拟设系统中有限尺寸修正的计算方法：海森堡链与六顶点模型”。载于：Nuclear Physics B 251 (1985)，第 439–456 页。[EF63] John W. Essam 和 Michael E. Fisher。“临界点以下格气与伊辛铁磁体的帕德逼近研究”。载于：《化学物理学杂志》38.4 (1963)，第 802–812 页。

[El-+12] Sheer El-Showk、Miguel F. Paulos、David Poland、Slava Rychkov、David Simmons-Duffin 和 Alessandro Vichi. “用共形自举求解三维伊辛模型”. 载于：《物理评论》D 86.2 (2012)，第 025022 页。[FGK25] Saskia Faulmann、Frank Göhmann 和 Karol K. Kozlowski. “无质量区 XXZ 链量子转移矩阵的低温谱”. 载于：Probability and Mathematical Physics 6.4 (2025)，第 1507–1658 页。[Fis64] Michael E. Fisher. “简单流体的相关函数与临界区”. 载于：Journal of Mathematical Physics 5.7 (1964)，第 944–962 页。[Fis66] Michael E. Fisher. “临界点行为的量子修正”. 载于：Physical Review Letters 16.1 (1966)，第 11–14 页。[Fis67] Michael E. Fisher. “凝聚理论与临界点”. 载于：Physics Physique Fizika 3.5 (1967)，第 255–283 页。[Fje+06] Jens Fjelstad、J Urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Sch weigert. “RCFT 关联函数的 TFT 构造 V：模不变性的证明与因子化”. 载于：Theory and Applications of Categories 16.16 (2006)，第 342–433 页。[FK72] C. M. Fortuin 和 P. W. Kasteleyn. “关于随机簇模型：I. 引言及其与其他模型的关系”. 载于：Physica 57.4 (1972)，第 536–564 页。[FKG71] C. M. Fortuin、P. W. Kasteleyn 和 J. Ginibre. “一些偏序集上的关联不等式”. 载于：《数学物理通讯》22.2 (1971)，第 89–103 页。[FM17] Marco Furlan 和 Jean-Christophe Mourrat. “随机场的紧性判据及其在伊辛模型中的应用”. 载于：《电子概率期刊》22 (2017)，第 1–29 页。[Frö82] Jürg Fröhlich. “关于 $\lambda\phi_d^4$ 理论的平凡性及趋近临界点的过程（在 $d \geq 4$ 维中）”. 载于：Nuclear Physics B 200.2 (1982)，第 281–296 页。[FRS02] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. “RCFT 关联函数的 TFT 构造 I：配分函数”. 载于：Nuclear Physics B 646.3 (2002)，第 353–497 页。[FRS04a] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. “RCFT 关联函数的 TFT 构造 II：无定向世界面”. 载于：Nuclear Physics B 678.3 (2004)，第 511–637 页。[FRS04b] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. “RCFT 关联函数的 TFT 构造 III：简单流”. 载于：Nuclear Physics B 694.3 (2004)，第 277–353 页。[FRS05] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert. “RCFT 关联函数的 TFT 构造 IV：结构常数与关联函数”. 载于：Nuclear Physics B 715.3 (2005)，第 539–638 页。[Gaw] K. Gawedzki. “共形场论”. 即将出版。[GGM12] Alessandro Giuliani、Rafael L. Greenblatt 和 Vieri Mastropietro. “非可积伊辛模型中能量关联的标度极限”. 载于：Journal of Mathematical Physics 53.9 (2012)，第 095214 页。

[GL25] Alexander Glazman 和 Piet Lammers. “二维中的去局域化与连续性：Loop O(2)、六顶点模型和随机簇模型”. 载于：《数学物理通讯》406.5 (2025)，第 108 页。[GMT17] Alessandro Giuliani、Vieri Mastropietro 和 Fabio Lucio Toninelli. “相互作用二聚体中的高度涨落”. 载于：亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计 53.1 (2017)，第 98–168 页。[GP23] Alexander Glazman 和 Ron Peled. “六顶点模型无序相与反铁电相之间的转变”. 载于：《电子概率期刊》28 (2023)，第 1–53 页。[GRV16] Christophe Garban、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. “刘维尔布朗运动”. 载于：《概率年刊》44.4 (2016)。arXiv：1301.2876 [math].[GRV19] Colin Guillarmou、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. “刘维尔理论中 Polyakov 对玻色弦理论 $2d$的表述”. 载于：高等科学研究所数学出版物 130 (2019)，第 111–185 页。[GT19] Alessandro Giuliani 和 Fabio Lucio Toninelli. “非可积二聚体模型：普适性与标度关系”. 载于：Journal of Mathematical Physics 60.10 (2019)，第 103301 页。[Gui+24] Colin Guillarmou、Antti Kupiainen、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. “刘维尔理论中的共形自举”. 载于：《数学学报》233.1 (2024)，第 33–194 页。[Gus80] E. Gusev. “量子海森堡模型中波函数值的弱收敛”. 载于：《数学物理报告》18.3 (1980)，第 399–410 页。[Gus85] E. V. Gusev. “海森堡模型的热力学与激发态”. 载于：《理论与数学物理》63.2 (1985)，第 527–532 页。[GZ26] Bin Gui 和 Hao Zhang. “ C_2-余有限顶点算子代数的解析共形块 III：缝合-因子化定理”. 载于：《伦敦数学会会刊》132.2 (2026)。[Hon] Clément Hongler. “伊辛模型关联的共形不变性”. 博士论文。[HS13] Clément Hongler 和 Stanislav Smirnov. “平面伊辛模型中的能量密度”. 载于：《数学学报》211.2 (2013)，第 191–225 页。[Hul38] Lamek Hulthén.《晶体交换问题》。1938。[IKR89] A. G. Izergin、V. E. Korepin 和 N. Y. Reshetikhin. “贝特拟设可解模型中的共形维数”. 载于：《物理学杂志A：数学与一般》22.13 (1989)，第 2615 页。[Kad+67] Leo P. Kadanoff、Wolfgang Götze、David Hamblen、Robert Hecht、E. A. Lewis、V. V. Palciauskas、Martin Rayl、J. Swift、David Aspnes 和 Joseph Kane. “临界点附近的静态现象：理论与实验”. 载于：《现代物理评论》39.2 (1967)，第 395–431 页。[Kad66] Leo P. Kadanoff. “伊辛模型附近的标度律 T_c”. 载于：Physics Physique Fizika 2.6 (1966)，第 263–272 页。[Kau49] Bruria Kaufman. “晶体统计。II. 用旋量分析求得配分函数”. 载于：《物理评论》76.8 (1949)，第 1232–1243 页。

[KB90] A. Klumper 和 M. T. Batchelor。《自旋-1反铁磁XXZ链中有限尺寸修正的解析处理》。载于：《物理学杂志A：数学与一般》23.5 (1990)，第 L189 页。[KBP91] A. Klumper、M. T. Batchelor 和 P. A. Pearce。《具有扭曲边界条件的六顶点和十九顶点模型的中心荷》。载于：《物理学杂志A：数学与一般》24.13 (1991)，第 3111 页。[Ken00] Richard Kenyon。《多米诺骨牌铺砌的共形不变性》。载于：《概率年刊》28.2 (2000)，第 759–795 页。[Ken99] Arthur Edwin Kennelly。《导电网络中三角形与三角星的等价性》。载于：《电气世界与工程师》34.12 (1899)，第 413–414 页。[Koz18] Karol K. Kozlowski。《关于与XXZ链相关的Bethe根的凝聚性质》。载于：《数学物理通讯》357.3 (2018)，第 1009–1069 页。[KPS14] Filip Kos、David Poland 和 David Simmons-Duffin。《三维伊辛模型中的混合关联函数自举》。载于：《高能物理杂志》2014.11 (2014)，第 109 页。[KRV20] Antti Kupiainen、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas。《刘维尔理论的可积性：DOZZ公式的证明》。载于：《数学年刊》191.1 (2020)，第 81–166 页。[KT23] Laurin Köhler-Schindler 和 Vincent Tassion。《平面渗流的穿越概率》。载于：《杜克数学杂志》172.4 (2023)，第 809–838 页。[KT25] Laurin Köhler-Schindler 和 Vincent Tassion。《Russo-Seymour-Welsh理论导论》。载于《随机几何：渗流、镶嵌、高斯场与点过程》。Hermine Biermé 编。Cham：Springer Nature Switzerland，2025，第 1–34 页。[KWZ93] A. Klumper、T. Wehner 和 J. Zittartz。《六顶点模型的共形谱》。载于：《物理学杂志A：数学与一般》26.12 (1993)，第 2815–2827 页。[Lam23] Piet Lammers。《高度函数的二分理论》。2023。arXiv：2211.14365 [math].[Law14] Gregory F. Lawler。《平面中的共形不变过程》。Providence：美国数学会，2014。[Lis21] Marcin Lis。《论六顶点模型中的去局域化》。载于：《数学物理通讯》383.2 (2021)，第 1181–1205 页。[Lis22] Marcin Lis。《自旋、渗流与高度函数》。载于：《电子概率期刊》27 (2022)，第 1–21 页。[LO24] Piet Lammers 和 Sébastien Ott。《固体表面模型中的去局域化与绝对值FKG》。载于：《概率论及其相关领域》188.1 (2024)，第 63–87 页。[LSM61] Elliott Lieb、Theodore Schultz 和 Daniel Mattis。《反铁磁链的两个可解模型》。载于：《物理年刊》16.3 (1961)，第 407–466 页。[LSW02] Gregory F. Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。《平面自回避行走的标度极限》。2002。arXiv：math/0204277。

[LSW04] Gregory F. Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。《平面环擦除随机游走与均匀生成树的共形不变性》。载于：《概率年刊》32.1B (2004)，第 939–995 页。[LT24] Piet Lammers 和 Martin Tassy。《Lipschitz随机曲面的宏观行为》。载于：Probability and Mathematical Physics 5.1 (2024)，第 177–267 页。[LW80] Elliott H. Lieb 和 F. Y. Wu。《二维铁电模型》。载于：相变与临界现象现代物理学研讨班，第12届。1980。[Mas04] Vieri Mastropietro。《临界性下具有四自旋相互作用的伊辛模型》。载于：《数学物理通讯》244.3 (2004)，第 595–642 页。[MS16] Jason Miller 和 Scott Sheffield。《虚几何 I：相互作用的随机Loewner演化》。载于：《概率论及其相关领域》164.3 (2016)，第 553–705 页。[MS20] Jason Miller 和 Scott Sheffield。《刘维尔量子引力与布朗地图 I：QLE(8/3, 0)度量》。载于：《数学创见》219.1 (2020)，第 75–152 页。[MW14] Barry M. McCoy 和 Tai Tsun Wu。《二维伊辛模型》。第二版。多佛出版社，2014。[MW68] B. M. McCoy 和 Tai Tsun Wu。《氢键晶体与各向异性海森堡链》。载于：新物理学杂志B辑（1965–1970）56.2 (1968)，第 311–315 页。[Nie82] Bernard Nienhuis。《二维O(n)模型的精确临界点与临界指数》。载于：Physical Review Letters 49.15 (1982)，第 1062–1065 页。[Ons44] Lars Onsager。《晶体统计学 I：具有有序—无序转变的二维模型》。载于：《物理评论》65.3-4 (1944)，第 117–149 页。[Pol68] A M Polyakov。《临界现象的微观描述》。载于：苏联物理学期刊 28.3 (1968)，第 533–539 页。[Pol70a] A M Polyakov。《临界区中长程和短程相关性的性质》。载于：苏联物理学期刊 30.1 (1970)，第 151–157 页。[Pol70b] Alexander M. Polyakov。《临界涨落的共形对称性》。载于：JETP快报 12 (1970)，第 381–383 页。[PP64] A Z Patashinskii 和 V L Pokrovskii。《玻色流体中的二级相变》。载于：苏联物理学期刊 19.3 (1964)，第 677–691 页。[PS] H. Pinson 和 T. Spencer。《二维临界伊辛模型中的普适性》。私人通信。[RS22] Gourab Ray 和 Yinon Spinka。《梯度模型的有限编码及六顶点模型的一种新图示表示》。载于：Random Structures & Algorithms 61.1 (2022)，第 193–232 页。[Rus78] Lucio Russo。《关于渗流的一则注记》。载于：Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 43.1 (1978)，第 39–48 页。[RV14] Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas。《高斯乘性混沌及其应用：综述》。载于：《概率综述》11 (2014)，第 315–392 页。[Sch00] Oded Schramm。《环消随机游走与均匀生成树的标度极限》。载于：以色列数学杂志 118.1 (2000)，第 221–288 页。

[Seg88] G. B. Segal. “共形场论的定义”。载于：理论物理中的微分几何方法。K. Bleuler 和 M. Werner 编。多德雷赫特：Springer Netherlands，1988，第165–171页。[She05] Scott Sheffield. “面向数学家的高斯自由场”。载于：《概率论及其相关领域》139.3（2007），第521–541页。[She07] Scott Sheffield. “随机曲面”。载于：Astérisque 304（2005）。[She09] Scott Sheffield. “探索树与共形环系综”。载于：《杜克数学杂志》147.1（2009），第79–129页。[Smi01] Stanislav Smirnov. “平面上的临界渗流：共形不变性、Cardy公式、标度极限”。载于：《法国科学院报告》数学系列333.3（2001），第239–244页。[Smi10] Stanislav Smirnov. “随机簇模型中的共形不变性。I. 伊辛模型中的全纯费米子”。载于：《数学年刊》172.2（2010），第1435–1467页。[SS05] Oded Schramm 和 Scott Sheffield. “调和探索者及其收敛到 SLE4”。载于：《概率年刊》33.6（2005），第2127–2148页。[STF79] E. K. Sklyanin、L. A. Takhtadzhyan 和 L. D. Faddeev. “量子逆问题方法。I”。载于：《理论与数学物理》40.2（1979），第688–706页。[SW12] Scott Sheffield 和 Wendelin Werner. “共形环系综：马尔可夫特征与环汤构造”。载于：《数学年刊》176.3（2012），第1827–1917页。[SW78] P.D. Seymour 和 D.J.A. Welsh. “方格上的渗流概率”。载于：《离散数学年刊》第3卷。爱思唯尔，1978，第227–245页。[Tes01] J. Teschner. “重新审视刘维尔理论”。载于：《经典与量子引力》18（2001），R153–R222。[Tes19] J. Teschner. “重新审视刘维尔理论”。载于：《可积性：从统计系统到规范理论》。莱苏什暑期学校讲义106（2019），第60–120页。[Tes95] Jörg Teschner. “关于刘维尔三点函数”。载于：《物理快报B》363.1（1995），第65–70页。[Til07] Béatrice de Tilière. “等半径菱形二聚体模型的标度极限及三角四边形铺砌的情形”。载于：《亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）：概率与统计》43.6（2007），第729–750页。[WH31] N. Wiener 和 E. Hopf. “关于一类奇异积分方程”。载于：《柏林科学院会议报告》（1931），第696–706页。[Wid65a] B. Widom. “临界点邻域的状态方程”。载于：《化学物理学杂志》43.11（1965），第3898–3905页。[Wid65b] B. Widom. “临界点附近的表面张力与分子关联”。载于：《化学物理学杂志》43.11（1965），第3892–3897页。[Wil71a] Kenneth G. Wilson. “重整化群与临界现象。I. 重整化群与Kadanoff标度图景”。载于：Physical Review B 4.9（1971），第3174–3183页。

[Wil71b] Kenneth G. Wilson. “重整化群与临界现象。II. 临界行为的相空间胞元分析”。载于：*Physical Review B* 4.9（1971），第3184–3205页。