arXiv:2603.06285v1 [math.LO] 6 Mar 2026

从 Fraïssé 理论视角看 Lévy坍缩的齐性

ZIEMOWIT KOSTANA

摘要. 给定一个强不可达基数 λ，我们研究由所有大小为 $<\lambda$ 的布尔代数以及正则嵌入构成的 Fraïssé类。我们证明这确实是一个 Fraïssé类，且其极限与 Lévy坍缩具有相同的完备化。我们还直接证明，密度为 κ 的坍缩代数不是由密度为 $<\kappa$ 的正规子代数组成的 κ-链的并集。

关键词： Fraïssé理论，齐性结构，正规子代数，坍缩代数，Lévy坍缩

MSC 分类： 06E10, 03C55,03E40

0. 引言

0.1. **Fraïssé-Jónsson理论**。 经典Fraïssé理论研究某些有限结构类（称为*Fraïssé*类）与相对于有限子结构而言具有齐次性的可数结构之间的关系。然而，自Fraïssé的原始论文问世以来 [5], ，该理论已获得了大量影响深远的推广。Droste和Göbel引入了Fraïssé理论的范畴论框架 [3] [4], ，随后Kubi´s[15]又对其进行了进一步推广。这一最初以模型语言发展起来的理论，已成为一般拓扑学 [8], 、拓扑动力学 [12], 、Polish群理论 [20] [12], 和泛函分析 [6] [1]中的一项重要工具。文章 [17] 全面综述了关于齐性结构及其自同构群的已有研究，而 [13] 则对这些群的拓扑性质研究作了详尽介绍。

不可数Fraïssé极限理论常被称为*Fraïssé-Jónsson*理论，因为Jónsson最先将Fraïssé的原始工作推广到不可数情形。Fraïssé-Jónsson理论中或许最引人注目的实例是Parovi˘cenko定理，该定理指出，在连续统假设下， $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 是唯一具有强可数分离性质 [18]、基数为连续统的布尔代数。

经典Fraïssé理论的一种精炼的模型论阐述可见于 [7]。

0.2. **坍缩代数**。 给定一个不可数基数 κ，坍缩代- 数 $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$ 是密度为 κ 、能够将κ 坍缩为可数序数的唯一完备布尔代数。它有许多有趣的性质。例如，根据 Solovay 的一条定理，它是作为完备布尔代数由可数个元素生成的（[14],

第 191 页），这表明由可数个元素生成的完备布尔代数可以任意大。此外，每个布尔代数都能嵌入某个坍缩代数中，成为其正则子代数。任何坍缩代数都可以通过某种非分配性条件在同构意义下刻画。这一刻画及其他一些性质可见 [14]。

0.3. **Lévy坍缩**。 *Lévy* 坍缩是一种经典的强迫概念，用于将强不可达基数坍缩为像 ω_1 或 ω_2 这样“较小”的基数。将强不可达基数 Lévy 坍缩至 ω_1 ，其最引人注目的效果之一是使所有射影集都勒贝格可测 [2]。将强不可达基数坍缩至 ω_2 会消灭所有库雷帕树（[19],[9] 定理 27.9）。Lévy 坍缩一个不太为人所知的应用是迫使每个权为 ω_1 的紧豪斯多夫空间都具有 ω_1 或 2^{ω_1} 的大小，不过在这种情况下，所用的强迫是 Lévy 坍缩与广义科恩强迫的乘积 [11]。

给定一个强不可达基数 λ，我们从 Fraïssé-Jónsson 理论的视角研究所有大小小于 λ 、配备正则嵌入的布尔代数所构成的类。我们将此类记为 Bool_λ。我们还考虑类 $\mathrm{BoolSeq}_\lambda$，它由所有作为递增 λ-链的正则子代数之并的布尔代数组成。精确定义见定义 2.7。本文的主要结果如下：

A. Bool_λ 是一个 Fraïssé 类，其极限与将 λ坍缩至 ω_1所得的 Lévy 坍缩具有相同的完备化。B. 对于 $B \in \mathrm{BoolSeq}_\lambda$，Lévy 坍缩的自同构群是群类 $\mathrm{Aut}(B)$ 中的一个泛群。

我们还为以下事实给出了一种新的证明：$\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ 不属于 $\mathrm{BoolSeq}_\kappa$ 类。这个事实本身相当标准，但其论证依赖于有限支撑迭代保持 κ-链条件。我们给出一个直接证明，这个证明或许也有一定价值。

1. 主要定义与记号

本文在 Fraïssé 理论方面是自足的。大多数定理的表述仅以基本的模型论概念为基础，但其证明往往依赖于强迫论证。关于布尔代数理论的所有相关概念，都可以在以下简短介绍中找到，或参见 [14]。

1.1. **偏序**。我们所考虑的所有偏序都是分离的。对于偏序 P，我们用 $\overline{P}$ 表示 P 的完备化——即包含 P 作为稠密子集的唯一完备布尔代数。在某个特定拓扑下， P 的完备化可以实现为 P 的正则开子集所构成的布尔代数。不过，与其具体讨论 P 的元素，不如关注前述普适性质。

1.2. **正则布尔子代数**。 布尔代数 A 的子集 $R \subseteq A$ 是稠密的 ，如果对于每个 $a \in A \setminus \{0\}$ ，都存在 $r \in R \setminus \{0\}$ 使得 $r \leq a$。 A 的稠密子集的最小基数称为 A的密度 ，记作 $\mathrm{dens}(A)$。

子代数 $A \subseteq B$ 是正则的，如果 A 中的每个极大反链也是 B中的极大反链。我们记作 $A \sqsubseteq B$。布尔代数的嵌入称为正则嵌入，如果其像是正则子代数。正则嵌入类似于完备嵌入。嵌入 $e\colon A \longrightarrow B$ 称为完备的，如果 A 是一个完备代数，并且对于每个子集 $S \subseteq A$

$$\bigvee e[S] = e[\bigvee S],\ \bigwedge e[S] = e[\bigwedge S].$$

区别在于，在非完备代数中，表达式 $\bigvee S$ 和 $\bigwedge S$ 可能没有定义。我们以同样的方式定义偏序的正则子序，并记作 $P \sqsubseteq R$。我们将频繁使用西科尔斯基扩张判据的以下简单且众所周知的推论。

命题 1.1。任何正则嵌入 $e\colon A \longrightarrow B$ 都能唯一扩张为完备嵌入 $\bar{e}\colon A \longrightarrow B$。

1.3. **强迫论证**。在定理 3.3 的证明中，我们使用了强迫理论中的方法。这些方法与 [9] 中引理 26.7 和引理 26.9 的证明中所用的方法相似。

对于布尔代数 B，我们令 $B^+ = B \setminus \{0\}$。在强迫理论中，我们通常考虑嵌入

$$B^+ \longrightarrow B^+ \times C^+,$$

其中 B 和 C 是布尔代数，由下式给出

$$b \mapsto (b, 1_C).$$

这是偏序的正则嵌入，但它不 会导出布尔代数的正则嵌入：即使 b 和 b' 在 B 中不相容，我们仍有

$$(0_B, 1_C) \leq (b, 1_C), (b', 1_C).$$

命题 1.2. 对于布尔代数 B 和 C，存在一个自然的稠密嵌入 $i\colon B^+ \times C^+ \to B \oplus C$。特别地

$$\overline{B^+ \times C^+} \simeq \overline{B \oplus C},$$

其中 $\oplus$是自由积。

证明。根据斯通对偶，我们可以找到紧致零维空间 X_B 和X_C，使得 B 和 C 分别是 X_B 和 X_C 上的既开又闭集代数。显然

$$B^+ = \mathrm{clop}(X_B) \setminus \{\emptyset\}$$

and

$$C^+ = \mathrm{clop}(X_C) \setminus \{\emptyset\}.$$

我们定义嵌入

$$i : \mathrm{clop}(X_B)^+ \times \mathrm{clop}(X_C)^+ \to \mathrm{clop}(X_B \times X_C)$$

作者：$i(p,\ q) = x \times y$。

□

定义 1.3. 该 B^+ 到 $B \oplus C$ 的典范嵌入是复合

$$B^+ \longrightarrow B^+ \times C^+ \sqsubseteq \overline{B^+ \times C^+} = \overline{B \oplus C},$$

其中，第一个箭头将 b 映射到 $(b,\ 1_C)$。

根据命题 1.1，从 B^+ 到 B 的典范嵌入可唯一扩展为从 到 $B \oplus C$的典范嵌入。详情请参阅 [14]。

2. FRAÏSSÉ-JÓNSSON 理论

本节汇集有关 Fraïssé极限的基本概念，并陈述连接 Fraïssé类与 Fraïssé极限的主要定理。本节的主要定理可以用许多不同的一般性层次来表述。或许最一般的表述是 [15], 中的推论 4.7，而最基本的表述则归功于 Fraïssé [5]。我们选择的表述较为折中，适用于我们的应用。

2.1. **Fraïssé-Jónsson类。** 我们考虑一个类 $\mathcal{K}$，它由某个一阶语言中的结构以及一个特定的嵌入类组成，该嵌入类记为 $\mathcal{E}$。我们假设 $\mathcal{E}$ 包含所有同构，且在复合运算下封闭。对于 $A,\ B \in \mathcal{K}$ 我们记作 $A \sqsubseteq_{\mathcal{E}} B$，如果 $A \subseteq B$ 且包含映射属于 $\mathcal{E}$。

定义 2.1. 对于极限序数 δ，若一个 $\sqsubseteq_{\mathcal{E}}$-递增的 $\mathcal{K}$-结构序列 $\{A_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ 满足：对每个极限 $\beta < \delta$，都有

$$A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha.$$

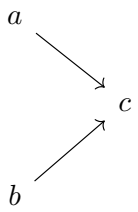
定义 2.2. 对于不可数基数 κ，若每当 $\{A_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ 是一个 $\mathcal{K}$-结构的连续序列，且 $\delta < \kappa$ 时，都有：则类 $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ 是 $<\kappa$-闭的

$$A_\delta := \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha \in \mathcal{K},$$

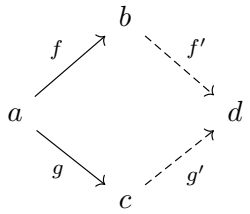
并且对每个 $\alpha < \delta$都有 $A_\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{E}} A_\delta$。

定义 2.3. 对于类 $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$，我们称：

- $(\mathcal{K},\ \mathcal{E})$ 具有联合嵌入性质 (JEP)：对于每个 $a,\ b \in \mathcal{K}$ 都存在 $\mathcal{E}$-嵌入，将 a 嵌入 c，并将 b嵌入 c，其中 $c \in \mathcal{K}$。



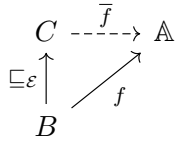
• $(\mathcal{K},\ \mathcal{E})$ 具有*amalgamation* 性质 (AP)：对于来自 $\mathcal{E}$ 的每对嵌入 $f\colon a \longrightarrow b, g\colon a \longrightarrow c$，都存在 $d \in \mathcal{K}$，以及一对嵌入 $f'\colon b \longrightarrow d, g'\colon c \longrightarrow d$，它们位于 $\mathcal{E}$ 中，且满足 $f' \circ f = g' \circ g$。



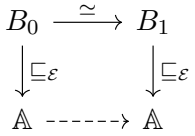
定义 2.4。结构 $\mathbb{A}$是：

• $(\mathcal{K},\mathcal{E})$-普适的，如果对于每个 $B \in \mathcal{K}$，都存在一个 $\mathcal{E}$-嵌入 $B \longrightarrow \mathbb{A}$，

• $(\mathcal{K},\mathcal{E})$-内射的，如果对于任意 $\mathcal{E}$-嵌入 $f\colon B \longrightarrow \mathbb{A}$，以及任意满足 $B \sqsubseteq_{\mathcal{E}} C$ 的 $C \in \mathcal{K}$，都存在将 f 扩展为 $\mathcal{E}$-嵌入 $\overline{f}\colon C \longrightarrow \mathbb{A}$ 的方式。



• $(\mathcal{K},\mathcal{E})$-齐次的，如果子结构 $B_0, B_1 \sqsubseteq_{\mathcal{E}} \mathbb{A}$ 之间的任意同构都可以扩展为 $\mathbb{A}$ 的一个自同构。



定理 2.5 (Fraïssé定理，[5],[10],[15])。设 λ 为满足 $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ 的无穷基数。设 $\mathcal{K}$ 是有限一阶语言中结构的一个类，且 $\mathcal{E}$ 是一个指定的嵌入类，在复合运算下封闭并包含所有同构。设 $\mathcal{K}_\lambda$ 是 $\mathcal{K}$的一个子类，其中只包含大小小于 λ 的模型。假设$(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{E})$ 满足以下性质：

(1) 联合嵌入性质，(2) *amalgamation* 性质，(3) 对 $\mathcal{E}$-子结构封闭，(4) 是 $< \lambda$-封闭的[1]。

那么存在一个结构 $\mathbb{A}_\lambda$ 满足
a) $\mathbb{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$，其中

- $A_\alpha \in \mathcal{K}_\lambda$，对于每个 $\alpha < \lambda$，
- $A_\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{E}} A_\beta$，每当 $\alpha < \beta < \lambda$，

[1]满足 $1. - 4.$ 的类 $(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{E})$ 通常称为长度为 λ 的 *Fraïssé* 类

- $A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$, *whenever* $\beta < \lambda$ *is limit.*

b) $\mathbb{A}_\lambda$ *is* $(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{E})$*-universal,*
c) $\mathbb{A}_\lambda$ *is* $(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{E})$*-injective.*

此外，性质 $1.-4.$ 性质唯一地决定了该结构（$\mathcal{K}_\lambda$, $\mathcal{E}$）同构意义下的结构，且任何满足这些性质的结构也是($\mathcal{K}_\lambda$, $\mathcal{E}$)-齐次的。

证明。将 $\{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ 中所有（在同构意义下）的结构枚举为 $\mathcal{K}_\lambda$。我们的目标是递归地构造一个由结构 $F_\alpha \in \mathcal{K}_\lambda$ 组成的 $\sqsubseteq_\mathcal{E}$-递增序列，然后设置:

$$\mathbb{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha.$$

为便于记录，我们固定基数 λ 的一个划分 $\{\Phi_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$，该划分由基数为 λ 的集合组成，并满足对所有 $\gamma < \lambda$，$\min \Phi_\gamma \geq \gamma$。

存在性： 令 $F_0 = A_0$，并将所有 $\mathcal{E}$-嵌入 g 枚举为 $\{g_\gamma \mid \gamma \in \Phi_0\}$，使得对某个 $\gamma < \lambda$，$\operatorname{dom} g \sqsubseteq_\mathcal{E} F_0$ 且 $\operatorname{rg} g \sqsubseteq_\mathcal{E} A_\gamma$。

- 在后继步骤中，定义 F_α，集合 $\{g_\gamma \mid \gamma \in \Phi_\alpha\}$ 也随之定义。注意，若 β 满足 $\alpha \in \Phi_\beta$，则 $\beta \leq \alpha$，因此特别地， g_α 已经定义，且 $\operatorname{dom} g_\alpha \subseteq F_\alpha$。利用 amalgamation 性质，我们可以找到 h 和 $F'_{\alpha+1} \in \mathcal{K}_\lambda$，从而闭合该图

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{dom} g_\alpha & \xrightarrow{\sqsubseteq_\mathcal{E}} & F_\alpha \\ {\scriptstyle g_\alpha}\downarrow & & \vdots\downarrow \\ \operatorname{rg} g_\alpha & \xrightarrow{\quad h \quad} & F'_{\alpha+1} \end{array}$$

利用联合嵌入性质，我们可以将 $F'_{\alpha+1}$ 扩充为 $F_{\alpha+1}$，使得 $F_{\alpha+1}$ 包含 A_α的一个同构副本。

我们用集合 $\Phi_{\alpha+1}$ 来索引所有从 $F_{\alpha+1}$的子结- 构出发的 $\mathcal{E}$-嵌入。

- 在极限步骤中，我们只需令

$$F_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} F_\gamma,$$

并用集合 Φ_α 来索引所有从 F_α的 $\sqsubseteq_\mathcal{E}$-子结构出发的 $\mathcal{E}$-嵌入。

$\mathbb{A}_\lambda$ 的普遍性显而易见，因此留给读者证明，接下来证明单射性。

固定 $B \sqsubseteq_\mathcal{E} C \in \mathcal{K}_\lambda$，以及一个 $\mathcal{E}$-嵌入 $i\colon B \longrightarrow \mathbb{A}_\lambda$。存在某个 $\delta < \lambda$，使得 $g_\delta = i^{-1}\colon i[B] \to B \sqsubseteq_\mathcal{E} C$。递归构造给出如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} i[B] & \xrightarrow{\sqsubseteq_{\mathcal{E}}} & F_\delta \\ {\scriptstyle i^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sqsubseteq_{\mathcal{E}}} \\ C & \xrightarrow{\quad h \quad} & F'_{\delta+1} \end{array}$$

由此可得， h 和 i 在 B 上一致。

唯一性： 假设另有一个结构 $\mathbb{A}'_\lambda$ 满足该定理的结论。特别地，存在一个分解

$$\mathbb{A}'_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A'_\alpha,$$

为一个 $\mathcal{E}$-递增的 $\mathcal{K}_\lambda$-结构序列。设 $f_0 : A_0 \longrightarrow A'_0$ 已给定。我们将递归地定义一个递增的 $\mathcal{E}$-嵌入序列 f_α，使得

$$f = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$$

将是从 $\mathbb{A}_\lambda$ 到 $\mathbb{A}'_\lambda$ 的一个同构。

- 假设 α 是偶后继序数，且已定义 f_α。基数 λ是正则的，因此存在 $\beta > \alpha$ 使得 $\mathrm{dom}\, f_\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{E}} A_\beta$。由于 $\mathbb{A}'$ 是（$\mathcal{K}_\lambda$， $\mathcal{E}$）-内射的，我们可以找到 $f_{\alpha+1}$ 来闭合该图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}\, f_\alpha & \sqsubseteq_{\mathcal{E}} & A_\beta \\ {\scriptstyle f_\alpha}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle f_{\alpha+1}} \\ \mathrm{rg}\, f_\alpha & \sqsubseteq_{\mathcal{E}} & \mathbb{A}'_\lambda \end{array}$$

  特别地， $A_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{dom}(f_{\alpha+1})$。
- 假设 α 是奇后继序数，且 f_α 已定义。存在$\beta > \alpha$ 使得 $\mathrm{rg}\ f_\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{E}} B_\beta$。由于 $\mathbb{A}$ 是（$\mathcal{K}_\lambda$， $\mathcal{E}$）-内射的，我们可以找到$f_{\alpha+1}$ 来闭合该图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}\, f_\alpha & \sqsubseteq_{\mathcal{E}} & \mathbb{A}_\lambda \\ {\scriptstyle f_\alpha^{-1}}\uparrow & & \vdots{\scriptstyle f_{\alpha+1}^{-1}} \\ \mathrm{rg}\, f_\alpha & \sqsubseteq_{\mathcal{E}} & A'_\beta \end{array}$$

  特别地， $A'_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{rg}(f_{\alpha+1})$。
- 如果 α 是极限，我们令

$$f_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma.$$

显然， $f = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$ 是一个同构。

齐性： 为看出任何满足条件 $1. - 4.$ 的结构都是（$\mathcal{K}_\lambda$， $\mathcal{E}$）-齐次的，请注意，在唯一性的证明中，我们从一个任意的部分同构 f_0开始构造。因此，我们只需取$\mathbb{A}'_\lambda = \mathbb{A}_\lambda$ 并遵循同样的构造。□

本定理为下述重要定义提供了依据。

定义 2.6. 定理 2.5 中的结构 $\mathbb{A}_\lambda$ 称为类 $(\mathcal{K}_\lambda,\ \mathcal{E})$ 的*Fraïssé*极限 。

2.2. **布尔代数类**。 此处我们将注意力限制在（分离的）偏序类及其正则嵌入上。我们所考虑的大多数偏序都将是某个布尔代数B对应的 B^+ 。

定义 2.7. 给定不可数基数 λ，我们引入以下布尔代数类:

- 类 Bool_λ 由所有基数小于 λ 的布尔代数及其正则嵌入组成。
- 类 $\mathsf{BoolSeq}_\lambda$ 由形如以下形式的所有布尔代数 A 组成

$$A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha,$$

其中
  - $A_\alpha \in \mathsf{Bool}_\lambda$，对每个 $\alpha < \lambda$;
  - $A_\alpha \sqsubseteq A_\beta$，对每个 $\alpha < \beta < \lambda$;
  - $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha = A_\beta$，对每个 $\alpha < \beta < \lambda$。

$\mathsf{BoolSeq}_\lambda$ 的嵌入都是正则嵌入。

我们的目标是在λ 为强不可达基数的情况下，刻画类 Bool_λ 的 Fraïssé极限。

3. 坍缩代数

下面的定理给出了坍缩代数的一个众所周知的刻画。

定理 3.1 (引理 26.7, [9])**.** 对于任意无穷基数 κ，存在一个同构意义下唯一的完备布尔代数 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$，满足以下两个性质:

- $\mathsf{dens}(\mathsf{Coll}(\omega, \kappa)) = \kappa$,
- $\mathsf{Coll}(\omega, \kappa) \Vdash |\kappa| = \omega$.

代数 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ 的大小为 2^κ。

由这些条件很容易找到坍缩代数 $\mathsf{Coll}(\omega, \kappa)$ 的一个具体表示。例如，$\mathsf{Coll}(\omega, \kappa)$ 同构于该偏序的完备化

$$B_\kappa := \{p : \mathrm{dom}(p) \longrightarrow \kappa \mid \mathrm{dom}(p) \in [\omega]^{<\omega}\},$$

按序 $p \leq q \iff p \supseteq q$。

推论 3.2（Kripke，定理 26.8, [9]）。如果 $B \in \mathrm{Bool}_{\kappa^+}$，那么

$$\overline{B \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)} \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \kappa).$$

特别地，代数 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ Bool_{κ^+}-普适。

一个直接推论是，只要满足 $\delta_0 < \delta_1$，就有 $\overline{\mathrm{Coll}(\omega, \delta_0) \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1)} \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1)$。事实上，结论还更强。

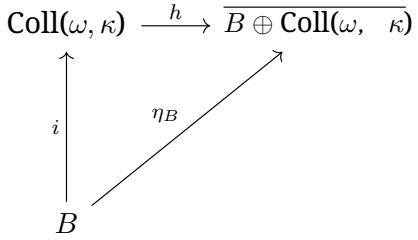
定理 3.3。设 κ 为一个不可数基数，且 B 为一个密度小于 κ 的布尔代数。令

$$i : B \longrightarrow \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$$

为一个正则嵌入。则存在一个同构

$$h : \mathrm{Coll}(\omega, \kappa) \longrightarrow \overline{B \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)},$$

使得 $h \circ i[B]$ 是将 B 嵌入到 $\overline{B \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)}$ 中的典范嵌入。



证明将依赖一个引理。

引理 3.4. 假设对于某个迫使 $\mathbb{P}$，我们有

$$\mathbb{P} \Vdash \dot{f} : \check{\mathbb{Q}}_0 \longrightarrow \dot{\mathbb{Q}}_1 \textit{ is an isomorphism of forcings}.$$

那么，由下式给出的函数 $f : \mathbb{P} * \mathbb{Q}_0 \longrightarrow \mathbb{P} * \mathbb{Q}_1$

$$(p, \check{q}) \mapsto (p, \dot{f}(\check{q}))$$

是到一个稠密子集上的同构。

证明。验证 f 保持序和不相容性是显而易见的。我们将验证形如 $(p, f(\check{q}))$ 的条件构成了 $\mathbb{P} * \mathbb{Q}_1$ 的一个稠密子集。

固定 $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_1$。存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{q}_0$，使得

$$p \Vdash \dot{f}(\dot{q}_0) = \dot{q}.$$

设 $p_0 \leq p$ 是一个决定 $\dot{q}_0$ 的条件，即

$$p_0 \Vdash \dot{q}_0 = \check{q}_0.$$

那么显然，$(p_0, f(\check{q}_0)) \leq (p, \dot{q})$。 □

定理 *3.3* 的证明。 不失一般性，我们可以假设 i 是恒等嵌入。设 $B_0 \subseteq B_1$ 分别是 B 和 Coll(ω,κ) 的某些稠密子代数，使得 $|B_0| < \kappa$且 $|B_1| = \kappa$。由于稠密子代数总是正则的，因此 $B_0 \sqsubseteq B_1$。于是

$$B_1^+ \simeq B_0^+ * (B_1^+ : \dot{G}) \sqsubseteq B_0^+ * (\overline{B_1^+ : \dot{G}})^+,$$

其中 $\dot{G}$ 是一个泛滤子的 B_0^+-名称。注意

$$B_0^+ \Vdash |(B_1^+ : \dot{G})| = \kappa,$$

and

$$B_0^+ \Vdash \text{“}(B_1^+ : \dot{G}) \Vdash |\kappa| = \omega.\text{"}$$

由定理 3.1 可知， B_0^+强迫 B_1^+： $\dot{G}$ 与 Coll(ω,κ) 同构。应用引理 3.4，我们因此得到一列稠密嵌入

$$B_0^+ * (\overline{B_1^+ : \dot{G}})^+ \longrightarrow B_0^+ * \mathrm{Coll}(\omega,\kappa)^+ \sqsubseteq B_0^+ \times \mathrm{Coll}(\omega,\kappa)^+.$$

由此我们得到一个由正则嵌入构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} B_1^+ & \longrightarrow & B_0^+ \times \mathrm{Coll}(\omega,\kappa)^+ \\ \sqsubseteq\uparrow & \nearrow_{\eta_{B_0^+}} & \\ B_0^+ & & \end{array}$$

其中 $\eta_{B_0^+}$ 是将 B_0^+嵌入 $B_0^+ \times$ Coll$(\omega,\kappa)^+$ 的典范嵌入。鉴于 B_0 是 B的稠密子代数，经过完备化后我们得到

$$\begin{array}{ccc} \text{Coll}(\omega,\kappa) & \longrightarrow & \overline{B \oplus \text{Coll}(\omega,\ \ \kappa)} \\ \sqsubseteq\uparrow & \nearrow_{\eta_{\bar{B}}} & \\ \overline{B} & & \end{array}$$

证明到此结束。 □

推论 3.5。 如果 λ 是强不可达的，那么 Bool_λ 具有 *amalgamation* 性质。

证明。 考虑范畴 Bool_λ 中的一个图：

$$\begin{array}{ccc} & & B_1 \\ & \overset{i_1}{\nearrow} & \\ B_0 & & \\ & \underset{i_2}{\searrow} & \\ & & B_2 \end{array}$$

根据推论 3.2，每个布尔代数都可以嵌入到一个具有相同密度的坍缩代数中，因此不失一般性，我们可以假设 $B_1 = \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1)$，以及 $B_2 = \mathrm{Coll}(\omega, \delta_2)$，其中 $\delta_1, \delta_2 < \lambda$ 是某些基数。根据定理 3.3，我们可以将 i_1 和 i_2 扩展为典范嵌入

$$h_1 \circ i_1 : B_0 \longrightarrow \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1)},$$

and

$$h_2 \circ i_2 : B_0 \longrightarrow \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_2)}.$$

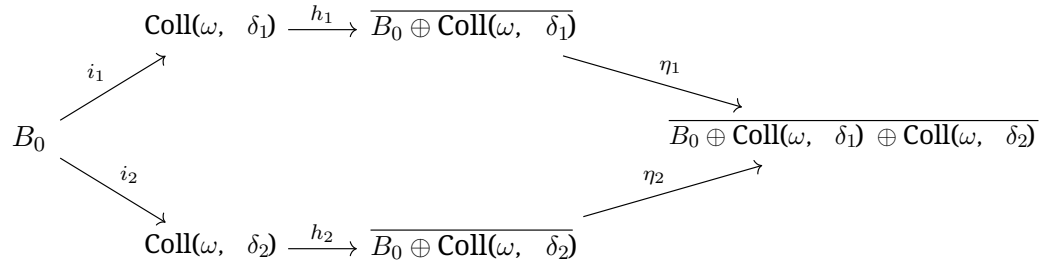
令 η_1 和 η_2 为典范嵌入：

$$\eta_1 : \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1)} \longrightarrow \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1) \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_2)},$$

and

$$\eta_2 : \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_2)} \longrightarrow \overline{B_0 \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_1) \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta_2)}.$$

那么，下图中的两个复合映射都是典范的，因此该图可交换。



□

另一个推论是对 [9], 中引理 26.9 的一个小幅改进，其中考虑的是完备嵌入。

推论 3.6（坍缩代数的单射性）。设 δ 是任意基数。对于每一对布尔代数 $B \sqsubseteq C$，若 $\mathrm{dens}(C) < \delta$，则每个正则嵌入

$$i : B \longrightarrow \mathrm{Coll}(\omega, \delta)$$

都可以扩展为正则嵌入

$$\bar{i} : C \longrightarrow \mathrm{Coll}(\omega, \delta).$$

证明。根据定理 3.3，i 等价于以下复合：

$$B \sqsubseteq C \longrightarrow \overline{C \oplus \mathrm{Coll}(\omega, \delta)},$$

而且显然可以将此嵌入扩展到 C。 □

定理 3.7。若 λ 是强不可达基数，则 Bool_λ 是一个 ***Fraïssé*类**。特别地，存在一个同构意义下唯一的布尔代数 $\mathbb{B}_\lambda \in \mathrm{BoolSeq}\lambda$，它是$\mathrm{Bool}_\lambda$-内射的。此外，代数 $\mathbb{B}_\lambda$ 是Bool_λ-齐次的。

证明。定理 2.5 所要求的几乎所有条件都很直接。唯一的例外是 amalgamation 性质，即推论 3.5。□

我们的下一个目标是寻找代数 $\mathbb{B}_\lambda$. 的表示。通过展开 Bool_λ-齐性的定义，我们得到：

推论 3.8. 对于每一对同构的正则子代数 $B_0, B_1 \sqsubseteq \mathbb{B}_\lambda$，每个同构 $f : B_0 \longrightarrow B_1$ 都可以扩张为一个自同构 $f : \mathbb{B}_\lambda \longrightarrow \mathbb{B}_\lambda$。

这是 Lévy 坍缩的一个众所周知的性质，已在定理 26.12 [9] 中证明。事实上，我们将看到，$\mathbb{B}_\lambda$ 包含 Lévy 坍缩作为一个稠密子集。

定理 3.9. 定理 *3.7* 中的代数 $\mathbb{B}_\lambda$ 与以下任意一个同构：

(1) 任意 $\sqsubseteq$-递增并
$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|).$$
(2) 自由积
$$\bigoplus_{\delta<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |\delta|).$$

证明。 注意，对于任意不可数基数 κ，我们有
$$\bigoplus_{\delta\leq\kappa} \mathrm{Coll}(\omega, \delta) \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \kappa),$$
根据推论 3.2。因此，2. 是 1. 的特殊情形，所以我们将重点证明 1.

首先，我们将验证并集
$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|)$$
确实属于类 Bool_λ。这一点几乎显而易见，因为它被定义为一个递增链，但遗憾的是，这条链并不连续。为了将这个并集细化为一个连续的并集，我们将使用集合 $S \subseteq \lambda$，它由所有具有可数共尾性的奇异基数组成。显然
$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|) = \bigcup_{\alpha\in S} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|),$$
因此，只需证明
$$\bigcup_{\alpha\in S\cap\delta} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|) \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \delta)$$
对每个 $\delta \in S$ 都成立。由于 $\mathsf{cof}(\delta) = \omega$，如果 δ 以下的每个基数都变为可数，那么 δ 本身也会变为可数。此外，我们有
$$\mathrm{dens}(\bigcup_{\alpha<\delta} \mathrm{Coll}(\omega, |\alpha|) \leq \bigcup_{\alpha<\delta} |\alpha| = \delta.$$
该断言由定理 3.1 推出。

在布尔代数类中，普遍性显然由单射性推出，因此我们只需证明该并是 Bool_λ-内射的。然而，这可由塌缩代数的单射性（推论 3.6）立即推出。□

“吸收性质”扩展到类 $\mathrm{BoolSeq}_\lambda$:

若 $B \in \mathrm{BoolSeq}\lambda$，则 $B \oplus \mathbb{B}_\lambda \simeq \mathbb{B}_\lambda$。
证明。 固定一个连续分解 $B = \bigcup B_\alpha$，其中布尔代数为$\alpha<\lambda$

$B_\alpha \in$ 布尔$_\lambda$。于是我们有

$$B \oplus \mathbb{B}_\lambda \simeq (\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha) \oplus (\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |B_\alpha|)) =$$

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha \oplus \mathrm{Coll}(\omega, |B_\alpha|) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, |B_\alpha|) \simeq \mathbb{B}_\lambda.$$

□

3.1. **Lévy 坍缩**。

定义 3.11。 不可数基数 λ的*Lévy*坍缩 是偏序

$$\mathrm{Coll}(\omega, <\lambda) = \{p : \mathrm{dom}(p) \longrightarrow \lambda \mid \mathrm{dom}(p) \in [\lambda \times \omega]^{<\omega}, \\ \forall (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\ p(\alpha, n) < \alpha\}.$$

直接根据定义，我们可以将 Lévy坍缩分解为一列递增的正则子集之并，这些子集坍缩越来越大的基数，具体如下

$$\mathrm{Coll}(\omega, <\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} C_\beta,$$

其中

$C_\beta = \{p : \mathrm{dom}(p) \longrightarrow \beta \mid \mathrm{dom}(p) \in [\beta \times \omega]^{<\omega},\ \forall (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\ p(\alpha, n) < \alpha\}.$

命题 3.12。 若 $\kappa < \lambda$ 是不可数基数，则 $C_\kappa = \mathrm{Coll}(\omega, <\kappa)$，且 $C_{\kappa+1} \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$。

证明。 $C_\kappa = \mathrm{Coll}(\omega, <\kappa)$这一事实可直接由定义得出。为证明 $C_{\kappa+1} \simeq \mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$，我们使用定理 3.1。显然 $|C_{\kappa+1}| = \kappa$，因此只需证明 $C_{\kappa+1}$ 将 κ坍缩为一个可数序数。为此，设 G是一个泛滤子的 $C_{\kappa+1}$-名称。那么，标准的稠密性论证表明

$$C_{\kappa+1} \Vdash \text{“}\bigcup\{\langle n, p(\kappa, n)\rangle \mid p \in \dot{G}\} \text{ is a function from } \omega \text{ onto } \kappa.\text{"}$$

□

定理 3.13。 如果 λ [2], 是强不可达的，那么在$\mathrm{Coll}(\omega, <\lambda)$ 与$\mathrm{Coll}(\omega, <\lambda)$之间存在一个同构副本。特别地， $\mathbb{B}_\lambda \simeq \mathrm{Coll}(\omega, <\lambda)$。

[2]对于这一论证，相关的仅是 λ 为不可数极限基数，但 $\mathbb{B}_\lambda$ 仅对强不可达基数定义。

证明。 直接根据定义可知 $C_\beta \subseteq \mathsf{Coll}(\omega, < \lambda)$，实际上 $C_\beta \sqsubseteq \mathsf{Coll}(\omega, < \lambda)$。因此我们可以假设每个完备化 C_β 都取自 $\mathsf{Coll}(\omega, < \lambda)$ 内。于是我们得到一列包含关系

$$\mathrm{Coll}(\omega, < \lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} C_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\lambda} \overline{C_\beta} \subseteq \overline{\mathrm{Coll}(\omega, < \lambda)}.$$

由于 λ 是极限，

$$\bigcup_{\beta<\lambda} \overline{C_\beta} = \bigcup_{\kappa<\lambda} \overline{C_{\kappa+1}} \simeq \bigcup_{\kappa<\lambda} \mathrm{Coll}(\omega, \kappa),$$

其中 κ 遍历不可数基数。根据定理 3.9，这个并与 $\mathbb{B}_\lambda$ 同构。

□

4. 群 $\mathrm{Aut}\,\mathbb{B}_\lambda$ 的普适性

命题 4.1. 对于任意一对布尔代数 B, C，存在一个嵌入

$$\mathrm{Aut}\, B \longrightarrow \mathrm{Aut}\, B \oplus C.$$

证明. 我们将 X_B 和 X_C 分别记作 B 和 C 的斯通空间。于是 $B \oplus C$ 是 $X_B \times X_C$ 的既开又闭子集构成的代数。若 $h\colon X_B \longrightarrow X_B$ 是一个同胚，我们可以将其扩展为

$$\bar{h} = h \times \mathrm{id} : X_B \times X_C \longrightarrow X_B \times X_C.$$

$\bar{}$ 映射 h 通过斯通对偶诱导出 $B \oplus C$ 的一个自同构。更准确地说，由下式给出的函数

$$F \mapsto \bar{h}^{-1}[F],$$

对于 $F \in \mathsf{clop}(X_B \times X_C)$，是 $B \oplus C$ 的一个自同构。
映射 $h \mapsto \bar{h}$ 是一个群同态，而且还是内射的。 □

定理 4.2. 如果 $B \in \mathrm{BoolSeq}_\lambda$，且 λ 是强不可达的，那么存在一个群嵌入

$$\mathrm{Aut}\, B \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathbb{B}_\lambda.$$

证明。 这是命题 4.1 和命题 3.10 的直接推论。

□

我们希望能更好地理解类 $\mathsf{BoolSeq}_\lambda$，至少对于强不可达基数是如此。我们将证明，该类包含所有不含大小为 λ 的反链的布尔代数。回顾一下，布尔代数 B 的饱和度（记为 $\mathrm{sat}\, B$）是满足 B 不含大小为 δ 的反链的最小基数 δ。

命题 4.3. 若 κ 是不可数正则基数且 满足 $B < \kappa$，则 $B \in \mathrm{BoolSeq}_\kappa$。

证明。 我们可以假设 $|B| = \kappa$，因为若 $|B| < \kappa$，结论显然成立。设 δ =Sat B。考虑一个函数

$$W : [B]^{<\delta} \longrightarrow B^+,$$

使得对于任意集合 $D \in [B]^{<\delta}$， W（D）都与 D 的每个元素不相交（只要存在这样的元素）。如果对于任意 $D \in [E]^{<\delta}$，集合 $E \subseteq B$ 在 W 下封闭，我们就称之为

$$W(D) \in E.$$

根据 κ 的正则性，我们可以将 B 分解为一条在 W 下封闭的子代数递增链。容易看出，每个这样的子代数都必定是正则的。□

5. T坍缩代数不属于BoolSeq

为回答 Adam Bartoš 提出的问题，我们证明，对于任意不可数正则 κ，坍缩代数 Coll(ω， κ) 不属于类 BoolSeq$_\kappa$ 。事实上，对于完备布尔代数，这可由 [9], 中的推论 16.10 立即推出：BoolSeq$_\kappa$ 中的任何代数都必须满足 κ-链条件，而 Coll(ω， κ) 不满足。

我们给出一个不依赖于有限支撑迭代理论的独立证明。

定理5.1 ([9]). 假设 κ 是一个具有不可数共尾性的基数，并且给定一个布尔代数序列 $\{B_\alpha \mid \alpha \leq \kappa\}$，满足：

(1) 对所有 $\alpha < \beta \leq \kappa$， B_α 是 B_β的正则子代数，(2)

对所有 $\alpha < \kappa$，$\mathrm{dens}(B_\alpha) < \kappa$，(3) 对每个 $\beta \in \mathrm{acc}(\kappa)$，

并集 $\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha$ 在 B_β中稠密。

则 B_κ 不同构于$\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$。

证明。 我们知道，Coll(ω, κ)可以表示为高度为 ω的 κ-分裂树的完备化。因此，只需证明不存在树$^{<\omega}\kappa$ 到 B_κ^+的稠密嵌入。为推出矛盾，我们假设

$$\phi : {}^{<\omega}\kappa \longrightarrow B_\kappa^+$$

是这样的嵌入。考虑H(θ)的初等子模型的一个连续 $\in$-链 $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$，其中 θ是充分大的正则基数，且该链包含 $\phi, \kappa, \{B_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$，并且还满足：

(1') 对每个 $\alpha < \kappa$、 $|M_\alpha| = |\alpha| + \omega$,

(2') 对每个 $\alpha < \kappa$、 $\alpha \subseteq M_\alpha$。

根据条款（3），函数 $\alpha \mapsto$ dens(B_α) 是连续的，因此我们可以找到$\delta \in$ acc(κ)使得

(1”) $\kappa \cap M_\delta = \delta$，(2”) sup($\{\alpha < \delta \mid$ dens(B_α) $= |\alpha|\})$ $= \delta$.

我们旨在证明 $B_\delta \cap M_\delta$ 在 B_δ 中稠密。根据条目 (2")，我们可以找到任意大的 $\alpha < \delta$，使得 B^+_α 有一个大小为 $|\alpha|$ 的稠密子集 D_α。根据初等性，我们可以从模型 M_δ 中选取 D_α，并且鉴于 $|\alpha| + 1 \subseteq M_\delta$，我们得出 $D_\alpha \subseteq M_\delta$。由于 α 是任意的，因此并集 $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha \cap M_\delta$ 是 $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha$ 在 $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha$ 中稠密，因此也在 B_δ 中。

我们声称 $\phi[{}^{<\omega}\delta]$ 在 B_δ 中稠密。为此，任取一个非零的 $p \in B_\delta$。我们可以在 $B_\delta \cap M_\delta$ 中找到一个非零的 $q \leq p$。根据初等性

$$M_\delta \models \exists\, t \in {}^{<\omega}\kappa \quad \phi(t) \leq q.$$

因此，我们可以在 ${}^{<\omega}\kappa \cap M_\delta = {}^{<\omega}\delta$ 中找到见证 $\phi(t) \leq p$ 的 $t \in {}^{<\omega}\kappa$。令 $A \subseteq {}^{<\omega}\delta$ 为一个极大反链。由于 ϕ 是一个稠密嵌入，$\phi[A]$ 在 B_δ 中也极大，因此在 B_κ 中也极大。然而，显然这不可能，因为对于任意 $s \in \kappa \setminus \delta$，单元素序列 $\langle s \rangle \in {}^{<\omega}\kappa$ 与 A中的任何元素都不相容，因此 $\phi[A] \cup \{\phi(\langle s \rangle)\}$ 是一个延伸$\phi[A]$的反链，这与 $\phi[A]$的极大性矛盾。这表明 ϕ 不可能是稠密嵌入，也就完成了证明。□

6. 未决问题

定理 3.3 本质上指出，Coll(ω, κ) 对于类 Bool$_\kappa$ 是齐次的。自然可以猜想，Coll(ω, κ) 本身是某种（广义的？）Fraïssé极限。根据定理5.1，它不可能是任何布尔代数类的长度 κ 的 Fraïssé极限。

问题6.1. 将坍缩代数 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ 表示为 *Fraïssé*极限。

致谢

˘ 作者得到捷克科学基金会项目 EXPRO 20-31529X 以及 RVO: 67985840 的资助。

参考文献

[1] A. Avilés, F.C. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, M. González, Y. Moreno, 普遍配置巴拿赫空间, J. Funct. Anal. 261 (2011), 2347–236[2] T. Bartoszy´nski, H. Judah, 集合论：实数直线的结构, AK Pe- ters/CRC Press, 1995[3] M. Droste, R. Göbel, 关于万有对象的范畴论定理及其在阿贝尔群论和计算机科学中的应用, Contemporary Mathematics 131 (1993): 49-49[4] M. Droste, R. Göbel, 万有域与 *amalgamation*（合并）性质, Mathemat- ical Structures in Computer Science 3.2 (1993): 137-159[5] R. Fraïssé, 关于关系系统的若干分类, Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A. 1 (1954)[6] J. Garbuli´nska, W. Kubi´s,关于 *Gurarii* 空间的评述, Extracta Math. 26(2) (2011/2012), 235-269[7] W. Hodges, 模型论, Cambridge university press, 1993

[8] T. Irwin, S. Solecki, 投射 *Fra¨ssé* 极限与伪弧, 美国数学会汇刊 358.7, 2006[9] T. Jech, 集合论：第三千年版，修订并扩充, 施普林格, 2006[10] B. Jónsson, 齐次普适关系系统, 《斯堪的纳维亚数学》8.1 (1960): 137-142[11] I. Juhás, 编者 K. Kunen 和 J. Vaughan, 集合论拓扑手册，第二章, 爱思唯尔, 2014[12] A. Kechris, V.G. Pestov, S. Todorˇcevi´c, *Fraïssé*极限、*Ramsey*理论与自同构群的拓扑动力学, Geom. Funct. Anal. 15, no. 1, 2005[13] A. Kechris, C. Rosendal,齐性结构的湍流、*amalgamation*（合并）与泛自同构, Proc. London Math. Soc. (3) 94 (2007), 302–350[14] S. Koppelberg, D. Monk 与 R. Bonnet 编，布尔代数手册，第*1*卷, North-Hollad, 1989[15] W. Kubi´s, *Fraïssé*序列：构造普适齐性结构的范畴论方法, 《纯粹与应用逻辑年刊》165.11 (2014): 1755-1811[16] K. Kunen, 集合论：独立性证明导论, Elsevier Science B.V. 1980[17] D. Macpherson, 齐性结构综述, Discrete Math. 311 (2011), 1599–1634[18] I. Paroviˇcenko, 关于权为 $\aleph_1$, 《科学院院刊》. Vol. 150. No. 1. 俄罗斯科学院, 1963[19] J. Silver, 模型论中 *Kurepa*猜想与双基数猜想的独立性, 公理集合论，第一部分，1971[20] J. K. Truss, 齐性结构的泛自同构, Proc.London Math. Soc. (3) 65 (1992), 121-141

捷克科学院数学研究所，ŽITNÁ 25，115 67 布拉格 1，捷克共和国

弗罗茨瓦夫理工大学，WYBRZEZ，维斯皮安斯基街 27 号，50 370 弗罗茨瓦夫，波兰

电子邮箱：ziemowit.kostana@pwr.edu.pl