arXiv:2603.06293v1 [stat.ME] 6 Mar 2026

基于包裹空间高斯马尔可夫随机场的大规模波浪方向数据建模

Arnab Hazra

坎普尔印度理工学院数学与统计系，印度坎普尔 208016

摘要

依赖方向数据的统计建模仍相对缺乏研究，尤其是在高维空间环境中。现有的空间角度数据建模方法主要依赖包裹高斯过程（WGP）模型，该模型为刻画圆上的空间依赖性提供了统一框架。然而，当空间域较大且观测具有较高分辨率时，基于WGP 的方法在计算上会面临挑战。在分析海啸和飓风等大规模地质与气候现象时，这一局限尤为明显，因为整个海洋盆地范围内都可能获得方向测量数据（例如波向或风向）。为应对这些挑战，我们提出一种用于大规模空间方向数据集的包裹高斯马尔可夫随机场（WGMRF）模型。通过利用高斯马尔可夫随机场固有的稀疏精度结构，该方法在保留圆周尺度上灵活空间依赖性的同时，显著提升了计算效率。我们讨论了该模型的关键性质，包括其可识别性和依赖特征。模型拟合采用标准的马尔可夫链蒙特卡罗技术。通过大量模拟研究，以及对2004年印度洋海啸期间印度洋波向数据的应用，我们将所提方法与非空间包裹高斯模型和低秩包裹高斯过程替代模型进行了比较。结果表明，在大空间域应用中，WGMRF 具有更优的预测性能和可扩展性。

关键词：分层贝叶斯模型、印度洋海啸、低秩包裹多元模型、随机偏微分方程、风向和波浪方向数据、包裹高斯过程

1 引言

波浪方向是海洋动力学的基本组成部分，决定波浪能量如何在海盆间传播并与海岸线相互作用。入射波的方向会显著影响海岸侵蚀、泥沙输运、海岸线演变，以及海滩和屏障系统的稳定性 [Ashton et al., 2001]。在热带气旋和温带风暴等极端事件中，波浪方向决定了海岸影响的空间分布，进而塑造淹没模式并造成基础设施损坏。海盆尺度分析表明，波浪气候的变化（包括主导波浪方向的转变）与气候变率及长期海洋—大气相互作用密切相关 [Young et al.,2011]。近期，卫星高度计和再分析数据集揭示了极端波浪条件在全球范围内呈现系统性变化，这对海岸风险和海上作业具有重要影响[Young and Ribal, 2019]。波浪方向对于上层海洋混合和海气动量交换也至关重要，并会影响大尺度气候过程。随着卫星遥感和全球波浪再分析产品的迅速发展，如今可以对整个海洋盆地的方向波场进行连续观测，因此波浪方向分析已成为海岸灾害评估、海洋工程设计、海上安全和气候影响研究的核心内容。

本文分析了2004年印度洋海啸的波向数据。该海啸发生于当地时间2004年12月26日07:58:53（协调世界时+7），震中位于印度尼西亚苏门答腊岛北部西海岸外的巽他俯冲带。此次地震震级超过9.0级，导致印澳板块与欧亚板块之间约1,300 km长的板块边界发生破裂。海啸波入射角度的空间差异显著影响了印度尼西亚、斯里兰卡、印度和泰国沿岸的波浪爬高及局部破坏程度。海啸波传播至整个印度洋盆地，在索马里、肯尼亚和坦桑尼亚造成了人员伤亡和大范围海岸损毁 [Ishii 等人， 2005]。事后评估强调，波浪传播路径和海岸朝向加剧了部分地区所受的影响 [Lay 等人， 2005]。因此，了解波浪的定向传播对于改进易受海啸和气旋影响地区的预警系统、海岸灾害制图和疏散规划至关重要。本文探讨了ERA5全球海浪再分析数据。该数据由欧洲中期天气预报中心在哥白尼气候变化服务框架下生成，分辨率为 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 。考虑覆盖整个印度洋盆地、范围从 60°S至 30°N、从 20°E至 147°E的区域，我们获取了33,845个网格单元的波向数据。

方向数据研究已有六十多年历史，其发展从奠基性的理论成果，演进至复杂精妙的现代建模框架。圆形推断的早期进展由 Watson [1961, 1962]和 Stephens [1963, 1970], 取得，他们为圆形变量发展了拟合优度检验程序和分布理论。关于方向统计学的全面论述见于 Fisher [1995] 和

Mardia 和 Jupp [2000], 的专著；Fisher [1995] 则进行了广泛探讨，着重介绍圆形方法和实际应用，其中还包括空间和时空应用。随着计算统计学的发展，尤其是马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）和期望最大化（EM）算法的进步，方向数据分析已从以描述性方法为主，转向完整的推断建模。频率学派和贝叶斯框架下均已发展出针对圆形响应的回归模型 [Harrison 和 Kanji，1988年，Damien 和 Walker，1999年，Kato 等人， 2008]。针对圆形过程的时间序列模型也已提出 [Coles， 1998]。

对于线性空间数据集，高斯过程（GP）凭借坚实的理论基础和易于处理的推断，仍是空间地统计学中的标准建模框架 [Gelfand 和 Schliep, 2016]。在此框架下，有限维联合分布仅取决于均值过程和协方差核，因此分析较为容易处理。空间方向数据的包裹高斯过程（WGP）模型始于 Jona-Lasinio 等人的开创性工作 [2012], ： 他们将高斯过程包裹到单位圆上，提出了一个连贯的贝叶斯框架，用于对波浪方向场建模。这种构造能够直接在角度尺度上对空间依赖性建模，同时借助潜在绕数保留易于处理的推断过程。后续研究从多个方向拓展了这一框架；Mastrantonio 等人 [2016] 将 WGP 模型扩展至具有非可分协方差结构的时空场景，而 Marques 等人 [2022]则提出了适用于空间变化依赖的非平稳包裹高斯过程。Wang 等人 [2015], 通过联合建模线性变量和圆形变量，实现了对波高和波浪方向的连贯分析；此外，Wang 和 Gelfand [2014] 还提出了相关的投影高斯过程方法，作为构造方向依赖性的另一种方案。Pewsey 和 García-Portugués [2021]综述了方向统计学的发展，包括空间圆形模型。近期的方法学研究探索了机器学习领域中的圆形过程和流形值过程，包括黎曼流形上的包裹 GP 回归 [（Mallasto 和 Feragen， 2018] ）以及环面和球面上的灵活归一化流 [（Rezende 等人， 2020]）。环境科学和能源科学中的应用，例如风和波浪建模 [（Arrieta-Prieto 和 Schell， 2024],），进一步凸显了对可扩展空间方向模型的需求。尽管已有这些进展，大规模空间域的计算挑战依然存在，因此仍需持续开发高效的包裹空间过程。

稠密 GP 的推断需要反复计算协方差矩阵的行列式和逆矩阵，导致立方计算复杂度 [Hazra 等人，2025b]。对于像我们这样的大型空间数据集，这种计算难以实现。为解决这一局限，人们提出了许多可扩展近似方法，包括核卷积方法[Higdon， 2002], 低秩基函数表示 [Wikle 和 Cressie， 1999], 预测过程模型 [Banerjee 等人， 2008], 谱似然近似 [Fuentes， 2007],复合似然和条件近似 [Vecchia，1988年，Stein 等人， 2004], 共-

方差渐缩 [Furrer 等人， 2006], 以及高斯马尔可夫随机场（高斯马尔可夫随机场）公式 [Rue 和 Held，2005年，Lindgren等人， 2011]。尽管上述可扩展高斯过程模型已在多种情境中得到探索，包括空间极值 [Hazra 和 Huser，2021年，Hazra 等人，2023年，2025a], 据我们所知，文献中尚无针对大型空间方向数据集的此类模型的包裹构造。

本文提出了一种包裹高斯马尔可夫随机场（WGMRF，下文简称 WGMRF）模型，用于分析大规模空间方向数据集。该模型利用包裹正态分布无穷级数表示的有限截断，这一方法由 Jona-Lasinio 等人提出[2012]。此外，我们利用高斯马尔可夫随机场近似潜在的各向同性高斯过程；该高斯马尔可夫随机场基于相应 Matérn相关函数的随机偏微分方程（SPDE）表示构建，研究动机源于 Lindgren等人 [2011]。我们进一步讨论了有关圆周相关性和预测分布的一些理论性质。计算基于马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC），具体采用 Metropolis-within-Gibbs 抽样方案。利用潜在高斯马尔可夫随机场精度矩阵的稀疏性，可以加快吉布斯抽样。潜在过程还包括一个块金分量，这进一步加快了抽样过程。通过模拟研究，我们将所提出的方法与标准的非空间包裹正态分布模型和低秩包裹高斯过程进行比较。低秩包裹高斯过程也是我们的创新贡献；尽管它能够对大规模空间方向数据集建模，但与所提出的模型相比，其形式不够简洁。在数据应用中，我们实施所提出的模型以获得统计推断。此外，我们还进行了 10 折交叉验证，以比较这三个相同的模型。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论大规模空间波向数据，并介绍若干表明有必要进行空间建模的探索性分析。第 3 节介绍单变量和多变量包裹正态分布以及 WGP 的必要背景，并介绍 Jona-Lasinio 等人 [2012]提出的有限截断策略。第 4 节讨论本文提出的 WGMRF模型、其性质以及贝叶斯计算。此外，我们还介绍低秩 WGP 模型的构建，并将其作为竞争模型。第 5 节将本文提出的方法与非空间包裹正态分布模型及竞争性的低秩 WGP 模型进行比较。第 6 节将本文提出的方法应用于 2004年印度洋海啸期间印度洋盆地的波向数据，并通过 10 折交叉验证比较本文提出的模型与竞争模型。第 7 节总结全文。

2 数据描述与探索性分析

本研究使用的波向数据来自欧洲中期天气预报中心在哥白尼气候变化服务 [框架下制作的 ERA5 全球波浪再分析 2020]Hersbach et al.，2020]。ERA5 提供全球一致的波浪参数，这些参数由大气—波浪耦合建模系统推导得出。具体分析的变量是

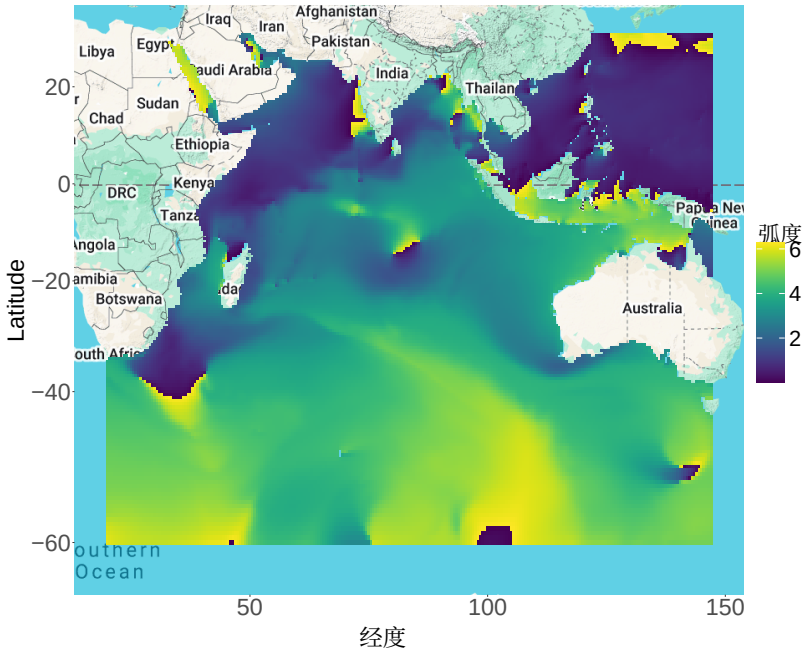

图1：来自ERA5全球海浪再分析的网格化波向数据，对应于2004年印度洋海啸发生时刻（协调世界时01:00），覆盖整个印度洋盆地。

平均波向，定义为对二维波谱中所有频率和方向上的海面波浪求得的平均方向。波谱代表风浪与涌浪的叠加：风浪由当地风力生成，涌浪则在远处生成并跨海洋盆地传播 Holthuijsen [2010]；所报告的平均方向同时考虑了这两个分量。数据采用规则的经纬度网格（本研究的分辨率为$0.5^\circ \times 0.5^\circ$），时间分辨率为每小时一次。波浪方向以弧度表示，指波浪相对于地理北的来向（例如，0 表示波浪来自北方，$\pi/2$表示来自东方）。虽然该数据集覆盖所有海洋盆地，但本研究选取印度洋盆地的一部分，范围为 60°S 至 30°N、20°E 至 147°E；所用数据对应协调世界时 01:00，最接近当地时间 07:58:53（UTC+7）的事件时刻。总计获得了 33,845 个网格单元的波向数据。数据集的热力图见图 1。与事件前后足够早和足够晚时刻的记录（未展示）相比，事件期间的空间分布看起来更加平滑，这可能是因为海啸影响了整个海盆。在某些区域，特别是中国东海岸附近、南非东南海岸附近，以及印度尼西亚等少数其他地区，相邻像素的波浪方向值相差 2π（颜色由蓝色/深色变为黄色/浅色）。这些观察结果表明，需要进行方向数据分析，而不是将数据视为线性数据集；当角度集中在远离 0 和 2π的单一数值附近时，将圆形数据视为线性数据是合理的。

之前 在深入进行空间分析之前，我们首先考察边缘数据分布， d

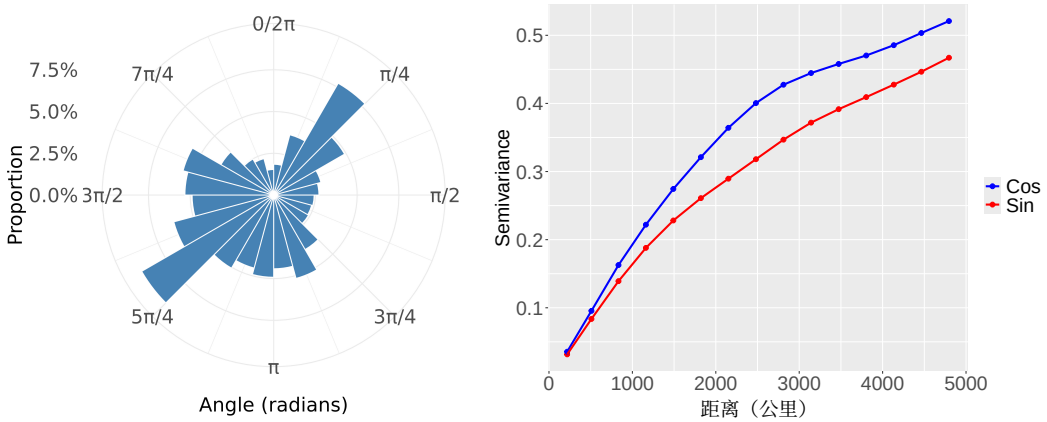

图 2：左：波向数据集的圆形直方图。右：波向数据集正弦变换和余弦变换的经验半变异函数。这里， X 轴表示测地距离。

我们在图 2 左侧面板中展示了圆形直方图。圆形直方图显示，角度数据呈现出明显的双峰结构，两个主峰分别集中在 $\pi/4$和 $5\pi/4$。值得注意的是，这两个方向相差 π，表明该场呈现出强烈的轴向行为，即方位沿着东北—西南这一优选轴线排列。除这些主峰外，在 $3\pi/4$ 和 $7\pi/4$之间较宽的角度区间内，观测值的占比也相对较高，这表明西南半平面附近存在显著的方向变化。这种模式表明，尽管数据集中在一条主轴附近，但仍存在相当大的离散性，可能受到次级物理机制或局部扰动的影响。虽然圆形直方图呈现双峰特征，但具有强空间相关性的单峰密度数据也可能形成由两种不同角度构成的区域斑块。

为探索空间依赖性，我们在图 2 右侧面板中展示了波向数据经过正弦和余弦变换后的经验半变异函数。在 X 轴上，我们采用测地距离，而非通常使用的欧几里得距离。这是因为数据域范围较大，且地球呈球形。两者均呈现出明显的空间结构：半方差随间距增大而上升，随后趋近于基台值，从而有力地证明了方向场中存在空间依赖性。两个三角函数分量均呈现出这一一致模式，证实空间相关性并非角度环绕造成的假象，而是反映了底层过程中的真实依赖关系。双峰方向分布与明显的强空间相关性共同表明，角度场受具有结构化空间组织的大尺度动力学所支配，因此有必要采用能够捕捉空间依赖性的空间方向模型，即便地理距离很远也不例外。虽然对两个高斯过程或高斯马尔可夫随机场的混合进行环绕可能是更合适的建模方式，但为简化起见，本文着重研究对单个高斯过程或高斯马尔可夫随机场进行环绕。

3 背景

3.1 单变量包裹分布

冯·米塞斯分布是单变量圆形数据最常见的模型 [Mardia，1975，Mardia 和 Jupp，2000]。尽管该分布已得到深入研究，且推断所需的计算工具也已相当成熟，但其多变量扩展仍颇具挑战。现有的二变量和三变量推广计算开销很大 [Mardia 等人， 2008], ，因此即使对于中等规模的大型空间数据集，这些方法也不太适用。

另一种构造方式是对线性随机变量进行包裹 [Jona-Lasinio 等人， 2012]。设 $X \in \mathbb{R}$ 为一个线性（在本例中即未包裹的、潜在的）随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$。周期为 2π 的包裹变量（在本例中即响应变量） Y定义为 $Y = X \bmod 2\pi$，因此 $0 \le Y < 2\pi$。通过将线性密度在所有长度为 2π的整数位移处求和，可得到 Y的密度。记 $X = Y + 2\pi K$，其中 $K \in \mathbb{Z}$ 为绕数，则包裹密度，即 Y的密度为

$$g(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(y + 2\pi k), \quad 0 \le y < 2\pi. \tag{1}$$

因此，$(Y,\ K)$ 的联合密度为 $p(y,\ k) = f(y + 2\pi k)$ $y \in [0, 2\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$。 X 与 $(Y,\ K)$ 之间存在一一对应关系；二者可以互相确定。对 K 求边缘化，可得到包裹密度 $g(y)$。 K 的边缘分布为 $\mathrm{P}(K = k) = \int_0^{2\pi} f(y + 2\pi k)\ dy$. K 在给定 $Y = y$时以及 Y 在给定 $K = k$时的条件分布为

$$\mathrm{P}(K = k \mid Y = y) = \frac{f(y + 2\pi k)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(y + 2\pi j)}, \qquad \pi(y \mid K = k) = \frac{f(y + 2\pi k)}{\int_0^{2\pi} f(y + 2\pi k)\, dy},$$

也就是说， Y在给定 $K = k$ 时的条件密度，以及K 在给定 $Y = y$ 时的条件概率质量函数，均与 $f(y + 2\pi k)$成正比。这些表示形式使卷绕模型适用于分层推断和基于模拟的推断，其中 K 可视为潜变量。实际应用中，通过自动截断近似 k 上的无穷和。

直接从 $g(x)$计算矩通常较为困难。相较之下，使用复值变量 $Z = e^{iY}$，更为方便，该变量位于复平面中的单位圆上。对于整数 p，有 $\mathbb{E}\left(e^{ipY}\right) = \psi_X(p)$，其中 $\psi_X(\cdot)$是线性变量 X的特征函数。这个结果提供了一种简便方法，可从底层线性分布的特征函数求得圆周矩。

3.2 包裹单变量正态分布

将正态随机变量$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$缠绕到圆上，即可得到缠绕正态（WN）分布。我们将其记为 $Y \sim \mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$。均值参数

μ 可分解为 $\mu = \tilde{\mu} + 2\pi K_\mu$，其中 $\tilde{\mu} \in [0, 2\pi)$ 为平均方向，K_μ为相应的绕数。方差参数 σ^2 通常会重新参数化为$c = e^{-\sigma^2/2}$，$0 < c < 1$，其中 c 称为集中参数。

包裹正态密度为

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y - \mu + 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad 0 \le y < 2\pi. \tag{2}$$

利用复数表示 $Z = e^{iY}$，第 p 阶圆周矩为 $E(Z^p) = e^{ip\mu - p^2\sigma^2/2}$。特别地，E($Z$) $= e^{-\sigma^2/2}$ (cos $\mu + i$sin μ)，因此合长度等于 $c = e^{-\sigma^2/2}$。由此，E(cos Y) $= c$cos μ，且 E(sin Y) $= c$sin μ，平均方向为 $\tilde{\mu} =$ atan*(E(sin Y), E(cos Y))。

潜变量表示与截断

在马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）实现中，引入绕数 K 作为潜变量。对 K 进行采样颇具挑战，因为其支集为 $\mathbb{Z}$，但可通过截断对密度中的无穷级数进行准确近似。转换为对称支集 $[-\pi, \pi)$ 后，包裹密度可表示为区间上的正态概率之和。利用约 99.7% 的正态概率质量位于 $\pm 3\sigma$ 内这一事实，可以确定边界 k_L 和 k_U，使得只需考虑满足 $k_L \le k \le k_U$ 的项。由此可得实用的截断规则：

$$\begin{cases} k \in \{-1, 0, 1\}, & \sigma < 2\pi/3, \\ k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, & 2\pi/3 \le \sigma < 4\pi/3, \end{cases}$$

因而，K 的较大值仅在 σ^2 较大时出现。因此，在我们的应用中，我们设定一个实际选择 $k \in \{-3, -2, \ldots, 2, 3\}$。

可识别性与实际问题

当 σ^2 较大（等价地，c 较小）时，包裹正态分布趋近于圆上的均匀分布。因此，除非施加信息性先验，否则在贝叶斯模型拟合中，σ^2 和 K 可能难以得到良好识别，正如 Jona-Lasinio 等人[2012]所指出的那样。Jona-Lasinio 等人 [2012]的模拟研究表明，当 σ^2 足够大时，标准均匀性检验（例如 Rayleigh、Kuiper–Watson 和 Rao 检验）可能无法区分 WN 分布数据与均匀分布数据，尤其是在样本量较小时。因此，建议在拟合 WN 模型之前进行探索性分析。给定观测值 $y_1, \ldots, y_N$，定义 $C = N^{-1} \sum_{i=1}^{N}$cos y_i和 $\bar{S} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N}$sin y_i。令 $\hat{}c = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$。于是，矩估计量为 $\hat{}\tilde{\mu} =$ atan*($\bar{S}, \bar{C}$) 和 $\hat{}\sigma^2 = -2$log $\hat{}c$。这些估计量可为评估包裹正态模型的适用性提供简单的初步估计。

在我们的应用中，得到的估计值为 $\hat{\tilde{\mu}} = -2.2627$和 $\hat{\sigma} = 1.9220 < 2\pi/3$。因此，上述包裹正态分布的局限性并不适用于我们的情况。

3.2.1 贝叶斯推断

假设我们观测到来自包裹正态分布的独立同分布角度数据 y_1，y_2，……，y_N。对于贝叶斯推断，采用涉及潜在绕数$\{K_i\}_{i=1}^N$的增广表示较为方便。该模型以给定$(\mu,\ \sigma^2)$时$\{(Y_i,\ K_i)\}_{i=1}^N$的联合分布来表述：

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{k} \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i + 2\pi k_i - \mu}{\sigma} \right),$$

其中 $\phi(\cdot)$为标准正态密度。需要为 μ 和 σ^2指定先验；具体而言，给定$\{K_i\}_{i=1}^N$，$X_i = Y_i + 2\pi K_i$对于 $i = 1$，……，N，且 X_i 独立同分布$\sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$。因此，可以为 μ和 σ^2 选择共轭先验（分别为正态和逆伽马分布）。总体而言，随后针对$(\mu,\ \sigma^2,\ K_1,$ ……，$K_n)$构建后验分布。引入潜变量 K_i仅是为了便于计算；后验推断关注 μ，从而关注平均方向 $\tilde{\mu}$，以及 σ^2。

在吉布斯抽样方案中，每个 K_i 都是在给定（μ、σ^2、x_i）的条件下进行更新的。尽管 K_i 的支集为 $\mathbb{Z}$，但可以使用自适应截断来近似其无限支集。利用正态分布尾界（$\pm 3\sigma$ 内约包含 99.7% 的概率质量），定义 $m = 1 + \frac{3\sigma}{2\pi}$、$k_i \in \{-m$、…、0、…、$m\}$。于是，$K_i$ 的条件分布可近似为

$$\mathrm{P}(K_i = k \mid \mu, \sigma, y_i) \approx \frac{\phi\left(\frac{y_i + 2\pi k - \mu}{\sigma} \right)}{\sum_{j=-m}^{m} \phi\left(\frac{y_i + 2\pi j - \mu}{\sigma} \right)}, \quad k = -m, \ldots, m. \tag{3}$$

这种截断确保每次迭代的近似误差都保持较小，同时保持计算效率。然而，在我们的应用中，我们将 K_i 的下界和上界分别固定为 -3 和 3，计算仍然具有良好的可扩展性。

3.3 包裹高斯过程

在空间应用中，方向观测 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)^\top \in [0, 2\pi)^N$通常在 N 不同的空间位置采集，因此需要对具有依赖关系的数据进行多变量建模。构造多变量包裹分布的一般方法包括一个具有密度 $f(\cdot;\ \boldsymbol{\theta})$ 的多变量线性随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^\top \in \mathbb{R}^N$，其中 $\boldsymbol{\theta}$为模型参数向量。Jona-Lasinio 等人 [2012] 定义 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + 2\pi\boldsymbol{K}$，其中$\boldsymbol{K} = (K_1,$ $\ldots, K_N)^\top \in \mathbb{Z}^N$。$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{K})$ 的联合密度为 $p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{k}) = f(\boldsymbol{y} + 2\pi\boldsymbol{k})$，而对 $\boldsymbol{Y}$ 的边缘密度则通过对 $\mathbb{Z}^n$ 求和得到。这会产生一个 N 重无限

和，即使 N 适中，计算上也难以处理。与单变量情形相同，引入潜在绕数 $\boldsymbol{K} = (K_1, \ldots, K_N)^\top$ 有助于进行贝叶斯计算。

当 $f(\cdot;\, \boldsymbol{\theta})$ 服从参数为 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的多元正态分布时，我们称 $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{WN}_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 为一个 N 维多元缠绕正态分布。由于多元正态分布的条件分布具有显式形式，因此很容易推导出用于吉布斯抽样的 (X_i, K_i) 的相应条件分布。

定义在所关注空间域上的高斯过程（GP），通过缠绕变换自然诱导出一个包裹高斯过程（WGP）。令 $X(\cdot)$ 为一个以空间位置 $\boldsymbol{s} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ 为索引的高斯过程，其均值函数为 $\mu(\cdot)$，协方差函数为 $\mathrm{Cov}(X(\boldsymbol{s}),\, X(\boldsymbol{s}')) = \sigma^2 \rho(s - s';\, \psi)$，其中 $\rho(\cdot;\, \psi)$ 是衰减参数为 ψ 的相关函数。于是，我们可以定义包裹过程

$$Y(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}) \bmod 2\pi.$$

对于一组有限位置 $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_N$，随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 服从多元缠绕正态分布 $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{WN}_N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \boldsymbol{R}(\phi))$，其中 $\boldsymbol{\mu} = (\mu(\boldsymbol{s}_1) \ldots, \mu(\boldsymbol{s}_N))^\top$，而 $\boldsymbol{R}(\psi)$ 是相关矩阵，其元素为 $R_{ij}(\psi) = \rho(s_i, s_j; \psi)$。因此，包裹过程的有限维分布可直接由其底层高斯过程的有限维分布得到。在实践中，通常假设平稳性，即 $\rho(s_i, s_j; \psi) \equiv \rho(s_i - s_j; \psi)$，以及各向同性，即 $\rho(s_i, s_j; \psi) \equiv \rho(\|s_i - s_j\|; \psi)$，不过也可以采用其他协方差结构。此外，除非有合适的协变量可用，通常会设定 $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu$ 在空间域 D 上为常数。

在 Jona-Lasinio 等人提出的该方法的马尔可夫链蒙特卡洛实现中， [2012], 一个关键步骤是更新潜在的 K_i，这与式 (3) 类似。然而，对于他们提出的 WGP 模型，分子和分母需要根据条件高斯密度计算，而不是像式 (3) 那样使用简单的一元高斯密度。因此，要计算一个 N 维多元正态分布中某个分量的条件分布，需要计算一个 $(N-1) \times (N-1)$ 维矩阵的逆。此外，每次马尔可夫链蒙特卡洛迭代时，都需要对每个 K_i 进行计算；当 N 较大时，这在实际中不可行。

加入块金分量可以显著解决这一计算问题，Mastrantonio 等人 [2016], 虽然是在时空情境下对此进行了探索。在这里，在我们的 WGP 设定中，我们可以假设 $\mathrm{Cov}(X(\boldsymbol{s}),\, X(\boldsymbol{s}')) = \sigma^2[r\rho^*(s - s'; \phi) + (1 - r)\delta(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}')]$,其中 $\delta(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}') = 1$ 在 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'$ 时成立，否则为零。因此，我们可以定义 $X(\boldsymbol{s}) = W(\boldsymbol{s}) + \varepsilon(\boldsymbol{s})$，其中 $W(\cdot)$ 是一个均值函数为 $\mu(\cdot)$、协方差函数为 $\mathrm{Cov}(X(\boldsymbol{s}),\, X(\boldsymbol{s}')) = r\sigma^2\rho^*(s - s';\, \psi)$ 的 GP，并且 $\varepsilon(\boldsymbol{s})$ 独立同分布于 $\mathrm{N}(0, (1 - r)\sigma^2)$，在 $\boldsymbol{s}$ 上独立同分布。因此，对于 $\boldsymbol{W} = (W_1, \ldots, W_N)^\top$且 $W_i \equiv W(\boldsymbol{s}_i)$，给定 $\boldsymbol{W}$ 时， $\boldsymbol{X}$ 的条件分布为多元正态，其均值为 $\boldsymbol{W}$，协方差矩阵为 $(1 - r)\sigma^2 I_N$，其中 I_N 为单位矩阵。因此，给定另一个潜在向量 $\boldsymbol{W}$后， X_i 的条件分布不依赖于其他分量，由此我们可以并行更新各个 K_i。

随后，当 N 较大时，即使加入块金分量，更新空间相关的潜在过程 $W(\cdot)$ 仍然具有挑战性；在此情境下，我们探索 Lindgren等人 [2011] 提出的基于 SPDE 的构造。

4 方法

4.1 基于 SPDE 的高斯过程

我们首先关注构建一个标准（均值为零、方差为一）的高斯过程 $Z(\cdot)$，其具有带块金效应的各向同性 Matérn 相关函数，

$$\rho(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \frac{r}{\Gamma(\nu)2^{\nu-1}} \left(\frac{d(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\psi} \right)^{\nu} K_{\nu} \left(\frac{d(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{\psi} \right) + (1-r)\mathbb{I}(\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}_2), \tag{4}$$

其中， $d(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$ 表示测地距离（可能经过缩放，不一定以千米为单位），$\psi > 0$ 是范围参数， $\nu > 0$ 控制平滑度， $r \in [0,1]$ 表示空间变异的比例， K_{ν} 是第二类修正贝塞尔函数，而 $\mathbb{I}(\cdot)$ 是示性函数。当 $r = 1$ 时， ν 的整数值决定了 $Z(\cdot)$ 的均方可微性。由于在实际应用中通常难以明确识别 ν [Cisneros 等人，2023，Sahoo 等人， 2025], , 因此通常将其固定；这里我们设定 $\nu = 1$。补充材料 Hazra 等人 [2025a] 探讨了 $\nu = 2$ 的情况。不过，这些参考文献探讨的是 $d(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$ 为欧几里得距离的情形；在我们的案例中，由于地理范围覆盖整个地球，这种选择不太实用。

直接使用式（4）中的 Matérn 协方差会导致协方差矩阵稠密，计算成本高。为获得可扩展的表示，我们利用 Matérn 高斯过程与随机偏微分方程解之间的等价关系，在有限网格上定义高斯马尔可夫随机场，并用其近似 $Z(\cdot)$ [Lindgren等人， 2011], , 从而得到近似过程 $Z(\cdot)$。

设 $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$表示具有式（4）相关结构的高斯过程，且 $r = 1$。对于 $\nu = 1$， $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$满足随机偏微分方程

$$(\psi^{-2} - \nabla)\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{s}) = 4\pi\psi^{-2}\mathcal{W}(\boldsymbol{s}), \qquad \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

其中$\mathcal{W}(\boldsymbol{s})$为高斯白噪声， ∇为拉普拉斯算子。

我们使用有限元方法，在覆盖$\mathcal{D}$的三角网格上近似求解式 (5)。令$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_N\}$ 表示观测位置，令$\mathcal{S}^* = \{\boldsymbol{s}_1^*, \ldots, \boldsymbol{s}_{N^*}^*\}$表示图 3 所示的网格节点。这里， $N^* = 8145$。鉴于地球的球面特性，我们在 inla.mesh.2d 中使用 crs = inla.CRS("+proj=longlat + datum=WGS84")，使近似得到的相关性与采用测地距离而非欧几里得距离的情况具有可比性。有限元近似为 $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{s}) = \sum_{j=1}^{N^*} \zeta_j(\boldsymbol{s})\varepsilon_j^*$，其中 $\zeta_j(\cdot)$ 是紧支撑分片线性基函数，而 $\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_{N^*}^*)^{\top}$是高斯权重。可以证明， $\boldsymbol{\varepsilon}^* \sim \text{Normal}_{N^*}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_{\psi}^{-1})$，具有稀疏精度

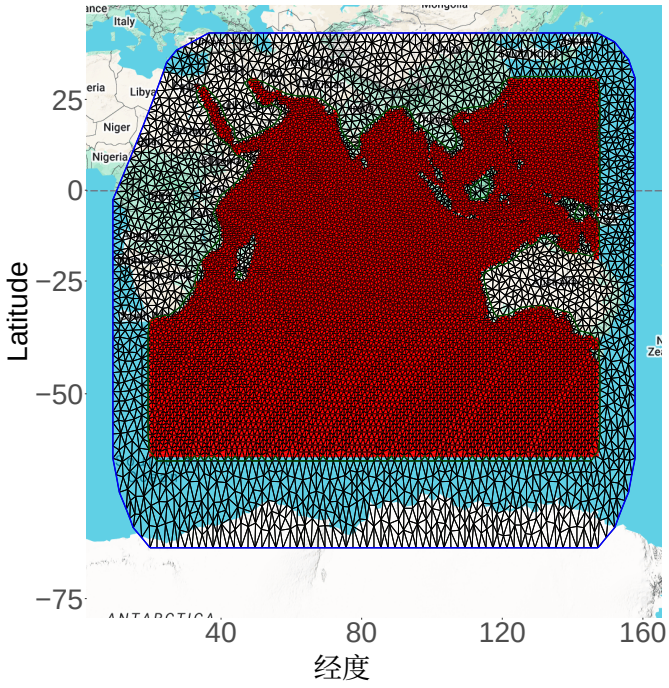

图 3：覆盖整个印度洋盆地的三角网格，我们利用它通过随机偏微分方程构建式 (5) 中的空间过程 $Z(\cdot)$。鉴于地球的球面特性，我们使用 crs= inla.CRS("+proj=longlat +datum=WGS84")。数据附近和外部扩展区的最大三角形边长分别设为 1° 和 3°。外层之前的扩展距离和最粗三角形的边长分别设为 1° 和 10°。选择边界时，我们使用收缩量为 0.005°的非凸包。网格总共包含 8145 个节点。

矩阵

$$\boldsymbol{Q}_\psi = \frac{1}{4\pi}\left(\psi^{-2}\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{G}_1 + \psi^2\boldsymbol{G}_2\right), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_2$ 是稀疏有限元矩阵。记作 $\langle f, \tilde{g}\rangle = \int f(\boldsymbol{s})\tilde{g}(\boldsymbol{s})\, d\boldsymbol{s}$，各项为 $D_{jj} = \langle \zeta_j, 1\rangle$、$(G_1)_{j_1 j_2} = \langle \nabla\zeta_{j_1}, \nabla\zeta_{j_2}\rangle$、$\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{G}_1$。这里，$\text{Normal}_N$ 表示一个 N 维正态分布。

为了在观测位置处评估该过程，我们定义（$N \times N^*$）投影矩阵 $\boldsymbol{A}$，其元素为 $A_{ij} = \zeta_j(\boldsymbol{s}_i)$，因此投影场为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^*$。纳入块金效应后，近似潜在场 $\tilde{\boldsymbol{Z}} = (\tilde{Z}(\boldsymbol{s}_1) \ldots, \tilde{Z}(\boldsymbol{s}_N))^\top$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} = \sqrt{r}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^* + \sqrt{1-r}\,\boldsymbol{\eta}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\eta} \sim$ 正态分布$_N(\mathbf{0},\ \boldsymbol{I}_N)$ 且相互独立。其协方差矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi,r} = r\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_\psi^{-1}\boldsymbol{A}^\top + (1-r)\boldsymbol{I}_N. \tag{8}$$

一个字符串精确的 Matérn相关函数（4），即 a

˜相关矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\psi,\ r}$ 使用（4）在 $\mathcal{S}$ 处计算得到的结果与（8）中的基于SPDE的近似 $\boldsymbol{\Sigma}_{\psi,\ r}$ 进行直接数值比较表明，后者能够准确表示真实的空间依赖性 Lindgren等人 [2011]。因此，我们利用 $\boldsymbol{Q}_{\psi}$ 的稀疏性来实现高效的贝叶斯计算。正如上一节所述，条件分布

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} \mid \varepsilon^{*} \sim \text{Normal}_{N}\Big(\sqrt{r}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{*}, (1-r)\boldsymbol{I}_{N}\Big)$$

˜可对 $\boldsymbol{Z}$ 及相关实体（例如，在我们的卷绕模型中的 K_i）进行快速单变量插补。

4.2 完整模型规范

在此，我们假设底层高斯过程在其定义域上具有常数边缘均值，即对于所有 $\boldsymbol{s} \in \mathcal{D}$， $\mu(\boldsymbol{s}) = \mu$。在我们的应用中，没有可用的有意义协变量信息。然而，如果有此类信息，提出一个回归模型将十分直接。对于具有线性协变量的空间回归，可以使用单调连接函数 h： $\mathbb{R} \to (-\pi, ..., \pi)$，其中 $h(0) = 0$ （例如， $h(z) = \arctan(z)$），将线性预测变量映射到圆周尺度。最后，由于常数均值假设，我们将均值向量 $\boldsymbol{\mu} = \mu(\boldsymbol{s}_1, ..., \mu(\boldsymbol{s}_N))^{\top}$ 记为 $\mu\mathbf{1}_N$。

在此，我们描述最终的SPDE近似模型。在数据层中，我们假设圆周观测为 $Y(\boldsymbol{s}_i) = X(\boldsymbol{s}_i) \bmod 2\pi$，其中 $i = 1, ..., N$。给定位置特定的绕数 $K(\boldsymbol{s}_i)$，有 $X(\boldsymbol{s}_i) = Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi K(\boldsymbol{s}_i)$。在这里， $X(\boldsymbol{s}_i)$和 $K(\boldsymbol{s}_i)$都是潜变量。此外，给定网格特定随机效应向量 $\tilde{\varepsilon}^{*}$，向量 $\boldsymbol{X} = [X(\boldsymbol{s}_1) ..., X(\boldsymbol{s}_N)]^{\top}$服从 $\boldsymbol{X} \mid \tilde{\varepsilon}^{*} \sim \text{Normal}_{N}\Big(\mu\mathbf{1}_N + \boldsymbol{A}\tilde{\varepsilon}^{*}, (1-r)\sigma^2\boldsymbol{I}_N\Big)$。潜向量 $\tilde{\varepsilon}^{*}$ 服从 $\tilde{\varepsilon}^{*} \sim \text{Normal}_{N^{*}}(0, r\sigma^2\boldsymbol{Q}_{\psi}^{-1})$。因此，积分消去潜$\tilde{\varepsilon}^{*}$后，有 $\boldsymbol{X} \sim \text{Normal}_{N}(\mu\mathbf{1}_N, \sigma^2\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi,r})$。于是，对 $X(\boldsymbol{s}_i)$进行卷绕后，我们得到 $\boldsymbol{Y} = [Y(\boldsymbol{s}_1) ..., Y(\boldsymbol{s}_N)]^{\top} \sim \text{WN}_{N}(\mu\mathbf{1}_N, \sigma^2\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi,r})$。此外，我们为 μ、 σ^2、 ψ和 r指定先验。

总体而言，所提出的分层贝叶斯模型如下：

数据层：

$$\begin{aligned} Y(\boldsymbol{s}_i) &= X(\boldsymbol{s}_i) \bmod 2\pi, \qquad i = 1, \ldots, N, \\ X(\boldsymbol{s}_i) &= Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi K(\boldsymbol{s}_i), \qquad K(\boldsymbol{s}_i) \in \{-3, -2, \ldots, 2, 3\}, \end{aligned}$$

过程层：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} \mid \tilde{\varepsilon}^{*}, \mu, \sigma^2, r &\sim \text{Normal}_{N}\Big(\mu\mathbf{1}_N + \boldsymbol{A}\tilde{\varepsilon}^{*},\ (1-r)\sigma^2\boldsymbol{I}_N\Big), \\ \tilde{\varepsilon}^{*} \mid \sigma^2, r, \psi &\sim \text{Normal}_{N^{*}}\Big(\mathbf{0},\ r\sigma^2\boldsymbol{Q}_{\psi}^{-1}\Big), \end{aligned}$$

参数层：

$$[\mu, \sigma^2, \psi, r] \sim \pi(\mu, \sigma^2, \psi, r) = \pi(\mu|\sigma^2)\,\pi(\sigma^2)\,\pi(\psi)\,\pi(r). \tag{9}$$

在模拟研究和真实数据应用中，我们选择弱信息先验$\mu|\sigma^2 \sim \mathsf{N}(0, 100^2\sigma^2)$、 $\sigma^2 \sim \mathsf{IG}(0.1, 0.1)$、 $\psi \sim \mathsf{U}(0, \Delta)$和 $r \sim \mathsf{U}(0, 1)$。其中，IG 和 U 分别表示逆伽马分布和均匀分布。记号 Δ 表示研究域 $\Delta = 155.66^\circ$ 的直径（以欧几里得距离计）。

4.3 模型性质

4.3.1 包裹高斯过程的相关结构

WGP 由底层线性高斯过程或线性高斯马尔可夫随机场定义，其依赖结构由协方差函数及其相关参数刻画。与线性情形不同，二元圆形变量的相关性没有唯一的定义。Jammalamadaka 和 Sengupta [2001]对适当的圆形相关性度量进行了详细讨论。特别是，Jammalamadaka 和 Sarma [1988]提出了一种圆形相关系数，它满足许多类似于经典乘积矩相关的性质。

我们考虑 (Y_1, Y_2) 的包裹二元正态分布，该分布源自一个边际方差为 σ^2 、相关系数为 ρ 的二元正态随机向量。在这一构造下，圆形相关性简化为 $\rho_c(Y_1, Y_2) = \sinh(\rho\sigma^2)/\sinh(\sigma^2)$；更一般地，如果底层高斯过程的协方差函数为 $\mathrm{Cov}(X(\boldsymbol{s}), X(\boldsymbol{s}')) = \sigma^2\rho(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$, 则 WGP 的诱导圆形相关函数为 $\rho_c(s, s') = \sinh(\sigma^2\rho(s, s'))/\sinh(\sigma^2)$

正如 Jona-Lasinio 等人 [2012], 所指出的，尽管我们不直接使用 $\sinh(\rho(u))$ 构造协方差矩阵，但值得注意的是，只要 $\sigma^2\rho(u)$有效，该函数就在 $\mathbb{R}^d$ 上定义了一个有效的协-方差函数。回顾幂级数展开 $\sinh(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!}$，如果 $\rho(u)$是 $\mathbb{R}^d$上的有效相关函数，那么它就是正定的。正定函数的一项基本性质是，整数次幂 $\rho(u)^p$ 对于任意整数 $p \geq 1$仍然保持正定。因此，$\sinh(\rho(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(u)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 是正定函数的非负加权和。由于正定函数的非负线性组合仍然是正定的，$\sinh(\rho(u))$~~本身~~也是正定的。因此，根据平稳协方差函数由正定性刻画这一性质，$\sinh(\rho(u))$在 $\mathbb{R}^d$上定义了一个有效的协方差函数。

在我们的设定中，式 (6) 中的 $\boldsymbol{Q}_\psi$ 是一个维度为 $N^* \times N^*$ 的正定矩阵（这里，N^* 是 SPDE 网格节点的数量，小于 N），因此其逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_\psi$ 也为正定矩阵。然而，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_\psi^{-1}\boldsymbol{A}^\top$ 是一个维度为 $N \times N$ 的低秩矩阵，因此并非正定矩阵。不过，加入块金分量 $\boldsymbol{\Sigma}_{\psi,\, r}$ 后，该矩阵为正定矩阵。因此，若考虑 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi,\, r}$ 的任意第 $(i,\ j)$ 个元素，例如 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi\, r}^{(i,j)}$，则适合用以下方式刻画位置 $\boldsymbol{s}_i$ 与 $\boldsymbol{s}_j$ 之间的诱导圆形相关性

$$\rho_c(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j) = \frac{\sinh\left(\sigma^2\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\psi,r}^{(i,j)}\right)}{\sinh(\sigma^2)}. \tag{10}$$

4.4 贝叶斯计算

我们使用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）进行贝叶斯推断，具体采用 Metropolis-within-Gibbs 抽样。这里，潜变量和参数的集合为 $\boldsymbol{K} = [K(\boldsymbol{s}_1) \ldots, K(\boldsymbol{s}_N)]^\top$（或等价地， $\boldsymbol{X} = [X(\boldsymbol{s}_1) \ldots, X(\boldsymbol{s}_N)]^\top$）、 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$、 μ、 σ^2、 ψ 和 r。给定数据向量 $\boldsymbol{Y} = [Y(\boldsymbol{s}_1) \ldots, Y(\boldsymbol{s}_N)]^\top$，我们从它们的后验分布中抽取 MCMC 样本。我们用记号 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}_i)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，并将其视为列向量。吉布斯抽样步骤如下。

- 绕回数 $K(\boldsymbol{s}_1) \ldots, K(\boldsymbol{s}_N)$依据如下给出的全条件分布（FCP）进行更新

$$\mathrm{P}(K(\boldsymbol{s}_i) = k \mid \mu, \sigma^2, r, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \boldsymbol{Y}) = \frac{\phi\left(\dfrac{Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi k - \mu - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}_i)^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*}{\sigma\sqrt{1-r}}\right)}{\sum_{j=-3}^{3} \phi\left(\dfrac{Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi j - \mu - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}_i)^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*}{\sigma\sqrt{1-r}}\right)}, \quad k = -3, \ldots, 3,$$

  其中 $\phi(\cdot)$表示标准正态密度。此处，对于 $j \neq i$， $K(\boldsymbol{s}_i)$的更新步骤并不依赖于 $K(\boldsymbol{s}_j)$。因此，所有 $K(\boldsymbol{s}_i)$均可并行更新，从而大幅缩短计算时间。一旦从 $\boldsymbol{K}$中获得一个样本，我们便等价地得到来自 $\boldsymbol{X}$的一个样本，该样本将用于后续步骤。

- $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ 的全条件分布为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ | 其余变量 $\sim$ 正态$_{N^*}(\boldsymbol{\mu}_\varepsilon^*, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^*)$，其中

$$\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^* = \sigma^2 \left[(1-r)^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} + r^{-1}\boldsymbol{Q}_\psi\right]^{-1}, \quad \boldsymbol{\mu}_\varepsilon^* = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^*(1-r)^{-1}\boldsymbol{A}'[\boldsymbol{X} - \mu\mathbf{1}_N].$$

- μ的全条件分布为

$$\mu \mid \text{rest} \sim \mathrm{N}\left(\frac{\mathbf{1}_N'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)/(1-r)}{N/(1-r) + 1/100^2}, \frac{\sigma^2}{N/(1-r) + 1/100^2}\right).$$

- σ^2 的全条件分布为

$$\begin{aligned}\sigma^2 \mid \text{rest} \quad \sim \quad & \mathrm{IG}\Big(0.1 + (N + N^* + 1)/2, 0.1 + (r^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\boldsymbol{Q}_\psi\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \\ & + (1-r)^{-1}(\boldsymbol{X} - \mu\mathbf{1}_N - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)'(\boldsymbol{X} - \mu\mathbf{1}_N - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) + \mu^2)/2\Big).\end{aligned}$$

- 下面讨论 ψ的更新步骤。设 $\psi(m)$ 表示来自 ψ 的第 m 个马尔可夫链蒙特卡洛样本。考虑 logit 变换，可从 $\psi(m)$ 获得 $\psi^*(m) \in \mathbb{R}$，并模拟 $\psi^*(c) \sim \mathrm{Normal}(\psi^*(m), s_\psi^2)$，其中 s_ψ 是候选正态分布的标准差。随后，使用逆 logit 变换，从 $\psi^*(c)$ 获得 $\psi(c)$，并将 $\psi(c)$ 视为来自 ψ 后验分布的候选值。

接受比为

$$\mathcal{R} = \frac{f_{\text{Normal}_{N^*}}\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*; \mathbf{0}_{N^*}, \sigma^2 r \boldsymbol{Q}^{-1}_{\psi^{(c)}}\right)}{f_{\text{Normal}_{N^*}}\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*; \mathbf{0}_{N^*}, \sigma^2 r \boldsymbol{Q}^{-1}_{\psi^{(m)}}\right)} \times \frac{\psi^{(c)}\left(\Delta - \psi^{(c)}\right)}{\psi^{(m)}\left(\Delta - \psi^{(m)}\right)},$$

其中，$f_{\text{Normal}_n}(\cdot;\, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 表示均值为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的 n 维正态密度。候选样本以 $\min\{\mathcal{R}, 1\}$ 的概率被接受。

- 此外，我们讨论 r 的更新步骤。设 $r_{(m)}$ 表示来自 r 的第 m 个 MCMC样本。我们按照与从 $\psi_{(m)}$ 模拟 $\psi_{(c)}$ 类似的步骤，从 $r_{(m)}$ 模拟候选样本 $r_{(c)}$。
Metropolis-Hastings接受比为

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = & \frac{f_{\text{Normal}_N}\left(\boldsymbol{X}; \mu \mathbf{1}_N + \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \sigma^2(1 - r^{(c)})\boldsymbol{I}_N\right)}{f_{\text{Normal}_N}\left(\boldsymbol{X}; \mu \mathbf{1}_N + \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \sigma^2(1 - r^{(m)})\boldsymbol{I}_N\right)} \\ & \times \frac{f_{\text{Normal}_{N^*}}\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*; \mathbf{0}_{N^*}, \sigma^2 r^{(c)} \boldsymbol{Q}^{-1}_{\psi}\right)}{f_{\text{Normal}_{N^*}}\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*; \mathbf{0}_{N^*}, \sigma^2 r^{(m)} \boldsymbol{Q}^{-1}_{\psi}\right)} \times \frac{r^{(c)}\left(1 - r^{(c)}\right)}{r^{(m)}\left(1 - r^{(m)}\right)}.\end{aligned}$$

我们使用 R（http://www.r-project.org）进行计算。在主要数据应用中，我们运行马尔可夫链 60,000 次迭代，并将前 10,000 次迭代作为预烧期。此外，在剩余的 50,000 个样本中，我们将链抽稀 5 倍后保留 10,000 个样本。在配备 64GB 内存的 AMD Ryzen 9 5900X 处理器上，计算时间为 316.16 分钟。对于包含 100 次重复的模拟研究以及真实数据集上的 10 折交叉验证，我们缩短了链长；在每种情况下，我们抽取 20,000 个样本，舍弃前 10,000 个作为预烧期，再抽稀 5 倍，并根据剩余的 2,000 个预烧后样本进行推断。我们通过轨迹图监测收敛和混合情况。在预热阶段调整候选分布，以确保 Metropolis-Hastings 步骤的接受率保持在 0.3 到 0.5 之间。

4.5 空间预测

在所提出的模型下进行空间预测，其过程类似于高斯过程模型中的克里金法，但利用了底层高斯马尔可夫随机场的稀疏精度结构。除稠密 GP 与高斯马尔可夫随机场空间预测之间通常存在的差异外，其他额外要求也类似，因此我们沿用 Jona-Lasinio 等人 [2012] 的策略。

假设我们希望预测新位置 $\boldsymbol{s}_0$ 处的圆形观测 $Y(\boldsymbol{s}_0)$。给定随机效应 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ 和参数后，观测位置 $\boldsymbol{X}$ 处的潜在场服从$\boldsymbol{X} \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,\ \mu,\ \sigma^2,\ r \sim$正态分布$_N(\mu \mathbf{1}_N + \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,\ (1 - r)\sigma^2 \boldsymbol{I}_N)$。对于 $\boldsymbol{s}_0$ 处的预测，假设从网格节点到 $\boldsymbol{s}_0$ 的 SPDE投影向量记为 $\boldsymbol{a}_0$。因此，

$$X(\boldsymbol{s}_0) \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \mu, \sigma^2, r \sim \mathrm{N}(\mu + \boldsymbol{a}_0^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,\ (1 - r)\sigma^2 \boldsymbol{I}_N), \quad Y(\boldsymbol{s}_0) = X(\boldsymbol{s}_0) \bmod 2\pi, \tag{11}$$

其中，$Y(\boldsymbol{s}_0)$ 是与 $X(\boldsymbol{s}_0)$ 对应的包裹变量。虽然我们可以使用式（11）从 $Y(\boldsymbol{s}_0)$ 中抽取后验预测样本，但要提供汇总统计量颇具挑战，因为对来自 $Y(\boldsymbol{s}_0)$ 的后验样本进行简单平均，无法得到后验预测分布的期望，这是由样本的圆周性质导致的。因此，我们使用圆周矩进行空间预测。这里，条件缠绕矩为

$$\mathrm{E}\left[e^{iY(\boldsymbol{s}_0)} \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \mu, \sigma^2, r\right] = \exp\left(-\frac{(1-r)\sigma^2}{2} + i\left(\mu + \boldsymbol{a}_0^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\right)\right).$$

在贝叶斯框架下，通过马尔可夫链蒙特卡洛获得后验样本 $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*(b)}, \mu^{(b)}, \sigma^{2(b)}, r^{(b)}\}_{b=1}^B$。蒙特卡洛积分得到

$$\mathrm{E}\left[e^{iY(\boldsymbol{s}_0)} \mid \boldsymbol{Y}\right] \approx \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \exp\left(-\frac{(1-r^{(b)})\sigma^{2(b)}}{2} + i\left(\mu^{(b)} + \boldsymbol{a}_0^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*(b)}\right)\right).$$

我们定义

$$\begin{aligned} g_c(\boldsymbol{s}_0) &= \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \exp\left(-\frac{(1-r^{(b)})\sigma^{2(b)}}{2}\right) \cos\left(\mu^{(b)} + \boldsymbol{a}_0^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*(b)}\right), \\ g_s(\boldsymbol{s}_0) &= \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \exp\left(-\frac{(1-r^{(b)})\sigma^{2(b)}}{2}\right) \sin\left(\mu^{(b)} + \boldsymbol{a}_0^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*(b)}\right). \end{aligned}$$

最后，后验预测平均方向及其对应的后验集中度分别为

$$\widehat{m}(\boldsymbol{s}_0) = \mathrm{atan}^*\left(g_s(\boldsymbol{s}_0), g_c(\boldsymbol{s}_0)\right), \quad \widehat{c}(\boldsymbol{s}_0) = \sqrt{g_c(\boldsymbol{s}_0)^2 + g_s(\boldsymbol{s}_0)^2}. \tag{12}$$

对于单一数值的预测摘要，我们将 $\boldsymbol{s}_0$ 处的预测角视为 $Y(\boldsymbol{s}_0) = \widehat{m}(\boldsymbol{s}_0)$。为比较不同模型的预测不确定性，我们比较 $\widehat{c}(\boldsymbol{s}_0)$。

5 模拟研究

这里，我们的主要目的是将所提出的方法与第 3 节中的非空间包裹正态分布模型进行比较。此外，我们还将该方法与一种更简单的空间模型进行比较，即基于 Wikle 和 Cressie [1999] 的思想构建的低秩包裹高斯过程（WGP）。我们首先介绍下面的低秩 WGP 竞争模型，因为这是我们的创新贡献，并且与现有方法相比，它能更好地拟合类似于我们这类数据集的模型。

5.1 低秩包裹高斯过程

˜令 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_N\}$ 表示如前所述的观测位置，并令 $\mathcal{S} = \{\tilde{\boldsymbol{s}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{s}}_M\}$ 为一组空间节点，其中 $M \ll N$。我们将潜在高斯过程近似为

$$X(\boldsymbol{s}) = \mu + \boldsymbol{b}_\phi(\boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{W} + \varepsilon(\boldsymbol{s}), \tag{13}$$

其中，$\mu \in \mathbb{R}$ 是常数均值，$\boldsymbol{b}_\phi(\boldsymbol{s}) = \Big(C(\boldsymbol{s}, \tilde{\boldsymbol{s}}_1;\ \phi)\text{.....},\ C(\boldsymbol{s}, \tilde{\boldsymbol{s}}_M;\ \phi)\Big)^\top$ 是由相关核 $C(\cdot, \cdot;\ \phi)$ 构造的基函数向量，其带宽（范围）参数为 $\phi > 0$，$\boldsymbol{W} = [W(\tilde{\boldsymbol{s}}_1)\text{.....},\ W(\tilde{\boldsymbol{s}}_M)]^\top$，其中我们假设 $W(\tilde{\boldsymbol{s}}_i)$独立同分布于$\mathrm{N}(0, \sigma^2)$，而 $\varepsilon(\boldsymbol{s})$独立同分布于$\mathrm{N}(0, \tau^2)$，是一个块金项。在相关文献中，假设 $\boldsymbol{W}$具有空间相关结构也很常见。然而，在这种情况下，带宽 ϕ 通常是固定的。这里，我们倾向于保持 $W(\tilde{\boldsymbol{s}}_i)$彼此不相关，并将带宽 ϕ 视为未知参数。尽管其他形式也很常见，我们选择 $C(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j^*;\ \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi^2}} \exp[-0.5\|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j^*\|^2/\phi^2]$，其中$\|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j^*\|$表示 $\boldsymbol{s}_i$与 $\boldsymbol{s}_j^*$之间的欧几里得距离。

对于 $\boldsymbol{X} = (X(\boldsymbol{s}_1) \ldots, X(\boldsymbol{s}_N))^\top$，由此得到 $\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{W} \sim$正态$_N\Big(\mu \mathbf{1}_N + \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{W}, \tau^2 \boldsymbol{I}_N\Big)$，其中 $\boldsymbol{B}_\phi$是第 (i, j) 个元素为 $C(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j^*;\ \phi)$ 的 $N \times M$矩阵。所得 $\boldsymbol{X}$ 的边际协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_Y = \sigma^2 \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{B}_\phi^\top + \tau^2 \boldsymbol{I}_n$，从而为完整高斯过程提供了计算高效的秩-$M$ 近似。进一步，通过将 $X(\boldsymbol{s})$ 缠绕为 $Y(\boldsymbol{s}) = X(\boldsymbol{s}) \bmod 2\pi$，我们得到 $\boldsymbol{Y} = (Y(\boldsymbol{s}_1) \ldots, Y(\boldsymbol{s}_N))^\top$服从 $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{WN}_N(\mu \mathbf{1}_N, \sigma^2 \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{B}_\phi^\top + \tau^2 \boldsymbol{I}_n)$。因此，最终模型具有圆形空间相关性，并具备合理的灵活性，可作为我们所提出方法的一种替代。

引入潜在绕数 $K(\boldsymbol{s}_i) \in \mathbb{Z}$，使得 $X(\boldsymbol{s}_i) = Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi K(\boldsymbol{s}_i)$，则 $(Y(\boldsymbol{s}_i)\ K(\boldsymbol{s}_i))$ 的联合密度在 $Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi K(\boldsymbol{s}_i)$ 上服从高斯分布。我们再次将 $K(\boldsymbol{s}_i)$ 截断在 -3 和 3 之间。因此，似然可用 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + 2\pi \boldsymbol{K}$ 表示，其中 $\boldsymbol{K} = [K(\boldsymbol{s}_1, \ldots, K(\boldsymbol{s}_N)]^\top$。我们进一步考虑 μ、σ^2 和 τ^2 的先验。我们选择相互独立的弱信息共轭先验 $\mu \sim \mathrm{N}(0, 100^2)$、$\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(0.1, 0.1)$、$\tau^2 \sim \mathrm{IG}(0.1, 0.1)$ 和 $\phi \sim \mathrm{U}(0, 0.2\Delta)$，其中 Δ 是空间域直径。在模拟研究和应用中，我们固定 $M = 100$。进行贝叶斯推断时，我们采用 Metropolis-within-Gibbs 抽样算法，从 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{W}$、μ、σ^2 和 τ^2 中抽取后验样本。

5.1.1 后验计算

我们根据数据向量 $\boldsymbol{Y} = [Y(\boldsymbol{s}_1) \ldots, Y(\boldsymbol{s}_N)]^\top$，从其后验分布中抽取 MCMC样本。吉布斯抽样步骤如下。

- 绕回数 $K(\boldsymbol{s}_1) \ldots, K(\boldsymbol{s}_N)$按照以下全条件分布 (FCP) 进行更新：

$$\mathrm{P}(K(\boldsymbol{s}_i) = k \mid \mu, \tau^2, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{Y}) = \frac{\phi\Big([Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi k - \mu - \boldsymbol{b}_\phi(\boldsymbol{s}_i)^\top \boldsymbol{W}]/\tau\Big)}{\sum_{j=-3}^{3} \phi([Y(\boldsymbol{s}_i) + 2\pi j - \mu - \boldsymbol{b}_\phi(\boldsymbol{s}_i)^\top \boldsymbol{W}]/\tau)}, \quad k = -3, \ldots, 3,$$

其中， $\phi(\cdot)$表示标准正态密度。这里，与所提出的模型类似，对于 $j \neq i$， $K(\boldsymbol{s}_i)$ 的更新步骤不依赖于 $K(\boldsymbol{s}_j)$。因此，所有 $K(\boldsymbol{s}_i)$ 也可以并行更新。从 $\boldsymbol{K}$ 中取得一个样本后，我们便等价地得到 $\boldsymbol{X}$ 的一个样本，并将其用于后续步骤。

- $\boldsymbol{W}$的全条件分布为 $\boldsymbol{W} \mid \text{rest} \sim \text{Normal}_M(\boldsymbol{\mu}_W, \boldsymbol{\Sigma}_W)$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_W = \left[\tau^{-2}\boldsymbol{B}_\phi' \boldsymbol{B}_\phi + \sigma^{-2}\boldsymbol{I}_M\right]^{-1}$和 $\boldsymbol{\mu}_W = \tau^{-2}\boldsymbol{\Sigma}_W \boldsymbol{B}_\phi'[\boldsymbol{X} - \mu \mathbf{1}_N]$。
- 全条件分布 μ的 $\mu \mid \text{rest} \sim \text{N}\left([\mathbf{1}_N'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{W})/\tau^2]/[N/\tau^2 + 1/100^2], 1/[N/\tau^2 + 1/100^2]\right)$。
- σ^2的全条件分布为 $\sigma^2 \mid \text{rest} \sim \text{IG}\left(0.1 + M/2, 0.1 + \boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}/2\right)$。
- τ^2的全条件分布 为 $\tau^2 \mid \text{rest} \sim \text{IG}\left(0.1 + N/2, 0.1 + (\boldsymbol{X} - \mu\mathbf{1}_N - \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{W})'(\boldsymbol{X} - \mu\mathbf{1}_N - \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{W})/2\right)$。
- ϕ 的更新步骤如下。设 $\phi_{(m)}$ 表示来自ϕ的第 m个 MCMC 样本。对其进行 logit 变换，得到 $\phi^*_{(m)}$ $\phi_{(m)}$，并模拟$\phi^*_{(c)} \sim \text{Normal}(\phi^*_{(m)}, s_\phi^2)$。随后，使用逆 logit 变换，由 $\phi^*_{(c)}$得到 $\phi_{(c)}$，并将 $\phi_{(c)}$ 视为来自ϕ后验分布的候选值。接受比为

$$\mathcal{R} = \frac{f_{\text{Normal}_N}\left(\boldsymbol{X}; \mu\mathbf{1}_N + \boldsymbol{B}_{\phi^{(c)}}\boldsymbol{W}, \tau^2\boldsymbol{I}_N\right)}{f_{\text{Normal}_N}\left(\boldsymbol{X}; \mu\mathbf{1}_N + \boldsymbol{B}_{\phi^{(m)}}\boldsymbol{W}, \tau^2\boldsymbol{I}_N\right)} \times \frac{\phi^{(c)}\left(0.2\Delta - \phi^{(c)}\right)}{\phi^{(m)}\left(0.2\Delta - \phi^{(m)}\right)}.$$

其实现方式、预烧期和预烧后 MCMC 样本数量的选择，以及候选分布的调整，均与所提出的 WGMRF模型类似。环绕低秩高斯过程模型的计算时间与所提出的 WGMRF模型相当。虽然低秩方法需要对一个含有$M = 100$的 $M \times M$ 矩阵求逆，但该矩阵并非稀疏矩阵。另一方面，在所提出的 WGMRF模型中，即使有 $N^* = 8145$ 个网格节点，利用底层 GMRF 的稀疏性，更新步骤仍然很快。

5.2 验证指标

我们首先将观测位置集合 $\mathcal{S}$ 划分为互不相交的训练集和测试集 $\mathcal{S}_{\text{train}}$和 $\mathcal{S}_{\text{test}}$。此外，在测试集中，假设观测角为 $Y(\boldsymbol{s}_i)$'，其中 $\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}$。根据拟合所提出模型或竞争模型^得到的相应预测值记为 $Y(\boldsymbol{s}_i)$'，其中 $\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}$。由于角变量位于单位圆上，标准线性误差度量并不适用，因为存在 2π 环绕现象。因此，我们考虑以下圆周有效比较指标。这里，我们用记号 $|\mathcal{S}_{\text{test}}|$表示集合 $\mathcal{S}_{\text{test}}$的基数。

The 正弦-余弦均方根误差 (SC-RMSE) SC-RMSE 定义为 as

$$\text{SC-RMSE} = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}_{\text{test}}|} \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \left\{ \left(\cos[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \cos[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)] \right)^2 + \left(\sin[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \sin[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)] \right)^2 \right\}}.$$

SC-RMSE 较小的方法更可取。

圆周误差（最短角距离）我们将圆周差定义为 $\Delta(\boldsymbol{s}_i) = \text{atan2}\left(\sin(\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i) - Y(\boldsymbol{s}_i)), \cos(\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i) - Y(\boldsymbol{s}_i)) \right)$，它将偏差映射到 $(-\pi, \pi]$。据此，我们将圆周均方根误差（CRMSE）和圆周平均绝对误差（CMAE）定义为

$$\text{CRMSE} = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}_{\text{test}}|} \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \Delta(\boldsymbol{s}_i)^2}, \quad \text{CMAE} = \frac{1}{|\mathcal{S}_{\text{test}}|} \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} |\Delta(\boldsymbol{s}_i)|.$$

CRMSE 或 CMAE 较小的方法更可取。

误差平均合向量长度将圆周误差表示为复数形式，

$$R_e = \left| \frac{1}{|\mathcal{S}_{\text{test}}|} \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} e^{i\Delta(\boldsymbol{s}_i)} \right|,$$

可用于衡量预测集中度。R_e 接近 1 时，表示预测非常准确；接近 0 时，则表示误差分散或随机。

圆周相关性预测角与观测角之间的一致性也可以使用 Jammalamadaka–Sarma 圆周相关性进行量化：

$$\rho_c = \frac{\sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \sin(Y(\boldsymbol{s}_i) - \bar{Y}_{\text{test}}) \sin(\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i) - \bar{\widehat{Y}}_{\text{test}})}{\sqrt{\sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \sin^2(Y(\boldsymbol{s}_i) - \bar{Y}_{\text{test}}) \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \sin^2(\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i) - \bar{\widehat{Y}}_{\text{test}})}},$$

其中 $\bar{Y}_{\text{test}}$ 和 $\bar{\widehat{Y}}_{\text{test}}$ 表示$\{Y(\boldsymbol{s}_i) \ \boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}\}$ 和$\{Y(\boldsymbol{s}_i) \ \boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}\}$的圆均值。A$\rho_c \approx 1$ 更为合适。

平均后验集中度令 $\hat{c}(\boldsymbol{s}_i)$ 表示测试位置 $\boldsymbol{s}_i$处的后验预测集中度（平均合向量长度），其中 $\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}$。为概括测试集上的总体方向确定性，我们将平均后验预测集中度计算为

$$\bar{c} = \frac{1}{|\mathcal{S}_{\text{test}}|} \sum_{\boldsymbol{s}_i \in \mathcal{S}_{\text{test}}} \hat{c}(\boldsymbol{s}_i).$$

虽然该度量可与 R_e 相比较，但它仅基于后验预测分布的不确定性。在线性分布中，更窄的可信区间更受青睐；类似地，提供更小 c 值的方法更受青睐。

–

5.3 模拟设置与结果

我们首先将所提出的模型拟合到印度洋波向数据集，并求得后验均值。因此，我们在模拟设置中选择真实参数值；具体选取为 $\mu_{\text{true}} = 3, \sigma^2_{\text{true}} = 10/3, \psi_{\text{true}} = 3$ 和 $r_{\text{true}} = 0.95$（不一定与后验均值相同，但两者相近）。此外，我们使用图 3 所示的同一 SPDE网格，从式 (9) 过程层中的底层高斯马尔可夫随机场抽取 100 次重复，维度为 $N = 33,845$，然后对其进行包裹，得到 WGMRF 模型的 100 次重复。因此，所有重复都具有式 (4) 和 (10) 所描述的空间相关性。

为进行验证，我们将每次重复分别划分为训练集和测试集，比例为 80% 和 20%。我们使用 R 中 blockCV 包的 spatialBlock 函数构造具有空间结构的交叉验证折 [Valavi等人， 2019]。该函数旨在减少随机划分空间相关观测为训练集和测试集时产生的偏差。标准的随机交叉验证可能会导致预测性能过于乐观，因为彼此邻近且通常高度相关的观测可能被分到训练子集和验证子集中。spatialBlock 函数将研究区域划分为指定大小或数量的互不重叠空间块。这些空间块通常采用正方形、矩形或用户定义的多边形构造。随后，每个空间块会被分配到一个折中，确保同一空间块内的所有观测都属于同一个训练子集或验证子集；这样便能确保训练数据与测试数据在空间上相互分离。最后，将整个区域划分为五折后，我们保留其中一折作为测试集，其余部分作为训练集；最终得到 $|\mathcal{S}_{\text{train}}| = 27,076$ 和 $|\mathcal{S}_{\text{train}}| = 6,769$。

我们将式（9）中提出的WGMRF模型与第5.1节提出的另一种低秩WGP模型，以及第3.2节所述的非空间包裹正态分布进行比较。对于一次具有代表性的重复实验，我们在图4上图中展示了逐点正余弦平方差（$\cos[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \cos[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)]]^2 + (\sin[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \sin[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2$的直方图。我们观察到，IID WN模型的平方差最为显著，因为该模型未考虑空间依赖性。在低秩WGP模型中，平方差低于IID WN模型。此外，对于所提出的模型，大多数平方差都接近于零，超过平方差1的部分几乎可以忽略不计。我们进一步考察了全部100次重复实验的结果，并观察到类似的模式，这表明所提出模型的预测性能得到了持续改善。

尽管正余弦平方差表明，所提出方法的预测偏差较小，但我们进一步考察了基于与之前相同的重复试验，三个模型在式（12）中的相关后验集中度 $\hat{c}(\boldsymbol{s}_0)$ 的分布；后验集中度接近 1 时，

意味着预测不确定性较低。图 4 下方面板展示了三个对比模型的逐点后验集中度直方图。IID WN 模型的 $\hat{c}(\boldsymbol{s}_0)$ 值集中在 0.25 附近，表明预测不确定性较高；低秩 WGP 模型的值则主要分布在 0.1 到 0.5 之间。然而，对于所提出的模型，大多数值都接近 0.9，表明 WGMRF模型在降低预测不确定性方面具有显著更好的预测性能。我们再次检查了全部 100 次重复试验的结果，观察到类似的模式，这表明所提出模型的预测不确定性持续较低。

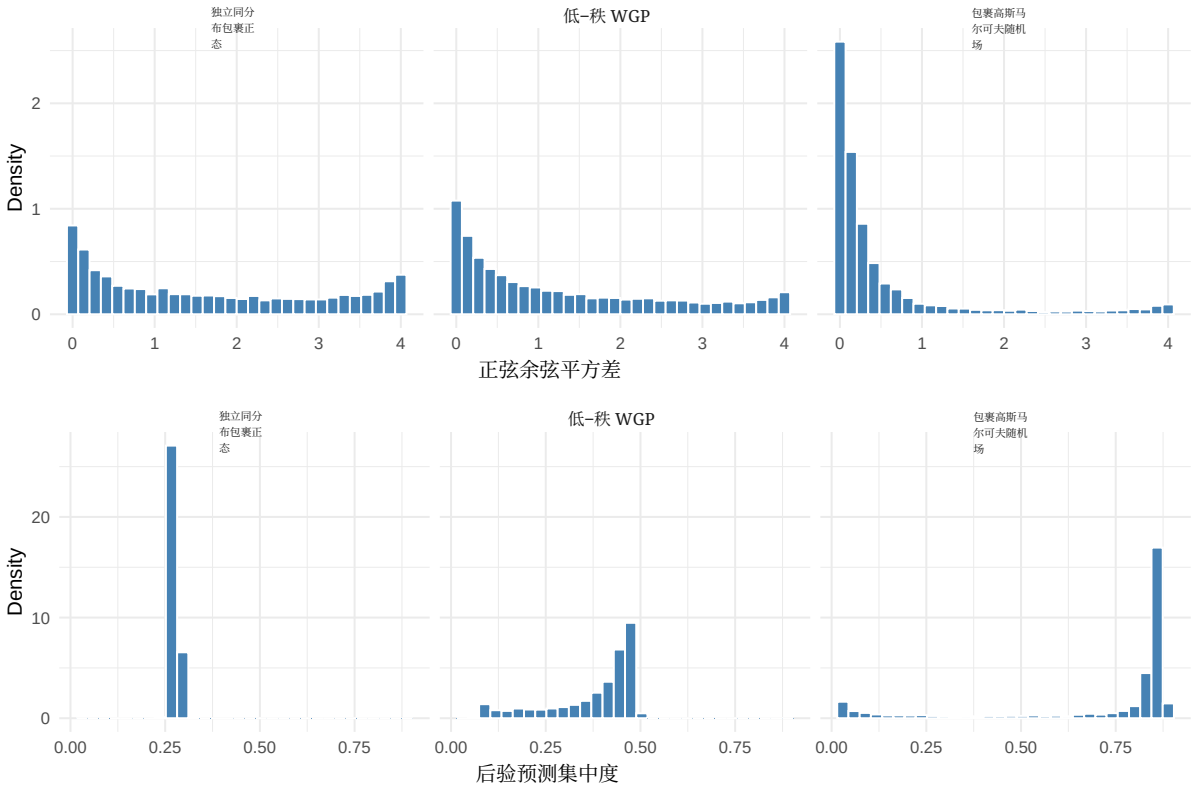

图4：上图：基于非空间包裹正态分布（独立同分布包裹正态）、第5.1节中的低秩包裹高斯过程以及式(9)中最终提出的模型（包裹高斯马尔可夫随机场）的逐点正余弦平方差$(\cos[Y(\boldsymbol{s}_i)]-\cos[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2+(\sin[Y(\boldsymbol{s}_i)]-\sin[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2$的直方图。下图：基于相同三个模型的逐点后验预测集中度直方图。

我们进一步探讨第5.2节所述验证指标的综合汇总。这些指标为每次重复提供模型性能的单一数值汇总。因此，我们为每个指标获得100个值；我们进一步在表1中报告它们的平均值和标准误。基于所有指标，所提出的WGMRF模型优于其他备选方法。

表 1：IID WN、低秩 WGP 和 WGMRF 模型的预测性能比较。报告值为平均值，括号中的下标表示标准误（基于 100 次模拟数据集重复）。

	IID WN	低秩 WGP	WGMRF
SC-RMSE	$1.2693_{(0.0024)}$	$1.1339_{(0.0029)}$	$\mathbf{0.7314}_{(0.0033)}$
$\bar{c}$	$0.2848_{(0.0017)}$	$0.3708_{(0.0020)}$	$\mathbf{0.7106}_{(0.0023)}$
CRMSE	$1.5849_{(0.0038)}$	$1.3768_{(0.0045)}$	$\mathbf{0.8812}_{(0.0047)}$
CMAE	$1.3237_{(0.0039)}$	$1.1163_{(0.0042)}$	$\mathbf{0.5931}_{(0.0033)}$
R_e	$0.1963_{(0.0031)}$	$0.3580_{(0.0032)}$	$\mathbf{0.7321}_{(0.0024)}$
ρ_c	$0.0019_{(0.0012)}$	$0.4432_{(0.0034)}$	$\mathbf{0.8364}_{(0.0021)}$

6 数据应用

在本节中，我们首先使用10 折交叉验证将所提出的WGMRF与其他备选方法进行比较。进而，利用第5.2节中在所有指标上表现最佳的模型，我们进行统计推断。

6.1 模型比较

与模拟研究类似，我们使用 R 中 blockCV 包的 spatialBlock 函数，将观测位置划分为 10 折。随后，在 10 折交叉验证中，我们选取其中一折作为测试集，其余九折作为训练集，并重复这一过程，将每一折依次作为测试集。在每一折中，$|\mathcal{S}_{\text{test}}|$ 的取值介于 3384 和 3385 之间。

与模拟研究类似，我们将式（9）中提出的 WGMRF模型与第 5.1 节的低秩 WGP 模型以及第 3.2 节所述的非空间包裹正态分布进行比较。非空间包裹正态分布、低秩 WGP 模型和 WGMRF模型的平均计算时间（跨折平均）分别为 79.08 分钟、172.65 分钟和 133.03 分钟；也就是说，基于稀疏精度矩阵的 WGMRF模型甚至比具有 100 个节点位置的低秩高斯马尔可夫随机场模型更快。合并全部 10 折后，我们在图 5 上方面板中展示逐点正弦—余弦平方差的直方图（$\cos[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \cos[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2 + (\sin[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \sin[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2$。我们再次观察到，平方差在 IID WN 模型中最为显著，因为该模型未考虑空间依赖性。对于低秩 WGP 模型，平方差小于 IID WN 模型：虽然在零附近有一个尖峰，但在 X轴上，0 到 1 之间也呈现出逐渐衰减的尾部。此外，在所提出的模型中，大多数平方差集中在零附近，而较大平方差处的概率质量可以忽略不计。

我们进一步基于相同的10 折交叉验证，考察三个模型在式（12）中的相关后验集中度 $\hat{c}(\boldsymbol{s}_0)$ 的分布。我们展示了

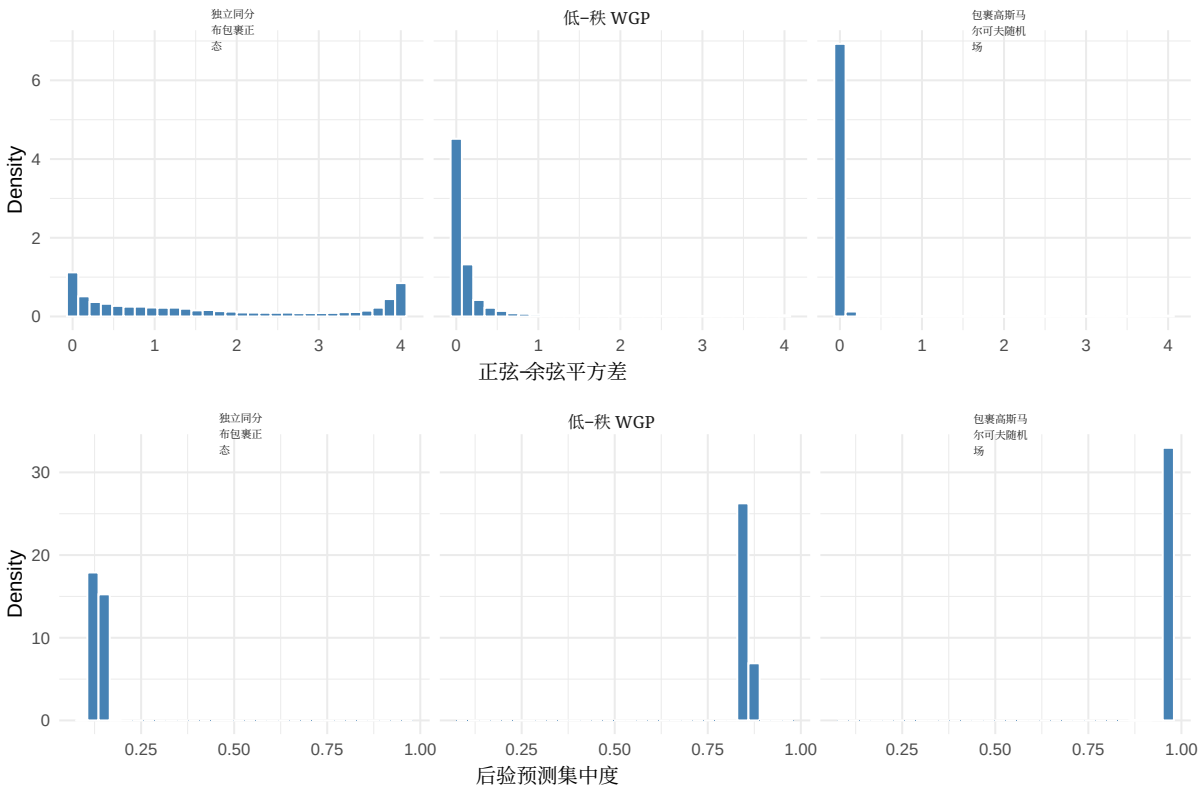

图 5：上图：在 10 折交叉验证下，基于非空间包裹正态分布（独立同分布包裹正态）、第 5.1 节中的低秩 WGP 以及公式（9）中最终提出的模型（WGMRF）得到的逐点正余弦平方差（$\cos[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \cos[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2 + (\sin[Y(\boldsymbol{s}_i)] - \sin[\widehat{Y}(\boldsymbol{s}_i)])^2$）直方图。下图：在相同的 10 折交叉验证下，基于上述三个模型得到的逐点后验预测集中度直方图。

图 5 下方面板中三个竞争模型的逐点后验集中度直方图。对于独立同分布包裹正态模型，$\widehat{c}(\boldsymbol{s}_0)$ 的取值集中在 0.125 附近，表明预测不确定性较高；对于低秩 WGP 模型，这些取值集中在 0.85 附近，表明相较于独立同分布包裹正态模型有了显著改进。然而，对于所提出的模型，大多数取值接近 0.97，这表明其预测性能更优，预测不确定性也更低。

我们还探讨了第 5.2 节所述验证指标的综合汇总。这些指标为每个规模相当的折提供了模型性能的单一数值汇总。因此，我们为每个指标获得 10 个数值；此外，我们在表 2 中报告了它们的平均值和标准误。综合所有指标，所提出的 WGMRF模型优于其他模型。

6.2 基于包裹高斯马尔可夫随机场模型的结果

鉴于所提出的 WGMRF 模型优于其他备选模型，我们对 2004年印度洋海啸发生当时的整个印度洋盆地风向数据集进行推断。正如第 4.4 节所述，我们总共获得 60,000

表 2：独立同分布、低秩包裹高斯过程和WGMRF模型的预测性能比较。所报告的数值为平均值，括号中的下标表示标准误（基于对风向数据集进行10折交叉验证所得）。

	IID	低秩	SPDE
SC-RMSE	$1.2979_{(0.0013)}$	$0.4834_{(0.0010)}$	$\mathbf{0.2255}_{(0.0009)}$
$\bar{c}$	$0.1350_{(0.0001)}$	$0.8558_{(0.0001)}$	$\mathbf{0.9667}_{(0.0003)}$
CRMSE	$1.7004_{(0.0019)}$	$0.5591_{(0.0014)}$	$\mathbf{0.2885}_{(0.0013)}$
CMAE	$1.3805_{(0.0021)}$	$0.3314_{(0.0006)}$	$\mathbf{0.0674}_{(0.0003)}$
R_e	$0.1579_{(0.0016)}$	$0.8832_{(0.0005)}$	$\mathbf{0.9746}_{(0.0002)}$
ρ_c	$0.0052_{(0.0012)}$	$0.7843_{(0.0023)}$	$\mathbf{0.9615}_{(0.0008)}$

个 MCMC样本，并丢弃预热阶段的前 10,000 个样本；经过长度为 5 的抽稀后，最终基于剩余的 10,000 个样本进行后验推断。使用配备 64GB 内存的 AMD Ryzen 9 5900X 处理器，计算时间为 316.16 分钟。考虑到有 $N = 33{,}845$ 个数据位置，这一耗时相当适中。

图 6 展示了模型参数的轨迹图，以及基于预热后样本得到的后验分布核密度估计。所有链的收敛情况似乎都较为理想；对于 σ^2、 ψ 和 r，我们从远离后验分布主体的取值开始抽样，它们很快就接近平稳分布的正确区域。后验密度呈钟形，与非信息先验分布显著不同，表明贝叶斯学习发挥了作用。

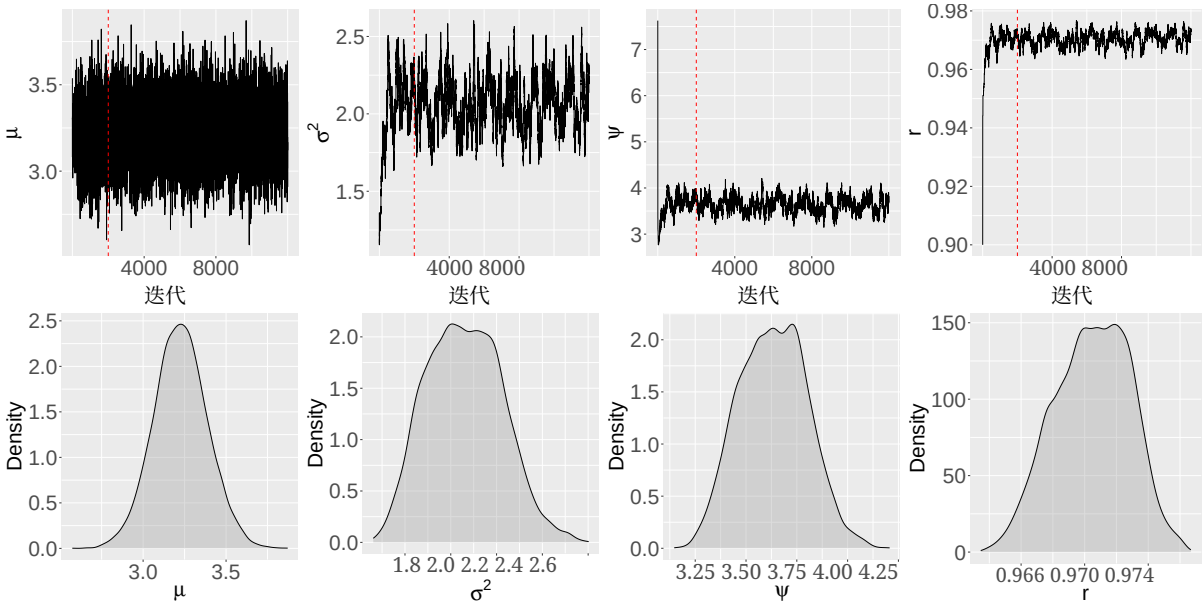

图 6：上图：模型参数 μ、 σ^2、 ψ 和 ν 的轨迹图。图中展示了长度为 12,000 的马尔可夫链蒙特卡洛链，包括预烧期和预烧后阶段，并按 5 倍抽稀。下图：基于预热后样本近似得到的参数后验密度。

此外，我们还考察了风向数据拟合得到的空间相关性。这里，对于每个

MCMC样本集合$\{\mu^{(b)}, \sigma^{2(b)}, \psi^{(b)}, r^{(b)}\}$，其中 $b = 1, \ldots, B$，我们需要评估式（8）中的$\tilde{}$ ($N \times N$)维矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\psi,r}$ ，并进一步计算式（10）中每对元素对应的继承圆周相关性$\tilde{}$，其中元素取自$\boldsymbol{\Sigma}_{\psi,r}$。此外，对剩余的 B =10,000个预烧后样本取平均值，即可得到最终的SPDE近似的圆形空间相关性；但从计算和存储角度来看，这一过程都颇具挑战。鉴于我们的主要目标是了解空间圆周相关性如何随距离衰减，我们首先考虑一个以海啸震中为中心的 $10^\circ \times 10^\circ$ 窗口，震中位置为 95.854°E和 3.316°N。该区域内有1,356个网格单元。我们仅针对这些位置中的每一对计算SPDE近似的圆形空间相关性。此外，我们比较这些位置之间的测地距离及其对应的圆周相关值，结果见图7左图。由于基于SPDE的近似，部分估计的相关值超过了1。有效空间范围通常定义为空间相关性衰减至0.05时的距离。类似地，我们将空间圆周相关性衰减至0.05时的距离定义为空间圆周相关范围。这里，估计的空间圆周相关范围约为1,327.72千米。总体而言，在较大的距离范围内，我们观察到很强的圆周相关性。鉴于我们的方法假设底层空间相关性为各向同性，在测地距离相近的任意网格单元对之间，相关性估计值将相等（由于基于SPDE的近似，实际为近似相等）。

虽然上述方法给出了空间圆周相关性的点估计，即逐元素的后验均值，但我们也可以获得一对位置之间空间圆周相关性的完整后验分布。作为示例，我们选取两个网格单元：其中一个的质心距离震中最近，坐标为 96.0°E、 3.5°N；另一个的质心坐标为 92.5°E、 11.5°N，距离印度安达曼-尼科巴群岛首府布莱尔港最近，其实际坐标为 92.7265°E、 11.6234°N。这两个网格单元质心之间的测地距离为 970.63 千米。图 7 右侧面板展示了这两个网格单元之间空间圆周相关性的后验分布。该分布呈钟形，蒙特卡洛后验均值为 0.1056，后验标准差为 0.0031。

7 结论

本文提出了一种包裹高斯马尔可夫随机场模型，用于分析大规模空间相关圆形数据集，重点研究基于ERA再分析的风向数据集。该数据集覆盖整个印度洋盆地，对应于2004年印度洋海啸发生时的时刻。所提出的模型利用了Jona-Lasinio 等人提出的包裹稠密高斯过程模型的思想 [2012] ，以及 Lind- gren 等人提出的稠密高斯过程与具有稀疏精度矩阵的高斯马尔可夫随机场之间的明确联系 [2011]。在此，我们利用基于随机偏微分方程的构造来近似潜在高斯过程的稠密Matérn相关结构。在我们的模型中，

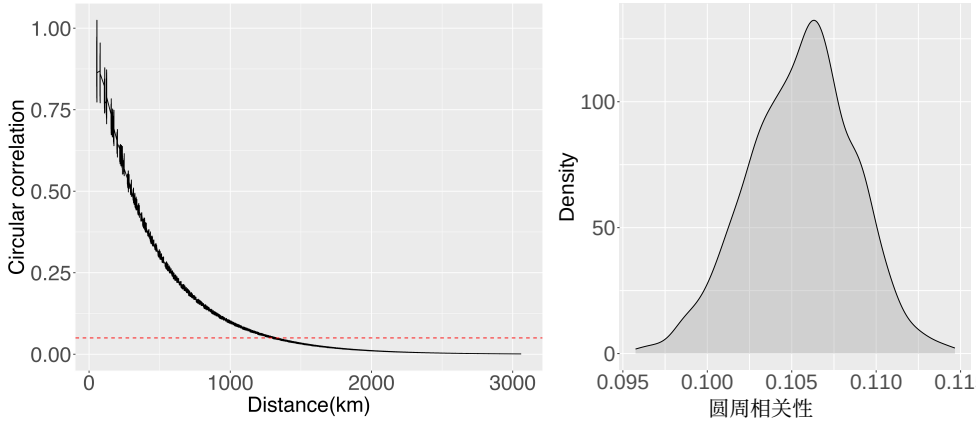

图 7：左图：测地距离（单位：千米）与使用 (10) 和 (8) 估计的空间圆周相关性的关系。水平虚线表示圆周相关性为 0.05；其在 X 轴上对应的值表示空间圆周相关范围。右图：位于 (92.5°E,11.5°N) 和 (96.0°E, 3.5°N) 的两个网格单元之间空间圆周相关性的后验分布。

无需为数据层显式定义相关结构。相反，数据层继承了潜在高斯马尔可夫随机场的空间依赖结构，从而可以使用稀疏精度矩阵。所提出模型的计算可通过马尔可夫链蒙特卡洛抽样实现，其中潜在绕数通过并行更新快速更新；此外，由于精度矩阵具有稀疏性，潜在空间随机效应也可以快速更新。通过广泛的模拟研究以及对2004年印度洋海啸数据集的应用，我们证明，与竞争方法相比，所提出的模型具有更优的预测性能。对海啸期间风向数据的探索性分析显示出很强的空间相关性，而所提出的包裹高斯马尔可夫随机场框架能够有效捕捉这一结构，同时可扩展应用于大规模空间域。

这项工作自然引出了若干未来研究方向。首要方向是开发适用于大规模动态圆周数据集的时空包裹高斯过程模型。将基于 SPDE 的构造扩展至时空设定，有助于在保持计算可扩展性的同时，对不断演变的方向场进行一致建模。更广泛地说，大规模空间高斯过程模型存在许多近似策略，包括 Vecchia型近似和最近邻高斯过程（NNGP）；Hazra 等人[2025b]对这些方法进行了详细讨论和比较。研究如何将此类近似方案应用于包裹设定，从而为海量空间圆周数据集提供更多类别的可扩展模型，将十分有意义。探究这些包裹近似的理论性质、计算权衡和预测性能，是一个颇具前景的未来研究方向。最后，进一步的方法学发展还可聚焦于纳入协变量、对球面上的各向异性进行建模，以及其他相关领域。这些扩展将有助于

提升包裹空间模型在地球物理学、环境科学和气候科学中的适用性；在这些领域，大规模圆周数据自然涌现。

数据可用性

本文所依据的数据和代码可通过 GitHub 链接 https://github.com/arnabstatswithR/WGMRF.git 获取。

参考文献

Mario Arrieta-Prieto 和 Kristen R Schell。空间可迁移的机器学习风电预测模型：v-logit 随机森林。《可再生能源》，223：120066，2024年。

Andrew Ashton、A BradMurray 和 Olivier Arnoult。大角度波浪诱发的大尺度不稳定性形成海岸线特征。《自然》，414(6861)：296–300，2001年。

Sudipto Banerjee、Alan E Gelfand、Andrew O Finley 和 Huiyan Sang。面向大型空间数据集的高斯预测过程模型。《皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）》，70(4)：825–848，2008年。

Daniela Cisneros、Yan Gong、Rishikesh Yadav、Arnab Hazra 和 Raphaël Huser。结合统计学与机器学习的方法，用于极端野火频率和规模的空间预测。《极值》，26(2):301–330，2023年。

Stuart Coles。圆形分布与过程的推断。《统计与计算》，8 (2):105–113，1998年。

Paul Damien 和 Stephen Walker。使用冯·米塞斯分布对圆形数据进行完整的贝叶斯分析。《加拿大统计学杂志/加拿大统计学评论》，27:291–298，1999年。

Nicholas I Fisher。《圆形数据统计分析》。剑桥大学出版社，1995年。

Montserrat Fuentes。大型非规则间隔空间数据的近似似然。《美国统计学会杂志》，102(477):321–331，2007年。

Reinhard Furrer、Marc G Genton 和 Douglas Nychka。大型空间数据集插值的协方差截尾。《计算与图形统计学杂志》，15(3):502–523，2006年。

Alan E Gelfand 和 Erin M Schliep。《空间统计与高斯过程：一段美妙的结合》。*Spatial Statistics*，18：86–104，2016年。

D Harrison 和 GK Kanji。圆形数据方差分析的发展。《应用统计学杂志》，15(2)：197–223，1988年。

Arnab Hazra 和 Raphaël Huser。使用低秩半参数空间模型估计红海表面温度热点的高分辨率分布。《应用统计年鉴》，15(2):572–596，2021年。

Arnab Hazra、Raphaël Huser 和 Árni V Jóhannesson。用于高维空间极值的贝叶斯潜在高斯模型。载于《使用贝叶斯潜在高斯模型进行统计建模：地球物理学和环境科学中的应用》，第219–251页。Springer，2023年。

Arnab Hazra、Raphaël Huser 和 David Bolin。在广阔地理区域内高效建模空间极值。《计算与图形统计学杂志》，34(3):795–811，2025a。

Arnab Hazra、Pratik Nag、Rishikesh Yadav 和 Ying Sun。探索统计方法和深度学习方法在大型空间数据集上的效能：案例研究。《农业、生物与环境统计学杂志》，30(1):231–254，2025b。

Hans Hersbach、Bill Bell、Paul Berrisford、Shoji Hirahara、András Horányi、Joaquín Muñoz- Sabater、Julien Nicolas、Carole Peubey、Raluca Radu、Dinand Schepers等。ERA5全球再分析。《英国皇家气象学会季刊》，146(730)：1999年–2049年，2020年。

Dave Higdon。利用过程卷积进行空间和时空建模。载于当前环境问题的定量方法，第37–56页。Springer，2002年。

Leo H Holthuijsen。海洋和沿海水域中的波浪。剑桥大学出版社，2010年。

Miaki Ishii、Peter M Shearer、Heidi Houston和John E Vidale。利用Hi-Net阵列成像的2004年苏门答腊—安达曼地震的范围、持续时间和速度。《自然》，435(7044)：933–936，2005年。

S Jammalamadaka 和 Y Sarma。角变量的相关系数。《统计理论与数据分析》2。在第二届太平洋地区统计会议论文集。荷兰阿姆斯特丹：北荷兰出版社，第 349–364 页，1988年。

S Rao Jammalamadaka 和 Ambar Sengupta。《style id='1'>圆形统计学专题，第 5 卷。世界科学出版社，2001年。

Giovanna Jona-Lasinio、Alan Gelfand 和 Mattia Jona-Lasinio。使用包裹高斯过程对波浪方向数据进行空间分析。6(4):1478–1498，2012年。

Shogo Kato、Kunio Shimizu 和 Grace S Shieh。圆-圆回归模型。《统计学杂志》，18(2):633–645，2008年。Thorne Lay、Hiroo Kanamori、Charles J Ammon、Meredith Nettles、Steven N Ward、Richard C Aster、Susan L Beck、Susan L Bilek、Michael R Brudzinski、Rhett Butler 等。《2004年12月26日苏门答腊-安达曼大地震》。《科学》，308(5725):1127–1133，2005年。Finn Lindgren、Håvard Rue 和 Johan Lindström。高斯场与高斯马尔可夫随机场之间的显式联系：随机偏微分方程方法。《皇家统计学会杂志》*B*辑：统计方法，73(4):423–498，2011年。

Anton Mallasto 与 Aasa Feragen。黎曼流形上的包裹高斯过程回归。载于*IEEE*计算机视觉与模式识别会议论文集，第5580–5588页，2018年。

Kanti V. Mardia 与 Peter E. Jupp。方向统计学。威利概率与统计丛书。John Wiley&Sons, Ltd.，奇切斯特，2000年。ISBN0-471-95333-4。Mardia所著方向数据统计学的修订再版 [MR0336854 (49 #1627)]。

Kanti V Mardia、Gareth Hughes、Charles C Taylor 与 Harshinder Singh。一种应用于生物信息学的多元冯·米塞斯分布。加拿大统计学杂志，36（1）：99–109，2008年。

Kantilal Varichand Mardia。方向数据统计学。皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法，37(3)：349–371，1975年。

Isa Marques、Thomas Kneib 和 Nadja Klein。基于包裹高斯过程的空间相关圆响应数据非平稳模型。《统计与计算》，32 (5):73，2022年。

Gianluca Mastrantonio、Giovanna Jona Lasinio 和 Alan E Gelfand。具有不可分离协方差结构的时空圆模型。*Test*，25(2):331–350，2016年。

Arthur Pewsey 和 Eduardo García-Portugués。方向统计学的最新进展。*Test*，30(1):1–58，2021年。

Danilo JimenezRezende、GeorgePapamakarios、SébastienRacaniere、MichaelAlbergo、Gurtej Kanwar、Phiala Shanahan 和 Kyle Cranmer。环面与球面上的归一化流。发表于国际机器学习会议，第 8083–8092 页。PMLR，2020年。

Håvard Rue 和 Leonhard Held。《高斯马尔可夫随机场：理论与应用》。Chapman and Hall/CRC，2005年。

Indranil Sahoo、Suman Majumder、Arnab Hazra、Ana G Rappold 和 Dipankar Bandy- opadhyay。用于删失空间响应的计算可扩展贝叶斯随机偏微分方程建模。《新英格兰数据科学统计学杂志》，第 1–15 页，2025年。doi：10.51387/25-NEJSDS78。

Michael L Stein、Zhiyi Chi 和 Leah J Welty。大型空间数据集的似然近似。《皇家统计学会会刊：B辑（统计方法学）》，66(2): 275–296，2004年。M. A. Stephens。圆上的随机游走。《生物计量学》，50(3/4):385–390，1963年。

Michael A Stephens。无需查阅大量表格即可使用 Kolmogorov–Smirnov、Cramer–Von Mises 及相关统计量。《皇家统计学会会刊：B辑（统计方法学）》，32(1):115–122，1970年。

Roozbeh Valavi、Jane Elith、José J Lahoz-Monfort 和 Gurutzeta Guillera-Arroita。blockCV：一个用于为物种分布模型的 k 折交叉验证生成空间分离或环境分离折的 R软件包。《生态学与进化方法》，10(2):225–232，2019年。

Aldo V Vecchia. 连续空间过程的估计与模型识别。《皇家统计学会会刊：B辑（统计方法学）》，50(2):297–312, 1988年。

Fangpo Wang 和 Alan E Gelfand. 使用投影高斯过程对空间及空时方向数据建模。《美国统计学会杂志》，109(508): 1565–1580, 2014年。

Fangpo Wang、Alan E Gelfand 和 Giovanna Jona-Lasinio. 线性变量与方向变量的联合时空分析：亚得里亚海波高与波浪方向的时空建模。《中华统计学志》，第 25–39 页，2015年。G. S. Watson. 圆上的拟合优度检验。《生物计量学》，48(1/2):109–114, 1961。G. S. Watson. 圆上的拟合优度检验。II。《生物计量学》，49(1/2):57–63, 1962。Christopher K Wikle 和 Noel Cressie. 一种降维的时空卡尔曼滤波方法。《生物计量学》，86(4):815–829, 1999年。Ian R Young 和 Agustinus Ribal. 风速与波高全球趋势的多平台评估。《科学》，364(6440):548–552, 2019。IR Young、Stefan Zieger 和 Alexander V Babanin. 风速与波高的全球趋势。《科学》，332(6028):451–455, 2011。