I无穷族非纤维化扭结环面结

ADNAN AND KYUNGBAE PARK

Abstract. 我们给出了若干显式的无穷族扭结环面结，它们不是纤维化的。我们的方法基于我们先前工作中推导出的亚历山大多项式显式公式。我们证明，扭结环面结的亚历山大多项式的首项系数可以取任意整数值，由此立即得到无穷多个非纤维化扭结环面结的实例。

arXiv:2603.06316v1 [math.GT] 6 Mar 2026

1. Introduction

对于互素整数 p 和 q，以及整数 $0 < r \leq |p| + |q|$ 和 $s \in \mathbb{Z}$，扭结环面结 $T(p,\ q;\ r,\ s)$是环面结的一种推广，它是通过在平坦环面上标准图中的（$p,\ q$）环面结的 r 条相邻股线上施加 s 个整圈扭转而得到的。图1展示了结 $T(10,\ 3; 5,\ -1)$。

Dean 在其论文中引入了扭结环面结 [Dea96], ，此后人们从许多几何和拓扑学角度对其进行了研究。这些研究包括双曲体积 [CDW99, CKP04, CFK+11]、塞弗特纤维化手术和图流形手术 [Dea03, Kan16], 、结群的群论性质 [MT22, HT23], 、Heegaard 分裂 [MS09]、 L-空间手术以及由 L-空间猜想引发的相关问题 [Vaf15, CGHV16, IT18, Tra20], 、隧道数 [Lee11], , 以及与洛伦兹结（或 T-链）的联系 [BK09]。此外，人们也对扭结环面结属于环面结、卫星结还是双曲结这一分类问题进行了广泛研究 [Lee14, Lee15, Lee18, Lee19, Lee21, LdP22]。

本文研究扭结环面结的纤维化性。回顾一下，若一个结$K \subset S^3$ 的外部 $S^3 \setminus \nu(K)$ 纤维化地映射到圆 S^1，且纤维是 K [的塞弗特曲面，则称该结为纤维化的78]Sta78]。特别地，环面结构成了一个经典的纤维化结族。纤维化结在低维拓扑学中发挥着核心作用，因为其外部具有特别简单的拓扑结构，而这种结构由纤维的单值化编码。它们在接触结构、结 Floer 同调，以及代数与几何结不变量之间相互作用的研究中也发挥着重要作用 [Etn06, Ni07, OS05]。

在全文中，我们假设 $p > q > 0$，因为 $T(p,q;\ r,s) = T(q,p;\ r,s)$ 以及$T(p,q;\ r,s)$ 是 $T(p,-q;\ r,-s)$ 的镜像。由于取镜像会保留纤维化性，这一假设不失一般性。若 $r \leq p$ 且 $s > 0$，则 $T(p,q\ ;\ r,s)$ 是一个正辫结，因此根据 Stallings 定理 [Sta78] 是纤维化的。另一方面，当 $s < 0$ 时，情况更为微妙。在这种情况下，已知一些扭结环面结是环面结 [Lee21], , 还有一些甚至是平凡结 [Lee14]；特别地，这类结是纤维化的。在 [Dol13], Doleshal 证明了，如果 $q|s| < p$ 且 $r < q$，则 $T(p,q;\ r,s)$ 是一个正辫结，因此是纤维化的。然而，Doleshal 的条件并不是扭结环面结具有纤维化性的必要条件。例如，Lee 的结果 [Lee15，定理 1.1]以及 Lee 和 Paiva 的工作 [LdP22，定理 1.1]表明，具有 $q|s| \geq p$ 或 $r > q$ 的某些扭结环面结族实际上是环面结，因此是纤维化的。

Doleshal 在其论文中指出，并非所有扭结环面结都是纤维化的；特别是， $T(4,\ 3; 2,\ -2)$ 不是纤维化的，因为它与五交叉扭结同痕。本文展示了非纤维化扭结环面结的显式二参数族。

我们的方法依赖于先前工作 [PA25]中得到的、关于具有 $r \leq p$的扭结环面结的亚历山大多项式的显式公式。众所周知，每个纤维化结都具有首一亚历山大多项式。特别地，我们证明首项

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10,57K14.*Key words and phrases.* 扭结环面结，纤维化结，亚历山大多项式。1

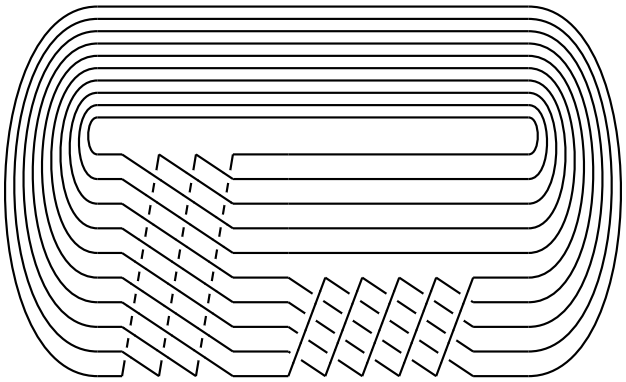


FIGURE 1. 扭结环面结 $T(10,\ 3;\ 5,\ -1)$，它不是纤维化的。

扭结环面结的亚历山大多项式的系数可以取任意整数值，从而确立无穷多个非纤维化例子的存在性。由于亚历山大多项式仅在乘以 $\pm t^k$的意义下被定义，我们将首项系数理解为最高次项系数的绝对值，并将次数理解为最高和最低指数之差。

定理 1.1. 设 $r > 0$ 且 $s < -1$。那么，扭结环面结的亚历山大多项式

$$T(r|s|,\, r|s| - 1;\, r,\, s)$$

首项系数为 r，次数为 $r|s|\,(r|s| - r - 2)\, + 2$。

特别地，若 $r > 1$，则这些结的亚历山大多项式不是首一多项式，因此这些结不是纤维化的。此外，这些结两两不同，因为它们的亚历山大多项式的次数和首项系数各不相同。由此得到以下推论。

推论1.2. 扭结环面结族

$$\{\, T(r|s|,\, r|s| - 1;\, r,\, s) \mid r > 1,\ s < -1 \,\}$$

由两两不同的非纤维结组成。

当扭结环面结的最后一个参数 s为 -1时，上述族具有首一亚历山大多项式。尽管如此，我们仍然可以在这种情况下构造类似的单参数族。

Th定理 1.3. 对于每个整数 $n > 0$，扭结环面结的亚历山大多项式 ot

$$T(6n - 1,\, 2n;\, 3n,\, -1)$$

的首项系数为 n，次数为 $(3n - 2)(n - 1)$。

因此我们得到以下推论。

推论 1.4. 扭结环面结的族

$$\{\, T(6n - 1,\, 2n;\, 3n,\, -1) \mid n > 1 \,\}$$

由两两不同的非纤维结组成。

事实上，对亚历山大多项式的类似计算在情形 $s = -1$ 和 $s = -2$下给出了以下额外的族。

定理1.5. 对每个整数 $n > 1$，下列扭结环面结的亚历山大多项式不是首一的。特别地，这些结不是纤维化的：

(1) $T(6n - 2,\, 2n - 1;\ \ 3n - 1,\, -1)$

(2) $T(10n - 6,\, 2n - 1;\ \ 5n - 3,\, -1)$

(3) $T(10n + 1,\, 2n;\ \ 5n,\, -1)$

(4) $T(4n+4, 2n+1;\ 2n+2, -2)$*(5)* $T(6n+1, 2n;\ 3n, -2)$*(6)* $T(6n+2, 2n+1;\ 3n+1, -2)$*(7)* $T(18n+12, 6n+5;\ 9n+6, -2)$*(8)* $T(18n+18, 6n+7;\ 9n+9, -2)$

由于每个 L-空间结都是纤维化的，我们的例子还给出了新的显式扭结环面结族，它们具有 $s < 0$，但不是 L-空间结。关于此前不是 L-空间结的扭结环面结例子，参见 [Mor06，定理 3 和 4], [Vaf15，定理 1。1] 以及 [PA25，定理 3]。

尽管我们找到了许多非纤维化扭结环面结的例子，但要完成分类似乎要困难得多。除了亚历山大多项式之外，还有其他方法可以检测纤维化性。例如，Stallings [Sta78] 证明，一个结是纤维化的，当且仅当其结群的交换子子群是有限生成的（等价地说，是有限秩自由群）。在我们先前的工作 [PA25], 中，我们得到了一个扭结环面结的结群表示，不过在这种情况下直接应用 Stallings 判据似乎很困难。

群论方法的进一步完善来自扭曲亚历山大多项式，它们通过结群的线性表示来定义，通常比普通亚历山大多项式能提供更强的纤维化性判别条件。特别是，Cha 证明了纤维化结的扭曲亚历山大不变量满足强代数约束 [Cha03], ；Goda、Kitano 和 Morifuji 证明，对于适当的表示，相关的扭曲亚历山大多项式给出了 S^3 中的结纤维化的必要条件 [GKM05]。关于这一理论及其应用的综述，参见 [FV11]。

另一种重要方法是借助结 Floer 同调 [OS04, Ras03], ，它为判定纤维化性提供了强有力的工具。Ghiggini[Ghi08] 和 Ni [Ni07] 的一条基本定理指出，结 $K \subset S^3$ 是纤维化结，当且仅当

$$\operatorname{rank} \widehat{HFK}(K, g(K)) = 1,$$

其中 $g(K)$ 表示 K的 Seifert 属。尽管这些判据很有力，但要将它们系统地应用于扭结环面结，通常仍然很困难。

另一方面，众所周知，亚历山大多项式的首一性一般而言并不足以保证纤维化性。著名的例子包括 Kinoshita–Terasaka 结与 Conway 结，它们互为突变结。二者都具有平凡（因而首一）的亚历山大多项式，但都不是纤维化的 [GKM05, OS05]。尽管如此，我们的计算表明，扭结环面结的表现可能有所不同。在 2,152 个具有 $s < 0$ 、其标准辫图至多有 100 个交叉的扭结环面结中，我们利用 SnapPy [CDGW], 中的结 Floer 同调计算发现，其中 49 个是非纤维化的。我们进一步发现，所有这些结的亚历山大多项式都是非首一的。尽管证据诚然有限，这些计算表明，扭结环面结的纤维化性或许由一个更简单的原理所支配。这促使我们提出如下猜想；由 Murasugi [Mur58]的一条经典定理可知，该猜想对交替结成立。

猜想 1.6。扭结环面结是纤维化的，当且仅当其亚历山大多项式是首一的。

致谢。作者获得了由韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）拨款（RS-2025-24523511 和 RS-2025-25415913）。

2. Alexander polynomial of twisted torus knots

本节中，为方便起见，我们回顾来自 [PA25] 的扭结环面结的亚历山大多项式公式。完整细节和证明请参阅该论文。

对于互素的整数 $p > q > 0$，以及满足 $1 < r < p$ 的整数 r，和 $s \in \mathbb{Z}$，我们先引入一些与 p、 q和 r的模运算有关的记号。令 $[x]$表示 x 模 p的余数；也就是说，它是满足 $0 \leq [x] < p$ 且$[x] \equiv x$ 模 p的唯一整数。

我们首先定义

$$Q := \{[jq^{-1}] \mid j = 0, 1, \ldots, r-1\},$$

其中， q^{-1} 表示模 p下 q 的乘法逆元。我们将 Q中的元素按递增顺序排列，并记为

$$Q = \{Q_0 < Q_1 < \cdots < Q_{r-1}\}.$$

接下来，令

$$R := \{[-jq^{-1}] \mid j = 1, 2, \ldots, q\}.$$

对于每个 $i = 1, \ldots, r-1$，我们定义 k_i为 R中落在区间 $[Q_{i-1}, Q_i)$内的元素个数；也就是说，

$$k_i := \big|\{x \in R \mid Q_{i-1} \leq x < Q_i\}\big|.$$

定义

$$Q' := [rq^{-1}].$$

由于 p 和 q 互素，因此有 $Q' \notin Q$。于是存在一个整数 m，使得$0 \leq m \leq r-1$，从而

$$Q_0 < \cdots < Q_m < Q' < Q_{m+1} < \cdots < Q_{r-1}.$$

接着定义

$$k' := \big|\{x \in R \mid Q_m \leq x < Q'\}\big|.$$

对于每个 $i = 1, \ldots, r-1$，我们还定义

$$\overline{k}_i := k_1 + \cdots + k_i,$$

并令

$$\overline{k}' := k_1 + \cdots + k_m + k'.$$

采用上述记号，扭结环面结的亚历山大多项式由下式给出 [PA25]。

$$\Delta_{T(p,q;r,s)}(t) = \frac{1-t}{(1-t^p)(1-t^q)(1-t^r)} \left(\tilde{X}(t)Y(t) - X(t)\tilde{Y}(t)\right), \tag{1}$$

其中

$$X(t) = 1 - (1-t^{rs}) \sum_{i=1}^{r-1} t^{\overline{k}_i p + (i-1)rs} - t^{pq+(r-1)rs},$$

$$\widetilde{X}(t) = \begin{cases} 1 - t^{\overline{k'}p}, & \text{if } m = 0, \\ 1 - (1-t^{rs}) \sum_{i=1}^{m} t^{\overline{k}_i p + (i-1)rs} - t^{\overline{k'}p + mrs}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$Y(t) = 1 - (1-t^{rs}) \sum_{i=1}^{r-1} t^{Q_i q + (i-1)rs} - t^{pq+(r-1)rs},$$

$$\widetilde{Y}(t) = \begin{cases} 1 - t^{Q'q}, & \text{if } m = 0, \\ 1 - (1-t^{rs}) \sum_{i=1}^{m} t^{Q_i q + (i-1)rs} - t^{Q'q + mrs}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3. Leading coefficients and degrees of certain twisted torus knots

使用上一节中的记号，我们确定定理1.1和定理1.3中各族的亚历山大多项式的首项系数和次数。这些计算证明了这两个定理。定理1.5也可以用类似的方法证明，证明留给读者。

3.1. **定理 1.1 的证明**。对于族 $T(r|s|,\ r|s|-1;\ r,\ s)$，其中 $s<-1$，我们有

$$p=r|s| \qquad \text{and} \qquad q=r|s|-1\equiv -1 \pmod{p}.$$

因此

$$[q^{-1}]=r|s|-1.$$

因此

$$Q=\{[j(r|s|-1)] \mid j=0,1,\dots,r-1\},$$

并将各元素按递增顺序排列后，得到

$$Q_i=\begin{cases}0 & \text{if } i=0,\\ r|s|-r+i & \text{if } 1\le i\le r-1.\end{cases}$$

此外,

$$R=\{[-j(r|s|-1)] \mid j=1,2,\dots,r|s|-1\}=\{1,2,\dots,r|s|-1\}.$$

由此可得

$$k_i=\begin{cases}r|s|-r & \text{if } i=1,\\ 1 & \text{if } 2\le i\le r-1.\end{cases}$$

由于

$$Q'=[r(r|s|-1)]=r|s|-r,$$

我们有

$$Q_0<Q'<Q_1.$$

因此 $m=0$，从而 $Q_m=Q_0$，并且

$$k'=r|s|-r-1.$$

因此,

$$\overline{k}_i=r|s|-r-1+i \qquad \text{for } 1\le i\le r-1,$$

and

$$\overline{k}'=r|s|-r-1.$$

~ ~因此，上一节中定义的多项式 $X(t)$、 $\widetilde{X}(t)$、 $Y(t)$ 和 $\widetilde{Y}(t)$ 为

$$\begin{aligned}
X(t)&=1-rt^{(r|s|-r)r|s|}+(r-1)t^{(r|s|-r-1)r|s|},\\
\widetilde{X}(t)&=1-t^{(r|s|-r-1)r|s|},\\
Y(t)&=1-(1-t^{rs})\sum_{i=1}^{r-1}t^{r|s|(r|s|-r)+r-i}-t^{r|s|(r|s|-r)},\\
\widetilde{Y}(t)&=1-t^{(r|s|-r)(r|s|-1)}.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t)Y(t)-X(t)\widetilde{Y}(t)=\ &-rt^{r|s|(2r|s|-2r-1)+r}\\
&+(t^{r|s|(r|s|-r-1)}-1)(1-t^{rs})\sum_{i=1}^{r-1}t^{r|s|(r|s|-r)+r-i}\\
&+t^{r|s|(2r|s|-2r-1)}+(r-1)t^{2r|s|(r|s|-r-1)+r}\\
&+(r-1)t^{r|s|(r|s|-r)}+t^{(r|s|-r)(r|s|-1)}-rt^{r|s|(r|s|-r-1)}.
\end{aligned}$$

为了确定 $\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\ r,\ s)}(t)$ 的首项，我们将有理因子形式地展开为几何级数:

$$\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\,r,\,s)}(t)=\frac{1-t}{(1-t^{r|s|})(1-t^{r|s|-1})(1-t^{r})}\big(\widetilde{X}(t)Y(t)-X(t)\widetilde{Y}(t)\big).$$

因此，作为形式幂级数，

$$\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\,r,\,s)}(t) = \big(\widetilde{X}(t)Y(t) - X(t)\widetilde{Y}(t)\big)(1-t) \cdot (1+t^{r|s|}+t^{2r|s|}+\cdots)(1+t^{r|s|-1}+t^{2(r|s|-1)}+\cdots)(1+t^{r}+t^{2r}+\cdots).$$

我们看到，最低次项为

$$-r\,t^{(r|s|-r-1)r|s|}.$$

由于亚历山大多项式是对称的，最高次项的系数也为 $-r$。因此，$\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\;\,r,\;\,s)}(t)$的首项系数为 r。

最低指数由 $t=0$处形式幂级数展开中的最低次项决定。然而，通过比较亚历山大多项式有理表达式的分子与分母的次数，可以更方便地得到最高指数。因此，$\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\;\,r,\;\,s)}(t)$的最高和最低指数为

$$2(r|s|)^2 - 2r^2|s| - 3r|s| + 2 \quad \text{and} \quad r|s|(r|s| - r - 1),$$

分别。因此，$\Delta_{T(r|s|,\,r|s|-1;\;\,r,\;\,s)}(t)$的次数为 $r|s|(r|s| - r - 2) + 2$。

3.2. 定理1.3的证明。对于扭结环面结 $T(6n-1,\;\;2n;\;\;3n,\;\;-1)$，我们有

$$[q^{-1}] = [(2n)^{-1}] = 3.$$

因此

$$Q = \{[3j] \mid j = 0, 1, 2, \ldots, 3n-1\} = \{Q_0 < Q_1 < \cdots < Q_{3n-1}\}.$$

直接计算可得

$$Q_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0, \\ i + \dfrac{i-1}{2} & \text{if } 1 \le i \le 2n \text{ and } i \text{ is odd}, \\ i + \dfrac{i}{2} & \text{if } 1 \le i \le 2n \text{ and } i \text{ is even}, \\ 3(i-n) & \text{if } 2n+1 \le i \le 3n-1. \end{cases}$$

同理，

$$R = \{[-3j] \mid j = 1, 2, \ldots, 2n\} = \{R_1 < R_2 < \cdots < R_{2n}\},$$

其中

$$R_i = \begin{cases} 3i-1 & \text{if } 1 \le i \le 2n-1, \\ 6n-2 & \text{if } i = 2n. \end{cases}$$

由此可得

$$k_i = \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \le i \le 2n-1 \text{ and } i \text{ is odd}, \\ 1 & \text{if } 1 \le i \le 2n-1 \text{ and } i \text{ is even}, \\ 1 & \text{if } 2n \le i \le 3n-1. \end{cases}$$

由于 $Q' = [3(3n)] = 3n+1$，我们有

$$Q_{2n} < Q' < Q_{2n+1}.$$

因此 $m = 2n$，从而 $Q_m = Q_{2n}$，并且 $k' = 0$。因此，

$$\overline{k}_i = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{i}{2} \right\rfloor & \text{if } 1 \le i \le 2n, \\ i-n & \text{if } 2n+1 \le i \le 3n-1, \end{cases}$$

and

$$\overline{k}' = n.$$

这里 $\lfloor x \rfloor$ 表示下取整函数。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
X(t) &= t^{2n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} t^{2n+i} + (1-t)\sum_{i=0}^{n-3} t^{5n-2+i(3n-1)} + t^{-n} + \sum_{i=0}^{n-1} t^{-3n-i} \\
&\quad - t^{3n^2-2n+1} - t^{3n^2+n}, \\
\widetilde{X}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} t^{-3n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} t^{2n+i}, \\
Y(t) &= nt^{-n} + (n+1) - nt^{2n} - (n-1)t^{3n} - t^{3n^2} - t^{3n^2+n}, \\
\widetilde{Y}(t) &= nt^{-n} + (n+1) - (n+1)t^{2n} - nt^{3n}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(t)Y(t) - X(t)\widetilde{Y}(t) = & -nt^{3n^2+4n} + nt^{3n^2-3n+1} + nt^{3n^2} - nt^{3n^2+n+1} \\
& + \big(t^{3n^2+n} + t^{3n^2} - t^{2n} - t^{3n}\big)\sum_{i=0}^{n-1} t^{2n+i} \\
& + (n+1)\big(t^{3n^2+n} + t^{3n^2-2n+1} + t^{n} - t^{3n^2+1} - t^{3n^2+3n} + t^{4n-1} - t^{2n-1} - t^{-n}\big) \\
& + \big((n+1)t^{2n} + nt^{3n} - (n+1) - nt^{-n}\big)(1-t)\sum_{i=0}^{n-3} t^{5n-2+i(3n-1)} \\
& + \big(t^{2n} + t^{3n} - t^{3n^2} - t^{3n^2+n}\big)\sum_{i=0}^{n-1} t^{-3n-i} \\
& + nt^{5n-1} + nt^{2n} - nt^{n-1} - nt^{-2n}.
\end{aligned}$$

由方程（1）的形式幂级数展开可见， $T(6n-1,\,2n;\,3n,\,-1)$的亚历山大多项式的最低次数项为 $-n\,t^{-2n}$。由亚历山大多项式的对称性可知，其首项系数为 n。此外，最高和最低指数

$$\Delta_{T(6n-1,\,2n;\,3n,\,-1)}(t)$$

分别为 $3n^2-7n+2$ 和 $-2n$。因此，其次数为（$3n-2$）（$n-1$）。

References

[BK09] Joan Birman 和 Ilya Kofman。《Lorenz 链环的新扭结》。《Topology》，2(2):227–248，2009。[CDGW] Marc Culler、Nathan M. Dunfield、Matthias Goerner 和 Jeffrey R. Weeks。《SnapPy：用于研究 3-流形几何与拓扑的计算机程序》。可访问 http://snappy.computop.org。[CDW99] Patrick J. Callahan、John C. Dean 和 Jeffrey R. Weeks。《最简单的双曲结》。《 》，( ): – 。[CFK+11] Abhijit Champanerkar、David Futer、Ilya Kofman、Walter Neumann 和 Jessica S. Purcell。《广义扭结环链的体积界》。《 》，18(6):1097–1120，2011。[CGHV16] Katherine Christianson、Justin Goluboff、Linus Hamann 和 Srikar Varadaraj。《扭结环面结上的非左序手术》。《 》，144(6):2683–2696，2016。[Cha03] Jae Choon Cha。《纤维结与扭曲亚历山大不变量》。《 》，355 10 4187 4200，2003 ( ): – 。[CKP04] Abhijit Champanerkar 、 Ilya Kofman 和 Eric Patterson。《下一个最简单的双曲结》。《 》，13(7):965–987，2004。[Dea96] John Charles Dean。《 》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，1996。博士论文——德克萨斯大学奥斯汀分校。[Dea03] John C. Dean。《双曲结上的小 Seifert 纤维化 Dehn 手术》。《 》，3 435 472，2003： – 。[Dol13] Brandy Guntel Doleshal。《纤维化的及本原/Seifert 扭结环面结》。《 》，( ): 。[Etn06] John B. Etnyre。《关于开书分解与接触结构的讲义》。载于 *Floer homol-ogy gauge theory and low-dimensional topology* 5 *Clay Math. Proc.* 103 141 ， ， ，第 卷，页码 – 。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[FV11] Stefan Friedl 和 Stefano Vidussi。《扭曲亚历山大多项式综述》。载于 *The mathe-matics of knots* 1 *Contrib. Math. Comput. Sci.* 45 94 ，第 卷，页码 – 。Springer，海德堡，2011。[Ghi08] Paolo Ghiggini。《结 Floer 同调检测亏格一纤维结》。《 》，130 5 1151 1169，2008 ( ): – 。[GKM05] Hiroshi Goda、Teruaki Kitano 和 Takayuki Morifuji。《Reidemeister 挠率、扭曲亚历山大多项式与纤维化结》。《 》，80(1):51–61，2005。[HT23] Keisuke Himeno 和 Masakazu Teragaito。《具有广义挠率的新族双曲扭结环面结》。《 》，60(1):203–223，2023。[IT18] Kazuhiro Ichihara 和 Yuki Temma。《负扭结环面结上的非左序手术》。《 》，94(5):49–52，2018。[Kan16] Sungmo Kang。《具有图流形 Dehn 手术的扭结环面结》。《 》，( ): – 。[LdP22] Sangyop Lee 和 Thiago de Paiva。《通过负扭转环面结得到的环面结》。《 》，( ):论文编号 。[Lee11] Jung Hoon Lee。扭结环面结 $T\ p\ q\ 3\ s$ *Journal of Knot Theory*(, ; ,) 是隧道数一。 ，( ): – 。[Lee14] Sangyop Lee。《成为平凡结的扭结环面结》。《 》，(18):4958– 4996，2014。[Lee15] Sangyop Lee。《通过扭转环面结得到的环面结》。《 》，15 15 2817 2836，2015 ( ): – 。[Lee18] Sangyop Lee。《通过扭转环面结得到的卫星结：扭结环面结的双曲性》。《 》，(3):785–815，2018。[Lee19] Sangyop Lee。《作为环面结的正扭结环面结》。《 》，( ): 。 *J. Knot Theory Ramifica-tions* 28 3 1950023, 13, 2019

Sangyop Lee。扭结环面结 21] (, , ,) 和 (, , ,) 是环面结。 ，( ):论文编号 。 $T\ mn+m+1\ mn+1\ mn+m+2\ -1$ $T\ n+1\ n\ 2n-1\ -1$ *J. Knot Theory Ramifications* 30 3 2150016, 20, 2021

Hugh R. Morton。《带扭转的环面结的亚历山大多项式》。《 》，( ): – 。 *J. Knot Theory Ramifications* 15 8 1037 1047, 2006

Moriah 和 Eric Sedgwick。《扭结环面结的 Heegaard 分裂》。《 》，156 5 885 896，2009 ( ): – 。 *Topology Appl.*

Kimihiko Motegi 和 Masakazu Teragaito。《任意高亏格结的广义挠率》。《 》，65(4):867–881，2022。22] Mur *Canad. Math. Bull.*

Kunio Murasugi。《关于交替结的亚历山大多项式》。《 》，10:181– 189；勘误，11 (1959)，95，1958。[Ni58] Yi Ni。《结 Floer 同调检测纤维化结》。《 》，170(3):577–608，2007。 *Osaka Math. J.*

Peter Ozsv07] ath 和 Zolt *Invent. Math.*

an Szab[o。《全纯圆盘与结不变量》。《 》，186 1 58( ): –116，2004。

[OS05] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。关于结 Floer 同调与透镜空间手术。 *Topology*，44 6 1281 1300，2005（）：–。[PA25] Kyungbae Park 和 ADNAN。扭结环面结的亚历山大多项式。 *J. Knot Theory* ，（）：论文编号。。[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen。 *Floer homology and knot complements*。ProQuest LLC，安娜堡，MI，2003。学位论文（哲学博士）–哈佛大学。[Sta78] John R. Stallings。纤维化结与链环的构造，载于 *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976) Part 2* ，，XXXII 卷，*Proc. Sympos. Pure Math.*，第 55–60 页。美国数学学会，普罗维登斯，RI，1978。[Tra20] Anh T. Tran。关于 L-空间扭结环面结的非左序手术。 *Proc. Amer. Math. Soc.* 148 1 447 456, 2020 [Vaf15] Faramarz Vafaee。关于扭结环面结的结 Floer 同调。 *Int. Math. Res. Not.* ，（）：–。 *IMRN* 15 6516 6537, 2015

Department of Mathematics, Kangwon National University, Gangwon 24341, Republic of Korea
Email address: adnanshahab35@kangwon.ac.kr

Department of Mathematics, Kangwon National University, Gangwon 24341, Republic of Korea
Email address: kyungbaepark@kangwon.ac.kr