arXiv:2603.06355v1 [math.CO] 6 Mar 2026

组合单纯复形的伴随函子五元列

GUNNAR FLØYSTAD

Abstract. 对于一个集合 A，令 $\mathbf{SC}_A$ 表示顶点属于 A 的单纯复形所构成的偏序集。对于一个函数 $f\colon A \to B$，存在函子

$$f^{!!}, f^{**}, f \ : \mathbf{SC}_A \to \mathbf{SC}_B, \quad f^{!*}, f^{\,*} : \mathbf{SC}_B \to \mathbf{SC}_A,$$

构成一个伴随函子五元列

$$f^{!!} \dashv f^{*!} \dashv f^{**} \dashv f^{*} \dashv f \ .$$

我们详细研究这些函子，并据此在有限集上的单纯复形上给出三种范畴结构，使得斯坦利–赖斯纳对应到交换单项式环后产生对偶。

Introduction

集合 A 上的一个（组合）单纯复形 X 是 A 的若干子集构成的一个族，满足：若 $F \in X$ 且 $G \subseteq F$，则 $G \in X$。令 $\mathbf{SC}_A$ 表示 A 上单纯复形按包含关系排序构成的偏序集。给定一个函数 $f\colon A \to B$，存在函子（保序映射）

$$f^{!!}, f^{**}, f \ : \mathbf{SC}_A \to \mathbf{SC}_B, \quad f^{!*}, f^{\,*} : \mathbf{SC}_B \to \mathbf{SC}_A,$$

使它们构成一列五个伴随函子

$$f^{!!} \dashv f^{*!} \dashv f^{**} \dashv f^{*} \dashv f \ .$$

我们研究这些函子及其如何变换单纯复形。具体而言，我们详细考察 f 单射和 f 满射的情形。

设 k 为一个交换环（通常是域），$k[x_A]$为以 $x_a, a \in A$ 为变量的多项式环。对于有限集 A 上的单纯复形 X，与之相应的是面环 或 ***Stanley-Reisner*** 环 $k[x_A]/I_X$，其中 $I_X \subseteq k[x_A]$是由单项式 $\prod_{i\in N} x_i$ 生成的理想，$N \subseteq A$ 遍历所有不属于 X的子集。

日期：2026年3月9日。2020 年 数学主题分类。主要分类：13F55、18B35；次要分类：05E45。关键词和短语。单纯复形、Stanley-Reisner 对应、伴随、范畴。

自 20 世纪 70 年代中期引入以来，Stanley-Reisner 环已得到广泛研究，参见标准教科书 [7, 10, 17, 18]。Cohen-Macaulay 单纯复形和 Gorenstein单纯复形这两个重要概念是通过它们的 Stanley-Reisner 环定义的。这一对应关系的重要成果包括 R. Stanley 于 1975年证明了单纯球面的上界猜想[15], ，以及几年后对单纯多胞体的 f-向量的刻画 [2, 16]。

通常，数学中几何与代数之间的对应具有函子性。Stanley-Reisner 对应也是如此。但这一点鲜少受到关注（如果曾受关注的话），或许是由于某种不自然性：环态射并不保多重分次。利用上述函子，我们在有限集上的单纯复形上给出两种新的范畴结构，并在 Stanley-Reisner 环上定义三种范畴结构。我们在单纯复形范畴与 Stanley-Reisner 环范畴之间得到了三种对偶。其中引入的两种新对偶保持多重分次，因为环同态将齐次元素映射为齐次元素。

让我们提及近期的另一个研究方向： [4], 从更具原则性的框架研究单纯复形与 Stanley-Reisner理论。这一方向涉及代数几何与层论。具体而言，有限n集的子集集合被视为“单元素域”上的仿射概形 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 。这一方向的早期成果之一是 [19]。

本文的组织结构如下。第1节介绍偏序集、伽罗瓦对应和伴随函子的预备知识。第2节详述单纯复形的概念，并建立伴随函子的五项序列。第3节给出这些函子的明确描述。第4节在单纯复形上定义两种新的范畴结构，使 Stanley-Reisner 对应具有函子性。

第5节展示这些函子如何与亚历山大对偶性相互作用。简短的第6节回顾了单纯复形的一些术语。第7节进一步详述当 $f\colon A \to B$ 是单射时这些函子的性质，第8节则对 $f\colon A \to B$ 是满射的情形作同样的讨论。在最后的第9节中，我们使用这些函子来定义若干单纯复形的乘积 X，Y在不相交的集合A上，以及 B。

注。 假定单纯复形定义在任意集合上，通常记作 A 或 B。但在涉及多项式环 $k[x_A]$ 或 $k[y_B]$的陈述中，我们总是假定 A 和 B 是有限的。

1. Preliminaries on posets

偏序集可以导出分配格，我们在此回顾这一点。我们还将看到，偏序集 $f\colon P \to Q$之间的保序态射如何导出其对应分配格之间的三个伴随函子 $f_! \dashv f^* \dashv f$

1.1. 伽罗瓦对应与极小元和极大元。 给定偏序集 P, Q。回顾一下，它们之间的伽罗瓦对应是两个保序映射 $P \rightleftarrows Q$ ，满足 $F(p) \leq q$ 当且仅当 $p \leq G(q)$。以下结论显然成立：

L引理 1.1。 给定这样一个伽罗瓦对应。令 $p_0 \in P$ 和 $q_0 \in Q$。

a. 满足 $F(p) \leq q_0$ 的唯一最大 $p \in P$ 是 $p = G(q_0)$。b. 满足 $G(q) \geq p_0$ 的唯一最小 $q \in Q$ 是 $q = F(p_0)$。

伽罗瓦对应是范畴之间伴随这一更一般概念的特例。我们将使用伴随术语，而不使用伽罗瓦对应。

1.2. 偏序集中的割格。 对于偏序集 P, Q，用 $\mathrm{Hom}(P, Q)$ 表示它们之间的保序映射的集合。若对每个 $p \in P$, $\phi(p) \leq \psi\, p(p)$，则该集合本身构成一个偏序集。记 $\mathbf{2} := \{0 < 1\}$。

偏序集中的一个下集 D 是 P 的子集 P，满足：若有 $q \in D$ 和 $p \leq q$，则有 $p \in D$。对于偏序集 P，记 P_{op} 为其对偶偏序集，其序关系为 $p \leq_{\mathrm{op}} q$，当且仅当 $p \geq q$。 P的下集格可表示为 $\mathrm{Hom}(P^{\mathrm{op}}, \mathbf{2})$。一个下集$D$ 给出一个映射

$$\phi : P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{2}, \quad \phi(p) = \begin{cases} 1, & p \in D \\ 0, & p \notin D \end{cases}.$$

ˆ 简便起见，将 P记为保序映射的集合 $\mathrm{Hom}(P^{\mathrm{op}}, \mathbf{2})$，我们也同样将其识别为 P的下集。它是与 P相关联的分配格。（伯克霍夫表示定理表明，任意分配格都具有这种形式， [3]。）

如果 D 是一个下集，那么 P 中 D 的补集 U 是一个上集。我们可以ˆ 将 P 的元素视为割 (D, U)。根据我们所关注的部分，有时将其写作$(D, –)$或$(–, U)$。

给定一个保序映射 $f\colon P \to Q$。这诱导出一个保序映射

$$f^* : \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{op}}, \mathbf{2}) \to \mathrm{Hom}(P^{\mathrm{op}}, \mathbf{2}), \text{ or for short } f^* : \hat{Q} \to \hat{P},$$

将 Q 的割（D, U）映射为 P 的割（$f^{-1}(D)$ $f^{-1}(U)$）。该映射 f^* 既有左伴随，也有右伴随

$$f^!, f\ : \hat{P} \to \hat{Q}, \quad f^! \dashv f^* \dashv f\ ,$$

下面我们对此作出解释。对于偏序集 P 的子集 S，用 $S^{\downarrow}$ 表示由 S 生成的 P 的下集，因此

$$S^{\downarrow} = \{p \in P \,|\, p \leq s \text{ for some } s \in S\}.$$

类似地，我们有 $S^{\uparrow}$，即由 S 生成的上集。于是伴随为

$$f^!(D,U) = (f(D)^{\downarrow}, -), \quad f\ (D,U) = (-, f(U)^{\uparrow}).$$

例 1.2。设 A 是一组苹果，B 是一些桶。函数 $f: A \to B$ 将苹果放进桶里。那么：

- $f^*: \hat{B} \to \hat{A}$ 将一组桶 $C \subseteq B$ 映射到这些桶中所含苹果的集合 $f^{-1}(C) \subseteq A$。
- $f_! : \hat{A} \to \hat{B}$ 将一组苹果的子集 $D \subseteq A$ 映射到那些包含 D 中至少一个元素的桶（“存在一个 D 苹果”的桶）。
- $f: A \to B$ 将子集 D 映射到仅包含来自 D 的苹果的桶（“所有 D 苹果”的桶）

给定集合映射 $f: A \to B$ 和 $D \subseteq A$，D 的 f-核 是满足 $f^{-1}(C) \subseteq D$ 的最大 $C \subseteq B$。我们将此 C 记作核$_f(D)$。注意，核$_f(D)$是所有满足完整纤维 $f^{-1}(b)$包含于 D的 b 所组成的集合。特别是，若 $E = B \backslash f(A)$，则 E包含于每个核$_f(D)$中。对于 $(D, U) \in A$，我们观察到：

- $f_!(D, U) =$(核$_f(D)$, $f(D)$),
- $f(D, U) =$(核$_f(D)$ $f(U)$).

当同时存在左伴随与右伴随时，我们由引理 1.1 得到关于纤维的如下结论。

推论 1.3. 给定偏序集的伴随 $f_! \dashv f^* \dashv f$：

$$f^!, f\ : P \to Q, \quad f^* : Q \to P.$$

假设 $f^*(q) = p$，则取值为 p 的此类 q，恰好是区间$f^!(p) \le q \le f\,(p)$ 中的那些（注意该区间可能为空）。

证明。若 $f^*(q) = p$，由引理 1.1 $f^!(p) \le q \le f(p)$。此外

$$p \le f^* \circ f^!(p) \le f^*(q) \le f^* \circ f\ (p) \le p,$$

因此全部给出值 p。 □

1.3. **一般设定**。在继续之前，我们说明这如何纳入一个非常一般的设定。对于范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$，用 $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的函子。它本身成为一个范畴，其中函子 F与 G之间的态射是自然变换 $F \Rightarrow G$。用**Set**表示集合范畴。$\mathcal{C}$ 上的预层范畴以函子 $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ 为对象。给定函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，设 $\mathcal{Z}$ 为另一个范畴。这诱导一个函子

$$F^* : \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{Z}).$$

我们可以问，这个函子是否有左伴随或右伴随。在这种情形下，伴随称为 Kan 延拓。我们有如下 [13, 推论 6.26]。

命题 1.4. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是小范畴，且 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子。如果 $\mathcal{Z}$ 完备且余完备（即具有所有极限和余极限），那么 $F^*:(\mathcal{D}^{op},\mathcal{Z})\to(\mathcal{C}^{op},\mathcal{Z})$ 有一个左伴随 $F_!$ 和一个右伴随 F。

注意，**Set** 是完备且余完备的。我们将在富集范畴的框架下应用这一点，[9] 或 [6, 第 4 节。4], 此时用范畴**2**替代**Set**。于是，偏序集 P是一个**2**-范畴，因为如果 $p,q\in P$，那么 **Hom**(p,q) 是**2**中的一个对象：当 $p\le q$ 时，这个 **Hom** 集为 **1**；如果没有 $p\le q$，则为 **0**。一般而言，在富集范畴 $\mathcal{C}$中，用一个对称幺半闭范畴 $\mathcal{M}$ 替代**Set**，使得对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 P,Q ，态射 **Hom**(P,Q) 是 $\mathcal{M}$中的一个对象。

2. Simplicial complexes and the five-sequence of adjoints

我们建立集合上的（组合）单纯复形的概念框架，并给出伴随函子五元列。

2.1. 单纯复形。 对于集合 A ，令 $P(A)$表示 A的幂集，即 A的所有子集构成的集合。这是一个按子集包含关系排序的（布尔）格。 A 上的（组合）单纯复形是 X 的一个子集族，满足：如果 $F\in X$ 且 $G\subseteq F$，那么 $G\in X$。这样的 X 恰好是 $P(A)$中对取更小子集运算封闭的子集族，或称 $P(A)$的一个下集。关于组合单纯复形的基础知识，请参阅 [7, 10, 17]。

幂集 $P(A)$ 可视为映射（集合函数） $\phi:A\to\mathbf{2}$。子集 $D\subseteq A$ 对应于函数

$$\phi:A\to\mathbf{2},\quad \phi(a)=\begin{cases}1, & a\in D\\ 0, & a\notin D\end{cases}.$$

因此，子集 $D\subseteq A$ 对应于

$$\hat{A}=\mathrm{Hom}(A^{\mathrm{op}},\mathbf{2})=\mathrm{Hom}(A,\mathbf{2}).$$

按照第 1.2 小节中的构造进行迭代，对于偏序集 P:

$$\hat{\hat{P}}=\mathrm{Hom}((\hat{P})^{\mathrm{op}},\mathbf{2})=\mathrm{Hom}(\widehat{P^{\mathrm{op}}},\mathbf{2}).$$

ˆ 这里的一个元素是一个割 $(\mathcal{D},\mathcal{U})$，其中 $\mathcal{D}$是 P的下集，而 $\mathcal{U}$是其补上集。 A上的一个单纯复形 X 对应于 A中的一个下集。它们又恰好对应于保序映射（D 是 A的子集）

$$\Psi:(\hat{A})^{\mathrm{op}}\to\mathbf{2},\quad \phi(D)=\begin{cases}1, & D\in X\\ 0, & D\notin X\end{cases}.$$

ˆˆ ˆ 因此，单纯复形恰好对应于 $A=$ **Hom**$((A)^{\mathrm{op}},$ **2**$)$ 的元素。

^^ A 中的一个元素是一个割（$\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$），其中 $\mathcal{D}$ 是布尔格 ^A 中的一个下集，而该布尔格可识别为 $P(A)$，即 A 的子集所成的布尔格。因此，^^ A 的元素可识别为一个单纯复形 X。具体而言，情况如下： $\mathcal{D}$ 的元素是割（D, U）。于是， X 的元素就是 A 的子集 D。^^今后，我们将用 A 表示单纯复形 $\mathbf{SC}_A$。为便于使用，尤其是在第9节中，我们将准备一整套术语:

1. 当 $(D,U) \in \mathcal{D}$时，则 D 是 X的面 ，且 U 是 X的面补集。2. 当 $(D,U) \in \mathcal{U}$ 时，则 D 是 X 的非面 ，且 U 是 X 的非面补集。

一个面的维数是 D 是 $|D|-1$。 X 的维数是一个面的最大维数。

2.2. **伴随函子五元列**。 现在考虑偏序集的保序映射$f : P \to Q$ 。由命题 1.4，我们得到左伴随与右伴随

$$f^!, f \ : \hat{P} \rightleftarrows \hat{Q} : f^*. \tag{1}$$

^ ^^ ^ 我们可以重复这一过程，从而得到 P 与 Q之间的进一步映射。若 $p, q \in \{!\ *, \}$将$(f^p)^q$记为 f^{pq}。(1) 中的每一个映射 f^p给出三个映射 $f^{p_!} f^{p*}$与f^p。总共得到九个这样的映射，如 $p = !\ *,$，但它们并非全都互不相同。

命题2.1。 设 $f : P \to Q$ 是偏序集之间的保序映射。那么

$$a.\ \ f^{!*} = f^{*!}, \quad b.\ \ f^{\ *} = f^*, \quad c.\ \ f^{**} = f^{\ !} = f^! .$$

因此我们有三个不同的函子

$$f^{!!}, f^{**}, f \ : \hat{\hat{P}} \to \hat{\hat{Q}},$$

以及两个不同的函子

$$f^{!*}, f^{\ *} : \hat{\hat{Q}} \to \hat{\hat{P}}.$$

证明。 a. 我们有 $f_! \dashv f^*$。由 [13, 命题4.4.6] $f_{!^*} \dashv f^{**}$。由于 $f^{*!} \dashv f^{**}$，根据伴随的唯一性， [13, 命题4.4.1], 可得 $f^{*!} = f_{!*}$。b 部分类似。

c. 我们有 $f^* \dashv f_!$。再次由 [13, 命题4.4.6] $f^{**} \dashv f^{\ *}$。此外 $f_! \dashv f^{\ *}$。再次根据伴随的唯一性 $f_! = f^{**}$。类似地 $f_! = f^{**}$。□

注 2.2。这个关于偏序集的伴随函子五元列为范畴论学者所熟知。书中对其有明确的描述 [14, 节 6]。不过，据我们所知，至少从单纯复形的视角来看，尚无人对这个伴随函子五元列进行过详细研究，而这正是我们现在要做的。

推论 2.3。对于集合的映射 $f : A \to B$，我们得到一个伴随函子五元列

$$f^{!!} \dashv f^{*!} \dashv f^{**} \dashv f^{*} \dashv f \ ,$$

它们是定义在 A 和 B 上的单纯复形之间的函子:

$$f^{!!}, f^{**}, f \quad : \quad \hat{\hat{A}} \to \hat{\hat{B}} \tag{2}$$

$$f^{!*}, f^{*} \quad : \quad \hat{\hat{B}} \to \hat{\hat{A}}. \tag{3}$$

我们的主要目标是描述并研究这五个函子。

3. General statement and proofs

我们给出函子 (2) 和 (3) 的显式描述。首先注意到以下显然的结论:

引理 3.1. 给定一个函数 $f : \ A \to B$。设 X 是定义在 A 上的单纯复形，并固定 $C \subseteq B$。

a. 每个带有 $f(D) = C$ 的 $D \subseteq A$ 是 X 的非面，当且仅当 X 的任何面D 都不具有 $C \subseteq f(D)$。b. 每个带有 $C = $ 核$f(D)$ 的 $D \subseteq A$ 是 X 的面，当且仅当 X 的任何非面 D 都不具有 $C \geq$ 核$f(D)$。

证明。a 部分显然。至于 b 部分，对等式两边分别取否定后，该陈述即为：某个非面 D 具有 核f(*D*)，当且仅当某个非面 D 具有$C \geq$ 核f(*D*)，这显然成立。□

引理 3.2。给定一个函数 $f : \ A \to B$。设 Y 是定义在 B 上的单纯复形，并设 $D \subseteq A$。

a. $f(D)$ 是 Y 的一个面，当且仅当对于 Y 的某个面 C，有 $D \subseteq f^{-1}(C)$。b. 核$f(D)$ 是 Y 的一个非面，当且仅当对于 Y 的某个非面 C，有 $D \supseteq f^{-1}(C)$。

证明。两个陈述都是显然的。□

定理 3.3。给定一个函数 $f : A \to B$。

a. 映射 $f^{!*} : \hat{}B \to \hat{}A$ 将 $\hat{}B$ 中的 Y 发送到由 A 上的单纯复形 X，其面都是满足 $f(T)$ 是 Y的面的 $T \subseteq A$。这是使 $f^{!!}(X) \subseteq Y$ 的最大 X，也是使 $f^{**}(X) \supseteq Y$的最小 X。***b.*** 映射 $f^{*} : \ B \to A$ 将 B 中的 Y 发送到由 A 上的单纯复形 X，其面都是满足 $core_f(T)$ 是 Y的面的 $T \subseteq A$。这是使 $f^{**}(X) \subseteq Y$ 的最大 X，也是使 $f(X) \supseteq Y$的最小 X。

^^^^证明。设 X 在 A 中由（$\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$）给出，设 Y 在 B 中由（$\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$）给出。

a. 考虑 $f^*: \hat{}_B \to \hat{}A$。那么 $\mathcal{D} = f^{*!}(\mathcal{C})$ 由 $\hat{}_A$ 中满足以下条件的那些 (D, U) 构成：存在某个 (C, V)，使得 $\in \mathcal{C}$，于是 $f^*(C) \supseteq D$，也就是说 $f^{-1}(C) \supseteq D$。根据引理 3.2a，X 由满足 $f(D)$ 是 Y 的一个面的那些 D 构成。

^^^ b. 考虑 f^*: $B \to A$。那么 $\mathcal{U} = f^*(\mathcal{V})$ 由 A 中满足以下条件的那些 (D, U) 构成：存在某个 (C, V)，使得 $\in \mathcal{V}$，于是 $f^*(C) \subseteq D$，也就是说，对于某个非面 C，$f^{-1}(C) \subseteq D$。

根据引理 3.2b，X 的非面由满足核$f(D)$ 是 Y 的一个非面的那些 D 构成。于是，X 的面就是满足核 $f(D)$ 是 Y 的一个面的那些 D。

关于最小和最大的陈述可由引理 1.1 得出。 □

定理 3.4。给定一个函数 f： $A \to B$。

^^ *a.* $f!!: \hat{}_A \to \hat{}B$将 X映射到由 $f(D)$ 生成的 A上的 Y，其中 $\hat{}D \in X$。它是满足 $f^{*!}(Y) \supseteq X$ 的 $\hat{}B$ 中最小的 Y。 ^^ *b.* $f^{**}: \hat{}_A \to \hat{}B$将 X映射到由满足 $f^{-1}(C) \in X$ 的 $C \subseteq B$ 构成的 Y。或者，它的面是 X 中面 D 的核$f(D)$。它是满足 $f^{*!}(Y) \subseteq X$ 的 B 上最大的Y，也是满足 $f^*(Y) \supseteq X$ 的最小 Y。 ^^^^ *c.* f： $A \to B$ 将 X 映射到由所有满足以下条件的 $C \subseteq B$ 构成的 Y：每个满足核$f(D) = C$ 的 $D \subseteq A$ 都属于 X。它是满足$f^*(Y) \subseteq X$ 的 B 上最大的 Y。

^^^^证明。同样，X由 A中的$(\mathcal{D}, \mathcal{U})$给出，而 Y由 B中的$(\mathcal{C}, \mathcal{V})$给出。

a. 考虑 $f^!$： $\hat{}_A \to \hat{}B$。则 Y由 $\mathcal{C}$中那些使得对某个$(D, -) \in \mathcal{D}$有$f(D) \supseteq C$的$(C, -)$组成。

^^ b. 考虑 f^*： $B \to A$。则当$(f^*(C) -)$属于 $\mathcal{D}$时，$(C, -) \in \mathcal{C}$。这些是使得 $f^{-1}(C) \in X$的 $C \subseteq B$。

^^ c. 考虑f： $A \to B$。则 $\mathcal{V}$由那些使得对某个$(D, U) \in \mathcal{U}$有$(C, V) \geq f(D, U) =$ (核$f(D)$ $f(U)$)的(C, V)组成。等价地，对 $\mathcal{U}$中的某个$(D, -)$有 $C \geq$核$f(D)$。

那么，$\mathcal{C}$由满足以下条件的（C, V）组成：对任意非面 D，均有 $C \geq$核$f(D)$。引理 3.1b 表明，Y由满足以下条件的那些 C组成：每个满足 核$f(D) = C$ 的 D 都是 X 的面。□

4. Functoriality of Stanley-Reisner correspondence

对于组合单纯复形 X，有一个与之对应的环，即其 Stanley-Reisner 环。这是组合交换代数中的核心对象。在数学中，几何与代数之间自然且富有成果的对应关系通常具有函子性。Stanley-Reisner 对应

也具有函子性。但或许由于某种不自然性（代数上的态射不保多重分次），这一点几乎未受关注。

如今我们拥有了更丰富的单纯复形之间的映射工具，因此可以定义单纯复形与环之间的三种函子性对应，从而得到对偶。事实上，这三种对应中的两种确实保留多重分次。

4.1. **Stanley-Reisner 环**。 对于有限集 A，令 $k[x_A]$为变量为 x_a （$a \in A$）的多项式环。若 $E \subseteq A$，记 $x_E^\bullet$ 为单项式 $\prod_{e\in E} x_e$（称为平方自由单项式，因为它是互不相同的变量的乘积）。

当 X 是有限集 A上的单纯复形时， X 的*Stanley-Reisner* 理想I_X 是 $k[x_A]$中的理想，由满足 E 不在X中的单项式 $x_E^\bullet$ 生成。$Stanley\text{-}Reisner$ 环为 $k[X] := k[x_A]/I_X$。平方自由单项式$x_E^\bullet$ 在 $k[x_A]/I_X$ 中非零，当且仅当 $E \in X$。注意，环 $k[X]$将是$\mathbb{Z}^A$-分次的。

4.2. **单纯复形范畴**。 单纯复形可以构成一个范畴。给定定义在 A 上的单纯复形 X 和定义在 B 上的单纯复形 Y （A, B 不一定是有限的），从 X 到 Y 的态射的传统定义是一个函数 f: $A \to B$，满足对于 X的每个面 F，其像 $f(F)$是Y的一个面。用这里的记号来说，这意味着从 X 到 Y 的态射是一个函数f: $A \to B$，使得 $f^{!!}(X) \subseteq Y$。将这个范畴记作$\mathbf{SC_0}$。

我们还将介绍另外两种使单纯复形构成范畴的方法。

命题4.1。 设 $f: A \to B$ 是一个集合函数， X 和 Y 分别是定义在 A和 B上的单纯复形。

a. 若 $Y = f^{**}(X)$，则映射 f（或者准确地说， $f^!$）将 X的非面映为 Y的非面。b. 若$X = f^*(Y)$，则 f^{-1}（或者准确地说， f^*）将 Y的非面映为 X的非面。

证明。 对于 a 部分，设 N是 X的一个非面。若 $f(N)$ 是 Y的一个面，它就必定是某个面 F 的核，而该面属于 X。但这与 N 是一个非面相矛盾。

对于 b 部分，设 $\mathcal{N}$ 是对应于$(\mathcal{V})$，因此个割的非面（ $\mathcal{V}$的元素）映射为 X的非面。□

除了 $\mathbf{SC_0}$，之外，我们现在还定义了另外两个单纯复形范畴。

定义 4.2. 范畴$\mathbf{SC_1}$ 与$\mathbf{SC_2}$ 以有限集上的单纯复形为对象。设 X 为集合 A 上的单纯复形， Y 为集合 B上的单纯复形。

态射 $F:\ X \to Y$ 在$\mathbf{SC_1}$ 中是一个集合映射 $f:\ A \to B$，使得$f^{**}(X) \subseteq Y$，或等价地（由于伴随 $f^{**} \dashv f^*$） $X \subseteq f^*(Y)$。

态射 $G:\ X \to Y$ 属于 $\mathbf{SC_2}$，是一个集合映射 $g:\ B \to A$，满足 $X \subseteq g^{**}(Y)$；或者等价地（由伴随 $g^{*!} \dashv g^{**}$ 得出） $g^{*!}(X) \subseteq Y$。

更明确地说，态射 $F: X \to Y$ 属于 $\mathbf{SC_1}$，是一个映射 $f: A \to B$，满足:

- 如果 $C \subseteq B$ 且 $f^{-1}(C)$ 是 X 的一个面，那么 C 是 Y 的一个面。

如果我们将 $f:\ A \to B$ 看作是把 A 的顶点划分为颜色类 A_b（每种颜色 $b \in B$ 对应一个颜色类），那么，当且仅当颜色类的某个并集 $A_{b_1} \cup \cdots \cup A_{b_m}$ 是 X 的一个面时，$\{b_1, \ldots, b_m\}$ 是 Y 的一个面，这样的划分才给出一个态射。

另一方面，由 $g:\ B \to A$ 给出的态射 $G\colon X \to Y$ in $\mathbf{SC_2}$ 满足:

- 若 $D \subseteq A$ and A 是 X 的一个面，则 $g^{-1}(A)$ 是 Y 的一个面。

我们可以把 g 理解为将每个顶点 a “膨胀”为一个集合 B_a。若对于 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 是 X 的一个面，膨胀后的 $B_{a_1} \cup \cdots \cup B_{a_n}$ 是 Y 的一个面，则这就给出了一个态射。

例 4.3。设 X 是定义在 A 上的离散单纯复形，因此每个顶点 a 都是一个极大面 $\{a\}$。那么，态射 $G: X \to Y$ in $\mathbf{SC_2}$ 等价于给出一个 Y 中以 A 为指标的匹配，也就是说，给出一个划分 $B = \cup_{a \in A} B_a$，使得每个 B_a 都是 Y 的一个面。

例 4.4。设 $Y = \{\emptyset\}$。那么，态射 $X \to Y$ in $\mathbf{SC_1}$ 等价于给出一个划分 $A = \cup_{b \in A} A_b$，使得没有任何单色集 A_b 是 X 的一个面。更多细节见例 8.5。特别地，存在许多态射 $f: X \to Y$ in $\mathbf{SC_1}$，使得 X 非空且 $Y = \{\emptyset\}$。因此，$\mathbf{SC_1}$ 中的态射没有直接的几何解释。

4.3. 环的范畴。 固定一个交换环 k。我们定义三个环的范畴

$$\mathbf{sqfRing}_k^0, \quad \mathbf{sqfRing}_k^1, \quad \mathbf{sqfRing}_k^2.$$

这些范畴具有相同的对象：多项式环的商环$k[x_A]/I$，其中 A 是有限集，I 是平方自由单项式理想。因此，I 的每个生成元都是平方自由单项式 $x_E^{\bullet}$，其中 $E \subseteq A$。这是一个k-代数范畴，但对象还带有额外的数据，即变量集。这些范畴的区别在于它们的态射:

在每个范畴中，态射都是一个 k-代数态射 $k[y_B]/I_2 \to k[x_A]/I_1$，它由一个多项式环的 k-代数同态诱导（这是数据的一部分）： $\phi\colon k[y_B] \to k[x_A]$。同态 ϕ 具有以下形式:

•在 $\mathbf{sqfRing}_k^2$ 中，它将每个变量 y_b 映射到某个变量 x_a。因此，这个态射伴随一个集合映射 $g\colon B \to A$，且 $a = g(b)$。
• 在 $\mathbf{sqfRing}_k^1$ 中，它将每个平方自由单项式 $y_C^\bullet$（其中 $C \subseteq B$）映到一个平方自由单项式 $x_D^\bullet$（其中 $D \subseteq A$）。容易看出，这样的态射来自一个集合映射 $f\colon A \to B$，并且每个变量 y_b 被映到 $x_{A_b}^\bullet$（注意，若 b 不在 f 的像中，则 $y_b \mapsto 1$）。

• 在 $\mathbf{sqfRing}_k^0$ 中，它将每个变量 y_b 映到变量之和 $x_{a_1} + x_{a_2} + \cdots + x_{a_r}$ 其中这些集合 $A_b = \{a_1, \ldots, a_r\}$ 对于不同的 b 互不相交。同样，这样的态射来自一个映射 $f\colon A \to B$，并且变量 y_b 被映到 $\sum_{a\in A_b} x_a$（注意，若 b 不在 f 的像中，则 $y_b \mapsto 0$）。

注意，在最后一个范畴 $\mathbf{sqfRing}_k^0$ 中，映射并不对应于多重分次 $\mathbb{Z}^B \to \mathbb{Z}^A$ 的同态，因为两个或更多变量的和不是齐次的。然而，另外两个范畴中的态射确实会将齐次元素映射为齐次元素。

4.4. 从单纯复形到交换环的函子。现在令 $\mathbf{sc_1}$ 为 $\mathbf{SC_1}$ 的子范畴，由定义在有限集上的单纯复形 X 构成。类似地，我们有 $\mathbf{sc_0}$ 和 $\mathbf{sc_2}$。我们定义一个函子：$\mathbf{sc_1}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sqfRing}_k^1$（op 表示该函子是逆变的），将单纯复形映射为其 Stanley-Reisner 环。若 $F\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{sc_1}$ 中的一个态射，令 $X \subseteq X' = f^*(Y)$。于是我们得到一个 $\mathbf{k}$-代数同态：

$$\mathbf{k}[y_B]/I_Y \to \mathbf{k}[x_A]/I_{X'} \to \mathbf{k}[x_A]/I_X.$$

上面的第二个映射源于 X 是 X' 的子复形。第一个映射将变量 y_b 映射为 $x_{A_b}^\bullet$。根据命题 4.1b，它是良定义的。

我们定义一个函子：$\mathbf{sc_2}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sqfRing}_k^2$，将单纯复形映射到其 Stanley-Reisner 环。若 $G\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{sc_2}$ 中的一个态射，令 $X \subseteq X' = g^{**}(Y)$。于是我们得到 Stanley-Reisner 环之间的映射：

$$\mathbf{k}[y_B]/I_Y \to \mathbf{k}[x_A]/I_{X'} \to \mathbf{k}[x_A]/I_X.$$

第二个映射来自包含 $X \subseteq X'$。第一个映射将变量 y_b 映射为 $x_{f(b)}$。根据命题 4.1a.，该映射定义良好（应用时交换 X 和 Y）。

我们定义一个函子：$\mathbf{sc_0}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sqfRing}_k^0$，将单纯复形映射到其 Stanley-Reisner 环。若 $F\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{sc_0}$ 中的一个态射，令 $X \subseteq X' = f^{*!}(Y)$。于是我们得到 Stanley-Reisner 环之间的映射：

$$\mathbf{k}[y_B]/I_Y \to \mathbf{k}[x_A]/I_{X'} \to \mathbf{k}[x_A]/I_X.$$

第二个映射来自包含 $X \subseteq X'$。第一个映射将变量 y_b 映射为总和 $\sum_{a\in A_b} x_a$。这是良定义的，因为如果 N 是一个非面

Y 的，那么无论如何选择 $n \in N$ 的 $a_n \in A_n$，集合 $E = \{a_n \,|\, n \in N\}$ 都是 X 的一个非面（它不可能是一个面，因为对 X 的每个面 E， $f(E)$ 都是 Y 的一个面）。

定理 4.5。 *Stanley-Reisner* 对应给出了对偶

$$\mathbf{sc_0}^{op} \xrightarrow{\cong} \mathbf{sqfRing}_k^0, \quad \mathbf{sc_1}^{op} \xrightarrow{\cong} \mathbf{sqfRing}_k^1, \quad \mathbf{sc_2}^{op} \xrightarrow{\cong} \mathbf{sqfRing}_k^2$$

证明。函子性：给定 $\mathbf{sc_1}$:

$$X \xrightarrow{F_1} Y \xrightarrow{F_2} Z, \quad A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C.$$

Stanley-Reisner 环上的映射为

$$k[z_C]/I_Z \to k[y_B]/I_Y \to k[x_A]/I_X, \quad z_c \mapsto y^{\bullet}_{B_c} \mapsto \prod_{b \in B_c} x^{\bullet}_{A_b}.$$

但后者是 $x^{\bullet}_{A_c}$ 关于复合 $A \xrightarrow{f_2 \circ f_1} C$。

给定 $\mathbf{sc_2}$ 中的态射：

$$X \xrightarrow{G_1} Y \xrightarrow{G_2} Z, \quad A \xleftarrow{g_2} B \xleftarrow{g_1} C.$$

Stanley-Reisner 环上的映射为

$$k[z_C]/I_Z \to k[y_B]/I_Y \to k[x_A]/I_X, \quad z_c \mapsto y_{g_1(c)} \mapsto x_{g_2 \circ g_1(c)},$$

这表明了函子性。$\mathbf{sc_0}$情形中的复合与第一种情形类似。

对偶性：设 $\phi : \ k[x_B]/I_2 \to k[x_A]/I_1$ 是$\mathbf{sqfRing}_k$范畴之一中的同态，并设 I_2 与 I_1 分别对应于单纯复形Y 与 X 。

设 $\phi \in \mathbf{sqfRing}_k^1$。若 $C \subseteq B$ 是 Y的非面，由于 ϕ 是同态，则$f^{-1}(C)$为非面。但若 $C \subseteq B$ 使得 $f^{-1}(C)$是一个面，则 C必为 Y的面。因此 $f^{**}(X) \subseteq Y$，并且我们在$\mathbf{sc_1}$中得到一个态射。

若 $\phi \in \mathbf{sqfRing}_k^2$，则当 $C \subseteq B$ 是 Y的非面时， $g(C)$是X的非面。若 $D \subseteq A$ 是 X的面，则 $C = g^{-1}(D)$必为面，否则$g(C) \subseteq D$ 为非面。因此我们得到$\mathbf{sc_2}$中的态射 G: $X \to Y$。

现在设 $\phi \in \mathbf{sqfRing}_k^0$。设 $D \subseteq A$ 是一个面，且 $C = f(D) \subseteq B$。则存在 $f_{|D}: \ D \to C$ 的一个截面 $s: \ C \to D$。因此 $s(C) \subseteq D$，从而 $s(C)$ 是面。若 C 是非面，则对每个截面 s， $x^{\bullet}_{s(C)}$ 都是 $\phi(x^{\bullet}_C)$ 中的一项，从而 $s(C)$ 将是非面，导致矛盾。因此 $C = f(D)$ 是一个面，并且我们在 $\mathbf{sc_0}$ 中有一个态射 $F: X \to Y$。□

5. Alexander duality

本节对后面的陈述并非必需，但会在某些论证中被简要使用。不过，亚历山大对偶性是单纯复形的一种基本对偶性，我们证明它与所研究的函子配合良好。

5.1. 偏序集的亚历山大对偶。 对于偏序集 P，存在一个同构

$$(\hat{P})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\tau_P} \widehat{(P^{\mathrm{op}})}, \quad (D,U)^{\mathrm{op}} \mapsto (U^{\mathrm{op}}, D^{\mathrm{op}}). \tag{4}$$

这会诱导一个反序映射

$$\hat{P} \xrightarrow{\mathrm{ad}_P} \widehat{P^{\mathrm{op}}}, \quad (D,U) \mapsto (U^{\mathrm{op}}, D^{\mathrm{op}})$$

称为亚历山大对偶性（针对偏序集）。

给定一个保序映射 $f\colon P \to Q$，我们有 $f^{\mathrm{op}}\colon P_{\mathrm{op}} \to Q^{\mathrm{op}}$。不难验证，我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc} \hat{P} & \xrightarrow{f^!} & \hat{Q} \\ {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ad}} \\ \widehat{P^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{(f^{\mathrm{op}})} & \widehat{Q^{\mathrm{op}}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{Q} & \xrightarrow{f^*} & \hat{P} \\ {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ad}} \\ \widehat{Q^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{(f^{\mathrm{op}})^*} & \widehat{P^{\mathrm{op}}} \end{array} \tag{5}$$

5.2. 单纯复形的亚历山大对偶。当偏序集 P 只是一个集合 A时，存在一个自然同构 $A^{\mathrm{op}} \xrightarrow{=} A$，由 $a^{\mathrm{op}} \mapsto a$给出。因此，我们得到一个反序复合映射

$$\hat{A} \xrightarrow{\mathrm{ad}_A} \widehat{A^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\iota_A} \hat{A}, \quad (D,U) \mapsto (U^{\mathrm{op}}, D^{\mathrm{op}}) \mapsto (U,D).$$

ˆ 对于 A 中的一个元素 (D,U)，记作：

$$(D,U)^{\mathrm{op}} \in (\hat{A})^{\mathrm{op}}, \quad (D,U)^{\tilde{\mathrm{op}}} := (U^{\mathrm{op}}, D^{\mathrm{op}}) \in \widehat{A^{\mathrm{op}}}, \quad (D,U)^t := (U,D) \in \hat{A}.$$

对于子集 $\mathcal{S} \subseteq \hat{}A$，对其中的每个元素应用这些运算，就得到子集 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}}$，$\mathcal{S}^{\tilde{}}$运算$\mathcal{S}^t$。现在我们得到以下反序复合，即单纯复形的亚历山大对偶：

$$AD : \hat{\hat{A}} \xrightarrow{\mathrm{ad}_{\hat{A}}} \widehat{(\hat{A})^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\hat{\tau}_A} \widehat{\widehat{(A^{\mathrm{op}})}} \xrightarrow{\hat{\iota}_A} \hat{\hat{A}},$$

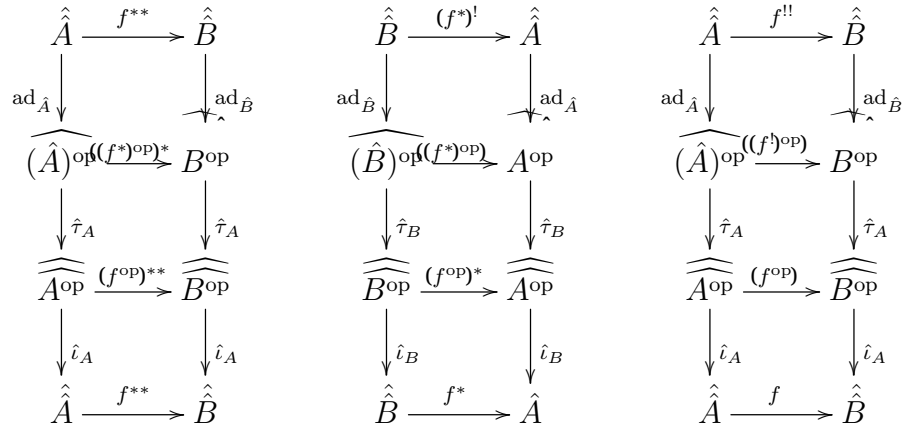
其中的映射为

$$(\mathcal{D},\mathcal{U}) \mapsto (\mathcal{U}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}}) \mapsto (\mathcal{U}^{\tilde{\mathrm{op}}}, \mathcal{D}^{\tilde{\mathrm{op}}}) \mapsto (\mathcal{U}^t, \mathcal{D}^t).$$

ˆˆ 给定集合函数 $f\colon A \to B$，我们有 $f^*\colon B \to A$，且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow[(f^{\mathrm{op}})^*]{} & \widehat{A^{\mathrm{op}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_B} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_A} \\ \hat{B} & \xrightarrow{f^*} & \hat{A} \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{A^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow[(f^{\mathrm{op}})^!]{} & \widehat{B^{\mathrm{op}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_A} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_B} \\ \hat{A} & \xrightarrow{f} & \hat{B} \end{array}. \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 得到交换图:



对于单纯复形 X，用 $X^\vee$ 表示其 Alexander 对偶。由上文可得:

命题 5.1. 若 X （分别为 Y）是定义在 A （分别为 B）上的单纯复形，则用 $X^\vee$ （分别为 $Y^\vee$）表示其 ***Alexander*** 对偶。那么:

$$f^{**}(X^\vee) = f^{**}(X)^\vee, \quad f^{!*}(Y^\vee) = f^*(Y)^\vee, \quad f^{!!}(X^\vee) = f\ (X)^\vee.$$

6. Terminology for simplicial complexes

我们回顾单纯复形的概念与术语。在接下来的章节中，这将帮助我们更深入地理解伴随函子。

1对应于单纯形 $\hat{\Delta}(A)$，它由 A 的所有子集组成。底元是空集 $\emptyset$，不包含 A 的任何子集。（注意，它被仅由 A 的一个子集 $\{\emptyset\}$ 构成的单纯复形唯一覆盖。）单纯形 $\Delta(A)$ 的边界记为 $\partial\Delta(A)$，由 A 的所有子集（除去全集 A）组成。（单纯形 $\Delta(A)$ 唯一覆盖这个边界。）

中的顶点

$\hat{}$ 对于对应于 A 的割（$\mathcal{D},\mathcal{U}$）的单纯复形 X， X 的极大元（即 $\mathcal{D}$ 中极大的割（D,U）中的 D）是 X 的**极大面**。对于 $\mathcal{U}$ 的极小元（D,U），D 通常称为 X 的**极小非面**。在本文中，为使术语和表述更简洁，我们将它们称为 X 的**余极大面**。注意，Stanley-Reisner 理想 I_X 的极小生成元恰好是 $x_N^\bullet$，其中 N 是 X 的余极大面。

对于定义在 A 上的单纯复形 X 和 $E \subseteq A$，限制 $X_{|E}$ 是定义在 E 上的单纯复形，由所有满足 $F \in X$ 的 $F \subseteq E$ 组成。链接$lk_E(X)$ 是定义在 $A\backslash E$ 上的单纯复形，由所有满足$F \cup E \in X$的 $F \subseteq A\backslash E$ 组成。特别地，如果 E 不属于 X，则链接为空集 $\emptyset$。

如果 Y 是定义在 B 上的单纯复形，且 B 与 A 不相交，那么连接 $X * Y$ 由所有满足 $F \in X$ 和 $G \in Y$ 的 $F \cup G$ 组成。锥锥$_B(X)$ 是连接$X * \Delta(B)$。

在接下来的两节中，我们将详细研究函子 (2) 和 (3)，以及 Stanley-Reisner 环随之发生的变化。因此 $f\colon\ A \to B$ 是一个函数。它可以分解为先满射、后单射。我们分别研究这两种情形。

7. Injections

我们将一个单射 $f\colon\ A \to B$ 与一个包含 $A \subseteq B$对应起来，并令 $E = B \backslash A$。对于定义在 A上的单纯复形 X，记其在 $k[x_A]$中的相关平方自由单项式理想为 I_X。类似地，对于定义在 B 上的 Y，记其在 $k[x_B]$中的理想为 I_Y。

7.1. 函子 $f^{!*}$ 和 f^*。

命题 7.1. 给定一个包含 $f\colon\ A \subseteq B$。

$\hat{}$ $\hat{}$a. 函子 $f^{*!}\colon {}\hat{}B \to {}\hat{}A$ 将 Y 映射到其限制 $X = Y_{|A}$。

$\hat{}$ $\hat{}\hat{}$ $\hat{}$b. 函子 $f^*\colon B \to A$ 将 Y 映射到链接 $X = lk_E Y$。

推论 7.2. 给定一个包含 $f\colon A \subseteq B$。

a. $X = f^{*!}(Y)$ 的 ***Stanley-Reisner*** 理想是 $I_X = I_Y \cap k[x_A]$。b. $X = f^*(Y)$ 的 ***Stanley-Reisner*** 理想是 $I_X = (I_Y\colon x_E) \cap k[x_A]$。

证明。这由定理 3.3 直接得出。对于 b.，注意 核$f(D) = D \cup E$对于 $D \subseteq A$。□

推论 *7.2* 的证明。a 部分直接由 Stanley-Reisner 理想的定义得出。

b. 单项式 $x_D^{\bullet}$ 属于 Stanley-Reisner 理想 I_X，意味着 D 不属于 $X = \mathrm{lk}_E(Y)$。等价地，$D \cup E$不属于 Y，因此 $x_D^{\bullet} \cdot x_E^{\bullet}$属于 I_Y。□

注 7.3. 限制和链接是单纯复形中非常重要的概念。Stanley-Reisner 环 $k[X]$ 作为 $k[x_A]$ 上的模的最小自由分解，其多重分次贝蒂数由限制的约化上同调 $\tilde{H}^i(X_{|A}, k)$ 给出。这是霍赫斯特的经典定理，也是 Stanley-Reisner 理论的奠基定理，[8]并见于所有基础教科书中 [7, 11, 10, 17]。这也可以用链接来表述，[7,推论 8.1.4]。特别地，X 是 Cohen-Macaulay 的概念（源自代数概念 $k[X]$ 是 Cohen-Macaulay 环）意味着，对于 i 小于 $\mathrm{lk}_E X$的维数的所有情形，链接的约化同调群 $H_i(\mathrm{lk}_E X, k)$ 均为零 [12]。

7.2. **函子** $f_!\, f^{**}, f_*$. 对于集合 E，我们考虑由 $e \in E$索引的变量 x_e。我们定义以下理想：

- $(x_E^+) = \sum_{e\in E}(x_e)$，由变量 x_e 生成的理想，
- $(x_E^\bullet) = \prod_{e\in E}(x_e)$，由单项式 $x_E^\bullet$ 生成的理想。

命题 7.4。 给定一个包含关系 $f : A \subseteq B$。

a. $f_!^! : \hat{\hat{A}} \to \hat{B}$ 将 X 映射到 Y，其中 X 被视为定义在 B 上而非 A 上的单纯复形。因此 $f_!^!(X)$由所有满足$C \subseteq A$ 且满足 $C \in X$的 $C \subseteq B$ 组成。

b. f^{**} : $A \to B$ 将 X 映射到 E 上 X 的锥，即 $Y = 锥_E(X)$，由所有满足 $C \cap A \in X$的 $C \subseteq B$ 组成。

c. f_* : $A \to B$ 将 X 映射到锥的并集 $cone_E(X) \cup cone_A(\partial\Delta(E))$，其中 $\partial\Delta(E)$ 是以 E 为顶点集的单纯形的边界。

The $k[x_B]$ 中 $f_!^!(X)$ $f^{**}(X)$ $f_*(X)$ 的 ***Stanley-Reisner*** 理想为：

$$(I_X) + (x_E^\bullet), \quad (I_X), \quad (I_X) \cdot (x_E^\bullet).$$

证明。 关于单纯复形的 a、b 和 c 三个陈述是定理 3.4 的推论。

至于关于 $Y = f_*(X)$的理想这一陈述，$\text{cone}_E(X)$的理想是(I_X)，$\text{cone}_A(\partial\Delta(E))$的理想是$(x_E^\bullet)$。因此，并集的理想是这两个理想的交集。□

在最简单的情形下，我们有如下结论。

推论 7.5。 假设 $E = B\backslash A = \{e\}$ 由一个元素构成。令$\Delta(A)$ 为 A上的满单纯形，则有：

$$f_!^!(X) = X, \quad f^{**}(X) = cone_{\{e\}}(X), \quad f_*(X) = cone_{\{e\}}(X) \cup \Delta(A).$$

注 7.6。 给定 X 属于 A。根据引理 1.3， B 中满足$f^{*!}(Y) = X$ 的元素 Y 位于以下范围

$$f_!^!(X) = X \text{ (considered on } B) \subseteq Y \subseteq f^{**}(X) = \text{cone}_E(X).$$

同样地，满足 $f^*(Y) = X$ 的 B 中的元素 Y 正是值域中的元素

$$f^{**}(X) = \text{cone}_E(X) \subseteq Y \subseteq f_*(X) = \text{cone}_E(X) \cup \text{cone}_A(\partial\Delta(E)).$$

8. Surjections

设 $f : A \to B$ 是一个满射。令 A_b 为 $b \in B$ 的原像。那么 $A = \coprod_b A_b$ 是 A 的一个划分。在本节中， X 是 A 上的一个单纯复形，而 Y 是 B 上的一个单纯复形。

8.1. 函子 $f^{!*}$ 和 f^*。 对于 $D \subseteq A$，回顾一下 核$f(D) \subseteq B$ 的概念。注意，给定

$$C = \{b_1, \dots, b_t\} \subseteq B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\},$$

使得 核$f(D) = C$ 恰好是连接的极大面的极大 D n

$$\Delta(\cup_1^t A_{b_i}) * \partial\Delta(A_{b_{t+1}}) * \cdots * \partial\Delta(A_{b_m}).$$

定义 8.1. 给定一个满射 $f : A \to B$。 A上的单纯复形 X 是下 f-复形，如果对于每个 $b \in B$ 和 X 的极大面 F， $F \cap A_b$ 要么是A_b，要么为空。等价地， X的每个极大面 F都是 f^{-1}(核f(F))。

如果每当 D 是X的一个面，且 $C =$核$f(D)$ 时，任何满足核$f(D') = C$的 $D' \subseteq A$都是 X的一个面，那么单纯复形 X 就是一个上 f-复形 。因此， X 同样由其核确定。

我们得到以下一一对应：

$$\text{upper } f\text{-complexes on } A \overset{1-1}{\leftrightarrow} \text{ simplicial complexes on } B$$
$$\overset{1-1}{\leftrightarrow} \text{ lower } f\text{-complexes on } A$$

对于 B 上的 Y，用 Y_f 表示对应的 A上的下 f-复形，用Y^f 表示对应的上 f-复形。注意， Y和 Y_f的极大面通过 $S \mapsto f^{-1}(S)$ 建立双射，而 Y 和 Y^f的余极大面通过$N \mapsto f^{-1}(N)$ 建立双射。

命题 8.2. 给定一个满射 $f : A \to B$。

ˆˆ ˆa. 映射 $f^{!*} : \hat{}B \to \hat{}A$ 将 $\hat{}B$ 中的 Y 映射为下方的 f-复形 $X = Y_f$。

ˆˆ ˆb. 映射 $f^* : \hat{}B \to \hat{}A$ 将 $\hat{}B$ 中的 Y 映射为上方的 f-复形 $X = Y^f$。

推论 8.3.

a. $k[x_A]$ 中 Y_f 的理想是由所有乘积理想 $\prod_{b\in C}(x^+_{A_b})$ （其中 $y^\bullet_C$ 属于 $I_Y \subseteq k[y_B]$）生成的理想。b. $k[x_A]$ 中 Y^f 的理想是由所有单项式 $x^\bullet_{f^{-1}(C)} = \prod_{b\in C} x^\bullet_{A_b}$ （对所有属于 $I_Y \subseteq k[y_B]$ 的 $y^\bullet_C$ ）生成的理想。

证明。关于单纯复形的陈述由定理 3.3 得出。

为证明关于理想的陈述，令 Y 对应于 $\mathcal{C}, \mathcal{V}$ 的割 ˆ B。 $D \subseteq A$ 不属于 Y^f 意味着，对于某个 $C \in \mathcal{V}$， $f^{-1}(C) \subseteq D$。但这意味着， $x^\bullet_D$ 属于 Y^f 的理想当且仅当它可被某个 $\prod_{b\in C} x^\bullet_{A_b}$ 整除，其中 $y^\bullet_C \in I_Y$。 □

注记 8.4。 对于 Stanley-Reisner 理想 I_Y，取一个变量 x_b，并将极小生成元中每次出现的该变量替换为变量的乘积 $x^\bullet_{A_b}$，是一种自然的操作。然而，在教科书或文献中，很难找到明确说明

这种操作会如何改变单纯复形的论述。上文已明确给出这种变化，即 Y^f（当然，任何需要了解这一点的人都很容易自行推导出来）。

例 8.5. 写作 $B = \{b_1, \dots, b_m, \}$。那么 $f^{*!}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$ 和 $f^*(\{\emptyset\})$ 是连接

$$X = \partial\Delta(A_{b_1}) * \partial\Delta(A_{b_2}) * \cdots * \partial\Delta(A_{b_m}). \tag{7}$$

（这里 $Y = \{\emptyset\}$、$I_Y = (x_{b_1}, x_{b_2}, \dots\dots, x_{b_m})$ 和 $I_X = (x^{\bullet}_{A_{b_1}}, \dots\dots, x^{\bullet}_{A_{b_m}})$，参见上面的注释。）连接 (7) 是若干单纯球面的连接，因此本身也是一个单纯球面。文章 [5] 展示了它的重要性（而本文则展示了它的自然性）：该连接的满维 Cohen-Macaulay 子复形被证明是可构造单纯球。此外，它们恰好是其 Stanley-Reisner 理想为 Artin 单项式理想 $\mathfrak{j} \subseteq k[y_B]$ 的极化（在最一般的意义下，[1]）的单纯复形，其中 $\mathfrak{j} \supseteq (y_{b_1}^{|A_{b_1}|}, \dots\dots, y_{b_m}^{|A_{b_m}|})$。

注记 8.6。$k[x_A]/I_{Y^f}$ 的最小自由分解可由 $k[y_B]/I_Y$ 的最小自由分解得到，方法是将变量 x_b 的每次出现替换为乘积 x^{A_b}。特别地，I_Y 和 I_{Y^f} 具有相同的投射维数。

注记 8.7。理想 I_Y 和 I_{Y_f} 具有相同的正则度。若 $Y = Z^\vee$ 是 Z 的 Alexander 对偶，根据命题 5.1

$$(Z^\vee)_f = f^{*!}(Z^\vee) = f^*(Z)^\vee = (Z^f)^\vee.$$

由于亚历山大对偶性将投射维数转化为正则度，$I_{Z^\vee}$ 和 $I_{(Z^\vee)^f}$ 具有相同的正则度。

若 $f\colon A \to B$ 是满射，且 $f^{-1}(b) = \{a_1, \dots, a_m\}$，其他所有纤维的基数均为 1，则 I_{Y_f} 的最小自由分解可由 I_Y 的最小自由分解得到：将自由分解中的每一项 $S(-y_b y_R)$ 替换为一个 Koszul 复形

$$\oplus_{1\le i\le m} S(-x_{a_i}) \leftarrow \oplus_{1\le i<j\le m} S(-x_{a_i}x_{a_j}) \leftarrow \cdots,$$

再乘以 x_R。我们感谢 L.Br$\circ$athen Knudsen 提出了这一观察。

8.2. **函子** $f^{!!}$、f^{**}、$f_{\circ}$。

命题 8.8. 给定一个满射 $f\colon A \to B$。

a. $f^{!!}\colon \hat{A} \to \hat{B}$ 将 X 映射到 B 上由所有满足 (D) 的 f 构成的集合，其中 $\hat{D} \in X$。这是 B 中最小的 Y，满足 $Y_f \supseteq X$。

b. $f^{**}\colon \hat{A} \to \hat{B}$ 将 X 映射到由满足 $f^{-1}(C) \in X$ 的 $C \subseteq B$ 构成的集合。这是 B 上最大的 Y，满足 $Y_f \subseteq X$。它也是满足 $Y^f \supseteq X$ 的最小 Y。

ˆ ˆˆ ˆc. $f: A \to B$ 将 X 映射到 Y，它是 B 上满足$Y^f \subseteq X$的最大 Y。

证明。该结论由定理 3.4 和引理 1.1 得出。 □

若 $x_D^\bullet \in k[x_A]$ 是平方自由单项式，令其 f-核 为单项式$x_C^\bullet \in k[y_B]$，其中 $C =$ 核 $f(D)$。

推论 8.9。给定一个定义在 B上的单纯复形 Y。

a. 对于 $Y = f^{!!}(X)$，Y的理想 $I_Y \subseteq k[y_B]$ 由单项式$y_C^\bullet$（其中 $C \subseteq B$）生成，且满足 $\prod_{b\in C}(x_{A_b}^+)$ 属于 $I_X \subseteq k[x_A]$。b. 对于 $Y = f^{**}(X)$，其关于 Y 的理想 $I_Y \subseteq k[y_B]$ 由满足以下条件的单项式$y_C^\bullet$ 生成：单项式 $x^\bullet_{f^{-1}(C)} = \prod_{b\in C} x^\bullet_{A_b}$ 属于 $I_X \subseteq k[x_A]$。c. 对于$Y = f(X)$，其理想 $I_Y \subseteq k[y_B]$ 由 $I_X \subseteq k[x_A]$中单项式的所有 f-核 生成。

证明。a. $C \subseteq B$ 不 属于 Y，意味着不存在从 $D \subseteq f^{-1}$到 C 的双射映射C，且满足 $D \in X$。这意味着，当且仅当每个整除(C) 且可双射映射到 C的 $x_D^\bullet$ 都属于 I_X时，$y_C^\bullet \in I_Y$ 成立。但这样的 $x_D^\bullet$ 恰好是理想 $\prod_{b\in C}(x_{A_b}^+)$中的单项式。

b. $C \subseteq B$ 不 属于 Y，意味着 $f^{-1}(C)$不 属于 X。因此，当且仅当$x^\bullet_{f^{-1}(C)}$ 属于 I_X 时，$y_C^\bullet \in I_Y$成立。

c. 由引理 3.2b 得出。 □

由引理 1.3 可得：

推论 8.10。给定定义在 B上的单纯复形 Y。

i. 满足 $f^{**}(X) = Y$ 的、定义在 A 上的单纯复形 X 恰好是满足 $Y_f \subseteq X \subseteq Y^f$的 X。ii.满足$(X) = Y$的、定义在 A 上的最大单纯复形 $X = Y_f$ 是唯一的。iii. 满足$(X) = Y$的、定义在 A 上的最小单纯复形 $X = Y^f$ 是唯一的。

8.3. **由截面得到的单纯复形**。对于定义在A上的单纯复形 X，其支撑 是 A 中作为 X顶点的元素 a的集合，即 $\{a\}$ 是 X的面。X 的余支撑 是 A中满足 $A\backslash\{a\}$ 是 X的面的顶点 a 的集合。

对于定义在 B 上的单纯复形 Y，我们已经看到，$f^{*p}(Y)$（其中 $p = !,$）表示函子 $f_{!!}f^{**}$，f 的极值元。特别地，$X = f^{*!}(Y) = Y_f$是唯一的极大元，且 $f_{!!}(X) = Y$。然而，没有唯一的极小元通过 $f^{!!}$ 映射到 Y。

然而，以下内容描述了这样一类对象。我们取满射 $f\colon A \to B$ 的一个截面 $s\colon B \to A$，使得 $f \circ s = \mathrm{id}_B$。给定定义在 B 上的单纯复形 Y，令 $Y_{s(B)}$ 为它经由双射 $s : B \to s(B)$ 转移到 $s(B)$ 上的像。

Pro位置 8.11. 考虑满射 $f : A \to B$的截面 $s : B \to A$ 。

a. $X = s^{!!}(Y) = Y_{s(B)}$ 是 A 上具有最小支集的 X，满足$f^{!!}(X) = Y$。 X 与 Y的面一一对应。*b.* 对于 $X = s^{**}(Y) =$ 锥$^{A\setminus s(B)}(Y_{s(B)})$，我们有 $Y_f \subseteq X \subseteq Y^f$。对于这些$X$ ， X 与 Y 的极大面一一对应，余极大面也同样一一对应。*c.* $X = s(Y) =$ 锥$^{A\setminus s(B)}(Y_{s(B)}) \cup$锥$^{s(B)}(\partial\Delta(A\setminus s(B)))$是 A 上具有最大余支集的 X，满足 $f(X) = Y$。X 与 Y 的非面一一对应。

证明。 对于 a. 部分，由函子性和 $f \circ s =$$\mathrm{id}_B$可知， $f^{!!}(X) = Y$显然。这些 X 也具有此类 X可能的最小支集基数，即 $|B|$。如果一个 X 通过 $f^{!!}$ 映射到 Y，且具有这样的支集基数，那么该支撑必为某个截面的 $s(B)$，并且 $X = s^{!!}(Y)$显然。

b 部分显然。c 部分的结论由 a 部分以及应用亚历山大对偶性命题 5.1 得出。□

注 8.12。 关于上面的观察 b，通常还会有许多$Y_f \subseteq X \subseteq Y^f$，使得 X 和 Y 的极大面之间存在双射，且 X 和 Y 的余极大面之间存在双射。

X 的一大类例子是 Y、 [1] 的连续分离 。在这一类中，对于 X 的每个余极大面 N，我们都有一个从 $N \to f(N)$ 到 Y 中相应余极大面的双射。然而，也存在 X 给出极大面和余极大面的双射，但对应的余极大面可能具有不同的基数，见下例。

例 8.13。 设 $B = \{a, b, x, y, r\}$ 和 $A = \{a, b, x, y, r_1, r_2\}$，并取自然映射 $A \to B$。

设 Y 为具有以下性质的单纯复形：

- 极大面： $\{a, x, y\}$， $\{b, x, y\}$， $\{r, x\}$， $\{r, y\}$。
- 因此，其余极大面为： $\{a, r\}$， $\{b, r\}$， $\{a, b\}$， $\{r, x, y\}$。

设 X 为具有以下性质的单纯复形：

- 极大面： $\{a, r_1, x, y\}$， $\{b, r_1, x, y\}$， $\{r_1, r_2, x\}$， $\{r_1, r_2, y\}$。
- 因此，其余极大面为： $\{a, r_2\}$， $\{b, r_1\}$， $\{a, b\}$， $\{r_1, r_2, x, y\}$。

那么 $Y =$ 核$_f X$，且极大面与余极大面之间存在双射。

9. Products of simplicial complexes

给定定义在 A 上的单纯复形 X 和定义在 B 上的单纯复形 Y，我们讨论这些单纯复形分别在并集 $A\cup B$ 和乘积 $A\times B$ 上的各种乘积。

9.1. 并集上的乘积 $A\cup B$。对于不相交的集合 A 和 B，并集$A\cup B$是范畴余积，并带有包含映射

$$i_A : A\to A\cup B,\quad i_B : B\to A\cup B.$$

这给出了映射

$$i_A^{!!}, i_A^{**}, i_A : \hat{\hat{A}} \longrightarrow (A\cup B)\hat{},\quad i_B^{!!}, i_B^{**}, i_B : \hat{\hat{B}} \longrightarrow (A\cup B)\hat{}.$$

对于定义在 A上的单纯复形 X 和定义在 B上的单纯复形 Y，我们可以应用这些映射，得到定义在 $A\cup B$上的单纯复形。对这些单纯复形取连接或交，就得到 X 和 Y的各种乘积，它们将是定义在 $A\cup B$上的单纯复形。

定理 9.1。设 X 是定义在 A上的单纯复形，而 Y 是定义在 B上的单纯复形。

a. $i_A^{!!}(X)$与 $i_B^{!!}(Y)$的连接是这两个单纯复形的不交并。它由满足 $C\in X$ 或$C\in Y$的 $C\subseteq A\cup B$组成。（当 X、$Y\neq\emptyset$时，它们的交为 $\{\emptyset\}$ 。）

b. $i_A^{**}(X)$与 $i_B^{**}(Y)$的交是外连接 $X*Y$。它由满足 $C\cap A\in X$ 且 $C\cap B\in Y$的$C\subseteq A\cup B$ 组成。*c.* $i_A^{**}(X)$与 $i_B^{**}(Y)$的连接由满足 $C\cap A\in X$ 或$C\cap B\in Y$的 $C\subseteq A\cup B$ 组成。*d.* $i_A(X)$与 $i_B(Y)$的交由满足以下任一条件的 $C\subseteq A\cup B$ 组成：*i.* $C\cap A\subsetneq A$ 且 $C\cap B\subsetneq B$；*ii.* $C\cap B=B$ 且 $C\cap A\in X$；*iii.* $C\cap A=A$ 且 $C\cap B\in Y$。（当 $X\neq\Delta(A)$且 $Y\neq\Delta(B)$时，它们的连接为边界 $\partial\Delta(A\cup B)$。）

证明。 a. 显然，因为 $i_A^{!!}(X)$ 就是将 X 视为定义在$A\cup B$上的单纯复形，而 B 的顶点是“幽灵顶点”，
b. 和 c. 由 $i_A^{**}(X)$ $=$ 锥$_B(X)$ 以及 $i_B^{**}(X)$ $=$ 锥$_A(Y)$ 得出；d. 由 $i_A(X)$ $=$ 锥$_B(X)\cup$锥$_A(\partial\Delta(B))$ 得出，$i_B(Y)$ 的情况类似。 □

对于 $k[x_{A\cup B}]$中的 Stanley-Reisner 理想，我们有如下结论：

推论 9.2. 根据上述各个情形，*Stanley-Reisner* 理想如下：

a. $(I_X)+(I_Y)+(x_A^+)\cdot(y_B^+)=(I_X)+(I_Y)+(x_a y_b)_{a\in A,b\in B}$.
b. $(I_X)+(I_Y)$,
c. $(I_X)\cap(I_Y)=(I_X I_Y)$,

d. $(I_X \cdot y_B^\bullet) + (x_A^\bullet \cdot I_Y)$.

证明. 我们讨论最后一种情形 d.，其他情形类似。若 $D \cup C \subseteq A \cup B$（含 $D \subseteq A$ 和 $C \subseteq B$）不属于单纯复形，则要么 $D = A$ 和$C \notin Y$，这意味着 $x_A^\bullet y_C^\bullet \in x_A^\bullet \cdot I_Y$；要么 $C = B$和 $D \notin X$，这意味着 $x_D^\bullet y_B^\bullet \in I_X \cdot y_B^\bullet$。□

9.2. 笛卡尔积上的乘积 $A \times B$。笛卡尔积$A \times B$是集合范畴中的范畴积。投影映射p_A：$A \times B \to A$ 和 p_B：$A \times B \to B$ 诱导出映射：

$$p_A^{!*}, p_A^* : \hat{\hat{A}} \to (A \times B)\hat{}, \quad p_B^{!*}, p_B^* : \hat{\hat{B}} \to (A \times B)\hat{}.$$

对于 A 上的单纯复形 X 和 B上的单纯复形 Y，应用这些映射可得到 $A \times B$ 上的单纯复形。对这些单纯复形取连接或交，可得到 X 和 Y的各种乘积，它们将是 $A \times B$上的单纯复形。（有关下文中的一些术语，请参见第 2.1 小节。）

定理 9.3。设 A上的 X 是一个单纯复形，且 B上的 Y 也是一个单纯复形。

a. X上的 $p_A^{!*}$与Y上的 $p_B^{!*}$的交，是 $A \times B$上的由满足 $D \in X$ 且$C \in Y$的面 $D \times C$ 生成的单纯复形。 ***b.*** X上的 $p_A^{!*}$与Y上的 $p_B^{!*}$的连接，是 $A \times B$ 上的由满足 $D \in X$ 或$C \in Y$的面 $D \times C$ 生成的单纯复形。 ***c.*** X上的 p_A^* 与Y上的 p_B^*的交，是 $A \times B$ 上的单纯复形，其非面补集由 $U \times V$ 生成，其中 U 是 X 的一个非面补集，或者V 是 Y的一个非面补集。（“生成”意为取子集。） ***d.*** X上的p_A^*与Y上的 p_B^*的连接，是 $A \times B$上的单纯复形，其非面补集由 $U \times V$ 生成，其中 U 是 X 的一个非面补集，且V 是 Y 的一个非面补集。

——

证明。 a. 和 b. $p_A^{!*}(X)$ 由面 $C \times B$ 生成，使得 $C \in X$，对于 $p_B^{!*}(Y)$ 也同理。

c. 和 d. $p_A^*(X)$ 的非面补集由 $U \times B$ 生成，其中 U 是 X 的非面补集，对于 $p_B^{!*}(Y)$ 也同理。□

对于 $k[z_{A\times B}]$ 中的 Stanley-Reisner 理想，我们有如下结论：

推论 9.4. 我们沿用上面的情形：

a. 该理想由所有满足以下条件的 $z_S^\bullet$ 生成：其中 $S \subseteq A \times B$，且 $x_{p_A(S)}^\bullet \in I_X$ 或$y_{p_B(S)}^\bullet \in I_Y$,b. 该理想由所有满足以下条件的 $z_S^\bullet$ 生成：其中 $S \subseteq A \times B$，且 $x_{p_A(S)}^\bullet \in I_X$ 并且$y_{p_B(S)}^\bullet \in I_Y$,c. 该理想由所有满足以下条件的 $z_S^\bullet$ 生成：其中 $S \subseteq A \times B$，且 $x_{p_A(S^c)_c}^\bullet \in I_X$ 或$y_{p_B(S^c)_c}^\bullet \in I_Y$,

d. 该理想由所有满足以下条件的 $z^{\bullet}_{S}$ 生成：其中 $S \subseteq A \times B$，且 $x^{\bullet}_{p_A(S^c)}$ $_c \in I_X$并且 $y^{\bullet}_{p_B(S^c)_c} \in I_Y$,

证明。分情况讨论 d。其余情况类似或更简单。理想由 $\tilde{z}^{\bullet}_{\tilde{D}}$ 生成，其中 D 是连接的一个非面。在割 $(D,\ U)$ 中，非面补集 $\tilde{U}$ 于是属于 $U \times V$，其中 U 是 X 的非面补集，且V是 Y的非面补集。这意味着 $x^{\bullet}_{U^c}$ 属于 I_X，而 $y^{\bullet}_{V^c}$ 属于 I_Y。令 $\tilde{S} = D$，即得所述结论。□

References

1. Ayah Almousa、Gunnar Fløystad 和 Henning Lohne，《分次极大理想幂的极化》，《纯粹与应用代数杂志》**226** (2022)，第 5 期，106924。2. Louis J Billera 和 Carl W Lee，《证明 McMullen 条件对单纯凸多胞体 f-向量的充分性》，《组合理论杂志 A 辑》**31**(1981)，第 3 期，237–255。3. Brian A Davey 和 Hilary A Priestley，《格与序导论》，剑桥大学出版社，2002。4. Fernando Sancho de Salas 和 Alejandro Torres Sancho，《Stanley–Reisner 理论的几何化》，《纯粹与应用代数杂志》**228** (2024)，第 12 期，107743。5. Gunnar Fløystad、Ine Gabrielsen 和 Amir Mafi，《Artin 单项式理想的极化》，2025。6. Brendan Fong 和 David I. Spivak，《应用范畴论导论》，剑桥大学出版社，剑桥，2019，《组合性七讲》。7. J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi，《单项式理想》，施普林格，2011。8. Melvin Hochster，《Cohen-Macaulay 环、组合学与单纯复形》，《环论 II》，纯粹与应用数学讲义 (1977)，第 26 卷，171–223。9. Gregory Maxwell Kelly，《富化范畴论基本概念》，第 64 卷，CUP Archive，1982。10. Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels，《组合交换代数》，第 227 卷，Springer Science & Business Media，2004。11. Irena Peeva，《分次 syzygy》，第 14 卷，Springer Science & Business Media，2010。12. Gerald Allen Reisner，《多项式环的 Cohen-Macaulay 商环》，《数学进展》**21** (1976)，第 1 期，30–49。13. Emily Riehl，《语境中的范畴论》，Courier Dover 出版社，2017。14. Harold Simmons，《范畴论导论》，剑桥大学出版社，2011。15. Richard P Stanley，《上界猜想与 Cohen-Macaulay 环》，《应用数学研究》**54**(1975年)，第 2 期，135–142。16.，《单纯凸多胞体的面数》，《数学进展》**35**(1980)，第 3 期，236–238。17.，《组合学与交换代数》，Birkh¨auser Boston，1996。18. Rafael H Villarreal，《单项式代数》，第 238 卷，Marcel Dekker New York，2001。19. K Yanagawa，《Stanley-Reisner 环、层与 Poincaré–Verdier 对偶》，Mathemati- cal Research Letters **10** (2003)，第 5 期，635–650。

Matematisk Institutt, Postboks 7803, 5020 Bergen电子邮箱地址：gunnar@mi.uib.no