arXiv:2603.06379v1 [math.DS] 6 Mar 2026

保体积 Anosov 流的等距扩张之阿贝尔覆盖上的相关性衰减

MIHAJLO CEKIĆ、THIBAULT LEFEUVRE 和 SEBASTIÁN MUÑOZ-THON

摘要。我们建立了定义在闭流形阿贝尔覆盖上的保体积 Anosov 流之等距扩张的关联函数关于时间倒数幂的渐近展开。

1. 引言

1.1. 阿贝尔覆盖上 Anosov 流的相关性衰减。 设 M_0 是一个光滑闭连通流形，配备了一个光滑 Anosov 流 $\varphi_t^0\colon M_0 \to M_0$，该流保持光滑概率测度 vol_{M_0}。Anosov 性质给出了 TM_0 的连续流不变分解，分解为

$$TM_0 = \mathbb{R}X_{M_0} \oplus E_s \oplus E_u,$$

其中 $X_{M_0} \in C^\infty(M_0, TM_0)$ 是该流的生成元，而 E_s 和 E_u 分别是稳定向量丛和不稳定向量丛。

令 $\rho\colon \pi_1(M_0) \to \mathbb{Z}^d$ 为一个（满射）表示。这定义了一个 $\mathbb{Z}^d$覆盖

$$\pi\colon M \to M_0 \tag{1.1}$$

通过考虑伴随丛 $M := \widetilde{M_0} \times_\rho \mathbb{Z}^d$，其中 $\widetilde{M_0}$ 表示 M_0的万有覆盖。我们将此构造称为阿贝尔覆盖（更多细节见§2.1）。流 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$可提升为 $\mathbb{Z}^d$-等变流 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$，作用于 M上。同样，测度 vol_{M_0} 可提升为光滑的流不变测度 vol_M，作用于 M上。不过请注意，若 $d > 0$，vol_M 的体积为无限。除非上下文清楚且不存在混淆风险，否则用下标 0 区分 M_0 上的对象。

令 $\alpha \in C^0(M_0, T^*M_0)$ 为定义在 M_0上的 Anosov 1-形式，由 $\alpha(E_s \oplus E_u) = 0$和$\alpha(X_{M_0}) = 1$定义。它仅是连续的，但 $d\alpha$ 作为分布意义下的2-形式是良定义的。特别地，当且仅当 $d\alpha = 0$时，$E_s \oplus E_u$是联合可积的（例如参见 [CL24a，第4节.2。2]）

我们关注流$(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 相对于测度 vol_M 在阿贝尔覆盖 M上的关联衰减。以下陈述依赖于阿贝尔覆盖 $(B^{s,r}(M))_{s,r\geq 0}$上的一组空间尺度 M。为避免在引言中引入过多技术细节，我们将其精确定义推迟到 §2.4。目前只需指出，$B^{s,r}$ 中的函数局部具有 H^s，并且随着参数 r 增大，在 M 中呈现出越来越快的无穷远处衰减。我们的首个结果如下：

定理 1.1 (阿贝尔覆盖上的相关性衰减)。 设 $\pi\colon M \to M_0$ 是一个 $\mathbb{Z}^d$-覆盖，对应于满射表示 $\rho\colon \pi_1(M_0) \to \mathbb{Z}^d$，如 (1.1)所示；并设 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个保体积的 $\mathbb{Z}^d$-等变 *Anosov* 流，如上所述。

如果 $d\alpha \neq 0$，则存在常数 $\kappa > 0$，以及$C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 上的连续双线性型$(C_j)_{j\geq 1}$，使得对所有 f、$g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$，以及对所有整数 $N \geq 1$:

(1.2)
$$t^{d/2}\int_M f\circ\varphi_{-t}\cdot g\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M = \kappa\int_M f\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M + \sum_{j=1}^{N-1} t^{-j}C_j(f,g) + R_N(t,f,g)$$

其中 下列估计成立：对所有 $s > 0$，存在常数 $C > 0$，使得 at

(1.3)
$$\begin{aligned} |C_j(f,g)| &\leq C\|f\|_{B^{s,2j}}\|g\|_{B^{s,2j}}, \quad 1 \leq j \leq N-1,\\ |R_N(t,f,g)| &\leq C\langle t\rangle^{-N}\left(\|f\|_{B^{\vartheta N,0}}\|g\|_{B^{\vartheta N,0}} + \|f\|_{B^{s,2N+d+1}}\|g\|_{B^{s,2N+d+1}}\right), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

其中常数 $\vartheta > 0$ 是显式的，且仅依赖于维数 M_0。

*I*此外，(1.2)更一般地对所有 f， $g \in B^{\vartheta N,\,0}(M) \cap B^{s,\,2N+d+1}(M)$成立 .

对于 $B^{\vartheta N,0}(M) \cap B^{s,2N+d+1}(M)$ 中的函数，(1.2) 成立是显然的，因为 $C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 在该空间中稠密，且有界估计 (1.3)。常数 $\kappa > 0$ 是显式的，等于因子 $(2\pi)^{d/2}$ 乘以协方差矩阵行列式平方根的倒数，见将 $j = 0$ 代入 (4.34) 所得结果。我们证明，对于 $j \geq 1$，双线性形式 C_j 均非零（见引理 4.16），并给出 C_1 的显式表达式，见 (4.37)。

还可以在 (线性漂移 中加入1.2)，也就是说，可以将 f 替换为 $\tau^*_{\mathbf{k}}f$，前提是$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ 的界为 $\mathcal{O}(t^{1/2-\varepsilon})$ 其中 $\varepsilon > \varepsilon_d > 0$，这里 ε_d 取决于阶数 $d \geq 1$。在 $|\mathbf{k}| \simeq t^{1/2-\varepsilon}$ 的情形下，展开式中的第二项大为简化，详见第 §4.7 节的讨论。

混合速率 $d/2$在渐近展开的首项中 $t^{-d/2}$ 表现为 $\mathbb{Z}^d$ 的酉对偶⌒U(1) $\mathbb{Z}^d \simeq$的平凡表示连通分支维数的一半 ^{d} （即所有酉不可约表示的等价类）。这是一个普遍原理，应适用于双曲动力系统的任意 G-延拓，其中 G是非紧李群，前提是平凡表示不是孤立的（也就是说，Kazhdan 性质 (T) 不成立）。相关讨论见 §1.4 。

定理1.1 已针对负曲率下的测地流在 [DNP22], 中得到证明，另见 §1.4，其中对此作了进一步讨论。这里我们唯一的假设是 $d\alpha \neq 0$。我们认为，这一论证可以调整后用于处理 $(\varphi^0_t)_{t\in\mathbb{R}}$的任意平衡态；这留待未来研究。

1.2. **阿贝尔覆盖上 Anosov 流等距扩张的相关性衰减**。 定理 1.1 是我们现在要说明的一个关于等距扩张的更一般结果的推论。设 $p\colon P_0 \to M_0$ 是一个主 G-丛，其中 G 是一个紧李群，并记 $R_g\colon P_0 \to P_0$ 为 $g \in G$ 在 P_0上的逐纤维右作用。设 $(\psi^0_t)_{t\in\mathbb{R}}$是 Anosov 流 的一个 $(\varphi^0_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 到 P_0 的扩张，具体来说，它满足以下

两个性质：

$$\varphi_t^0 \circ p = p \circ \psi_t^0, \qquad R_g \circ \psi_t^0 = \psi_t^0 \circ R_g, \quad t \in \mathbb{R}, g \in G.$$

流 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 称为 的等距扩张 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$，并且是一个部分双曲流，参见 [Lef25，例如第 12] 章。它保持一个光滑概率测度 ν_0，该测度（局部）由 体积测度m_0 与 G上的 Haar 测度的乘积构成。

与 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 相关联的是 P_0 上一个重要的对象，称为动力学联络。它是一个 G-等变连续联络 ∇^{dyn}，由 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 以函子方式诱导而来。关于精确定义和更多细节，请参见下文 §2.5；现在我们陈述它的一些关键性质。$(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 的传递群 $H \leqslant G$ （或 Brin群）是动力学联络的全纯群的闭包；它在 G 中仅在共轭意义下确定。该群发挥着关键作用，因为它描述了 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 的遍历分量。更准确地说，$(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 关于 ν_0 遍历，当且仅当 $H = G$ （参见[Bri75b、Bri75a、Lef23]）。

令 $\mathfrak{g}$ 为 G的李代数，并以 Ad: $G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 表示伴随表示。令 $\mathrm{Ad}(P_0) = P_0 \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g} \to M_0$ 为与 P_0相关联的伴随丛。根据紧李群的一般结构理论， G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 可分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

其中， $\mathfrak{z} \simeq \mathbb{R}^a$ 是某个 $a \geq 0$ ，为 G中心的李代数；导出代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 对应于 G半单部分的李代数。由于上述分解在 $\mathrm{Ad}(G)$作用下保持不变，因此向量丛 $\mathrm{Ad}(P_0)$也相应分解为

$$\mathrm{Ad}(P_0) = M_0 \times \mathfrak{z} \oplus E,$$

其中， E 是对应于半单部分的向量丛。动力学联络的曲率是定义在 M_0上的 $\mathrm{Ad}(P_0)$-值分布型2-形式

$$F_{\nabla^{\mathrm{dyn}}} \in \mathcal{D}'(M_0, \Lambda^2 T^* M_0 \otimes \mathrm{Ad}(P_0)).$$

将 $F_{\nabla^{\mathrm{dyn}}}$ 投影到平凡丛 $M_0 \times \mathfrak{z}$上，并取任意一个平凡化标架，我们得到 a 个分布型2-形式 F_1, ..., $F_a \in \mathcal{D}'(M_0, \Lambda^2 T^* M_0)$。

令 $P := \pi^* P_0 \to M$ 为 M 上的拉回丛（回顾一下， π: $M \to M_0$ 是$\mathbb{Z}^d$覆盖）。注意， P也是一个位于 $(G \times \mathbb{Z}^d)$上的丛，而 M_0以及 $\mathbb{Z}^d$是位于 P_0上的丛（更多细节见 §2.3），因此有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} P = \pi^* P_0 & \longrightarrow & P_0 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{\pi} & M_0 \end{array}$$

流 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 可以等变提升为 P 上的流，记作 $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$。类似地，测度 ν_0 可以提升为测度 ν （当 $d > 0$时为无限体积）。在以下结果中，给定 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(P)$，令 $f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 为通过

对 P 的 G-纤维取平均得到的函数，即

$$f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}(x) := \int_{P_x} f(w \cdot g)\mathrm{d}g, \qquad x \in M$$

其中 $w \in P_x$ 是任意的，且$\mathrm{d}g$ 表示 G上的归一化 Haar 测度。指标$\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 的含义将在后文引入主丛上的博雷尔-韦伊演算时变得清楚，见§3.2。我们将证明如下：

定理 1.2. 设 $P_0 \to M_0$ 为一个 G-主丛，其中 G 是紧李群，且 $P := \pi^* P_0 \to M$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 阿贝尔覆盖 $\pi\colon M \to M_0$上的拉回丛，并配备如上所定义的提升流$(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 。

若传递群 H 等于 G，且$(d\alpha, F_1, \dots, F_a)$ 线性无关，则对所有 f、 $g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(P)$，以及对所有整数 $N \geq 1$:

$$t^{d/2}\int_P f\circ\psi_{-t}\cdot g\ \mathrm{d}\nu = \kappa\int_P f\mathrm{d}\nu\int_P g\mathrm{d}\nu + \sum_{j=1}^{N-1} t^{-j}C_j(f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}, g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}) + R_N(t,f,g), \tag{1.4}$$

其中对所有 $s > 0$，存在 $C > 0$ 使得

$$R_N(t,f,g) \leq C\langle t\rangle^{-N}\left(\|f\|_{B^{\vartheta N,0}(P)}\|g\|_{B^{\vartheta N,0}(P)} + \|f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\|_{B^{s,2N+d+1}(M)}\|g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\|_{B^{s,2N+d+1}(M)}\right)$$

并且常数 $\vartheta > 0$ 是显式的，且仅取决于 维数 M_0和 维数G。

此外，对于所有满足 $f, g \in B^{\vartheta N,0}(P)$ 以及 $f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}, g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \in B^{s,2N+d+1}(M)$的情形，(1.4) 也成立。

常数 κ以及双线性形式 C_j与定理1.1中出现的相同。另请注意，

$$\int_P f\ \mathrm{d}\nu\int_P g\ \mathrm{d}\nu = \int_M f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\,.$$

因此，展开式（1.4）中的所有相关项仅取决于 0阶傅里叶模 f 和 g的行为。

1.3. 对标架流的应用。 现在我们将前面的结果应用于标架流。设 (N_0, g_0) 是一个光滑、闭、连通、定向的黎曼 n 维流形，且具有负截面曲率。令 $M_0 := SN_0$ ，并令 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 表示单位切丛 SN_0上的测地流。令 $P_0 := FN_0$ 为 N_0上的标架丛。它可以看作 N_0上的主 SO(n)-丛，也可以看作 SN_0上的主 SO($n-1$)-丛。标架流定义在 N_0 上，如下：

$$\psi_t^0(v,w) := (\varphi_t^0(v), \tau_{v\to\varphi_t^0 v}w), \quad t \in \mathbb{R},$$

其中， w 是 v 的正交补中的一个标架， $\tau_{v\to\varphi_t^0 v}$ 表示沿测地线 $(\varphi_s^0 v)_{s\in[0,t]}$ 相对于 Levi-Civita 联络的平行移动。

设 $\rho\colon \pi_1(N_0) \to \mathbb{Z}^d$ 为一个满射表示，且 $N := N_0 \times_\rho \mathbb{Z}^d$ 为相应的阿贝尔覆盖。设 g为 g_0到 N的等变提升，且 $P := FN$为 (N, g)的标架丛。定理 1.2 的一个直接推论如下：

推论 1.3。假设标架流在 N_0 上是遍历的。则存在 $\kappa > 0$ 和连续双线性型 $(C_j)_{j\geq 1}$，定义在 $C^\infty_{\mathrm{comp}}(SN)$ 上，使得对于所有 $f, g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(FN)$，以及所有整数 $N \geq 1$:

$$t^{d/2}\int_{FN} f\circ\psi_{-t}\cdot g\ \mathrm{d}\nu = \kappa\int_{FN} f\mathrm{d}\nu\int_{FN} g\mathrm{d}\nu + \sum_{j=1}^{N-1} t^{-j}C_j(f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}, g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}) + R_N(t,f,g), \tag{1.5}$$

其中 C_j 满足界 (1.3)，且对于所有 $s > 0$，存在 $C > 0$ 使得对于所有$t \geq 0$:

$$R_N(t,\ f,\ g) \leq C\langle t\rangle^{-N}\left(\|f\|_{B^{\vartheta N,\ 0}(FN)}\|g\|_{B^{\vartheta N,\ 0}(FN)} + \|f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\|_{B^{s,\ 2N+d+1}(SN)}\|g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}\|_{B^{s,\ 2N+d+1}(SN)}\right).$$

常数 $\vartheta > 0$ 是显式的，且仅依赖于维数 N_0。

此外，对于所有满足 $f, g \in B^{\vartheta N,\ 0}(FN)$ 且 $f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}, g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \in B^{s,\ 2N+d+1}(SN)$的情形，(1.5) 也更一般地成立。

标架流的遍历性在如下情形已知 $n := \dim(N_0)$ 为奇数且不等于7[BG80]，或当度量为 $\delta(n)$-夹挤[1] [CLMS24]（另见 [BK84，BP03]），以及：

- $n = 4$ 或 $n = 4k + 2$ 且 $\delta(n) \sim 0.28$;
- $n = 4k$ 且 $\delta(n) \sim 0.55$;
- $n = 7$ 且 $\delta(7) \sim 0.5$。

另见综述 [CLMS22]以供进一步讨论。

1.4. **相关结果**。现有文献中与定理1.1最为接近的结果似乎是 [DNP22]，该文讨论 $\mathbb{Z}^d$-双曲流覆盖。具体而言，在测地流的情形下，定理1.1 最早建立于 [DNP22，定理4。1]。然而，一般的非可积条件 $d\alpha \neq 0$ 据我们的理解，并未明确出现在他们的分析中。

对于马尔可夫链、Anosov 映射或 Sinai 撞球等混沌动力系统的阿贝尔扩张（即 $\mathbb{R}^d$-或 $\mathbb{Z}^d$-扩张）的关联衰减或中心极限定理／局部极限定理研究，如今已是该领域的经典课题，参见 [BBT23、GH88、Gui89、SV04、Gou11、Iwa08、MT13、LT16、AN17、DN20、OP19、MT17、DN19、Pè19、Ter22、DN25]等文献。另可参见 [BFRT24、CR24]，其中探讨了抛物动力系统的阿贝尔扩张上的遍历平均的渐近展开。

然而，定理 1.2 所处理的 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-扩张，其中 G 是一个紧李群，并给出了关联函数的完整渐近展开，这似乎是全新的。

我们还指出，$\mathbb{Z}^d$ 可以替换为 $\mathbb{R}^d$，代价是引入一个新的半经典参数 $\lambda \in \mathbb{R}^d$，从而在 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$ 中取代分析§4 和 §5中采用的参数。这是因为 $\mathbb{R}^d$ 的酉对偶就是 $\mathbb{R}^d$ 其自身，而它⌣是非紧的（不同于 $\mathbb{Z}^d \simeq \mathrm{U}(1)^d$）。因此，理解关联衰减的问题将更加复杂，因为还必须证明当 $|\lambda| \to +\infty$时成立的统一高频估计。

[1]也就是说，截面曲率包含在某个区间 $[-C, -\delta(n)C)$ 内，其中 $C > 0$。

对 $\mathbb{R}^d$-或（$\mathbb{R}^d \times G$）-延拓（其中 G 是紧的）的研究，近来在 Anosov 表示的背景下兴起，参见 [Thi09, Sam15, CS23, GBLW26]。在这一情形下，人们考虑非紧半单李群 G 的离散子群 $\Gamma < \mathrm{G}$，它是 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq \mathrm{SO}(n,1)$ 中凸余紧子群的推广。与之对应的动力系统是一个多重流（双曲 $\mathbb{R}^k$-作用），可视为双曲流形单位切丛上测地流的高秩类比。通过为 $\mathbb{R}^k$-作用选定一个方向（即限制到一个 $\mathbb{R}$-因子），便得到所谓的折射流。

前三篇文章 [Thi09、Sam15、CS23] 仅推导出了折射流关联函数渐近展开的首项。然而，[GBLW26]得到了完整的渐近展开，类似于定理1.1和1.2中的结果。在此背景下，混合速率 $d/2$ 对应于$\mathrm{rank}(\mathbf{G}) - 1$的一半。

1.5. **文章结构**。在 §2中，我们回顾阿贝尔覆盖、弗洛凯理论以及 Anosov 流的等距扩张的标准事实。在 §3中，我们介绍后续各节证明所需的半经典分析背景。特别地，我们回顾 [CL24a], 中提出的博雷尔-韦伊演算的主要结果；该演算使我们能够处理 G-丛上的等变（伪）微分算子。在 §4中，我们证明定理1.1。最后，定理1.2 在 §5中得到证明。

致谢： 本项目由欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划资助（资助协议编号：101162990 — ADG）。

2. 阿贝尔覆盖与等距扩张

2.1. **阿贝尔覆盖**。设 M_0 是一个光滑闭流形，$x_0 \in M_0$ 是任意固定点，并设

$$\rho\colon \pi_1(M_0, x_0) \to \mathbb{Z}^d \tag{2.1}$$

是一个满射表示，其映射到 $\mathbb{Z}^d$，其中 $d \geq 1$ 为某个对象。设

$$M := \widetilde{M_0} \times_\rho \mathbb{Z}^d$$

$\widetilde{\ }$ 是相应的阿贝尔覆盖，其中 M_0 表示 M_0 的万有覆盖。也就是说$\frown M = ($ $M_0 \times \mathbb{Z}^d)/\sim$ 其中

$$(x, \mathbf{n}) \sim (\gamma.x, -\rho(\gamma) + \mathbf{n}), \quad \forall x \in \widetilde{M_0}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \gamma \in \pi_1(M_0, x_0).$$

注意到 M 是连通的，且 ρ是满射。此外，表示（2.1）分解经由

$$\pi_1(M_0, x_0) \xrightarrow{\rho_{\mathrm{ab}}} H_1(M_0, \mathbb{Z}) \to H_1(M_0, \mathbb{Z})/\mathrm{Tor} \to \mathbb{Z}^d,$$

其中 ρ_{ab} 表示阿贝尔化映射，Tor 表示挠部分，参见 [Hat02]。将诱导映射 $H_1(M_0, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^d$ 记为 ρ'；那么对于任意闭环 $\gamma \subset M_0$（不一定以 x_0为基点），我们可以定义 $\rho(\gamma) := \rho'([\gamma]_{H_1})$，其中 $[\gamma]_{H_1}$ 表示 γ在 $H_1(M_0, \mathbb{Z})$ 中的等价类。

流形 M 是一个以 M_0为底空间的主 $\mathbb{Z}^d$-丛，也就是说，存在一个满射投影π: $M \to M_0$，使得每个点的原像都可以与 $\mathbb{Z}^d$等同，并且该丛配备了一个 $\mathbb{Z}^d$-作用 τ: $M \times \mathbb{Z}^d \to M$。在万有覆盖上，该作用表示为

$$\tau_{\mathbf{k}}(x, \mathbf{n}) = (x, \mathbf{n} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, x \in \widetilde{M_0},$$

并且很容易验证，它下降到商空间 M。

我们需要以下引理:

引理 2.1. 令 $\widehat{x}_0 \in M$ 为投影映射 π下 $x_0 \in M_0$ 的任意一个原像，并令 $\gamma \subset M$ 为一个以 $\widehat{x}_0$ 为基点的回路。那么 $\pi_*\gamma \in \ker \rho$。

证明。写作 $\widehat{x}_0 = [(\widetilde{x}_0, \mathbf{n}_0)] \in M$，其中 $\widetilde{x}_0 \in M_0$是 p对 x_0的一个提升： $M_0 \to M_0$。考虑$\pi_*(\gamma)$，其中 γ 是一个以 $\widehat{x}_0$为基点、位于 M 中的回路，并写作 $\gamma(t) = [(\widetilde{\gamma}(t), \mathbf{n}(t))]$, ，其中 $\widetilde{\gamma}$ 和 $\mathbf{n}$分别是 M_0 和 $\mathbb{Z}^d$ 中的路径，满足 $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0$ 且 $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0$ （这里我们使用路径提升性质，见 [Hat02]）。注意，由于 $\mathbb{Z}^d$ 是离散的，我们有 $\mathbf{n}(t) \equiv \mathbf{n}_0$。现在，

$$[(\widetilde{x}_0, \mathbf{n}_0)] = \gamma(0) = \gamma(1) = [(\widetilde{\gamma}(1), \mathbf{n}_0)] = [(\gamma.\widetilde{x}_0, \mathbf{n}_0)] = [(\widetilde{x}_0, \rho(\gamma) + \mathbf{n}_0)],$$

其中，前三个等式成立是因为 γ 是以 $\widehat{x}_0$ 为基点的回路，第四个等式成立是因为 M_0 上的甲板变换由 $\pi_1(M_0, x_0)$ 给出（万有覆盖上提升路径的端点由基本群中相应元素作用于提升路径的初始点给出），最后一步则用到了 M 的定义。该等式意味着，对于某个 $\omega \in \pi_1(M_0, x_0)$，有 $(\widetilde{x}_0, \mathbf{n}_0) = (\omega.\widetilde{x}_0, -\rho(\omega) + \rho(\gamma) + \mathbf{n}_0)$。由于 $\pi_1(M_0, x_0)$ 自由作用，这就迫使 ω 是单位元，且 $\rho(\gamma) = 0$。□

设 $\mathrm{U}(1) := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。给定 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$，我们引入表示

$$\alpha_{\boldsymbol{\theta}} \colon \mathbb{Z}^d \to \mathrm{U}(1), \qquad \alpha_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{n}) := \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \mod 2\pi.$$

我们将用 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$ 表示 M_0 的第一德拉姆上同调群，并用 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, 2\pi\mathbb{Z})$ 表示其中的格，其元素 $[\eta]$ 满足对任意闭环$\gamma \subset M_0$

$$\int_\gamma [\eta] \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

命题 2.2. 存在一个光滑映射

$$\mathrm{U}(1)^d \ni \boldsymbol{\theta} \mapsto [\eta_{\boldsymbol{\theta}}] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})/H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, 2\pi\mathbb{Z})$$

使得对所有光滑闭曲线 $\gamma \subset M_0$:

$$\int_\gamma [\eta_{\boldsymbol{\theta}}] = \rho(\gamma) \cdot \boldsymbol{\theta} \mod 2\pi. \tag{2.2}$$

此外，对 $\boldsymbol{\theta}$ 的依赖是线性的，即映射 $\boldsymbol{\theta} \mapsto [\eta_{\boldsymbol{\theta}}]$ 来自线性映射 $\mathbb{R}^d \ni \boldsymbol{\theta} \mapsto [\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$，因此特别光滑。因此，对于任意 $v \in T_{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{U}(1)^d \cong \mathbb{R}^d$，我们有 $D[\eta_{\boldsymbol{\theta}}](v) = [\widetilde{\eta}_v]$。

证明。 注意，由于 $\mathbb{Z}^d$ 是阿贝尔的， ρ 可分解为 $\rho = \rho' \circ \rho_{ab}$

$$\pi_1(M_0, x_0) \to H_1(M_0, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^d.$$

其中，我们将 ρ_{ab} 记为阿贝尔化映射，将诱导映射 $H_1(M_0, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^d$ 记为 ρ'。对于任意 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$，考虑同态 $\beta_{\boldsymbol{\theta}}\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$，其定义为 $\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{n}) := \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}$。于是

$$\beta_{\boldsymbol{\theta}} \circ \rho' \in \mathrm{Hom}(H_1(M_0, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R}),$$

其中，该同构由德·拉姆定理给出，因此存在唯一的第一上同调类 $[\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}]$，使其在此对应关系下等于 $\beta_{\boldsymbol{\theta}} \circ \rho'$，即根据定义，对于任意回路 $\gamma \subset M_0$，我们有

$$\int_\gamma [\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}] = \beta_{\boldsymbol{\theta}} \circ \rho'([\gamma]_{H^1}) = \boldsymbol{\theta} \cdot \rho([\gamma]_{\pi_1}), \tag{2.3}$$

其中，在最后一个等式中，我们写作 $\rho_{\mathrm{ab}}([\gamma]_{\pi_1}) = [\gamma]_{H^1}$。此外，映射 $\mathbb{R}^d \ni \boldsymbol{\theta} \mapsto [\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}] \in H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$ 是线性的，因为 $\boldsymbol{\theta} \mapsto \beta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是线性的，并且德·拉姆同构也是线性的。接下来我们注意到，根据（2.3），如果 $\boldsymbol{\theta} \in (2\pi\mathbb{Z})^d$，那么 $[\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}] \in H^1(M_0, 2\pi\mathbb{Z})$；因此，映射 $\boldsymbol{\theta} \mapsto [\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}]$ 下降为环面的映射。最后，导数的结论由线性性以及以下事实得出：导数可被视为 $\mathbb{R}^d$ 与 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$ 之间的自同态截面。□

注记 2.3. 我们指出，一般而言，映射 $\boldsymbol{\theta} \mapsto [\eta_{\boldsymbol{\theta}}]$ 无法提升为到$H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$的映射（除非 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R}) = \{0\}$ 或 $d = 0$，但此时结论显然成立）。事实上，存在这样的提升等价于对于所有 $\boldsymbol{\theta} \in (2\pi\mathbb{Z})^d$，$[\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}] = 0$ 属于 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$。等价地，由 (2.3) 可知，对于所有闭回路 γ，都有 $\rho(\gamma) = 0$，这与 ρ 是满射这一事实矛盾。

现在我们引入一些截面，它们最终将使我们能够参数化 $\boldsymbol{\theta}$ 中的傅里叶模，并将其写成定义在 M_0 上的函数。

引理 2.4. 设 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是一个光滑闭 1-形式，代表命题 $[\eta_{\boldsymbol{\theta}}]$ *2.2* 中的同调类。于是我们引入

$$s_{\boldsymbol{\theta}}(x) := \exp\left(i \int_\gamma \eta_{\boldsymbol{\theta}}\right), \qquad x \in M, \tag{2.4}$$

其中 $\gamma := \pi(\gamma')$，而 γ' 是连接 $\widehat{x}_0$ 与 x 且位于 M中的任意路径。于是 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义良好，并且

$$s_{\boldsymbol{\theta}} \circ \tau_{\mathbf{n}} = e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}} s_{\boldsymbol{\theta}}, \quad s_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} d s_{\boldsymbol{\theta}} = i\pi^* \eta_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

证明。 首先，我们证明 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义良好，即与路径 γ的选取无关。令 $x \in M$，并考虑从 $\widehat{x}_0$到 x的两条路径 γ_1，γ_2。由于 $\pi_*(\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1) \in \ker \rho$，我们得到

$$\int_{\pi(\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)} \eta_{\boldsymbol{\theta}} \equiv \rho(\pi_*(\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)) \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv 0,$$

其中 $\equiv$ 表示模 2π意义下的相等。这表明 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义良好。

接下来，我们研究 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 如何与 $\tau_{\mathbf{n}}$ 相互作用。由于我们可以自由选择任意一条连接 $\widehat{x}_0$ 与 $\tau_{\mathbf{n}}(x)$ 的路径，因此我们将选取一条由拼接

γ_1（连接 $\widehat{x}_0$ 与 x）和路径 γ_2（从 x 到 $\tau_{\mathbf{n}}(x)$）得到的路径。虽然 γ_1 可以任意选取，但我们将以一种非常具体的方式选取 γ_2。若记 $y=\pi(x)$，则 ρ: $\pi_1(M_0, y) \to \mathbb{Z}^d$ 的满射性保证存在一条路径 $\gamma \in \pi_1(M_0, y)$，使得 $\rho(\gamma) = \mathbf{n}$。令 γ' 为 γ 到 M 的一个提升，其基点为 x_0。我们声称 $\gamma'(1) = \tau_{\mathbf{n}}(x)$。事实上，记 $\sim x = [(\widetilde{y}, \mathbf{k})],$，其中 $\widetilde{y} \in M_0$ 满足 $p(\widetilde{y}) = y$。因此，对某个 $\widetilde{\mathbf{k}} \in \mathbb{Z}^d$，有 $\gamma'(t) = [(\widetilde{\gamma}(t), \mathbf{k})],$，且 $\widetilde{\gamma}$ 是 M_0 中的一条路径。接下来，利用这样一个事实：M_0 中路径的端点由相应元素在初始点处对 $\pi_1(M_0, y)$ 的作用给出，我们得到

$$\gamma'(1) = [(\gamma.\widetilde{y}, \mathbf{k})] = [(\widetilde{y}, \rho(\gamma) + \mathbf{k})] = [(\widetilde{y}, \mathbf{k} + \mathbf{n})] = \tau_{\mathbf{n}}(x).$$

因此，为了计算 $s_{\boldsymbol{\theta}}(\tau_{\mathbf{n}}(x))$，我们将使用从 x_0 到 x 的任意路径 γ_1，并取如上所述的 $\gamma_2 = \gamma'$，它将 x 与 $\tau_{\mathbf{n}}(x)$ 连接起来。因此，

$$s_{\boldsymbol{\theta}}(\tau_{\mathbf{n}}(x)) = \exp\left(i\int_{\pi(\gamma')} \eta_{\boldsymbol{\theta}}\right) \exp\left(i\int_{\pi(\gamma_1)} \eta_{\boldsymbol{\theta}}\right) = \exp(i\rho(\pi(\gamma'))\cdot\boldsymbol{\theta}) s_{\boldsymbol{\theta}}(x) = e^{i\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}} s_{\boldsymbol{\theta}}(x).$$

最后，引理陈述中的最后一个关系可直接通过求导得到. □

遗憾的是，之前的构造取决于代表元 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 的选择，因此并非全局定义。对于可缩开集，我们可以做得更好。

命题 2.5。设 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$ 是一个开可缩集。则存在一个光滑映射

$$U \ni \boldsymbol{\theta} \mapsto \eta_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(M_0, T^*M_0) \cap \ker d,$$

其德拉姆上同调类与 $[\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}]$在命题2.2中构造的类相同。此外，若 $\mathbf{0} \in U$，我们可以假设 $\eta_{\mathbf{0}} \equiv 0$，并且可以假设 $(\eta_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 相对于背景黎曼度量是调和的 g_0，其定义在 M_0上。因此，引理 2.4 的结论对 $\boldsymbol{\theta} \in U$光滑依赖。

证明。为简便起见，将命题 2.2 中构造的映射 $\boldsymbol{\theta} \mapsto [\eta_{\boldsymbol{\theta}}]$ 记为 Ξ，并将覆盖空间上的线性映射记为 $\widetilde{\Xi}$: $\mathbb{R}^d \to H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$。注意，$\widetilde{\Xi}$是单射：事实上，若 $\Xi(\boldsymbol{\theta}) = 0$，则由 (2.3)，并且由于按假设 ρ是满射，我们得到 $\boldsymbol{\theta} = 0$。由$\widetilde{\Xi}$秩不变性可知，必有 $\Xi((2\pi\mathbb{Z})^d) = H^1(M_0, 2\pi\mathbb{Z}) \cap \Xi(\mathbb{R}^d)$，因此可得$\widetilde{\Xi}$，$\Xi$ 是一个嵌入，且 $\Xi(\mathrm{U}(1)^d) = \Xi(\mathbb{R}^d)/\Xi(2\pi\mathbb{Z}^d)$ 是 $J_T = H^1(M_0, \mathbb{R})/H^1(M_0, 2\pi\mathbb{Z})$ 的一个维数为 d 的子环面。由此我们得出，$\Xi(U)$ 在 $\Xi(\mathrm{U}(1)^d)$ 中是开且可缩的。我们可以将 $H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, 2\pi\mathbb{Z})$-丛（或覆盖空间）$H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$ 限制到 $\Xi(\mathrm{U}(1)^d)$；由于 $\Xi(U) \subset \Xi(\mathrm{U}(1)^d)$ 是可缩的，存在该丛的一个局部光滑截面 $S_{\Xi(U)}$: $\Xi(U) \to H^1_{\mathrm{dR}}(M_0, \mathbb{R})$。令 g_0为M_0 上的任意黎曼度量，并将到 g_0-调和 1-形式的霍奇投影记为 $\Pi_{\mathcal{H}^1}$；我们将使用霍奇理论。沿用命题 2.2 的记号，接着对 $\boldsymbol{\theta} \in U$, $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$，定义 $= \Pi_{\mathcal{H}^1} S_{\Xi(U)}([\eta_{\boldsymbol{\theta}}])$，它显然满足所需性质。最后，若 $\mathbf{0} \in U$，则可通过将 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 替换为 $\eta_{\boldsymbol{\theta}} - \eta_{\mathbf{0}}$ 来实现关于 $\eta_{\mathbf{0}}$ 的结论。证明完毕。□

2.2. **弗洛凯理论**。 对于 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$ ，我们引入相应的线丛

$$L_{\boldsymbol{\theta}} := \widetilde{M_0} \times_{e^{-i\alpha_{\boldsymbol{\theta}} \circ \rho}} \mathbb{C} = M \times_{e^{-i\alpha_{\boldsymbol{\theta}}}} \mathbb{C},$$

其中照例我们有

$$M \times_{e^{-i\alpha_{\boldsymbol{\theta}}}} \mathbb{C} = M \times \mathbb{C} / \sim, \quad (x, z) \sim (\tau_{\mathbf{n}} x, e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{n}} z), \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

注意到 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 是一个平坦埃尔米特（即在其纤维上配备内积以及相容的平坦联络）线丛，其沿曲线 $\gamma \in \pi_1(M_0, x_0)$的holonomy由下式给出

$$\exp\left(-i\alpha_{\boldsymbol{\theta}} \circ \rho(\gamma)\right) = \exp\left(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \rho(\gamma)\right).$$

由 $L_{\boldsymbol{\theta}}$的定义可见， $C^\infty(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})$中的截面与等变函数双射对应，这些函数属于

$$C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M) := \{F \in C^\infty(M) \mid \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d,\ F \circ \tau_{\mathbf{n}} = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{n}} F\}, \tag{2.5}$$

频率为 $\boldsymbol{\theta}$的傅里叶模空间。给定截面 $s \in C^\infty(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})$，我们将其等变提升记为 $\widetilde{s} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$。

我们现在观察到，线丛 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 是拓扑平凡的。

命题 2.6。 设 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$ 是一个开可缩集。那么，线丛族 $(L_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$是光滑平凡的，即存在一个光滑族 $(s_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ ，使得$s_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})$ 处处非零。

这里，截面族 $(s_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 是指等变提升族$\widetilde{s}_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M) \subset C^\infty(M)$ 关于 $\boldsymbol{\theta}$光滑依赖。

证明。 由命题 2.5，存在一个光滑的 1-形式族 $(\eta_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 定义在 M_0 上，满足（2.2）。由引理 2.4，存在逐点单位范数的等变函数 $\widetilde{s}_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$，因此它们下降为所需的 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 截面 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ ，且逐点范数为单位范数。证毕。 □

注记 2.7。 我们注意到，线丛族 $\{L_{\boldsymbol{\theta}} \mid \boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d\}$ 作为一个族并不平凡，也就是说，我们无法选取一个由平凡化截面组成的光滑族 $\{s_{\boldsymbol{\theta}} \mid \boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d\}$ 。事实上，若存在这样一个族 $(s_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}}$，那么我们也会得到一个由 1-形式组成的光滑族 $(\eta_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(M_0,\ T^*M_0)$，由公式导出

$$s_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} d s_{\boldsymbol{\theta}} = i\pi^* \eta_{\boldsymbol{\theta}},$$

见引理 2.4，它满足：对于任意回路 $\gamma \subset M_0$

$$\int_\gamma \eta_{\boldsymbol{\theta}} = \rho(\gamma) \cdot \boldsymbol{\theta} \mod 2\pi.$$

求导后，我们得到 $\int_\gamma D_v \eta_{\boldsymbol{\theta}} = \rho(\gamma) \cdot v$，其中 $D_v \eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 视为沿 $v \in \mathbb{R}^d$方向对 $\boldsymbol{\theta}$变量求方向导数。令 δ 为环面 $\mathrm{U}(1)^d$上的闭测地线，该测地线从原点出发，与 $v \in (2\pi\mathbb{Z})^d$ 相切，长度为 $|v|$。沿 δ对前一个等式积分，得到 $0 = \rho(\gamma) \cdot v$。这将意味着 $\rho \equiv 0$，与我们的假设矛盾，因为 ρ 是满射。

选取一个代表元 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$，使其 $[\eta_{\boldsymbol{\theta}}]$ 如命题2.2所述。根据引理2.4，存在一个等变函数 $s_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$，其范数逐点为单位范数；并且存在一个同构

$$C^\infty(M_0) \to C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M), \qquad f \mapsto F_{\boldsymbol{\theta}} := (\pi^* f) s_{\boldsymbol{\theta}}.$$

反过来，逆映射记作

$$C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M) \to C^\infty(M_0), \qquad F_{\boldsymbol{\theta}} \mapsto f_{\boldsymbol{\theta}},$$

其中 $f_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(M_0)$ 是满足 $F_{\boldsymbol{\theta}}/s_{\boldsymbol{\theta}} = \pi^* f_{\boldsymbol{\theta}}$ 的唯一函数。注意，由于 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 逐点具有单位范数，因此它在相差一个形如 $\pi^* h$ 的函数因子的意义下唯一确定，其中 $h \in C^\infty(M_0)$ 逐点具有单位范数；因此，上述对应关系也在相差乘以 $\pi^* h$ 的意义下唯一。还要注意，$C^\infty_{\mathbf{0}}(M)$ 对应于 $\mathbb{Z}^d$-周期函数，因此它们是定义在 M_0 上的函数的拉回，即 $C^\infty_{\mathbf{0}}(M) = \pi^* C^\infty(M_0)$。根据命题2.5，对于在可缩开集 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$ 中变化的 $\boldsymbol{\theta}$，我们可以光滑地进行这一过程。

我们在 $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 上引入如下 L^2-范数；在上述对应关系下，它与 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 的截面上的 L^2 范数一致：

$$\|F_{\boldsymbol{\theta}}\|^2_{L^2_{\boldsymbol{\theta}}(M)} := \|F_{\boldsymbol{\theta}}\|^2_{L^2(M, L_{\boldsymbol{\theta}})} = \|f_{\boldsymbol{\theta}}\|^2_{L^2(M_0)},$$

其中 $L^2(M_0)$ 是相对于体积测度 vol_{M_0} 而言的。这里我们略微滥用记号，将 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 的截面等同于 $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 中的等变函数。空间 $L^2_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 则定义为 $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 关于该范数的完备化。

现在我们用其傅里叶模来表示任意光滑函数。

命题 2.8。设 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$。则

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} F_{\boldsymbol{\theta}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, \tag{2.6}$$

其中 $F_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 定义为

$$F_{\boldsymbol{\theta}}(x) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\tau_{\mathbf{n}}(x)) e^{-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \quad x \in M. \tag{2.7}$$

最后，我们有如下帕塞瓦尔恒等式：对所有 f、$g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$，

$$\langle f, g \rangle_{L^2(M)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} \langle F_{\boldsymbol{\theta}}, G_{\boldsymbol{\theta}} \rangle_{L^2(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}. \tag{2.8}$$

这里，$L^2(M)$ 是相对于测度 vol_M 定义的。

证明。对于第一部分，注意定义 $F_{\boldsymbol{\theta}}$ 的和收敛，因为 $\mathbb{Z}^d$-作用是真的（即对每个 $x \in M$ 和 $K \subset M$ 紧的，只有有限多个$\mathbf{n} \in K$ 使得 $\tau_{\mathbf{n}} x \in K$），并且 f 具有紧支撑；它显然满足 $F_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$。此外，（2.6）容易验证。

对于第二部分，设 $y_0 \in M_{x_0}$ 为任意的。则

$$\int_{M_{x_0}} f(y)\overline{g}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\tau_{\mathbf{n}}y_0)\overline{g}(\tau_{\mathbf{n}}y_0)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{U}(1)^d} F_{\boldsymbol{\theta}}(y_0)\overline{G_{\boldsymbol{\theta}}}(y_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{U}(1)} \langle F_{\boldsymbol{\theta}}(x_0),\ G_{\boldsymbol{\theta}}(x_0)\rangle_{L_{\boldsymbol{\theta}}(x_0)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta},$$

其中 $F_{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $G_{\boldsymbol{\theta}}$ 分别是 $\boldsymbol{\theta}$-频率部分，属于 f 和 g （分别定义于（2.7）中），在最后一个等式中，我们将它们与 $L_{\boldsymbol{\theta}}$的截面相对应。由于 $x_0 \in M_0$ 是任意的，在 M_0 上积分即完成证明。□

我们以关于在 $\boldsymbol{\theta}$ 中对 $f_{\boldsymbol{\theta}}$ 求导所得结果及其在 f上的相应操作的辅助断言结束本节。我们固定一个如上所述的开可缩集 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$ ，并在 U上进行讨论。定义

$$H_j(x) := \int_{\widehat{x}_0}^{x} \pi^*\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}, \quad x \in M, \quad 1 \le j \le d,$$

其中积分沿着基点 $\widehat{x}_0 \in M$ 与 x之间的任意路径进行。其定义良好性可用与（2.4）相同的方式验证。或者，我们也可以注意到

$$s_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}s_{\boldsymbol{\theta}} = iH_j \tag{2.9}$$

这直接表明 H_j 定义良好。对于多重指标 α ，我们可以令$\mathbf{H}^\alpha := \prod_{j=1}^d H_j^{\alpha_j}$ 。于是有

命题 2.9。 对于任意多重指标 α ，我们有

$$\partial_{\boldsymbol{\theta}}^\alpha f_{\boldsymbol{\theta}} = (-i)^{|\alpha|}(\mathbf{H}^\alpha f)_{\boldsymbol{\theta}}, \quad f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M), \quad \boldsymbol{\theta} \in U.$$

证明。 只需考虑情形 $|\alpha| = 1$ ，因为其他情形可通过迭代得到。固定一个指标 j；然后对关系式 $s_{\boldsymbol{\theta}} \circ \tau_{\mathbf{n}} = e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}s_{\boldsymbol{\theta}}$ 求导，该关系式由引理 2.4给出，对任意 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$均成立，我们得到

$$iH_j \circ \tau_{\mathbf{n}} \cdot s_{\boldsymbol{\theta}} \circ \tau_{\mathbf{n}} = \partial_{\boldsymbol{\theta}_j}s_{\boldsymbol{\theta}} \circ \tau_{\mathbf{n}} = in_j e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}s_{\boldsymbol{\theta}} + e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}s_{\boldsymbol{\theta}} = i(n_j + H_j)e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}s_{\boldsymbol{\theta}},$$

其中在第一个和最后一个等式中用到了（2.9）。由此可得

$$H_j \circ \tau_{\mathbf{n}} = n_j + H_j, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.10}$$

对等式 $F_{\boldsymbol{\theta}} = s_{\boldsymbol{\theta}}\pi^* f_{\boldsymbol{\theta}}$ 求导，我们得到

$$s_{\boldsymbol{\theta}}\pi^*\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}f_{\boldsymbol{\theta}} = \partial_{\boldsymbol{\theta}_j}F_{\boldsymbol{\theta}} - \partial_{\boldsymbol{\theta}_j}s_{\boldsymbol{\theta}}\pi^* f_{\boldsymbol{\theta}} = (-in_j)F_{\boldsymbol{\theta}} - iH_j s_{\boldsymbol{\theta}}\pi^* f_{\boldsymbol{\theta}} = (-i)(n_j + H_j)F_{\boldsymbol{\theta}} = -i(fH_j)_{\boldsymbol{\theta}},$$

其中，在最后一个等式中我们使用了（2.10）。证明至此完成。 □

2.3. 阿贝尔扩张的拓扑。如上所述， M_0 表示一个光滑、闭且连通的流形，而 π: $M \to M_0$ 是通过满射表示ρ: $\pi_1(M_0, x_0) \to \mathbb{Z}^d$定义的一个 $\mathbb{Z}^d$-延拓。设 p: $P_0 \to M_0$ 是基于 M_0 的一个 G-主丛，其中 G 是一个$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$紧李群。设 P_0和 M_0 分别为 P_0 和 M_0的万有覆盖。我们引入

$$P := \widetilde{P}_0 \times_{\rho\circ p_*} \mathbb{Z}^d,$$

与表示 $\rho\circ p_*$ 相关联的阿贝尔覆盖，其中 p_*: $\pi_1(P_0, z_0) \to \pi_1(M_0, x_0)$ 是由 p 诱导的映射，其中 $z_0 \in P_{x_0}$ 是任意的。

引理 2.10。以下结论成立:

i) P 是 G-丛，其底空间为 M；并且是 M_0 上的 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-丛；*ii)* $P \simeq \pi^* P_0$ 是 M 上的 G-丛，并且是 M_0 上的 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-丛。

证明。回顾一下，按照构造，拓扑空间的万有覆盖定义为以给定点为基点的连续路径集合，再模去端点固定的同伦。令 $z_0 \in P$ 和 $x_0 := p(z_0) \in M_0$，其中 p: $P_0 \to M_0$ 是投影。令 γ_{P_0}: $[0,1] \to P_0$ 为一条路径，满足 $\gamma_{P_0}(0) = z_0$ 且 $\gamma_{P_0}(1) = z \in P$。该路径投影为路径 $\gamma_{M_0} := p \circ \gamma_{P_0}$，满足 $\gamma_{M_0}(0) = x_0$ 且 $\gamma_{M_0}(1) = x \in M_0$，这表明$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$存在一个良定义的映射 $\widetilde{p}$: $P_0 \to M_0$。此外，在 P_0 上存在$\sim$ $\sim G$ 的良定义作用，由 $R_g(\gamma_{P_0}) := R_g \circ \gamma_{P_0}$ 给出（其中 R_g: $P_0 \to P_0$ 是 $g \in G$$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在 P_0 上的右作用），并且 $\widetilde{p}$: $P_0 \to M_0$ 是关于此作用的 G-丛映射。最后，根据构造，对于 $\gamma \in \pi_1(P_0, z_0)$ 和 $z \in P_0$，显然有 $\widetilde{p}(\gamma.z) = p_*(\gamma).\widetilde{p}(z)$，其中 p_*: $\pi_1(P_0, z_0) \to \pi_1(M_0, x_0)$ 是同伦中诱导的映射。为简化记号，下面省略 $\pi_1(M_0, x_0)$（分别为 $\pi_1(P_0, z_0)$）对基点 $x_0 \in M_0$（分别为 $z_0 \in P_0$）的依赖。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$步骤 *1*。 P是一个 G-纤维丛，底空间为 M。我们声称映射 $\widetilde{p} \times \mathrm{id}$: $P_0 \times \mathbb{Z}^d \to M_0 \times \mathbb{Z}^d$可下降为一个 G-纤维丛映射 p: $P \to M$。首先，我们检查 $\widetilde{p} \times \mathrm{id}$ 关于定义域和陪域上 $\pi_1(P_0)$ 与 $\pi_1(M_0)$ 的作用是等变的。$\widetilde{\quad}$令 $\widetilde{z} \in P_0$、$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$，并令 $\gamma \in \pi_1(P_0)$。那么:

$$\begin{aligned}(\widetilde{p} \times \mathrm{id})(\gamma.(\widetilde{z}, \mathbf{n})) &= (\widetilde{p} \times \mathrm{id})(\gamma.\widetilde{z}, -(\rho \circ p_*)(\gamma) + \mathbf{n}) \\ &= (\widetilde{p}(\gamma.\widetilde{z}), -(\rho \circ p_*)(\gamma) + \mathbf{n}) \\ &= (p_*(\gamma).\widetilde{p}(\widetilde{z}), -(\rho(p_*(\gamma))) + \mathbf{n}) \\ &= p_*(\gamma).(\widetilde{p}(\widetilde{z}), \mathbf{n}),\end{aligned}$$

在第三个等号中，我们用到了 $\tilde{p}$ 与甲板变换相交织这一事实。此外，$\widetilde{\quad}$ G 在 P_0 上的作用下降到 P 上，因为它与 $\pi_1(P_0)$ 的作用可交换。这表明诱导映射 p: $P \to M$ 是一个 G- 纤维丛映射。

步骤 *2*. P 是一个 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-丛，底空间为 M_0. 在 P 上的右 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-作用定义为$[\widetilde{z}, \mathbf{n}] \cdot (g, \mathbf{k}) := [\widetilde{z} \cdot g, \mathbf{n} + \mathbf{k}]$, 按照与步骤 1 相同的证明，这在 P 上是良定义的。回想一下， $\pi: M \to M_0$ 是投影。验证$\pi \circ p(\bullet \cdot (g, \mathbf{k})) = \pi \circ p(\bullet)$也显然成立。因此，$(\pi \circ p)$: $P \to M_0$是一个 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-丛映射。

步骤3. π^*P_0 与 P 作为 G-丛，在 M 上同构。令 $q_M\colon M_0 \to M_0$ 和 $q_P\colon P_0 \to P_0$ 为投影。定义

$$\varphi\colon \widetilde{P}_0 \times \mathbb{Z}^d \to \pi^*P_0, \qquad \varphi(\widetilde{z}, \mathbf{n}) := ([\widetilde{p}(\widetilde{z}), \mathbf{n}], q_P(\widetilde{z})).$$

简单计算可知，φ 可下降为映射 $\varphi\colon P \to \pi^*P_0$。事实上，令 $\gamma \in \pi_1(P_0), \widetilde{z} \in \widetilde{P}_0, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$；那么，与步骤 1 中一样，可以得到 $\varphi(\gamma.(\widetilde{z}, \mathbf{n})) = ([\widetilde{p}(\widetilde{z}), \mathbf{n}], q_P(\widetilde{z})) = \varphi(\widetilde{z}, \mathbf{n})$。此外，也很容易验证，$\varphi$ 与作用在 π^*P_0 和 P 上的两个 G-作用相交织，并且 $\mathrm{pr} \circ \varphi = \overline{p}$，其中 $\mathrm{pr}\colon \pi^*P_0 \to M$ 是投影。

现在我们证明 φ 是双射。首先，考察单射性。令 $[\widetilde{z}_j, \mathbf{n}_j] \in P$，其中 $j = 1,2$，满足

$$\overline{\varphi}([\widetilde{z}_1, \mathbf{n}_1]) = \overline{\varphi}([\widetilde{z}_2, \mathbf{n}_2]). \tag{2.11}$$

这意味着 $q_P(\widetilde{z}_2) = q_P(\widetilde{z}_1)$。因此，存在 $\gamma \in \pi_1(P_0)$ 使得 $\widetilde{z}_2 = \gamma.\widetilde{z}_1$。然后，利用（2.11）第一项的相等性可得

$$[\widetilde{p}(\widetilde{z}_1), \mathbf{n}_1] = [\widetilde{p}(\widetilde{z}_2), \mathbf{n}_2] = [\widetilde{p}(\gamma.\widetilde{z}_1), \mathbf{n}_2] = [p_*(\gamma).\widetilde{p}(\widetilde{z}_1), \mathbf{n}_2] = [\widetilde{p}(\widetilde{z}_1), \rho(p_*(\gamma)) + \mathbf{n}_2].$$

比较左右两边，我们得出 $\mathbf{n}_2 = -\rho(p_*(\gamma)) + \mathbf{n}_1$，，这表明 $[\widetilde{z}_1, \mathbf{n}_1] = [\widetilde{z}_2, \mathbf{n}_2]$。

我们现在证明满射性。考虑 $([\widetilde{x}, \mathbf{n}], z) \in \pi^*P_0$，其中 $z \in P_x$ 且 $x := q_M(\widetilde{x})$。由构造，$\widetilde{x}$ 对应于一条连接基点 x_0 与 x 的路径，它可以提升为一条从 $z_0 \in P_{x_0}$ 到 z 的路径 $\widetilde{z} \in P$。然后 $\varphi(\widetilde{z}, \mathbf{n}) = ([\widetilde{p}(\widetilde{z}), \mathbf{n}], q_P(\widetilde{z})) = ([\widetilde{x}, \mathbf{n}], z)$。至此完成第三步的证明。

步骤3. $(\pi \circ \mathrm{pr})\colon \pi^*P_0 \to M_0$ 和 $(\pi \circ p)\colon \mathcal{P} \to M_0$ 作为 $(G \times \mathbb{Z}^d)$-丛，都是 M_0 上的同构。在 $(G \times \mathbb{Z}^d)$ 对 π^*P_0 的作用定义为

$$([x, \mathbf{n}], y) \cdot (g, \mathbf{k}) := ([x, \mathbf{n} + \mathbf{k}], y \cdot g).$$

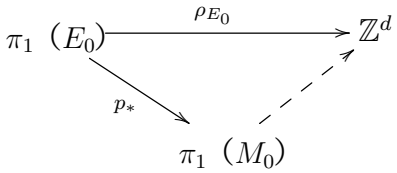
接着，我们可以像步骤3中那样定义 φ。类似于该步骤的证明表明，φ 是一个同构，$(\pi \circ \mathrm{pr})\varphi = \pi \circ p$，且 φ 交织了两个作用。至此，证明完成。□

回顾一下，连通的 $\mathbb{Z}^d$-覆盖 $M \to M_0$ 是一个满射表示 $\rho\colon \pi_1(M_0) \to \mathbb{Z}^d$。设 $p\colon E_0 \to M_0$ 是一个以 F 为典型纤维的纤维丛；那么 $\rho \circ p_*\colon \pi_1(E_0) \to \mathbb{Z}^d$ 定义了 $\pi_1(E_0)$ 的一个表示，因此是 E_0 的一个 $\mathbb{Z}^d$-覆盖。一个自然的问题是，我们能否反过来构造；也就是说，给定 E_0 的一个 $\mathbb{Z}^d$-覆盖，我们能否得到 M_0 的一个 $\mathbb{Z}^d$-覆盖？在对 F 的某些假设下，我们可以证明情况确实如此：

引理 2.11. 假设 $p\colon E_0 \to M_0$ 是一个典型纤维为 F 的纤维丛，且 F 是连通的，$\pi_1(F)$ 是有限集。那么 $\mathbb{Z}^d$-覆盖 E_0 与 $\mathbb{Z}^d$-覆盖 M_0 之间存在一一对应。

特别地，该引理适用于所有主丛 $p\colon P_0 \to M_0$ 其 G 紧且半单，而 $\pi_1(G)$ 是有限的，参见 [BtD95，注 7。13] 例如。

证明。 这归结为证明存在一个映射 $\pi_1(M_0) \to \mathbb{Z}^d$ ，使得下图交换：



然而，我们可以利用赫urewicz映射将 ρ_{E_0} 分解为经过 E_0 的第一同调群。因此，只需在同调的无挠部分之间建立同构；也就是说，我们将证明 $H_1(E_0, \mathbb{Z})/\text{Tor} \cong H_1(M_0, \mathbb{Z})/\text{Tor}$。该纤维化 $F \hookrightarrow E_0 \xrightarrow{p} M_0$ 给出长正合序列

$$\cdots \to \pi_1(F) \to \pi_1(E_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(M_0) \to \pi_0(F) \to \cdots$$

由于 F 是连通的， $\pi_0(F)$ 是平凡的，因此 p_* 是满射。取阿贝尔化后，赫urewicz定理给出

$$\pi_1(F)^{\text{Ab}} \to H_1(E_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*^{\text{Ab}}} H_1(M_0, \mathbb{Z}),$$

其中， $\bullet^{\text{Ab}}$ 表示该群的阿贝尔化，而 p_*^{ab}是由 p_*诱导的映射；由于阿贝尔化是右正合函子，该映射仍然是满射。由于 $\pi_1(F)^{\text{Ab}}$ 是有限的，其在 $H_1(E_0, \mathbb{Z})$ 中的像属于挠部分；因此，$\ker p_*^{\text{Ab}}$包含于挠部分中，故诱导映射

$$H_1(E_0, \mathbb{Z})/\text{Tor} \xrightarrow{p_*^{\text{Ab}}} H_1(M_0, \mathbb{Z})/\text{Tor}$$

是一个同构。 □

最后，我们关注黎曼流形的阿贝尔扩张这一特殊情形。对于黎曼流形 N_0，我们用 SN_0 表示其单位切丛，用 FN_0 表示其标架丛。

引理*2.12.* 设 N_0 是一个闭连通黎曼流形，满足 $\dim N_0 \geq 3$，$\rho\colon \pi_1(N_0) \to \mathbb{Z}^d$ 是一个满射表示，$q\colon \widetilde{N}_0 \to N_0$ 是其万有覆盖，并且设 $\pi\colon N = N_0 \times_\rho \mathbb{Z}^d \to N_0$ 为相应的阿贝尔覆盖。则 $SN \cong SN_0 \times_{\rho\circ(p_{SN_0})_*} \widetilde{\mathbb{Z}^d}$ 和 $FN \cong FN_0 \times_{\rho\circ(p_{FN_0})_*} \mathbb{Z}^d$，其中 $p_{FN_0}\colon FN_0 \to N_0$ 和 $p_{SN_0}\colon SN_0 \to N_0$ 是投影。此外， FN 是 SN 上的 $SO(n-1)$-丛，也是 SN_0 上的 $(SO(n-1) \times \mathbb{Z}^d)$-丛。

证明。 由于 $n := \dim N_0 \geq 3$， $\pi_1(S^{n-1}) = \{0\}$ 以及 $\pi_1(\text{SO}(n-1))$ 是有限的。根据引理 2.11， N_0、SN_0 和 FN_0的阿贝尔覆盖之间存在一一对应关系。由此即可轻易得出该结论。 □

2.4. 阿贝尔覆盖上的函数空间。 设 g_0 是 M_0 上任意一个背景度量，并令 g 表示其在 M 上的提升。设 ∇ 为由 g 在 M 上诱导的 Levi-Civita 联络。回顾一下，给定 $u \in C^\infty(M)$ 和一个整数 $s \geq 0$， $\nabla^s u$ 是对称s张量丛 $\mathrm{Sym}^s(T^*M)$ 的一个截面， $\to M$ 满足

$$\nabla^s u(x; v, \dots, v) := \partial_t^s u(\gamma(t))|_{t=0}, \qquad \forall (x, v) \in TM,$$

其中 $t \mapsto \gamma(t)$ 是由 (x, v) 生成的测地线。向量丛 $\mathrm{Sym}^s(T^*M) \to M$在其纤维上带有由黎曼度量 g 诱导的自然内积。我们注意到，由定义，对每个 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$，有 $\tau_{\mathbf{n}} : (M, g) \to (M, g)$ 是一个等距映射，并且 $\tau_{\mathbf{n}}$的微分是 $\mathrm{Sym}^s(T^*M)$ 的纤维上的等距映射。

给定整数 $s \geq 0$ 和开子集 $U \subset M$， U 上的 H^s-范数定义为:

$$\|u\|_{H^s(U)}^2 := \|u\|_{L^2(U)}^2 + \|\nabla^s u\|_{L^2(U, \mathrm{Sym}^s T^*U)}^2,$$

并且 C^s-范数定义为

$$\|u\|_{C^s(U)} := \|u\|_{C^0(U)} + \|\nabla^s u\|_{C^0(U, \mathrm{Sym}^s T^*U)}.$$

由于 $\tau_{\mathbf{n}}$通过 $\mathrm{Sym}^s(T^*M)$ 的等距映射作用，我们有

$$\|\tau_{\mathbf{n}}^* u\|_{F^s(U)} = \|u\|_{F^s(\tau_{\mathbf{n}} U)}, \quad F \in \{C, H\}. \tag{2.12}$$

设 $\widehat{x}_0 \in M$ 为 M 中的任意一点。设 $D \subset M$ 为具有光滑边界的相对紧开子集，使得 $\widehat{x}_0 \in D$ 且 $\pi\colon D \to M_0$ 是满射。对于非负整数 $r, s \geq 0$，我们引入范数

$$\|u\|_{B^{s,r}(M)} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{n} \rangle^r \|u\|_{H^s(\tau_{\mathbf{n}} D)},$$

其中 $\langle n \rangle := (1 + |\mathbf{n}|^2)^{1/2}$ ，且 $|\bullet|$ 是 $\mathbb{Z}^d$中的欧几里得范数。空间 $B^{s,r}(M)$ 定义为 $C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 关于上述范数的完备化。类似地，我们令

$$\|u\|_{C^{s,r}(M)} := \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{n} \rangle^r \|u\|_{C^s(\tau_{\mathbf{n}} D)},$$

并将 $C^{s,r}(M)$ 定义为 $C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 关于范数 $\|\bullet\|_{C^{s,r}(M)}$ 的完备化。容易验证，泛函空间 $F^{s,r}(M)$ 不依赖于背景度量 g_0在 M_0上的选取以及区域 $D \subset M$的选取，因为 $F \in \{B, C\}$（不同的 D 选择会给出等价的范数）。对于非整数值的 $r, s \geq 0$ 和 $F \in \{B, C\}$，空间 $F^{s,r}(M)$ 通过实插值定义。下面的引理是标准结果的推论。

引理 2.13. 令 $r, s \geq 0$。对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C > 0$ ，使得:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^{s,r}(M)} &\leq C \|u\|_{C^{s,r+d+\varepsilon}(M)}, && \forall u \in C^{s,r+d+\varepsilon}(M), \\ \|u\|_{C^{s,r}(M)} &\leq C \|u\|_{B^{s+n/2+\varepsilon,r}(M)}, && \forall u \in H^{s+n/2+\varepsilon,r}(M). \end{aligned}$$

证明. 对于第一个估计，当 $u \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 时，我们有

$$\|u\|_{B^{s,r}(M)} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{n}\rangle^r \|u\|_{H^s(\tau_{\mathbf{n}}D)} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{n}\rangle^{-d-\varepsilon}\langle \mathbf{n}\rangle^{r+d+\varepsilon}\|u\|_{H^s(\tau_{\mathbf{n}}D)}$$
$$\leq \|u\|_{C^{s,r+d+\varepsilon}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathbf{n}\rangle^{-d-\varepsilon},$$

这便证明了该界，因为对$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ 的求和收敛。

For 第二个，对某个 $C > 0$，以及对所有 $u \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$和$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$，我们有 e

$$\|u\|_{C^s(\tau_{\mathbf{n}}D)} = \|\tau^*_{\mathbf{n}}u\|_{C^s(D)} \leq C\|\tau^*_{\mathbf{n}}u\|_{H^{s+\frac{n}{2}+\varepsilon}(D)} = C\|u\|_{H^{s+\frac{n}{2}+\varepsilon}(\tau_{\mathbf{n}}D)},$$

其中，在等式中我们使用了（2.12），并在不等式中使用了经典Sobolev嵌入定理于 D上。第二个估计随即得出，从而完成证明。

□

开子集 $U \subset \mathbf{U(1)}^d$ 称为良好的，如果存在U 的开邻域 $V \subset \mathbf{U(1)}^d$，使得 V 是可缩的。在下一个引理中，给定 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$以及$U \subset \mathbf{U(1)}^d$（一个良好开子集），我们记 $f_\bullet \in C^\infty(U, C^\infty(M_0))$表示§2.2中定义的函数$U \to C^\infty(M_0)$ $\boldsymbol{\theta} \mapsto f_{\boldsymbol{\theta}}$。对于整数 $k \geq 0$，我们将记

$$\|f_\bullet\|_{C^k(U,H^s(M_0))} := \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in U} \|\partial^\alpha_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(M_0)}.$$

引理 2.14。设 $U \subset \mathbf{U(1)}^d$ 为良好开子集，$k \geq 0$ 为整数，且 $s \geq 0$ 为非负实数。则存在 $C > 0$ 使得对所有 $f \in B^{s,\,k}(M)$

$$\|f_\bullet\|_{C^k(U,H^s(M_0))} \leq C\|f\|_{B^{s,k}(M)}.$$

证明。我们首先证明该断言对于 $k = 0$成立。只需对整数$s \geq 0$证明该断言，因为一般情形可由插值得到。对于 $x \in M$，利用（2.7），我们写出

$$F_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \pi^* f_{\boldsymbol{\theta}}(x) s_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\tau_{\mathbf{n}}(x)) e^{-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.13}$$

由此可得：

$$\|f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(M_0)} \leq \|\pi^* f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(D)} = \|s^{-1}_{\boldsymbol{\theta}} F_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(D)} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|s^{-1}_{\boldsymbol{\theta}} f(\tau_{\mathbf{n}}\bullet)\|_{H^s(D)}$$
$$\leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|s^{-1}_{\boldsymbol{\theta}}\|_{C^s(D)} \|f(\tau_{\mathbf{n}}\bullet)\|_{H^s(D)}$$
$$\leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f(\bullet)\|_{H^s(\tau_{\mathbf{n}}D)} = C\|f\|_{B^{s,0}(M)},$$

其中在最后一行我们使用了（2.12）。对于 $k \geq 1$的一般取值，该估计通过对（2.13）关于 $\boldsymbol{\theta}$ 求导并应用前述论证得到。□

2.5. **动力学联络**。现在我们回顾关于动力学联络的标准内容。参见 [CL24a，第4.2节。1] 或 [Lef25，第 12] 章，了解更多讨论。

2.5.1. 仿射情形。设 $E \to M_0$ 是一个厄米向量丛。回忆一下， X_{M_0} 表示生成保体积 Anosov 流 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$的向量场。令

$$\mathbf{X}\colon C^\infty(M_0,E)\to C^\infty(M_0,E)$$

是一个一阶微分算子，使得

$$\mathbf{X}(f\otimes s)=X_{M_0}f\otimes s+f\otimes \mathbf{X}s,$$

对所有 $f\in C^\infty(M_0)$， $s\in C^\infty(M_0,\ E)$ 均成立。这样的算子称为将 X_{M_0} 提升到 E的截面上的提升 。

存在一个良定义的纤维线性余循环 C，使得对所有 $s\in C^\infty(M_0,\ E)$：

$$(e^{-t\mathbf{X}}s)(\varphi_t^0x)=C(t,x)s(x),\qquad \forall t\in\mathbb{R},x\in M_0,$$

其中 $(e^{t\mathbf{X}})_{t\in\mathbb{R}}$是$\mathbf{X}$的传播子，而 $C(x,\ t)$： $E_x\to E_{\varphi_t^0x}$是一个线性映射，且关于两个参数均光滑。当且仅当$\mathbf{X}$ 在 $L^2(M_0,\ E)$上斜自伴时，映射 $C(t,\ x)$ 是等距映射（对所有 $t,\ x$）；（等价地，$(e^{t\mathbf{X}})_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $L^2(M_0,\ E)$上是酉的）。从现在起，我们将在这一基本假设下工作。

算子 $\mathbf{X}$ 在 E 上诱导出一个部分双曲流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ，使得对所有 $x\in M_0$、 $s\in E_x$、 $\Phi_t(s):=C(t,x)s$ 均成立（例如参见 [Lef25, 第12.1.1节。2]）。特别地， E上存在良定义的稳定流形和不稳定流形 $W^s,_E{}^u$ 。稳定 holonomy 是线性映射 $\mathbf{H}^s$： $E_x\to E_y$，对所有 $x\in M_0$和 $y\in W^s(x)$ 定义，使得 $\mathbf{H}^s s\in E_y$ 是交点 $W_E^s(s)\cap E_y=\{\mathbf{H}^s s\}$ 的（唯一）点。不稳定 holonomy 映射 $\mathbf{H}^u$： $E_x\to E_y$对 $y\in W^u(x)$的定义类似。最后，中心 holonomy 利用流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$本身定义，即对于 $x\in M_0, y=\varphi_t^0x$，$\mathbf{H}^c s:=\Phi_t s$。由于中心丛、稳定丛和不稳定丛张成整个 TM_0（即 $TM_0=\mathbb{R}X_{M_0}\oplus E_s\oplus E_u$），可以很容易看出，这些 holonomy 均源于 E 上的酉联络 ∇^{dyn}，称为动力学联络（参见 [CL24a, 第 4.2 节。1]）。一般而言，这一联络仅为赫尔德连续（关于该联络正则性的进一步讨论，参见 [Bea25] ）。然而，若 $\mathbf{X}=\nabla^E_{X_{M_0}}$，其中 ∇^E 是 E中的平坦酉联络，简单计算可得 $\nabla^{\mathrm{dyn}}=\nabla^E$。

存在一个良好定义的曲率 $F_{\nabla^{\mathrm{dyn}}}$，与 ∇^{dyn}相关联。它是一个取值于 E的斜自伴端omorphism的分布型2-形式，即

$$F_{\nabla^{\mathrm{dyn}}}\in\mathcal{D}'(M_0,\Lambda^2T^*M_0\otimes\mathrm{End}_{\mathrm{sk}}(E)).$$

2.5.2. 主丛。 同样的构造也可以在主丛上进行。设 $p\colon P_0\to M_0$是一个 G-主丛，其中 G 是一个紧李群，并且 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 (φ_t^0) 到 P_0 的一个等变延拓，满足如下意义： $\varphi_t^0\circ p=p\circ\psi_t^0$，且对所有 $t\in\mathbb{R}$， $g\in G$，都有 $R_g\circ\psi_t^0=\psi_t^0\circ R_g$。流 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 P_0 上是部分双曲的（参见 [Lef25，第 12.1.1 节2]），因此可以像上文那样，为分别位于 x 的中心、稳定或不稳定流形上的 $x\in M_0$ 和 y 定义中心、稳定和不稳定 holonomy 映射 $\mathbf{H}^{c,\ s,\ u}\colon (P_0)_x\to(P_0)_y$。这些 holonomy 对应于$P_0$上的一个 G-等变联络的平行移动，该联络称为动力学联络。

该联络的全纯群（它是 G的一个子群）称为Brin（预）传递群。它在 G 中稠密，当且仅当流$(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 是遍历的，关于

关于概率测度 ν_0，局部作为vol_{M_0} 与 G上的Haar测度之积而得到，参见 [Lef25，第12节。4]。动力学联络的曲率是一个分布意义下的2-形式，取值于 P_0的伴随丛，即

$$F \in \mathcal{D}'(M_0, \Lambda^2 T^* M_0 \otimes \mathrm{Ad}(P_0)).$$

设 $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V)$ 是 G 的酉表示，$E := P_0 \times_\rho V$ 是相应的伴随丛。流 $(\psi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 E 上诱导出一个流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$，定义为 $\Phi_t([\xi, s]) := [\psi_t^0 \xi, s]$。类似地，$G$-等变的动力学联络以函子方式诱导出 E 上的酉关联联络 ∇。显然可以验证，§2.5.1 中介绍的由 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 E 上诱导的动力学联络 ∇^{dyn} 与 ∇ 一致。

3. 半经典分析预备知识

3.1. **半经典分析**。本节回顾并陈述半经典分析中的关键概念和工具。关于本节内容的更多细节，请参见 [DZ19，附录 E], [Zwo12，Lef25]。

3.1.1. 定义与基本性质。 回顾一下，对于 $\xi \in \mathbb{R}^n$，日式括号定义为 $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$，其中 $|\bullet|$ 是欧几里得范数。给定 $m \in \mathbb{R}$，我们将 $S^m(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $\mathbb{R}^n$ 上阶为 m的符号类，即由满足以下条件的函数$a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$组成：对所有 α，$\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，均存在 $C > 0$ 使得

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}, \qquad \forall (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

在光滑闭流形 M_0上，类 $S^m(M_0) \subset C^\infty(T^*M_0)$ 可类似地定义为阶为$m \in \mathbb{R}$ 的符号类，要求在任意局部坐标图中都满足（3.1）。还可以让 a 依赖于额外的半经典参数 $h > 0$；不过在这种情况下，要求（3.1）关于 h一致成立。

$\mathbb{R}^n$ 上的标准（左）半经典量化，对 $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ 和 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ 定义如下：

$$\mathrm{Op}_h^{\mathbb{R}^n}(a) f(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}^n_y} e^{\frac{i}{h}\xi\cdot(x-y)} a(x,\xi) f(y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi. \tag{3.2}$$

众所周知，利用局部坐标图，可以定义一个量子化过程Op_h 作用于M_0，将 $S^m(M_0)$ 映射到半经典伪微分算子类 [Zwo12，第 14]章。于是令

$$\Psi_h^m(M_0) := \{\mathrm{Op}_h(a) + R \ :\ a \in S^m(M_0), R \in h^\infty \Psi_h^{-\infty}(M_0)\},$$

为阶数为 m 的半经典伪微分算子集合。这里，R 是一个 $\mathcal{O}(h^\infty)$-光滑化算子，也就是说，对于任意 $N > 0$，它都将 $H_h^{-N}(M_0)$ 有界地映射到 $\to H_h^N(M_0)$，其范数为 $\leq C_N h^N$。

对于 $s \in \mathbb{R}$，索伯列夫空间 $H_h^s(M_0)$ 被定义为 $C^\infty(M_0)$ 关于范数的完备化

$$\|f\|_{H_h^s(M_0)} := \|(1 + h^2 \Delta_{g_0})^s f\|_{L^2(M_0)},$$

其中， $\Delta_{g_0} \geq 0$ 是由 M_0 上任意背景黎曼度量 g_0 所诱导的拉普拉斯算子，而 $(1+h^2\Delta_{g_0})^s$ 则利用谱定理定义。Calderón–Vaillancourt 定理断言，任意 $A = \mathrm{Op}_h(a) \in \Psi_h^m(M_0)$ 作为映射都是有界的

$$A\colon H_h^{s+m}(M_0) \to H_h^s(M_0)$$

其范数为 $\|A\| \leq \|\langle\xi\rangle^{-m} a\|_{L^\infty(T^*M_0)} + \mathcal{O}(h)$。

3.1.2. 主要性质。 现在我们总结半经典分析中的一些标准结果，这些结果将在定理的证明过程中贯穿使用 1.1。我们将使用半经典波前集的概念 WF_h，参见 [DZ19，E 节。2] 以了解入门介绍。此外，使用余切丛的径向紧化 $T^*M_0 = T^*M_0 \sqcup \partial_\infty T^*M_0$ 会很方便，其中 $T^*M_0/\mathbb{R}_+^*$ 而 $\mathbb{R}_+^*$ 表示径向膨胀 $(x,\ \xi) \mapsto (x,\ \lambda\xi)$ 对于 $(x,\ \xi) \in T^*M_0$，$\lambda > 0$。

引理 3.1 （椭圆正则性）。 设 $A \in \Psi_h^m(M_0)$， $B \in \Psi_h^{m'}(M_0)$。假设 $\mathrm{WF}_h(B) \subset \mathrm{ell}(A)$。则存在 Q_L、$Q_R \in \Psi_h^{m'-m}(M_0)$ 使得

$$B = Q_L A + \mathcal{O}_{\Psi_h^{-\infty}(M_0)}(h^\infty) = AQ_R + \mathcal{O}_{\Psi_h^{-\infty}(M_0)}(h^\infty).$$

引理 3.2 （埃戈罗夫定理）。 设 $P \in \Psi_h^1(M_0)$ 具有实主符号 σ_P，$(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$为 T^*M_0 上由哈密顿量 σ_P 生成的哈密顿流，并设 $A \in \Psi_h^k(M_0)$。则

$$B(t) := e^{itP/h} A e^{-itP/h} \in \Psi_h^k(M_0), \quad \sigma_{B(t)}(x,\xi) = \sigma_A\left(\Phi_t(x,\xi)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

在下文中，我们令 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$ 并考虑一阶微分算子 $X_{\boldsymbol{\theta}}$作用于 $C^\infty(M_0)$ 它在下文§4 节中引入。其主符号与流生成元 X_{M_0} 的主符号一致，即 $X_{\boldsymbol{\theta}} - X_{M_0}$ 为零阶（且取虚值）。

引理 *3.3*（奇性传播）。设 $A, A' \in \Psi_h^0(M_0)$ 满足以下条件：对于所有 $(x,\xi) \in \mathrm{WF}_h(A)$，都存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\Phi_t(x,\xi) \in \mathrm{ell}(A')$。那么，存在 $B \in \Psi_h^0(M_0)$，使得对于所有 $s \in \mathbb{R}$，$N > 0$，$\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$，都存在 $C > 0$，使得对于所有 $f_h \in C^\infty(M_0)$，以下结论成立：

$$\|Af_h\|_{H_h^s} \leq C\left(\|BX_{\boldsymbol{\theta}} f_h\|_{H_h^s} + \|A' f_h\|_{H_h^s} + h^N \|f_h\|_{H_h^{-N}}\right)$$

此外，如果 f_h 仅为一个分布，且右端有限，那么 $Af_h \in H_h^s$，并且同样的估计成立。

下文中请注意，所谓的 阈值 $\omega_\pm(X_{\boldsymbol{\theta}})$ 在径向估计中为零，因为 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 是斜自伴的（见 [Lef25，注 11.1。3]关于定义）。

引理 3.4 (源/汇估计)。 *i)* 源估计。 对于所有足够大的 $s > 0$、 $N \gg 0$，以及所有波前集位于 $E_s^* \cap \partial_\infty T^*M_0$ 附近的 $A \in \Psi_h^0(M_0)$，存在一个波前集满足条件且在比 $\mathrm{WF}_h(A)$ 稍大的邻域上为椭圆的 $B \in \Psi_h^0(M_0)$，以及一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $h > 0$、$\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$，以及所有族 $f_h \in C^\infty(M_0)$，

$$\|Af_h\|_{H_h^s} \leq C\left(\|BX_{\boldsymbol{\theta}} f_h\|_{H_h^s} + h^N \|f_h\|_{H_h^{-N}}\right).$$

如果 $f_h \in \mathcal{D}'(M_0)$ 仅仅是一个分布族，且对某个$s_0 > 0$有 $BX_{\boldsymbol{\theta}} f_h \in H_h^{s_0}$，那么对于所有 $s > 0$， $Af_h \in H_h^s$，并且前述估计成立。

ii) 汇估计。对于所有足够大的 $s < 0$, $N \gg 0$，对于所有波前集位于 $E_u^* \cap \partial_\infty T^* M_0$ 附近的 $A \in \Psi_h^0(M_0)$，存在一个波前集位于比 $WF_h(A)$ 稍大的邻域内且在该邻域上为椭圆的 $B \in \Psi_h^0(M_0)$，以及 $A' \in \Psi_h^0(M_0)$，使得 $WF_h(A') \subset WF_h(B)$ 且 $WF_h(A') \cap E_u^* \cap \partial_\infty T^* M = \emptyset$，并且存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $h > 0$, $\boldsymbol{\theta} \in U(1)^d$，对于所有族 $f_h \in C^\infty(M_0)$，

$$\|Af_h\|_{H_h^s} \leq C \left(\|BX_{\boldsymbol{\theta}} f_h\|_{H_h^s} + \|A' f_h\|_{H_h^s} + h^N \|f_h\|_{H_h^{-N}} \right).$$

如果 $f_h \in \mathcal{D}'(M_0)$ 仅仅是一个分布族，使得 $BX_{\boldsymbol{\theta}} f_h \in H_h^{s_0}$ 且$A' f_h \in H_h^{s_0}$对某个 $s_0 < 0$ 成立，那么对于所有 $s < 0$， $Af_h \in H_h^s$ 成立，并且前述估计也成立。

证明见 [DZ16], [DZ19，附录 E], 或 [Lef25] 。注意，前述结论中的常数 $C > 0$ 可以相对于$\boldsymbol{\theta}$取为一致的。事实上，若不然，反证可知存在一列族 $(f_{n,\, h})_{n,\, h>0}$ 它们在 $C = n$取相应值、 $\boldsymbol{\theta}_n \to_{n\to\infty} \boldsymbol{\theta}$取相应值时满足反向不等式。适当缩放后，利用 $X_{\boldsymbol{\theta}_n} - X_{\boldsymbol{\theta}}$ 是一个零阶算子，且对任意 $N > 0$，其 $C^N(M_0)$ 范数为 $o_N(1)$，便与关于 $X_{\boldsymbol{\theta}}$的估计矛盾。

3.2. **博雷尔-韦伊演算**。 博雷尔-韦伊演算由 [CL24a] 引入，作为研究 G-等变（伪）微分算子的关键工具，这些算子作用于 G-主丛 $P_0 \to M_0$上，其中 G 是一个紧李群。给定一个酉表示 $\rho\colon\ G \to \mathrm{U}(V_\rho)$，记 $E_\rho := M_0 \times_\rho V_\rho$ 为相应的伴随向量丛，其定义为等价类 $[z, \xi] \sim [z.g, \rho(g)^{-1}\xi]$构成的集合，其中 $z \in P_0$， $\xi \in V_\rho$。

3.2.1. 一般描述。 在详述该构造之前，我们先解释 Borel-Weil 半经典演算的一般思想。设 $\mathbf{Q}\colon\ C^\infty(P_0) \to C^\infty(P_0)$ 是一个作用于 P_0 上函数的 G-等变微分算子。也就是说，$\mathbf{Q}$ 与 G 的右作用交换，即对所有 $g \in G$，有 $R_g^* \mathbf{Q} = \mathbf{Q} R_g^*$。根据彼得－韦伊定理，任意函数 $f \in C^\infty(P_0)$ 都可以在主丛的每条纤维中分解为傅里叶模。具体而言，对任意这样的 f，都可以与其傅里叶变换相关联

$$\mathcal{F}(f) := \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} f_\rho, \tag{3.3}$$

其中求和遍历 G，即 G 的所有酉不可约表示构成的集合， $f_\rho \in C^\infty(M_0, E^{\oplus \dim \rho})$ E_ρ，而 $E_\rho \to M_0$是相应的伴随向量丛。

由于$\mathbf{Q}$ 是等变的，它在上述分解上按对角方式作用，也就是说，它诱导出算子 $Q_\rho\colon\ C^\infty(M_0, E_\rho) \to C^\infty(M_0, E_\rho)$。在某些问题中，人们关心当 Q_ρ 在不可约表示空间中“趋于无穷”时，算子 Q_ρ 的行为。然而，这会带来若干问题。首先，除非 G是阿贝尔的，否则随着 ρ“增大”， E_ρ的秩会发散至 $+\infty$，因而很难有效地追踪该算子的行为。

一种方便的解决方法是利用博雷尔-外尔定理，将 E_ρ几何地实现为定义在与 P_0相关的空间上的线丛的全纯截面空间，该空间称为旗丛。更确切地说， V_ρ 可以显式地实现为 $V_\rho \simeq H^0(G/T, J_\rho)$，其中 $T < G$ 是极大环面，而 J_ρ 是由该表示诱导的全纯线丛。于是， $E_\rho \to M_0$ 的一个截面可以视为旗丛 $F_0 := P_0/T \to M_0$ 的一个截面，其取值于某个复直线丛 L_ρ ，该丛在纤维上全纯，也就是说，在每个纤维 $P_0(x_0)/T \simeq G/T$上限制后都是全纯的，其中 $x_0 \in M$。这里， L_ρ 是一个复直线丛，其在 $P_0(x_0)/T \simeq G/T$ 上的限制与 $J_\rho \to G/T$全纯等价。

3.2.2. 李理论预备知识。 参见 [CL24a，第 2.1 节。2]以了解更多讨论。设 $\widehat{G}$为一个紧李群，且 G 表示所有不可约表示的集合。李代数 $\mathfrak{g}$ 分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

其中 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的中心。设 $T < G$ 为一个极大环面。其李代数于是分解为

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}',$$

其中 $\mathfrak{t}' := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}'$。令 $\mathfrak{a}_+^{\mathrm{ss}} \subset (i\mathfrak{t}')^*$ 为由该群的正根集合 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 张成的多面凸正锥（上标 ss 表示半单的，而 $(i\bullet)^*$ 表示从 $\bullet$ 到 $i\mathbb{R}$的实线性泛函），并令

$$\mathfrak{a}_+ := (i\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^* \oplus \mathfrak{a}_+^{\mathrm{ss}} \subset (i\mathfrak{t})^*,$$

正魏尔室。

我们引入

$$a := \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \qquad b := \dim \mathfrak{t}', \qquad d := a + b = \operatorname{rank}(G).$$

集合 $\mathcal{A} \subset \mathfrak{t}$ （由解析整权构成）对应于

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in (i\mathfrak{t})^* \ : \ \alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \forall H \in \mathfrak{t}, \exp(H) = 1\}.$$

设 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_a\}$ 为 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$的一组生成元，其选取使得任意 $\alpha \in (i\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^* \cap \mathcal{A}$均可写为

$$\alpha = \sum_{i=1}^{a} k_i \lambda_i, \qquad k_i \in \mathbb{Z}.$$

设 $\{\lambda_{a+1}, \ldots, \lambda_d\}$ 为 $\mathfrak{a}_+^{\mathrm{ss}} \cap \mathcal{A}$的一组生成元，其选取使得任意 $\alpha \in \mathfrak{a}_+^{\mathrm{ss}} \cap \mathcal{A}$均可写为

$$\alpha = \sum_{i=a+1}^{d} k_i \lambda_i, \qquad k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

最后，我们可以考虑以下满射映射

$$\phi \colon \mathbb{Z}^a \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-a} \longrightarrow \mathfrak{a}_+ \cap \mathcal{A}, \qquad \mathbf{k} \longmapsto \sum_{i=1}^{d} k_i \lambda_i.$$

映射 ϕ可能不是单射。对于任意元素 $\phi(\mathbf{k})$，都可以将其与 G 的（唯一）最高权为 $\phi(\mathbf{k})$ 的不可约表示 $\widehat{\ }$ 相关联。因此， G 由$\mathbb{Z}^a \times \mathbb{Z}^b_{\geq 0}/\sim$参数化，其中 $\mathbf{k} \sim \mathbf{k}'$ 当且仅当 $\phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}')$。

齐性空间 G/T 称为与 G相关联的旗流形；它具有自然的复结构。博雷尔-外尔定理断言，最高权为 $\phi(\mathbf{k})$ 的表示可以实现为

$$H^0(G/T, \mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}}), \qquad \mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}} := J_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes J_d^{\otimes k_d},$$

其中， $J_i \to G/T$是 G/T上的全纯厄米线丛。对于 $i = 1, \ldots, a$， $J_i \to G/T$ 是平凡的。 G 在 G/T 上的左作用自然提升为 $H^0(G/T,\mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}})$ 上逐纤维的（等距）作用。此左作用恰好对应于最高权为 $\phi(\mathbf{k})$ 的不可约表示。

我们强调，如果存在 $k_i \neq 0$ 使得某个 $i \in \{a+1, \ldots, d\}$，那么 $\mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}} \to G/T$在拓扑上并非平凡（参见 [CL24a，命题 2.1。8]）。如果 $k_{a+1} = \cdots = k_d = 0$，那么$\mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}} \to G/T$ 是平凡的，且全纯截面空间 $H^0(G/T,\mathbf{J}^{\otimes \mathbf{k}})$ 可化为 $\mathbb{C}$。

3.2.3. 定义。 前述构造可推广到主丛 $P_0 \to M_0$，因为每个纤维都同构于 G。我们令 $F_0 := P_0/T$ 为 M_0 上的旗丛，并令$\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}} \to F_0$ 为通过上述构造得到的线丛。对于 $x \in M$，每个纤维 $P_0(x)/T \simeq G/T$ 都是一个复流形。此外，线丛 $\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}} \to F_0$ 在每个纤维上的限制都是全纯的。因此，我们可以将 $C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}})$ 定义为 F_0 上取值于 $\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}}$ 的纤维全纯截面空间，也就是说，其在每个纤维 $P_0(x)/T$ 上的限制都是全纯的。此外，还有一个 L^2-正交投影算子，其投影到纤维全纯截面空间 $C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}})$

$$\Pi_{\mathbf{k}} \colon C^\infty(F_0, \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}}) \to C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}}), \qquad L^2(F_0, \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}}) \to L^2_{\mathrm{hol}}(F_0, \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}}).$$

傅里叶变换（3.3）应视为一个映射

$$\mathcal{F} \colon C^\infty(P_0) \to \bigoplus_{\mathbb{Z}^a \times \mathbb{Z}^b_{\geq 0}/\sim} C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}})^{\oplus d_{\mathbf{k}}}, \tag{3.4}$$

其中， $d_{\mathbf{k}}$ 表示最高权为 ϕ（$\mathbf{k}$）的相应不可约表示的维数。它关于 L^2-内积是一个等距映射。

现在进一步假设 P_0 配备了一个 G-等变联络。该联络在 F_0上诱导出一个Ehresmann联络，即一个分解

$$TF_0 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V},$$

其中， $\mathbb{V} = \ker d\pi_{F_0}$是垂直纤维， $p_{F_0} \colon F_0 \to M_0$是底点投影，而 $\mathbb{H}$是由联络给出的水平空间。我们还引入 $\mathbb{H}^*$， $\mathbb{V}^* \subset T^*F_0$，使得 $\mathbb{H}^*(\mathbb{V}) = 0 = \mathbb{V}^*(\mathbb{H})$。映射 $dp_{F_0} \colon \mathbb{H} \to TM_0$是一个同构，因此

$$dp_{F_0}^\top \colon T^*M_0 \to \mathbb{H}^* \tag{3.5}$$

同样是一个同构。

此外， G-等变联络还在 P_0 上为每个线丛 $\mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}} \to F_0$诱导出一个联络。因此，我们处于扭曲量子化的框架中，其中

可以考虑$\Psi_{h,\,\mathbf{k}}^{m}(F_0,\,\mathbf{L})$这一类扭曲半经典伪微分算子，它最初由 Charles [Cha00] 针对单个线丛的张量幂引入。另见[CL24a第 3 节，2] 其中有完整讨论。元素 $\mathbf{A}\in\Psi_{h,\,\mathbf{k}}^{m}(F_0,\,\mathbf{L})$ 是一个算子族

$$\mathbf{A}_{h,\mathbf{k}}\colon C^{\infty}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})\to C^{\infty}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$$

定义于 $h>0$ 和 $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^a\times\mathbb{Z}^b_{\geq 0}$，且满足 $h|\mathbf{k}|\leq 1$，并具有以下性质。对于任意可缩开子集 $U\subset F_0$，如果 $s_i\in C^{\infty}(F_0,L_i)$ 是点态范数为 $|s_i|=1$ 的局部平凡化截面，那么存在一族标准的 h-半经典伪微分算子 $A_{h,\mathbf{k}}\in\Psi_h^m(U)$，使得对于所有 $f\in C^{\infty}_{\mathrm{comp}}(U)$：

$$\mathbf{A}_{h,\mathbf{k}}(f\mathbf{s}^{\mathbf{k}})=A_{h,\mathbf{k}}(f)\mathbf{s}^{\mathbf{k}},$$

其中等式在 U 上成立。

为了引入博雷尔-韦伊演算，我们需要先介绍一个概念：

定义 3.5（容许算子）。设 $\mathbf{A}\in\Psi_{h,\mathbf{k}}^{m}(F_0,\mathbf{L})$。若算子满足 $A\,[\mathbf{A}^{\Pi_{\mathbf{k}}}]\in h^{\infty}\Psi_h^{-\infty}{}_{,\mathbf{k}}(F_0,\mathbf{L})$，则称其为容许算子。

这意味着算子族 $\mathbf{A}_{h,\mathbf{k}}$ 在模去可忽略余项的意义下保持纤维全纯截面。这引出以下定义：

定义 3.6（Borel-Weil算子）。对于 $m\in\mathbb{R}$，定义 P_0 上阶数为 m 的 Borel-Weil半经典算子类如下

$$\Psi^{m}_{h,\mathrm{BW}}(P_0):=\{(\Pi_{\mathbf{k}}\mathbf{A}\Pi_{\mathbf{k}})_{h>0,\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^a\times\mathbb{Z}^b_{\geq 0},h|\mathbf{k}|\leq 1}\ :\ \mathbf{A}\in\Psi^{m}_{h,\mathbf{k}}(F_0,\mathbf{L})\text{ is admissible}\}.$$

可以验证，$\Psi^{\bullet}_{h,\mathrm{BW}}(P_0)$ 确实构成一个代数，见 [CL24a，引理 3.3.11]。所有 G-等变微分算子自然属于 $\Psi^{m}_{h,\mathrm{BW}}(P_0)$。与此量子化对应的相空间是 $\mathbb{H}^*\subset T^*F_0$。注意，当丛 $P_0\to M_0$ 是平凡丛时，即 $P_0\simeq M_0\times G$，相空间同构于 $\mathbb{H}^*\simeq T^*M_0\times G/T$。可以将 Borel-Weil 演算中的算子视为底空间变量上的标准半经典伪微分算子（即定义在 M_0 上），其取值为复流形 G/T 上的 Toeplitz算子。对此陈述可以给出严格表述，见 [CL24a，定理 3.3.4]。

对于任意 $\mathbf{A}\in\Psi^{m}_{h,\mathrm{BW}}(P_0)$，都可以关联一个主符号 $\sigma_{\mathbf{A}}\in S^m(\mathbb{H}^*)$。这不过是将 A 的主符号限制在 $\mathbb{H}^*$ 上，其中 A 被视为扭曲代数 $\Psi^{m}_{h,\mathbf{k}}(F_0,\mathbf{L})$ 中的一个算子。反过来，给定 $a\in S^m(\mathbb{H}^*)$，存在一个定义良好的量子化过程 $\mathbf{A}:=\mathrm{Op}^{\mathrm{BW}}_h(a)\in\Psi^{m}_{h,\mathrm{BW}}(P_0)$，可构造出博雷尔-韦伊演算中的一个算子，使得 $\sigma_{\mathbf{A}}=a$。所有标准的半经典结果对博雷尔-韦伊算子均成立（椭圆算子的可逆性、奇性传播、Calderon-Vaillancourt 定理等），进一步讨论见 [CL24a，第 3 节。3] 最后，我们注意到，上述构造更一般地也适用于作用在向量丛截面上的算子，见 [CL24a，注 3.3。17]

4. Abelian extensions of Anosov flows

本节中，我们将在假设 $d\alpha\neq 0$（定理 1.1）的条件下，证明 Anosov 流的阿贝尔扩张的关联衰减。

4.1. 预备知识。 回忆一下， X_M 表示 M 上提升流的生成元，而我们用 X_{M_0} 表示 M_0上流的生成元。

4.1.1. 预解算子。 利用同构

$$C^\infty(M_0) \to C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M), \qquad f \mapsto \pi^* f \cdot s_{\boldsymbol{\theta}}, \tag{4.1}$$

在 §2.2中引入的，我们可以计算，对于 $F_{\boldsymbol{\theta}} = \pi^* f \cdot s_{\boldsymbol{\theta}}$:

$$X_M F_{\boldsymbol{\theta}} = X_M(\pi^* f) s_{\boldsymbol{\theta}} + \pi^* f X_M s_{\boldsymbol{\theta}} = \pi^*(X_{M_0} f + i\iota_{X_{M_0}} \eta_{\boldsymbol{\theta}} f) s_{\boldsymbol{\theta}}, \tag{4.2}$$

在最后一个等式中，我们还使用了引理2.4。换言之，诱导算子X_M： $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M) \to C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 通过 经由 (4.1) 与算子共轭

$$X_{\boldsymbol{\theta}} \colon C^\infty(M_0) \to C^\infty(M_0), \qquad X_{\boldsymbol{\theta}} f = X_{M_0} f + i\iota_{X_{M_0}} \eta_{\boldsymbol{\theta}} f.$$

我们还记录式 (4.2) 对相应传播子的一个推论，以备后用:

$$e^{tX_M} F_{\boldsymbol{\theta}} = \pi^*(e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} f) s_{\boldsymbol{\theta}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

对 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 作不同的选择，相当于考虑某个逐点单位范数的 $q \in C^\infty(M_0)$ 所对应的 $s'_{\boldsymbol{\theta}} = \pi^* q \cdot s_{\boldsymbol{\theta}}$。相应的 1-形式于是满足 $i\eta'_{\boldsymbol{\theta}} = i\eta_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dq}{q}$，而算子 $X'_{\boldsymbol{\theta}}$ 变为 —

$$X'_{\boldsymbol{\theta}} = X_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dq}{q} = q^{-1} X_{\boldsymbol{\theta}} q, \tag{4.4}$$

即 $X\theta$ 可通过乘以光滑函数 q的乘法算子与 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 共轭。

由于 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 为实数且 X_{M_0} 保体积，算子 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 是斜自伴的，其传播子 $(e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}})_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $L^2(M_0)$上是酉的。预解算子

$$R^\pm_{\boldsymbol{\theta}}(z) := (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1} = -\int_0^{+\infty} e^{-tz} e^{\mp tX_{\boldsymbol{\theta}}} \, \mathrm{d}t \tag{4.5}$$

因此在 $L^2(M_0)$ 上对于 $\Re(z) > 0$上均有定义、有界且全纯。注意，等价地，预解算子 $R^\pm_{\boldsymbol{\theta}}(z)$ 可视为作用于 $C^\infty(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})$ 上的算子，依据对应关系（2.8）。为简便起见，我们始终将这些算子视为作用于 M_0 上的函数，而非线丛 $L_{\boldsymbol{\theta}} \to M_0$的截面。

4.1.2. 各向异性 Sobolev 空间。我们回顾动力系统各向异性 Sobolev 空间的构造。更多细节参见 [Lef25，第 9] 章。下文中， $E^*_u \subset T^*M_0$ 和$E^*_s \subset T^*M_0$分别是$E_u \oplus \mathbb{R}X_{M_0}$和$E_s \oplus \mathbb{R}X_{M_0}$的湮灭子。回顾一下， g_0在 T^*M_0上诱导了一个自然的纤维内积，我们仍用同一字母表示。我们将在径向紧化$T^*M_0 = \overline{T^*M_0} \sqcup \partial_\infty T^*M_0$上进行研究。固定一个阶函数 m，即 $S^0(T^*M_0)$中的一个符号，它关于 ξ变量是 0 次齐次的；当 $|\xi| \gg 1$充分大时，满足 $m \equiv 1$ 在 $E^*_s \cap \partial_\infty T^*M_0$附近、 $m \equiv -1$ 在 $E^*_u \cap \partial_\infty T^*M_0$附近。设 H 为与哈密顿量 $p(x,\xi)$ 相关联的哈密顿向量场： $= \xi(X_{M_0}(x))$，即$(\varphi^0_t)_{t\in\mathbb{R}}$到 T^*M_0的辛提升的生成元，其定义为 $\Phi^0_t(x,\xi) = (\varphi^0_t x, (d\varphi^0_{-t})^\top \xi)$。我们还引入逃逸函数

$$G_m(x,\xi) := m(x,\xi) \log\langle\xi\rangle_{g_0},$$

其中 $\langle\xi\rangle_{g_0} := (1+|\xi|^2_{g_0})^{1/2}$ 是日式括号。该函数可以构造为满足以下性质（见 [Lef25，引理 9.1。9]）：

i) $HG_m(x,\ \xi) \le 0$ 在 $\partial_\infty T^*M_0$ 附近；ii) $HG_m(x,\ \xi) \le -C < 0$ 在 $\partial_\infty T^*M_0 \cap (E_s^* \cup E_u^*)$ 附近，其中某个常数为 $C > 0$。

现在我们引入 $A_s := \mathrm{Op}_h(e^{sG_m})$ 以及 半经典各向异性索 *Sobolev* 空间

$$\mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0) := A_s^{\mp 1}(L^2(M_0))$$

配备自然范数后，这些空间是希尔伯特空间

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0)} := \|A_s^{\pm 1}u\|_{L^2(M_0)}.$$

此外，我们有稠密嵌入 $C^\infty(M_0) \subset \mathcal{H}^s_{h,\ \pm}(M_0)$，并且后者是分布 $\mathcal{D}'(M_0)$ 的子空间。

当 $h = 1$ 时，我们将简写为 $\mathcal{H}^s_\pm(M_0)$。对于不同的 $h > 0$ 值，空间 $\mathcal{H}^s_{h,\ \pm}(M_0)$ 作为空间均等于 $\mathcal{H}^s_\pm(M_0)$，且范数等价。更准确地说，有如下结论：存在 $C > 0$，使得对所有 $u \in \mathcal{H}^s_{h,\ \pm}(M_0)$：

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0)} \le Ch^{-s}\|u\|_{\mathcal{H}^s_\pm(M_0)}, \qquad \|u\|_{\mathcal{H}^s_\pm(M_0)} \le Ch^{-s}\|u\|_{\mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0)}, \tag{4.6}$$

见 [GK21，引理 4.3] 或 [CL24a，第 126]页。

4.1.3. 预解算子的亚纯延拓。 Faure-Sjöstrand 的以下结果揭示了这些空间的用途 [FS11](另见 [DZ16])：

引理 4.1. 存在一个常数 $c > 0$，使得对任意 $s > 0$、任意 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$，以及任意 $h > 0$，算子族

$$z \mapsto R^\pm_{\boldsymbol{\theta}}(z) \colon \mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0) \to \mathcal{H}^s_{h,\pm}(M_0),$$

可亚纯延拓至 $\{\Re(z) > -cs\}$。极点包含于半平面$\{\Re(z) \le 0\}$内，且与构造过程中所作的选择无关。

若存在足够大的 s，使得 $\ker(-X_{\boldsymbol{\theta}} - z) \ne \{0\}$ 在 $\mathcal{H}^s_{h,+}(M_0)$ 上（分别地，$\ker(X_{\boldsymbol{\theta}} - z) \ne \{0\}$ 在 $\mathcal{H}^s_{h,-}(M_0)$ 上），则称 $z \in \mathbb{C}$ 是 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 的共振（分别地，余共振）。$z \in \mathbb{C}$ 是共振这一性质与这些空间构造过程中的选择、s 的取值（只要其足够大）以及 $h > 0$ 的取值无关（见[Lef25, 第 9.1.1 节7]）。该性质也与平凡化截面的选择无关 $s_{\boldsymbol{\theta}}$，因为其他选择会给出共轭算子。分布 $u \in \ker(-X_{\boldsymbol{\theta}} - z)|_{\mathcal{H}^s_{h,+}}$（分别地，$u \in \ker(X_{\boldsymbol{\theta}} - z)|_{\mathcal{H}^s_{h,-}}$）称为共振态（分别地，余共振态）；可以证明，任何这样的 u 实际上都满足 $\mathrm{WF}(u) \subset E_u^*$（分别地，$\mathrm{WF}(u) \subset E_s^*$），也就是说$u \in \mathcal{D}'_{E_u^*}(M_0) := \{u \in \mathcal{D}'(M_0) \mid \mathrm{WF}(u) \subset E_u^*\}$（分别地，$u \in \mathcal{D}'_{E_s^*}(M_0) := \{u \in \mathcal{D}'(M_0) \mid \mathrm{WF}(u) \subset E_s^*\}$）。

4.2. 靠近虚轴的共振。 我们首先研究虚轴上及靠近 0 的共振。

4.2.1. 虚轴上的共振。 回顾一下，流在 M_0 上保持光滑体积形式 vol_{M_0}，并将其归一化为 $\mathrm{vol}(M_0) = 1$。下文中我们假设 $\eta_{\mathbf{0}} \equiv 0$；于是 $X_{\mathbf{0}} = X_{M_0}$。

引理 4.2。 假设 $d\alpha \neq 0$。若 $\boldsymbol{\theta} \neq 0$，则 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $i\mathbb{R}$上没有共振。若$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$，则 0 是唯一的共振，其 1 维共振空间由 M_0上的常值函数 $\mathbf{1}$ 张成。相应的谱投影为 $\Pi_{\mathbf{0}} = \langle \bullet, \mathbf{1}_{M_0} \rangle \mathbf{1}_{M_0}$。

证明。 对于 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$，由假设可知 $X_{\mathbf{0}} = X_{M_0}$。由 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 M_0上的遍历性，0 是 X_{M_0} 的一个共振，其 1维共振空间由常值函数张成，见[Lef25，引理 9.2。5]。此外，根据阿诺索夫二择一， $i\mathbb{R}$ 上存在其他共振，当且仅当该流是由常值顶函数悬垂于阿诺索夫微分同胚所得，见 [Lef25，引理 9.2。8]。然而，由于 $d\alpha \neq 0$，这不成立；也就是说，稳定丛与不稳定丛在 M_0上并非联合可积。

现在假设 $\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}$ 并且 $i\mathbb{R}$上存在一个共振。也就是说，存在一个非零的 $u \in \mathcal{D}'_{E_u^*}(M_0)$，使得$(-X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)u = 0$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$成立。那么根据 [Lef25，命题9.2.3 的第 (ii) 项] （另见 [DZ17，引理 2。3]）， u 是光滑的。积分后可得

$$(\varphi_t^0)^* u = e^{-i\lambda t} e^{-i\int_0^t \iota_{X_{M_0}} (\varphi_s^0)^* \eta_{\boldsymbol{\theta}}\, \mathrm{d}s} u, \quad t \in \mathbb{R},$$

并且在应用外微分并进行一些变形后，我们得到

$$(\varphi_t^0)^* du + i((\varphi_t^0)^* \eta_{\boldsymbol{\theta}}) u e^{-i\lambda t} e^{-i\int_0^t \iota_{X_{M_0}} (\varphi_s^0)^* \eta_{\boldsymbol{\theta}}\, \mathrm{d}s} = e^{-i\lambda t} e^{-i\int_0^t \iota_{X_{M_0}} (\varphi_s^0)^* \eta_{\boldsymbol{\theta}}\, \mathrm{d}s} (du + i\eta_{\boldsymbol{\theta}} u),$$

其中还用到了这样一个事实： $d\eta_{\boldsymbol{\theta}} = 0$ 以及嘉当魔公式。将其应用于某个向量 $v \in E_s$，取 $t \to +\infty$，并利用 Anosov 流的定义，可得 $(du + i\eta_{\boldsymbol{\theta}} u)(v) = 0$。若 $v \in E_u$，则取 $t \to -\infty$，也可类似地得到这一结论。（或者，这里也可以采用类似于下文引理 4.7 的论证，该论证表明极限圆不变性，并结合联络 $d + i\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是平坦的这一事实。）

由上述讨论可知

$$(-d - i\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge -i\lambda\alpha\wedge)u = 0, \tag{4.7}$$

其中 α 是 Anosov 1-形式。由此可得 $d(|u|^2) = 0$，因此我们可以假设$|u| \equiv 1$。于是 $\lambda\alpha + \eta_{\boldsymbol{\theta}} = idu/u$。特别地，应用 d，我们得到 $\lambda d\alpha = 0$；若 $\lambda \neq 0$，则推出 $d\alpha \equiv 0$，这与我们的假设矛盾。若 $\lambda = 0$，则我们得到$\eta_{\boldsymbol{\theta}} = idu/u$，因此对每条闭曲线 $\gamma \in H_1(M_0, \mathbb{Z})$ 都有 $\int_\gamma \eta_{\boldsymbol{\theta}} \in 2\pi\mathbb{Z}$。但根据构造，$\int_\gamma \eta_{\boldsymbol{\theta}} - \rho(\gamma) \cdot \boldsymbol{\theta} \in 2\pi\mathbb{Z}$，因此由于 ρ 是满射，我们得到 $\mathrm{U}(1)^d$ 内的 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$。然而，对于$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$，根据第一段，除 0 以外，在 $i\mathbb{R}$ 上不存在共振，至此证明完成。（另一种不使用第一段的证明是，只需注意方程 $du = 0$ 在乘以一个常数的意义下有唯一解 $u = \mathbf{1}_{M_0}$，这表明 $\ker(-X_{\mathbf{0}})|_{\mathcal{H}_+^s}$ 是一维的。此外，由于对于 $\Re z > 0$， $\|(-X_{\mathbf{0}} - z)^{-1}\|_{L^2\to L^2} = \frac{1}{\Re z}$，因此 $-X_{\mathbf{0}}$不存在若尔当块，这说明 $z = 0$ 处共振空间的重数为一。）□

4.2.2. 方差。$\boldsymbol{\theta}$ 附近的洛朗展开0。 如上文引理 4.2所示，对于 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$， $z=0$是 X_0的简单共振。我们有以下在0附近的洛朗展开:

$$R^{+}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(z)=R^{+,\mathrm{hol}}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(z)-\frac{\Pi^{+}_{\mathbf{0}}}{z},\qquad R^{-}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(z)=R^{-,\mathrm{hol}}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(z)-\frac{\Pi^{-}_{\mathbf{0}}}{z}, \tag{4.8}$$

其中预解算子在（4.5）中引入。另请注意，将 $\mp X_{M_0}-z$ 应用于这两个恒等式，可得

$$-X_{M_0}R^{+,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)=\mathrm{id}-\Pi^{+}_{\mathbf{0}},\quad X_{M_0}R^{-,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)=\mathrm{id}-\Pi^{-}_{\mathbf{0}}. \tag{4.9}$$

由此可以引入 Guillarmou 协方差算子（见 [Gui17] ，该算子最初在此处得到研究）：

$$\Pi:=-\left(R^{+,\mathrm{hol}}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(0)+R^{-,\mathrm{hol}}_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}(0)\right) \tag{4.10}$$

该算子具有动力学解释，下面将对此进行说明。给定 $f\in C^{\infty}(M_0)$，回顾一下，其方差 （相对于体积测度计算）定义为:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(f):=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{M_0}\left(\int_0^T f(\varphi_t x)\,\mathrm{d}t-T\int_{M_0}f(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x)\right)^2\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x)\geq 0.$$

由此可以证明:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(f)=\langle\Pi f,f\rangle_{L^2(M_0,\mathrm{vol}_{M_0})}. \tag{4.11}$$

证明见 [GKL22，公式 (2.5)] 。此外，方差为零的函数必为上边界，即

$$\langle\Pi f,f\rangle_{L^2}=0\iff\exists u\in C^{\infty}(M_0),\ \text{s.t. } f=Xu, \tag{4.12}$$

参见 [Gui17，定理 1。1]。

4.2.3. 主导共振。对于 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$， $\lambda_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}=0$ 是 $X_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$ 的一个共振，其共振空间为 1 维。由算子扰动理论可知，参见 [Bon20，推论2] 以及 [CL24b], ，存在一个光滑映射 $\boldsymbol{\theta}\mapsto\lambda_{\boldsymbol{\theta}}\in\mathbb{C}$，在接近 0 的 $\boldsymbol{\theta}\in U\subset\mathrm{U}(1)^d$上良定义，使得 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 是 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $z=0$附近的唯一共振。我们称 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 为 $X_{\boldsymbol{\theta}}$的主导共振。由于 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 L^2（M_0）上是斜自伴的，我们有 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}\in\{\Re\,(z)\leq 0\}$。

我们也用 $\Pi^{+}_{\boldsymbol{\theta}}$： C^{∞}（M_0）$\to\mathcal{H}^{s}_{+}$ 表示到该共振态上的谱投影。我们从 [CL24b，引理 3.5] 可知，存在一条（小的）正向定向的闭曲线 $\gamma_0\subset\mathbb{C}$ 包围 0 ，使得对于 $\boldsymbol{\theta}$ 在 $\mathbf{0}\in\mathrm{U}(1)^d$ 的一个邻域中，我们有

$$\Pi^{+}_{\boldsymbol{\theta}}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0}R^{+}_{\boldsymbol{\theta}}(z)\mathrm{d}z, \tag{4.13}$$

另请注意，我们可以写作 $\Pi^{+}_{\boldsymbol{\theta}}=\langle\bullet,v_{\boldsymbol{\theta}}\rangle u_{\boldsymbol{\theta}}$，其中 $u_{\boldsymbol{\theta}}\in\mathcal{H}^{s}_{-}$ 是一个共振态，满足 $(-X_{\boldsymbol{\theta}}-\lambda_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}}=0$； $v_{\boldsymbol{\theta}}\in\mathcal{H}^{s}_{-}$ 是一个余共振态，满足 $(X_{\boldsymbol{\theta}}-\lambda_{\boldsymbol{\theta}})v_{\boldsymbol{\theta}}=0$，并且 $\langle u_{\boldsymbol{\theta}},v_{\boldsymbol{\theta}}\rangle=1$。此外，$u_{\mathbf{0}}=\mathbf{1}_{M_0}$ 是处处等于 1 的常值函数，$v_{\mathbf{0}}=\mathbf{1}_{M_0}$，且映射 $\boldsymbol{\theta}\mapsto u_{\boldsymbol{\theta}}\in\mathcal{H}^{s}_{+}$ 和 $\boldsymbol{\theta}\mapsto v_{\boldsymbol{\theta}}\in\mathcal{H}^{s}_{-}$ 根据 [CL24b，引理 3.5] 是光滑的。这里我们记 $\langle u,v\rangle=\int_{M_0}uv\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0}$，它将 u 和 v 对

流不变的光滑测度。现在我们记录一个关于 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 的对称性的简单引理。

引理 4.3. 对于 $\boldsymbol{\theta} \in U$，我们有 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}} = \overline{\lambda_{-\boldsymbol{\theta}}}$。当 $(\varphi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个 *Anosov*测地流时，则有 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}$。

证明. 首先，由于 $X_{\boldsymbol{\theta}}^* = -X_{\boldsymbol{\theta}}$，我们有 $(R_{\boldsymbol{\theta}}^+(z))^* = R_{\boldsymbol{\theta}}^-(\bar{z})$，因此 $(\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+)^* = \Pi_{\boldsymbol{\theta}}^-$，从而得出 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 是 $-X_{\boldsymbol{\theta}}$的一个余共振，即 $\ker(X_{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})|_{\mathcal{H}_-^s}$ 为一维。对 $(-\overline{X_{\boldsymbol{\theta}}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}} = 0$ 应用复共轭可得

$$(-X_{M_0} + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} - \overline{\lambda_{\boldsymbol{\theta}}})\overline{u_{\boldsymbol{\theta}}} = 0,$$

根据波前集的性质，我们有 $\mathrm{WF}(u_{\boldsymbol{\theta}}) \subset E_u^*$。因此，$u_{\boldsymbol{\theta}}$ 是 $-X_{M_0} + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$的一个共振态。注意，根据 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 的定义，我们有 $\int_\gamma(\eta_{\boldsymbol{\theta}} + \eta_{-\boldsymbol{\theta}}) \equiv 0$模 2π，因此存在一个 $q \in C^\infty(M_0)$，其逐点单位范数满足 $i(\eta_{\boldsymbol{\theta}} + \eta_{-\boldsymbol{\theta}}) = \frac{dq}{q}$；类似于 (4.2)，这意味着 $-X_{M_0} + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 与 $-X_{-\boldsymbol{\theta}}$共轭。因此，$-X_{-\boldsymbol{\theta}}$在 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 处有一个共振；根据由 γ_0围住的共振的唯一性，该共振必与 $\lambda_{-\boldsymbol{\theta}}$ 重合。

对于第二个断言，当 $M_0 = SN_0$ 是黎曼流形 N_0 的单位切丛时，对跖映射 $R: M_0 \to M_0, R(x, v) = (x, -v)$ 满足 $R^*X_{M_0} = -X_{M_0}$，并将 E_u^* 映射到 E_s^*，反之亦然。此外，由于拉回映射 π^*（其中 $\pi: M_0 \to N_0$ 是投影）是从 $H^1(N_0, \mathbb{R})$ 到 $H^1(M_0, \mathbb{R})$ 的同构，我们也可以假设 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是拉回 1-形式，因此在 R^* 下保持不变。这表明 $R^*u_{\boldsymbol{\theta}}$ 也是余共振态，因此 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}} = \lambda_{\boldsymbol{\theta}}$，证明完毕。□

现在我们计算 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处主导共振的一阶和二阶导数：

引理 4.4。对于任意 $v \in T_{\mathbf{0}}\mathrm{U}(1)^d \simeq \mathbb{R}^d$，以下结论成立

$$\lambda_{\mathbf{0}}'(v) = 0, \qquad \lambda_{\mathbf{0}}''(v,v) = -\langle \Pi\iota_{X_{M_0}} D_v\eta_{\mathbf{0}}, \iota_{X_{M_0}} D_v\eta_{\mathbf{0}}\rangle = -\mathrm{Var}_{\mathrm{vol}_{M_0}}(\iota_{X_{M_0}} D_v\eta_{\mathbf{0}}).$$

此外，$-\lambda_{\mathbf{0}}''$ 是正定的。

这里，$\lambda_{\mathbf{0}}'(v) = D_v\lambda_{\mathbf{0}}$ 表示在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处沿 v方向的方向导数，而$\lambda_{\mathbf{0}}''(v, v) = D_v^2\lambda_{\mathbf{0}}$表示同样在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$处沿（$v$, v）方向的海森矩阵。

证明。 我们从等式开始

$$(-X_{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}} = (-X_{M_0} - i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}} = 0.$$

我们将取 D_v 沿 v 方向的方向导数，并用点记号表示在 $\boldsymbol{\theta}$ 处的相应导数；注意所有对象都关于 $\boldsymbol{\theta}$光滑变化。因此，求导两次，我们得到：

$$(i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\lambda}_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}} + (-X_{M_0} - i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})\dot{u}_{\boldsymbol{\theta}} = 0, \tag{4.14}$$

$$(-i\iota_{X_{M_0}}\ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} - \ddot{\lambda}_{\boldsymbol{\theta}})u_{\boldsymbol{\theta}} + 2(-i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\lambda}_{\boldsymbol{\theta}})\dot{u}_{\boldsymbol{\theta}} + (-X_{M_0} - i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} - \lambda_{\boldsymbol{\theta}})\ddot{u}_{\boldsymbol{\theta}} = 0. \tag{4.15}$$

现在我们特化到 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$。利用 $\lambda_{\mathbf{0}} = 0$、 $u_{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_{M_0}$以及 $\eta_{\mathbf{0}} = 0$，我们得到$-i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}} - \dot{\lambda}_{\mathbf{0}} = X_{M_0}\dot{u}_{\mathbf{0}}$。关于体积测度在 M_0 上积分，并利用$\mathrm{vol}(M_0) = 1$以及 X_{M_0} 是斜自伴的，我们得到：

$$0 = \dot{\lambda}_{\mathbf{0}} = -i\int_{M_0} \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0},$$

其中，第一个等式是由以下事实得出的： $\boldsymbol{\theta}$ 是函数$\boldsymbol{\theta} \mapsto \lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $\boldsymbol{\theta}$ 接近$\mathbf{0}$时的一个局部极大值。（或者，应用引理 4.3 可得， $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 的所有奇阶导数在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$处都为零。）这意味着 $X_{M_0}\dot{u}_{\mathbf{0}} = -i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}$ ，并且由于 $\dot{u}_{\mathbf{0}}$ 属于各向异性 Sobolev 空间 $\mathcal{H}^s_+(M_0)$ ，对于适当的 $s > 0$ ，利用（4.9）可得

$$\dot{u}_{\mathbf{0}} - \Pi^+_{\mathbf{0}}\dot{u}_{\mathbf{0}} = R^{+,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)(i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}). \tag{4.16}$$

设 γ 是 M_0 中的一条闭曲线；回忆一下，$\int_\gamma \eta_{\boldsymbol{\theta}} = \rho(\gamma)\cdot\boldsymbol{\theta}$ 模 2π。沿着 v 的方向对 $\boldsymbol{\theta}$ 求导，得到 $\int_\gamma \dot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} = \rho(\gamma)\cdot v$ 和 $\int_\gamma \ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} = 0$；由此可知 $[\ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}]_{H^1} = 0$ ，因此 $\ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} = 0$。根据构造， $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 关于 (M_0, g_0) 是调和的，见命题 2.5；由此可知， $\ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}}$ 也是调和的，因此 $\ddot{\eta}_{\boldsymbol{\theta}} \equiv 0$。利用 $\lambda_{\mathbf{0}} = 0$ 和 $\lambda_{\mathbf{0}} = 0$，以及 $u_{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_{M_0}$，将 (4.15) 应用于此处，可得

$$\ddot{\lambda}_{\mathbf{0}} = -2i\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\dot{u}_{\mathbf{0}} - X_{M_0}\ddot{u}_{\mathbf{0}}.$$

对dvol_{M_0}积分，并利用（4.16），我们得到

$$\ddot{\lambda}_{\mathbf{0}} = -2i\int_{M_0} \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\dot{u}_{\mathbf{0}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} = 2\langle R^{+,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}, \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\rangle,$$

其中，在第二个等式中，我们还用到了$\Pi^+_{\mathbf{0}}\dot{u}_{\mathbf{0}}$ 是常数、 $\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}$ 积分为零，以及 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 取实值。注意到

$$\langle R^{+,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}, \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\rangle = \langle \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}, R^{-,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\rangle = \langle R^{-,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)\iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}, \iota_{X_{M_0}}\dot{\eta}_{\mathbf{0}}\rangle,$$

其中在第一个等式中，我们用到了（$R^{+,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$）$^* = R^{-,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)$，而在第二个等式中用到了 $R^{-,\mathrm{hol}}_{\mathbf{0}}(0)$ 与共轭算子可交换，以及 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 取实值。因此，利用公式（4.11），我们便得到所声称的结果。

剩下需要验证 $-\lambda''_{\mathbf{0}}$ 是正定的；到目前为止，我们已证明它是非负定的。假设 $\lambda''_{\mathbf{0}}(v, v) = 0$ 对某个 $v \in \mathbb{R}^d$成立；我们将证明$v = 0$。由（4.12）及上述计算，存在 $h \in C^\infty(M_0)$ 使得$X_{M_0}h = \iota_{X_{M_0}}D_v\eta_{\mathbf{0}}$。由此可知， $dh - D_v\eta_{\mathbf{0}}$在流 $(\varphi^0_t)_{t\in\mathbb{R}}$下不变，并且属于$\iota_{X_{M_0}}$的核。取任意向量 $v_s \in E^s(x)$ ，并利用不变性，我们得到

$$\mathcal{O}(\|d\varphi_t v_s\|) = (dh - D_v\eta_{\mathbf{0}})(\varphi_t x)(d\varphi_t(v_s)) = (dh - D_v\eta_{\mathbf{0}})(x)(v_s),$$

当 $t \to \infty$时。根据 Anosov 流的定义，该量趋于零，因此我们得到 $(dh - D_v\eta_{\mathbf{0}})(x)(v_s) = 0$。类似地，对于任意 $v_u \in E^u(x)$，有 $(dh - D_v\eta_{\mathbf{0}})(x)(v_u) = 0$。因此 $dh \equiv D_v\eta_{\mathbf{0}}$，这意味着

$$v\cdot\rho(\gamma) = \int_\gamma D_v\eta_{\mathbf{0}} = \int_\gamma dh = 0,$$

因此，由于 ρ 是满射，这意味着 $v = 0$。这就完成了证明 f. □

4.3. 高频估计。我们引入记号

$$\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) \in [0,1]\}.$$

以下结果是定理 1.1 的证明中的关键：

定理 4.5 (高频估计)。 假设 $d\alpha \neq 0$。令 $s > 0$。那么存在 $C, \vartheta > 0$，使得对所有 $z \in \mathbb{B}$, $|z| > 1$ 以及 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$:

$$\|(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0) \to \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)} \leq C\langle \Im(z)\rangle^{\vartheta}. \tag{4.17}$$

实际上，我们将证明，对于 $z \in \mathbb{B}$, $|z| > 1$ 以及 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{U(1)}^d$:

$$\|(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{|\lambda|^{-1},\pm}(M_0) \to \mathcal{H}^s_{|\lambda|^{-1},\pm}(M_0)} \leq C\langle \lambda\rangle^{\ell}, \tag{4.18}$$

其中 $\lambda := \Im(z)$ 且 $\ell >$ 维数 $M_0 + 10$。利用 (4.6)，前面的估计显然蕴含 (4.17)。

为使记号简洁，以下我们将只关注“+”的情形，并省略下标 $+$。为导出矛盾，假设 (4.18) 不成立。那么存在一个序列 $z_n \in \mathbb{B}$, $|z_n| > 1$，以及 $f_n \in \mathcal{H}^s_{|\lambda_n|^{-1}}(M_0)$， $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

$$\|f_n\|_{\mathcal{H}^s_{|\lambda_n|^{-1}}(M_0)} = 1, \quad \|(-X_{\boldsymbol{\theta}} - z)f_n\|_{\mathcal{H}^s_{|\lambda_n|^{-1}}(M_0)} = o(\langle \lambda_n\rangle^{-\ell}), \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

其中 $\lambda_n = \Im(z_n)$。我们还将假设 $\lambda_n \geq 0$（另一种情况的处理方式类似）。此外，我们还可以假设（取一个子序列）$(z_n)_{n\geq 0}$ 无界，因为 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $\mathbb{B} \cap \{|z| > 1\}$中没有共振。此外，再取一个子序列，利用紧性，我们可以假设 $\Re(z_n) \to \nu \in [0,1]$。最后，我们记 $h_n = |\lambda_n|^{-1}$，并省略 h上的下标。因此，我们可以将（4.19）改写为

$$\|f_h\|_{\mathcal{H}^s_h(M_0)} = 1, \qquad \|P_h f_h\|_{\mathcal{H}^s_h(M_0)} = o(h^{\ell+1}), \tag{4.20}$$

其中

$$P_h = -hX_{\boldsymbol{\theta}} - h(\nu + o(1)) - i.$$

P_h 的主符号是 $\sigma_{P_h}(x, \xi) = -i(\langle \xi, X_{M_0}(x)\rangle + 1)$。定义

$$\mathcal{T} = \{-\alpha(x) \mid x \in M_0\} \subset T^*M_0,$$

其中 α 是 Anosov 1-形式。我们首先研究准模（4.20）的微支撑。

引理 4.6 （困陷集上的微局部化）。 设 $E_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$。则

$$\mathrm{WF}_h(E_h) \cap \mathcal{T} = \emptyset \Longrightarrow E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell/2}) = o_{C^0}(h^{\ell/2 - n/2}).$$

证明。*步骤 1*。 首先，我们处理 σ_{P_h} 的特征集之外的点：若WF_h（E_h） $\cap \{\langle \xi, X_{M_0}$（$x$）$\rangle = -1\} = \emptyset$, 则由 P_h 在 WF_h（E_h）（引理 3.1）以及（4.20）中的椭圆性可得 $\|E_h f_h\|_{L^2} = o$（$h^{\ell+1}$）。

步骤 *2*。其次，我们利用 E_s^* 的源性质传播该估计。假设 $\mathbf{WF}_h(E_h) \cap (\mathcal{T} + E_u^*) = \emptyset$。我们声称 $E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell})$。这可由

源估计（引理 3.4）。事实上，取 $A_h \in \Psi_h^0(M_0)$ 为椭圆的且局部化于$E_s^* \cap \partial_\infty T^*M$，可得某个 $N > \ell$使得：

$$\|A_h f_h\|_{H_h^s} \le C\left(h^{-1}\|B_h P_h f_h\|_{H_h^s} + h^N \|f_h\|_{H_h^{-N}}\right) = o(h^\ell), \tag{4.21}$$

其中我们利用了这一点： B_h 在 E_s^*的一个邻域内微局部化，而 $\mathcal{H}_+^s$ 在微局部意义下H^s，因此

$$h^{-1}\|B_h P_h f_h\|_{H_h^s} \le C h^{-1}\|P_h f_h\|_{\mathcal{H}_+^s} = o(h^\ell).$$

注意，对于所有满足 $(x,\xi) \in \{\langle \xi, X_{M_0}(x)\rangle = -1\}$，且满足 $(x,\xi) \notin \mathcal{T} + E_u^*$ 的情形，都存在有限时间 $T \in \mathbb{R}$，使得 $\Phi_T^0(x,\xi) \in \mathsf{ell}_h(A_h)$。根据假设，这对任意 $(x,\xi) \in \mathrm{WF}_h(E_h)$ 均成立。因此，A_h 和 E_h 满足奇点传播估计（引理 3.3）的假设。结合 (4.21) 和 (4.20)，可得 $E_h f_h = o_{L^2}(h^\ell)$。

步骤*3.* 最后，还需处理 $\mathcal{T} + E_u^*$。设 $A_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$ 是满足以下条件的形式自伴算子：1) $\mathrm{WF}_h(A_h)$ 局部化于 $\mathcal{T} + E_u^*$ 附近；2) $\sigma_{A_h} \ge 0$；3) $\sigma_{A_h} \equiv 1$ 在 $\mathcal{T}$的某个邻域上；4) $A_h \ge 0$；其含义是，对于所有 $f \in C^\infty(M_0)$，$h > 0$, $\langle A_h f,\ f\rangle_{L^2} \ge 0$。

由（4.20）以及传播子 $t \mapsto e^{tP_h/h} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_h^s)$ 对所有 $h > 0$，当 $t \in [0,T]$ 取值于固定紧区间时一致有界这一事实，根据埃戈罗夫定理（引理 3.2），可得

$$e^{tP_h/h} f_h = f_h + o_{\mathcal{H}_h^s}(h^\ell), \quad t \in [0,T].$$

因此，对于 $t \in [0,T]$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle A_h f_h, f_h\rangle_{L^2} &= \langle A_h e^{tP_h/h} f_h, e^{tP_h/h} f_h\rangle_{L^2} + o(h^\ell)\\ &= e^{-2(\nu+o(1))t}\langle e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} A_h e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f_h, f_h\rangle_{L^2} + o(h^\ell).\end{aligned}$$

利用 $(\Phi_t^0)_{t\in\mathbb{R}}$ 的动力学（当 t 足够大时， A_h 的符号减去 A_h 与 $e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}}$ 的共轭后为非负），对于足够大的 t，可以写成

$$A_h - e^{-2(\nu+o(1))t} e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} A_h e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} = C_h^* C_h + D_h, \tag{4.22}$$

其中 $\mathrm{WF}_h(D_h) \cap (\mathcal{T} + E_u^*) = \emptyset$，$\mathrm{WF}_h(C_h)$ 接近 $\mathcal{T} + E_u^*$，且 C_h 在开子集 $\Omega \subset \mathcal{T} + E_u^*$ 上是椭圆的，该开子集包含一个与环带同胚的非空区域，使得：

(i) 若 $\nu > 0$，则 $\mathcal{T} \subset \Omega$；

(ii) 若 $\nu = 0$，则 $\Omega \cap \mathcal{T} = \emptyset$。

参见 [BGHW25，命题 5。6], 以及 [BGHW25，公式 (5.13)], 中随后的内容，可证明类似的因式分解。应用步骤 2 并结合 D_h 使用步骤 1，可得$\langle D_h f_h,\ f_h\rangle_{L^2} = o(h^\ell)$。因此 $\|C_h f_h\|_{L^2}^2 = o(h^\ell)$ 从而

$$\|C_h f_h\|_{L^2} = o(h^{\ell/2}). \tag{4.23}$$

然后，利用椭圆估计（引理 3.1）和奇性传播（引理3.3），可将 $\|E_h f_h\|_{L^2}$ 控制在 $\|C_h f_h\|_{L^2}$ 模 $o(h^\ell)$余项意义下。这就证明了该断言。

最后， C^0-估计由索伯列夫嵌入得到：对于所有 $N > n/2$ （其中$n :=$ 维 M_0），存在 $C > 0$，使得对于所有 $u_h \in C^\infty$（M_0），$\|u_h\|_{C^0} \le C h^{-n/2}\|u_h\|_{H_h^N}$。

由于 E_h 具有紧支撑，前述估计中的 L^2-范数无关紧要，因此类似地有 $\|E_h f_h\|_{H_h^N} = o(h^{\ell/2})$。因此，得到

$$\|E_h f_h\|_{C^0} \leq Ch^{-n/2}\|E_h f_h\|_{H_h^N} = o(h^{\ell/2-n/2}).$$

证明至此结束。 □

在以下陈述中，回顾 n 表示 M_0 的维数（或 M ）.

引理 4.7. 设 $E_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$ 使得 $E_h \equiv 1$ 在 $\mathcal{T}$附近微局部。则存在 $c > 1$ 使得:

$$P_h E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell/2+1}) = o_{C^0}(h^{\ell/2+1-n/2}), \quad 1/c \leq \|E_h f_h\|_{L^2} \leq c. \tag{4.24}$$

此外， $\nu = 0$ 与 $P_h = -hX_{\boldsymbol{\theta}} - z_h$，其中 $\Re(z_h) \geq 0$ 且

$$z_h = i + o(h^{\ell/2+1}).$$

证明。 由于 $[P_h, E_h] \in h\Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$ 且$\mathrm{WF}(h^{-1}[P_h, E_h]) \cap \mathcal{T} = \emptyset$，引理4.6 与(4.20)给出

$$P_h E_h f_h = E_h P_h f_h + [P_h, E_h] f_h = o_{L^2}(h^{\ell+1}) + o_{L^2}(h^{\ell/2+1}) = o_{L^2}(h^{\ell/2+1}),$$

而 C^0-估计可由 Sobolev 嵌入得到。

现在我们证明关于 $E_h f_h$ 的界。设 A_h 在 E_u^* 附近微局部支撑且为椭圆的。那么

$$\|A_h f_h\|_{H_h^{-s}} \leq C\left(h^{-1}\|B_h P_h f_h\|_{H_h^{-s}} + \|A_h' f_h\|_{H_h^{-s}} + h^N \|f_h\|_{H_h^{-N}}\right),$$

是 B_h， A_h' 与汇估计（引理 3.4）中的相同。由于 $B_h \in \Psi_h^0(M_0)$ 在 E_u^*附近微局部化，其中 $\mathcal{H}_h^s$ 与 H_h^{-s} 微局部等价，因此得到

$$h^{-1}\|B_h P_h f_h\|_{H_h^{-s}} \leq Ch^{-1}\|P_h f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = o(h^{\ell}).$$

算子 A_h'的波前集与 $E_u^* \cap \partial_\infty T^*M$不相交。因此，我们可以按照引理4.6的证明进行论证，并应用奇性传播（引理3.3）得到$\|A_h' f_h\|_{H_h^{-s}} = o(h^{\ell/2})$。到目前为止，我们有

$$\|A_h f_h\|_{H_h^{-s}} = o(h^{\ell/2}). \tag{4.25}$$

Now,

$$1 = \|f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq \|E_h f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} + \|(1-E_h) f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = \|E_h f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} + o(h^{\ell/2}),$$

这里我们应用了引理 4.6中的估计，以及奇性传播，并将 (4.25) 应用于 $1 - E_h$，因为它的波前集支撑在 $\mathcal{T}$的一个小邻域之外。取 h 足够小，我们得到 $E_h f_h$的下界。为得到上界，注意到由于 E_h 具有紧支撑，我们有

$$\|E_h f_h\|_{L^2} \leq C\|f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = C.$$

为了证明 $\nu = 0$，我们通过矛盾进行论证。根据证明中的引理4.6， （4.23），若 $\nu > 0$, 则得到 $\|E_h f_h\|_{L^2} = o(h^{\ell/2})$ ，这与 $E_h f_h$上的界相矛盾。因此， $\nu = 0$。

最后，我们证明 P_h 具有引理中所述的形式。将 $w_h \geq 0$ 称为 P_h的表达式中的 $o(h)$ 项。我们将证明 $w_h = o(h^{\ell/2+1})$ 。由于 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 的传播子在 $L^2(M_0)$ 上是酉的，我们有

$$\|(-X_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1}\|_{L^2 \to L^2} \leq \int_0^\infty \|e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}}\|_{L^2 \to L^2} e^{-t\Re(z)} dt = 1/\Re(z),$$

对于 $\Re(z) > 0$。假设估计 w_h不成立，以便导出矛盾。那么，对于一个序列 $h_n \to 0$ ，有 $w_{h_n} \geq C h_n^{\ell/2+1}$，其中某个 $C > 0$。利用这一点和（4.24），可得

$$\|E_h f_h\|_{L^2} \leq \frac{1}{w_h} \|P_h E_h f_h\|_{L^2} = o(1),$$

相反 与我们刚刚证明的关于 $E_h f_h$ 的界矛盾。至此，证明 f. □

定理4.5 证明的下一步是证明准模（4.20）具有某种极限圆不变性。为此，我们考虑由 $X_{\boldsymbol{\theta}}$诱导的动力学联络，即 $d_{\boldsymbol{\theta}} := d + i\eta_{\boldsymbol{\theta}}$。

引理 4.8（极限圆不变性）。令 $E_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$，使得 $E_h = 1$ 在 $\mathcal{T}$ 附近微局部成立。那么，

$$(-hd_{\boldsymbol{\theta}} - z_h \alpha \wedge) E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell/2}) = o_{C^0}(h^{\ell/2-n/2}).$$

证明。 由线性性（且由于 $\ker \alpha = E_s \oplus E_u$），只需证明

$$-hd_{\boldsymbol{\theta}}^{u/s} E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell/2}) = o_{C^0}(h^{\ell/2-n/2}),$$

其中， $d_{\boldsymbol{\theta}}^{u/s}$ **(•)** 表示将 $d_{\boldsymbol{\theta}}$**(•)** 投影到 $E_{s/u}^*$上。在开始证明之前，我们先验证一些对后续论证有用的恒等式。我们将 $X_{\boldsymbol{\theta}}$的作用扩展到 T^*M的光滑截面上，定义为 $\mathcal{L}_{X_{M_0}} + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$；并将其在 E_s^* （沿流方向光滑）截面上的限制记为 $X_{\boldsymbol{\theta}}^u$。同样地，我们将 P_h 扩展到$P_h^u = -hX_{\boldsymbol{\theta}}^u - h(\nu + o(1)) - i$。我们将用到以下关系：

$$X_{\boldsymbol{\theta}}^u d_{\boldsymbol{\theta}}^u = d_{\boldsymbol{\theta}}^u X_{\boldsymbol{\theta}}, \qquad P_h^u d_{\boldsymbol{\theta}}^u = d_{\boldsymbol{\theta}}^u P_h. \tag{4.26}$$

右侧的等式由左侧的等式推出，而左侧的等式又是交换公式 $X_{\boldsymbol{\theta}} d_{\boldsymbol{\theta}} = d_{\boldsymbol{\theta}} X_{\boldsymbol{\theta}}$ 的推论，下面我们来证明该公式。我们有

$$\begin{aligned} X_{\boldsymbol{\theta}} d_{\boldsymbol{\theta}} f &= \mathcal{L}_{X_{M_0}} df + i\mathcal{L}_{X_{M_0}}(\eta_{\boldsymbol{\theta}} f) + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge df - \iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge \eta_{\boldsymbol{\theta}} f \\ &= d\mathcal{L}_{X_{M_0}} f + i\iota_{X_{M_0}}(df \wedge \eta_{\boldsymbol{\theta}}) + id(\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} f) + i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge df - \iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge \eta_{\boldsymbol{\theta}} f \\ &= dX_{M_0} f + i\eta_{\boldsymbol{\theta}} \cdot X_{M_0} f + id(\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} f) - \iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}} \wedge \eta_{\boldsymbol{\theta}} f = d_{\boldsymbol{\theta}} X_{\boldsymbol{\theta}} f, \end{aligned}$$

第二个等式中我们用到了嘉当魔术公式。

现在我们证明陈述中的结论。利用（4.26），我们有

$$-P_h^u h d_{\boldsymbol{\theta}}^u E_h f_h = -hd_{\boldsymbol{\theta}}^u P_h E_h f_h = -hd_{\boldsymbol{\theta}}^u E_h P_h f_h + hd_{\boldsymbol{\theta}}^u [E_h, P_h] f_h. \tag{4.27}$$

准模的界（4.20）意味着

$$\|hd_{\boldsymbol{\theta}}^u E_h P_h f_h\|_{L^2} \leq C\|E_h P_h f_h\|_{H_h^1} \leq C\|P_h f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = o(h^{\ell+1}),$$

其中，在第二个不等式中，我们利用了 E_h 在微局部意义下具有紧支撑，因此映射E_h ：$\mathcal{H}_h^s \to H_h^1$。另一方面，由于 $\mathrm{WF}_h(h^{-1}[E_h, P_h])$ 是紧的，且与 $\mathcal{T}$没有交集，根据引理 4.6，我们有

$$\|hd^u_{\boldsymbol{\theta}}[E_h, P_h]f_h\|_{L^2} \le C\|[E_h, P_h]f_h\|_{H_h^1} = o(h^{\ell/2+1}).$$

注意，在前两个不等式中，我们用到了乘以 $\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $\boldsymbol{\theta}$ 中是统一有界的这一事实，其中采用 C^0-范数。由于我们可以用有限个开可缩集覆盖 $\mathrm{U}(1)^d$ ，且在这些集合上有一致的估计，因此可以得出这些估计对 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$也是一致的。因此，由（4.27），

$$P_h^u h d^u_{\boldsymbol{\theta}} E_h f_h = o_{L^2}(h^{\ell/2+1}). \tag{4.28}$$

现在，我们在 C^0 范数下得到一个类似的界。我们将用 C_h^1 表示带有半经典范数 $\|f\|_{C_h^1} := \|f\|_{C^0} + h\|df\|_{C^0}$ 的空间 C^1。于是，对于 $N > n/2 + 1$

$$\|hd^u_{\boldsymbol{\theta}}[E_h, P_h]f_h\|_{C^0} \le C\|[E_h, P_h]f_h\|_{C_h^1} \le Ch^{-n/2}\|[E_h, P_h]f_h\|_{H_h^N} = o(h^{\ell/2+1-n/2}),$$

其中，第二个不等式由 Sobolev 嵌入得出，最后一个不等式则由引理 4.6 得出（因为 $\mathrm{WF}_h(h^{-1}[E_h, P_h]) \cap \mathcal{T} = \emptyset$）。利用（4.20），我们还有

$$\|hd^u_{\boldsymbol{\theta}} E_h P_h f_h\|_{C^0} \le C\|E_h P_h f_h\|_{C_h^1} \le C\|P_h f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = o(h^{\ell+1}).$$

因此，

$$P_h^u h d^u_{\boldsymbol{\theta}} E_h f_h = o_{C^0}(h^{\ell/2+1-n/2}). \tag{4.29}$$

请注意，陈述中的界与我们目前得到的界之间唯一的区别在于算子 P_h^u。因此，我们研究预解算子：

$$(-X^u_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1} = -\int_0^\infty e^{-tX^u_{\boldsymbol{\theta}}} e^{-tz}\mathrm{d}t.$$

我们声称，它在 $\{\Re(z) > -\delta\}$ 上同时按 C^0-拓扑和 L^2-拓扑收敛，其中 δ 是 E_s^* 的收缩率。事实上，对于 $u \in L^2(M,\ E_s^*)$,

$$\begin{aligned}
\|(-X^u_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-1}u\|_{L^2} &\le \int_0^\infty \|e^{-tX^u_{\boldsymbol{\theta}}}\|_{L^2\to L^2} e^{-t\Re(z)}\mathrm{d}t\|u\|_{L^2} \\
&\le \int_0^\infty \|e^{-t\mathcal{L}_{X_{M_0}}|_{E_s^*}}\|_{L^2\to L^2} e^{-t\Re(z)}\mathrm{d}t\|u\|_{L^2} \\
&\le \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-t\Re(z)}\mathrm{d}t\|u\|_{L^2} \\
&\le (\delta + \Re(z))^{-1}\|u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

在 C^0 情形下，同样的界也成立。特别地，对于 $\{z \in \mathbb{C} :\ \Re(z) \ge 0\}$ ，预解算子在 C^0 和 L^2上均有定义且一致有界。因此， $X^u_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 C^0 和 L^2 上均可逆，且范数不超过 $\le \delta^{-1}$。将范数为$(P_h^u)^{-1}$的 $\le Ch^{-1}$应用于（4.29）和（4.28）后，证明即告完成。□

对于满足 $E_h \equiv 1$ 在 $\mathcal{T}$附近微局部成立的 $E_h \in \Psi_h^{\mathrm{comp}}(M_0)$，我们引入 $v_h = E_h f_h$。为导出矛盾，我们研究 v_h的一些进一步性质。

引理 4.9。我们有

$$d|v_h|^2 = o_{C^0}(h^{\ell/2-n-1}).$$

证明。该估计等价于证明，对于所有满足 $\|Y\|_{C^0} \leq 1$ 的光滑向量场 $Y \in C^\infty(M, TM)$，都有 $Y|v_h|^2 = o_{C^0}(h^{\ell/2-n-1})$。为此，请注意，我们逐点有

$$\begin{aligned} Y|v_h|^2 &= \langle d_{\boldsymbol{\theta}}(Y)v_h, v_h\rangle + \langle v_h, d_{\boldsymbol{\theta}}(Y)v_h\rangle \\ &= \left\langle \left(d_{\boldsymbol{\theta}}(Y) + \frac{z_h}{h}\alpha(Y)\right)v_h, v_h\right\rangle + \left\langle v_h, \left(d_{\boldsymbol{\theta}}(Y) + \frac{z_h}{h}\alpha(Y)\right)v_h\right\rangle - 2\Re\left(\frac{z_h}{h}\right)\alpha(Y). \end{aligned}$$

由引理 4.7，$\Re(z_h/h) = o(h^{\ell/2})$，而引理 4.8 给出

$$(d_{\boldsymbol{\theta}}(Y) + z_h\alpha(Y)/h)v_h = o_{C^0}(h^{\ell/2-n/2-1}),$$

再由条件 $\|f_h\|_{\mathcal{H}_h^s} = 1$、Sobolev 嵌入以及 E_h 具有紧微支集这一事实，可得 $v_h = \mathcal{O}_{C^0}(h^{-n/2})$。现在结合这些界和前面的计算，即可直接得出结论。□

现在我们为 $|v_h|$ 推导一个一致逐点下界。

引理 4.10. 存在常数 $C > 0$，使得对所有 $x \in M_0$以及 $h > 0$，$|v_h(x)| > C$。

证明。由紧性，利用引理 4.9，我们有，对 x 一致地，$y \in M_0$ 即

$$|v_h(x)|^2 - |v_h(y)|^2 = o(h^{\ell/2-n-1}).$$

为得出矛盾，假设该引理的陈述不成立。则存在序列 $x_h \in M_0$ 使得 $|v_h(x_h)|^2 \to 0$ 当 $h \to 0$。将其代入前述关系，得到 $\|v_h\|_{C^0}^2 = o(1)$。然而，这与下界 $\|v_h\|_{L^2} = \|E_h f_h\|_{L^2} \geq 1/c$ 相矛盾，该下界由引理 4.7 得到。□

在我们的情形中，我们关注用于得到极限圆不变性的（动力学）联络，即 $\nabla := \nabla^{\mathrm{dyn}} + i\alpha = d_{\boldsymbol{\theta}} + i\alpha = d + i\eta_{\boldsymbol{\theta}} + i\alpha$。参见§2.5.1 以作进一步讨论。与 [CL24a 的第 4], 章不同，此处动力学联络是光滑的。因此，下述引理是标准的。

引理 4.11。设 ∇ 是复直线丛 $L \to M_0$ 上的光滑联络。那么$F_\nabla \equiv 0$ 当且仅当对于所有同伦平凡闭环 $\gamma \subset M_0$，$\mathrm{Hol}_\nabla(\gamma) = 1$。

由于 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是闭的，∇ 的曲率为 $F_\nabla = d(i\eta_{\boldsymbol{\theta}} + i\alpha) = id\alpha$。定理 4.5 证明的最后一步是证明 ∇ 的曲率消失。当然，这与 $d\alpha \neq 0$ 的假设相矛盾，从而完成高频估计的证明：

定理的证明 *4.5*。我们声称，引理 4.8、4.9、4.10 和 4.11的组合推出 $d\alpha = 0$；这与之矛盾，因此证明了（4.18），从而得到定理4.5。证明与 [CL24a，引理 4.5 相同。7] 此处不再重述；它表明

沿可缩回路的 ∇ holonomy 是平凡的。注意，按照[CL24a，引理 4.5。7], 我们有 $\eta = 1$。此外，在这一论证过程中，需要$\ell > n + 10 =$ 维数 $M_0 + 10$。 □

作为定理 4.5 的推论，我们得到：

推论 4.12。 设 ϑ 如定理 *4.5* 中所述，并设 $p \geq 0$。则：

(i) 预解算子

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0), \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)),$$

在虚轴上定义良好，并且关于 λ 是 C^p-正则的；但对于 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$，在 $\lambda = 0$ 处，必须将 $\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)$ 替换为其与关于测度 dvol_{M_0} 零平均的分布空间的交集。

(ii) 对任意 $r > 0$，存在 $C = C(r) > 0$，使得对于所有 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d$，以及满足 $|\lambda| > r$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\partial^p_\lambda (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0) \to \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)} \leq C\langle\lambda\rangle^{(p+1)\vartheta}.$$

在(ii)中，如同在(i) 一样，通过将空间$\mathcal{H}^s_{\pm}$替换为(M_0) 与关于测度vol_{M_0}具有零平均的分布所构成的空间的交集，我们便可得到对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的一致有界。我们强调，由于算子 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 只有在任意一个良好开子集 U 上才能构成算子的光滑族$\mathrm{U}(1)^d$，如上文命题 2.5附近的讨论所述，因此严格来说，这些陈述也应仅对$\boldsymbol{\theta} \in U$理解。

证明。下文中我们考虑情形 $\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}$。情形 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 的处理方式相同，只需注意到 $(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1}$ 作用于零平均分布时与其全纯部分一致；更准确地说，我们利用如下事实：族 $(R^{\pm,\ \mathrm{hol}}_{\boldsymbol{\theta},\ z}(z))_{\boldsymbol{\theta},\ z}$在 $|\lambda|$ 较小且 $\boldsymbol{\theta}$ 接近$\mathbf{0}$ 时，是取值于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)\ \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0))$ 的连续族，因此在 $(\lambda,\ \boldsymbol{\theta})$ 的紧集上一致有界。

根据定理 4.5：

$$\|(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0) \to \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0)} \leq C\langle\lambda\rangle^{\vartheta}. \tag{4.30}$$

要证明关于 λ 的光滑性，只需使用预解算子公式 a

$$(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} - (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda')^{-1} = i(\lambda - \lambda')(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1}(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda')^{-1},$$

这表明

$$\lambda \mapsto (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}^s_{\pm}(M_0), \mathcal{H}^s_{\pm}(M_0))),$$

with

$$\partial_\lambda (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} = i(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-2}.$$

对高阶导数进行类似论证可得

$$\lambda \mapsto (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} \in C^p\left(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}^s_{\pm}, \mathcal{H}^s_{\pm})\right),$$

带导数

$$\partial^p_\lambda (\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-1} = i^p p!(\mp X_{\boldsymbol{\theta}} - i\lambda)^{-(p+1)}. \tag{4.31}$$

（ii）由对4.30）和（4.31）进行迭代可得。 □

4.4. **定理 1.1 的证明**回顾一下，$\langle t\rangle = \sqrt{1+t^2}$ 是日式括号的记号。我们首先证明 $X_{\boldsymbol{\theta}}$的关联函数的以下渐近式：

定理 4.13. 假设 $d\alpha \neq 0$。令 U 为 $\mathbf{0} \in \mathrm{U}(1)^d$ 的一个邻域，使得共振参数化 $(\lambda_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 在 $z=0$ 附近存在且关于 $\boldsymbol{\theta}$光滑变化，见上文 §4.2.3。那么，存在 $\vartheta > 0$，使得对所有整数 $N \geq 0$，都存在 $C_N > 0$，使得对所有 f，$g \in C^\infty(M_0)$ 以及所有 $t \geq 0$，均有：

(i) 若 $\boldsymbol{\theta} \in U$，则有

$$\left| \int_{M_0} e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} - e^{\lambda_{\boldsymbol{\theta}} t} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f, g\rangle_{L^2(M_0)} \right| \leq C_N \langle t\rangle^{-N} \|f\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}(M_0)} \|g\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}(M_0)}.$$

(ii) 若 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d \setminus U$，则有

$$\left| \int_{M_0} e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} \right| \leq C_N \langle t\rangle^{-N} \|f\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}(M_0)} \|g\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}(M_0)}.$$

注意，为了得到所有负时间的渐近式，我们可以利用 $\langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f,\ g\rangle_{L^2} = \langle f,\ e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} g\rangle_{L^2}$ 并应用条目 (i)，从而得到展开式中的主项等于$e^{-t\lambda_{\boldsymbol{\theta}}} \langle \Pi^-_{\boldsymbol{\theta}} f,\ g\rangle_{L^2}$。注意，根据引理 4.3 我们有 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}} = \lambda_{-\boldsymbol{\theta}}$。

证明。我们首先证明 (i)，并讨论非零的 $\boldsymbol{\theta} \in U$。关于 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 的结论随后由连续性得到。在 $\mathcal{D}_{L^2} := \{f \in L^2(M_0) : X_{\boldsymbol{\theta}} f \in L^2(M_0)\}$ 算子 $iX_{\boldsymbol{\theta}}$ 是自伴的。因此，它具有一个谱测度 $\mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda)$，使得 $\mathrm{id}_{L^2(M_0)} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda)$。由 Stone公式和引理 4.2 可知，$\mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda)$ 是解析的、不含原子的，并且

$$\mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}(R^+_{\boldsymbol{\theta}}(i\lambda) + R^-_{\boldsymbol{\theta}}(-i\lambda))\mathrm{d}\lambda,$$

其中 $R^\pm_{\boldsymbol{\theta}}(z)$ 在 (4.5) 中，参见 [Lef25，命题 9.2。2]。注意，$\mathrm{d}P$ 由推论 4.12 可知是光滑的。

现在，对于 f，$g \in C^\infty(M_0)$，我们有：

$$\begin{aligned}
\int_{M_0} e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f\overline{g} \, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} &= \langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f, g\rangle_{L^2(M_0)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \langle \mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) f, g\rangle_{L^2(M_0)} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}} e^{zt} \langle (R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) + R^-_{\boldsymbol{\theta}}(-z)) f, g\rangle \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

为了计算最后一个积分，我们将使用轮廓变形法。令 $r > 0$。令γ 为一条曲线，除 $|z| < r$外与 $i\mathbb{R}$ 不同；在 $|z| < r$处，它等于虚轴上的一个光滑图像，从而对于任意 $\boldsymbol{\theta} \in U$，$\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 都包含在 $\mathbb{C}$中位于 γ 右侧的区域内。将曲线的这部分称为 γ_r。注意，由于 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}_{\leq 0}$，我们可以令$r > 0$ 任意小。这样，对于 $\gamma \cup i\mathbb{R}$ 所围成的 $-X_{\boldsymbol{\theta}}$，唯一的共振是

对每个 $\boldsymbol{\theta} \in U$，其内部或边界上的共振是 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$。由于我们考虑的是接近0的 $\boldsymbol{\theta}$，因此可以选取不依赖于 $\boldsymbol{\theta}$的 γ。回想一下，在 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 附近，我们有如下展开式

$$R_{\pm}^{\boldsymbol{\theta}}(z) = R_{\pm}^{\boldsymbol{\theta},\mathrm{hol}}(z) - \frac{\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^{\pm}}{z - \lambda_{\boldsymbol{\theta}}}.$$

然后，由留数定理，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\langle \mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) f, g\rangle_{L^2(M_0)} = &-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{zt}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) f, g\rangle \mathrm{d}z \\ &- \operatorname*{Res}_{z=\lambda_{\boldsymbol{\theta}}}(e^{zt}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) f, g\rangle).\end{aligned}$$

注意，由于 $R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)$ 在 γ 上是全纯的（因为 $-\gamma$ 是右半平面的子集），我们有

$$\operatorname*{Res}_{z=\lambda_{\boldsymbol{\theta}}}(e^{zt}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) f, g\rangle) = -e^{\lambda_{\boldsymbol{\theta}} t}\langle \Pi_{\boldsymbol{\theta}}^{+} f, g\rangle_{L^2(M_0)}.$$

现在我们证明，γ 上的积分是良定义的，并且为 $\mathcal{O}(t^{-\infty})$。我们记录如下恒等式

$$X_{\boldsymbol{\theta}}(R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) = (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z))X_{\boldsymbol{\theta}} = -z(R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)).$$

我们也记 $\langle \partial_z\rangle^2 = 1 + \partial_z^2$ 和 $\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^2 = 1 - X_{\boldsymbol{\theta}}^2$。现在我们分两步处理 γ 上的积分：较大的 $|z|$ 与有界的 $|z|$。

取任意的偶数 $N_1 \geq 0$，并令 N_2 为使得 $N_2 > \vartheta(N_1+1) + 1$ 的最小偶数。注意，在 χ 的支集上，我们有 $\langle z\rangle^2 = 1 - z^2$。我们得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma} e^{zt}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) f, g\rangle_{L^2(M_0)}\mathrm{d}z \\ &= \langle t\rangle^{-N_1}\int_{\gamma}\langle \partial_z\rangle^{N_1}(e^{zt})(1-z^2)^{-N_2/2}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle \mathrm{d}z \\ &= \langle t\rangle^{-N_1}\int_{\gamma} e^{zt}\langle \partial_z\rangle^{N_1}\left((1-z^2)^{-N_2/2}(R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle\right)\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由沿曲线 γ 分部积分得到。注意，在构造中，我们可以假设点 $z = -1$ 位于 γ 左侧，因此 $(1-z^2)^{-1}$ 有定义。事实上，最后一项的绝对收敛性可如下看出：

$$\begin{aligned}&\langle \partial_z\rangle^{N_1}\left((1-z^2)^{-N_2/2}\langle (R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle\right) \\ &= (-1)^{N_1/2}(1-z^2)^{-N_2/2}\langle \partial_z^{N_1}(R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle + \mathrm{l.o.t}\end{aligned}$$

其中 l.o.t 表示 z 变量中的低阶项，即它们的衰减速度与 $|z| \to \infty$ 相同或更快，因此可以用类似方法处理。注意，与 (4.31) 类似，我们有

$$\begin{aligned}\partial_z^{N_1}(R_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(z) + R_{\boldsymbol{\theta}}^{-}(-z)) &= N_1!((-X_{\boldsymbol{\theta}} - z)^{-(N_1+1)} + (-1)^{N_1}(X_{\boldsymbol{\theta}} + z)^{-(N_1+1)}) \\ &= N_1!((R_{\boldsymbol{\theta}}^{+})^{(N_1+1)}(z) + (R_{\boldsymbol{\theta}}^{-})^{(N_1+1)}(-z)),\end{aligned}$$

其中在第二行中，我们利用了 N_1 是偶数这一点，而 $^{(N_1+1)}$ 表示 (N_1+1) 次复合。根据假设，我们可以将 $-N_2 + \vartheta(N_1+1)$ 写成 $= -(1+\varepsilon)$，其中 $\varepsilon \in (0, 2]$。

对于 $z \in \gamma \setminus \gamma_r$，我们可以将 $z = i\lambda$ 写成 $\lambda \in \mathbb{R}$。注意，我们有 $1 - z^2 = \langle z\rangle^2$，因此可得（回忆一下，$s > 0$ 是各向异性空间的指数）

$$\begin{aligned}
&|\langle z\rangle^{-N_2}\langle \partial_z^{N_1}(R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) + R^-_{\boldsymbol{\theta}}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle_{L^2(M_0)}| \\
&\leq C\langle\lambda\rangle^{-(1+\varepsilon)}\left(\|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{\mathcal{H}^s_+}\|g\|_{\mathcal{H}^s_-} + \|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{\mathcal{H}^s_-}\|g\|_{\mathcal{H}^s_+}\right) \\
&\leq C\langle\lambda\rangle^{-(1+\varepsilon)}\|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} \\
&\leq C\langle\lambda\rangle^{-(1+\varepsilon)}\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^s} \\
&\leq C\langle\lambda\rangle^{-(1+\varepsilon)}\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^{s+N_2}}.
\end{aligned}$$

这里，第一个不等式用到了推论4.12的第 (ii) 项（它还表明该估计关于 $\boldsymbol{\theta} \in U$一致），以及 L^2 乘积在 $\mathcal{H}^s_+(M_0) \times \mathcal{H}^s_-(M_0)$上有界这一事实；而第二个不等式则用到了 $H^s \subset \mathcal{H}^s_\pm$。

现在我们处理对 γ_r 的积分。对于 $z \in \gamma_r$，同样可得

$$\begin{aligned}
&|(1 - z^2)^{-N_2/2}\langle \partial_z^{N_1}(R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) + R^-_{\boldsymbol{\theta}}(-z))\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f, g\rangle_{L^2(M_0)}| \\
&\leq C\left(\|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{\mathcal{H}^s_+}\|g\|_{\mathcal{H}^s_-} + \|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{\mathcal{H}^s_-}\|g\|_{\mathcal{H}^s_+}\right) \\
&\leq C\|\langle X_{\boldsymbol{\theta}}\rangle^{N_2} f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} \\
&\leq C\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^s} \\
&\leq C\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^{s+N_2}},
\end{aligned}$$

其中第一个不等式由引理 4.1 以及 $|(1 - z^2)^{-1}|$ 对 $z \in \gamma_r$ 有界这一事实推出。由 $(R^\pm_{\boldsymbol{\theta}}(z))_{\boldsymbol{\theta},\, z\in\gamma_r}$ 关于 $(\boldsymbol{\theta},\ z)$ 的连续性，以及我们在 $(\boldsymbol{\theta},\ z)$ 的一个紧集上进行估计这一事实可知，这些估计关于 $\boldsymbol{\theta}$ 一致。这表明对 γ 以及对 $\mathbb{R}$ 的积分都有定义，并且

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\gamma e^{zt}\langle (R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) + R^-_{\boldsymbol{\theta}}(-z))f, g\rangle \mathrm{d}z\right| \\
&\leq C\langle t\rangle^{-N_1}\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^{s+N_2}}\left|\int_{\gamma_r} e^{t\Re z}\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]}\langle\lambda\rangle^{-(1+\varepsilon)}\mathrm{d}\lambda\right| \\
&\leq C\langle t\rangle^{-N_1}\|f\|_{H^{s+N_2}}\|g\|_{H^{s+N_2}},
\end{aligned}$$

其中，第一个积分有界，因为它是在紧集上进行的，且 $e^{t\Re(z)} \leq 1$（回想一下，我们假设了 $t \geq 0$，并且有 $\gamma_r \subset \{\Re(z) \leq 0\}$）；而在第二个积分中，我们利用被积函数的指数小于 -1。特别地，对于 $s \leq 1$，我们得到

$$|\langle e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} f, g\rangle_{L^2(M_0)}| \leq C\langle t\rangle^{-N_1}\|f\|_{H^{\vartheta(N_1+1)+4}}\|g\|_{H^{\vartheta(N_1+1)+4}},$$

所需的界由此得出。

对于 (ii)，类似的论证适用。事实上，在这种情况下，我们可以取 γ 以类似方式定义，但使得现在不存在 $X_{\boldsymbol{\theta}}$ 对于 $\boldsymbol{\theta} \in \mathrm{U}(1)^d \setminus U$ 在 γ 上或在 γ右侧的共振。事实上，这可以通过引理 4.2 和紧性实现，必要时取更小的 U。然后与上文相同的论证即给出所需的界。 □

在证明主定理之前，我们先确立到共振态 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$的谱投影的一个界。

引理 4.14. 设 $U \subset \mathbb{U}(1)^d$ 是原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{U}(1)^d$ 的一个良好开邻域，使得 $(\lambda_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 和 $\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义良好，见 §4.2.3。设 $k \geq 0$ 为一个整数， $s > 0$ 为一个正实数，并且 §4.2.3 中的构造成立。则对于所有满足 $|\alpha| \leq k$ 的多重指标 α ，存在 $C = C(k, U) > 0$，使得对于所有 $f, g \in B^{s,k}(M)$

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in U} |\partial^{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}} \rangle_{L^2(M_0)}| \leq C \|f\|_{B^{s,k}(M)} \|g\|_{B^{s,k}(M)}.$$

证明。 首先，由于 (4.13)，注意到对于任意 $j = 1, \ldots, d$，我们有

$$\partial_{\theta_j} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z)(i\iota_{X_{M_0}} \partial_{\theta_j} \eta_{\boldsymbol{\theta}}) R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) \mathrm{d}z,$$

并且通过归纳可知，谱投影的导数包含$\iota_{X_{M_0}} \eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 的导数以及预解算子 $R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z)$ 的幂，其中 $z \in \gamma$；由于根据假设没有共振穿过 γ ，它们在 $\boldsymbol{\theta} \in U$ 的各向异性 Sobolev 空间之间一致有界。因此，对于 $|\alpha| \leq k$ 和 $\boldsymbol{\theta} \in U$，有 $\|\partial^{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}\|_{\mathcal{H}^s_+ \to \mathcal{H}^s_+} \leq C$。于是，

$$\begin{aligned}
|\partial^{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}} \rangle_{L^2(M_0)}| &\leq \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \langle \partial^{\alpha_1}_{\boldsymbol{\theta}} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} \partial^{\alpha_2}_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, \partial^{\alpha_3}_{\boldsymbol{\theta}} g_{\boldsymbol{\theta}} \rangle_{L^2(M_0)} \\
&\leq C \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \|\partial^{\alpha_2}_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{\mathcal{H}^s_+(M_0)} \|\partial^{\alpha_3}_{\boldsymbol{\theta}} g_{\boldsymbol{\theta}}\|_{\mathcal{H}^s_-(M_0)} \\
&\leq C \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \|\partial^{\alpha_2}_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(M_0)} \|\partial^{\alpha_3}_{\boldsymbol{\theta}} g_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^s(M_0)} \\
&\leq C \|f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{C^k(U, H^s(M_0))} \|g_{\boldsymbol{\theta}}\|_{C^k(U, H^s(M_0))},
\end{aligned}$$

其中 $C_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3}$ 表示多项式系数；在第二行中，我们使用了 L^2 在 $\mathcal{H}^s_+ \times \mathcal{H}^s_-$上的配对的有界性，并且在第三个不等式中使用了$H^s \subset \mathcal{H}^s_{\pm}$。由引理 2.14即可得到结论。 □

定理 1.1 的证明。设 U_0 为 $\mathbf{0} \in \mathbb{U}(1)^d$ 的一个好邻域，使得定理 4.13 第 (i) 项的结论成立。考虑用好的测地凸球 $(U_i)_{i=0}^k$ 对 $\mathbb{U}(1)^d$ 作有限覆盖，以及从属于该覆盖的单位分解 $(\chi_i)_{i=0}^k$，其中 $\chi_0 = 1$ 靠近原点；注意 k 可取为仅依赖于 d的常数。在每个 U_i 上，由命题 2.5，我们可以光滑地平凡化线丛 $(L_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U_i}$ ，即存在 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 的逐点单位范数截面的光滑族 $(s_{\boldsymbol{\theta},i})_{\boldsymbol{\theta}\in U_i}$。我们可以对 $\boldsymbol{\theta} \in U_i$ 使用同构 (4.1)，将 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 的截面与 M_0上的函数等同；该等同方式为：对于 $L_{\boldsymbol{\theta}}$的截面 $F_{\boldsymbol{\theta}}$ ，有 $F_{\boldsymbol{\theta}} = s_{\boldsymbol{\theta},i} \pi^* f_{\boldsymbol{\theta},i}$ 。借助这一等同，由 (4.3) 和命题 2.8，对每个 i有 $(e^{tX_M} f)_{\boldsymbol{\theta},i} = e^{tX_{\boldsymbol{\theta}}} f_{\boldsymbol{\theta},i}$。因此我们得出

由帕塞瓦尔分解（2.8）可知

(4.32)

$$\langle e^{-tX_M} f, g\rangle_{L^2(M)} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} \langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} F_{\boldsymbol{\theta}}, G_{\boldsymbol{\theta}}\rangle_{L^2(M_0,L_{\boldsymbol{\theta}})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \chi_i(\boldsymbol{\theta}) \langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f_{\boldsymbol{\theta},i}, g_{\boldsymbol{\theta},i}\rangle_{L^2} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} + \int_{U_0} \chi_0(\boldsymbol{\theta}) (\langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta}}} f_{\boldsymbol{\theta},0}, g_{\boldsymbol{\theta},0}\rangle_{L^2} - e^{t\lambda_{\boldsymbol{\theta}}} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta},0}, g_{\boldsymbol{\theta},0}\rangle_{L^2}) \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}_{S(t):=}$$

$$+ \underbrace{\int_{U_0} \chi_0(\boldsymbol{\theta}) e^{t\lambda_{\boldsymbol{\theta}}} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta},0}, g_{\boldsymbol{\theta},0}\rangle_{L^2} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}_{Q(t):=}.$$

现在我们估计 $S(t)$。根据定理 4.13 的第 (i) 和 (ii) 项，对于所有 $N > 0$，存在$C = C(N) > 0$ 使得（注意，严格来说，我们取每个 U_i对应的常数中的最大值，其中 $i = 0, \ldots\ldots, k$）

$$\begin{aligned} |S(t)| &\le C\langle t\rangle^{-N} \sum_{i=0}^{k} \int_{\mathrm{U}(1)^d} \chi_i(\boldsymbol{\theta}) \|f_{\boldsymbol{\theta},i}\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}} \|g_{\boldsymbol{\theta},i}\|_{H^{\vartheta(N+2)+4}} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \\ &\le C\langle t\rangle^{-N} \|f\|_{B^{\vartheta(N+2)+4,0}} \|g\|_{B^{\vartheta(N+2)+4,0}}, \end{aligned}$$

最后一个估计中我们用到了引理 2.14。

现在我们推导项 $Q(t)$ （定义见（4.32））的渐近展开；为简便起见，下文省略下标 0 。由于 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 根据引理 4.4，在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$处有一个非退化临界点；又由于 $\Re(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}) \le 0$，我们可以应用驻相位引理（参见 [Hör03，引理 7.7。5]），因此对每个 $N > 0$:

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} Q(t) = \frac{1}{\sqrt{\det(-\lambda''_{\mathbf{0}})}} \sum_{j=0}^{N-1} t^{-j} L_j(\langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle_{L^2(M_0)})|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}} + R(t), \tag{4.33}$$

其中 L_j 是一个阶数为 $2j$ 的椭圆微分算子，其具体形式可以写出，参见[Hör03，引理 7.7。5]；我们有 L_0 =id。由于 L_j 是一个阶数为 $2j$的微分算子，我们有

$$C_j(f,g) := \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det \mathrm{Var}_{\mathrm{vol}_{M_0}}(\iota_{X_{M_0}} D\eta_{\mathbf{0}})}} L_j \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}} = \mathcal{O}(\|f\|_{B^{s,2j}} \|g\|_{B^{s,2j}}), \tag{4.34}$$

其中在估计中我们使用了引理4.14。余项估计为 a s

$$|R(t)| \le Ct^{-N} \sum_{|\alpha|\le 2N+d+1} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in U_0} |\partial^{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}} \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle_{L^2(M_0)}| \le Ct^{-N} \|f\|_{B^{s,2N+d+1}(M)} \|g\|_{B^{s,2N+d+1}(M)},$$

这里我们再次使用了引理 4.14。证明至此完成。 □

4.5. **计算** C_1。 继续讨论定理1.1证明中的内容，并沿用其中的记号，根据 [Hör03，引理 7.7。5] 对于任意 j 我们有

$$L_j u = \sum_{\nu-\mu=j} \sum_{2\nu\geq 3\mu\geq 0} i^{-j} 2^{-\nu} (\mu!\nu!)^{-1} \langle (-i\lambda_0'')^{-1} D, D\rangle^{\nu} (g^{\mu} u)(\mathbf{0}), \quad u \in C^{\infty}(U_0), \tag{4.35}$$

是一个作用于 u 上、在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处阶数为 $2j$ 的微分算子，其中 g 在 $\mathbf{0}$ 处三阶消失，且定义为

$$ig(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2}\langle \lambda_0'' \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle.$$

此外，此处 $D = -i\partial_{\boldsymbol{\theta}}$ 表示梯度算子乘以 $-i$。我们有 $L_0 = \mathrm{id}$ 是恒等算子，并且由（4.35）可知

$$\begin{aligned} iL_1 u =& 2^{-1}\langle (-i\lambda_0'')^{-1} D, D\rangle u(\mathbf{0}) + 2^{-2}\frac{1}{2!}\langle (-i\lambda_0'')^{-1} D, D\rangle^2 (gu)(\mathbf{0}) \\ &+ 2^{-3}\frac{1}{2!3!}\langle (-i\lambda_0'')^{-1} D, D\rangle^3 (g^2) u(\mathbf{0}), \quad u \in C^{\infty}_{\mathrm{comp}}(U_0), \end{aligned} \tag{4.36}$$

令 $u(\boldsymbol{\theta}) := \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle_{L^2}$；下文将计算 u 的前两阶导数。首先注意到

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\theta}_i} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0} R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_i} \eta_{\boldsymbol{\theta}} R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z) \mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0} \left(R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(z) - \frac{\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}}{z-\lambda_{\boldsymbol{\theta}}} \right) i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_i} \eta_{\boldsymbol{\theta}} \left(R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(z) - \frac{\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}}{z-\lambda_{\boldsymbol{\theta}}} \right) \mathrm{d}z \\ &= \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_i} \eta_{\boldsymbol{\theta}} R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}) + R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}) i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_i} \eta_{\boldsymbol{\theta}} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned}$$

其中 $R^{+\,\text{全}\,\boldsymbol{\theta}}(z)$ 表示 $R^+_{\boldsymbol{\theta}}(z)$ 在 $z = \lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 附近的全纯部分。因此，对于指标 $j \in \{1, \ldots, d\}$，我们有

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} u &= \langle (\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} \eta_{\boldsymbol{\theta}} R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}) + R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}) i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} \eta_{\boldsymbol{\theta}} \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}) f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle \\ &\qquad + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle \\ &= \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} \underbrace{(\partial_{\boldsymbol{\theta}_j} + i\iota_X \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} \eta_{\boldsymbol{\theta}} R^+_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}}))}_{P^+_j :=} f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, \underbrace{(\partial_{\boldsymbol{\theta}_j} + i\iota_{-X} \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} \eta_{\boldsymbol{\theta}} R^-_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(\overline{\lambda_{\boldsymbol{\theta}}}))}_{P^-_j :=} g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle, \end{aligned}$$

请记住，$P^{\pm}_i$ 依赖于 $\boldsymbol{\theta}$。对此反复迭代，可得对于 $k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\partial_{\boldsymbol{\theta}_k} \partial_{\boldsymbol{\theta}_j} u = \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} P^+_k P^+_j f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} P^+_j f_{\boldsymbol{\theta}}, P^-_k g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} P^+_k f_{\boldsymbol{\theta}}, P^-_j g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle + \langle \Pi^+_{\boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}, P^-_k P^-_j g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle.$$

为简便起见，我们现在假设

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M = \int_{M_0} f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} = \int_M g \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M = \int_{M_0} g_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} = 0.$$

特别地 $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，根据 $\partial_{\boldsymbol{\theta}_j} u$ 的表达式，我们有 $\partial_{\boldsymbol{\theta}_j} u(\mathbf{0}) = 0$。利用$g$ 在 $\mathbf{0}$ 处三阶消失这一性质，由（4.36）可知，最后两项为零，

因此

$$\begin{aligned}2L_1u &= \sum_{j,k}(-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1}_{jk}\partial_{\boldsymbol{\theta}_k}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}u(\mathbf{0})\\ &= \sum_{j,k}(-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1}_{jk}\left(\langle\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}P^+_jf_{\boldsymbol{\theta}},P^-_kg_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}+\langle\Pi^+_{\boldsymbol{\theta}}P^+_kf_{\boldsymbol{\theta}},P^-_jg_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\right)\\ &= 2\sum_{j,k}(-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1}_{jk}\Pi^+_{\mathbf{0}}P^+_jf_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\Pi^-_{\mathbf{0}}\overline{P^-_k\,g_{\boldsymbol{\theta}}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}},\end{aligned}$$

其中，在第三个等式中，我们用到了 $\lambda_{\mathbf{0}}''$ 是对称的，且假设 vol_{M_0} 是一个概率。还要注意，对于任意 $v\in C^\infty(M_0)$，都有 $R^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})\overline{v}=\overline{R^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})v}$。因此，我们只需计算 $\Pi^+_{\mathbf{0}}P^+_jf_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$ 以及作用于 $g_{\boldsymbol{\theta}}$ 的对称项。

我们计算

$$\begin{aligned}\Pi^+_{\mathbf{0}}P^+_jf_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}} &= \int_{M_0}\left(\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}f_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}+i\iota_{X_{M_0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}R^+_{\mathrm{hol}}(0)f_{\mathbf{0}}\right)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0}\\ &= -i\int_{M_0}(fH_j)_{\mathbf{0}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0}+i\int_{M_0}R^-_{\mathrm{hol}}(0)(\iota_{X_{M_0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}})f_{\mathbf{0}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0}\\ &= i\int_M f\left(-H_j+\pi^*\iota_{X_{M_0}}R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(0)\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}\right)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M,\end{aligned}$$

其中，在第二行中，我们用到了命题 2.9、$R^+_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})^*=R^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})$，以及 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是实值的、$R^\pm_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})$ 是实算子；此外，对于任意 $\widehat{x}\in\pi^{-1}(x)$，都有 $\pi^*f_{\mathbf{0}}(x)=\sum_{\mathbf{n}}f(\tau_{\mathbf{n}}\widehat{x})$。最后一行中，我们用 $R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})$ 表示预解算子在零点作用于 1-形式时的全纯部分，并用到了 $\iota_{X_{M_0}}R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})=R^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})\iota_{X_{M_0}}$。根据定义，$H_j$，见（2.9），我们有 $dH_j=\pi^*\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}-dH_j+d\pi^*\iota_{X_{M_0}}R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(0)\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}} &= -\pi^*\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}+\pi^*\mathcal{L}_{X_{M_0}}R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(0)\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}\\ &= -\pi^*\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}+\pi^*(\mathrm{id}-\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}})\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}=-\pi^*\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}},\end{aligned}$$

其中，在第一个等式中，我们使用了交换关系 $dR^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})=R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})d$，以及 $\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是闭的这一事实和嘉当魔公式。在第二个等式中，我们使用了 $\mathcal{L}_{X_{M_0}}R^-_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})=\mathrm{id}-\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}$，这与关系（4.9）类似，其中 $\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}$ 表示投影到共共振 1-形式上的谱投影。（另请注意，$\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}-\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是恰当形式，且 $\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}\in\ker\iota_{X_{M_0}}$。）因此，我们可以写成（其中 d^{-1} 表示一个恰当形式的原函数）

$$\Pi^+_{\mathbf{0}}P^+_jf_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}=-i\int_M fd^{-1}(\pi^*\Pi^{1,-}_{\mathbf{0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}})\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M,$$

由于我们假设 $\int_M f\,\mathrm{dvol}_M=0$，且 d^{-1} 的作用在相差一个常数的意义下是良定义的，因此该表达式是良定义的。对应于 $P^-_kg_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$ 的项可通过对称性计算（将 X_{M_0} 替换为 $-X_{M_0}$）。

现在我们直接证明这一项非零；我们采用反证法。这等价于 $-H_j+\pi^*\iota_{X_{M_0}}R^{1,-}_{\mathrm{hol}}(\mathbf{0})\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 为常数，因为我们此前已经假设

即 f的平均值为零。特别地，可得 $R^{-}{}_{\mathrm{hol}}(0)\iota_{X_{M_0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}} =: v \in C^\infty(M_0)$。应用 X_{M_0} 可得

$$\iota_{X_{M_0}}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}} = X_{M_0}v \iff \partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}} - dv \in \ker d \cap \ker \iota_{X_{M_0}} \cap C^\infty.$$

按照引理的证明4.4 中的论证，我们得到 $dv = \partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$，这与 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 的定义矛盾，利用了表示 ρ的满射性。

因此，一般而言，我们有

$$C_1(f,g) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det \mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(\iota_{X_{M_0}} D\eta_{\mathbf{0}})}} \left(\sum_{j,k} (-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1}_{jk} \int_M f d^{-1}(\pi^*\Pi_{\mathbf{0}}^{1,-}\partial_{\boldsymbol{\theta}_j}\eta_{\boldsymbol{\theta}}) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M \right. \tag{4.37}$$
$$\left. \cdot \int_M \overline{g} d^{-1}(\pi^*\Pi_{\mathbf{0}}^{1,+}\partial_{\boldsymbol{\theta}_k}\eta_{\boldsymbol{\theta}}) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M \right),$$

当 $\int_M f \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M = \int_M g \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M = 0$ 时。注意，这个配对非平凡，因为根据上一段给出的论证，$\{\mathbf{1}_M, d^{-1}\pi^*\Pi_{\mathbf{0}}^{1,+}\partial_{\boldsymbol{\theta}_1}\eta_{\boldsymbol{\theta}}, \dots, d^{-1}\pi^*\Pi_{\mathbf{0}}^{1,+}\partial_{\boldsymbol{\theta}_d}\eta_{\boldsymbol{\theta}}\}$ 线性无关。

注4.15。通过进一步研究（4.36）中的表达式，可以写出 C_1 的完整项（而不只是其在零平均函数上的限制）。为此，可以计算各项 $P_k^+P_j^+f_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$。我们不再继续，因为这些项很快就会变得更加复杂；特别是，这将涉及 $\boldsymbol{\theta}$ 阶导数 $R^+{}_{\mathrm{hol}}{}_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda_{\boldsymbol{\theta}})$，而这又会涉及 $R_{\boldsymbol{\theta}}^+(\lambda_{\boldsymbol{\theta}})$ 的泰勒展开中的高阶系数，以及 $\boldsymbol{\theta}$ 的导数。一个有用的假设是，假定 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 来自 Anosov测地流，因为这样一来，$\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处的所有奇阶导数都恒等于零。在假设对所有指标 $1 \le j \le d$ 都有 $\Pi_{\mathbf{0}}^+P_j^+f_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$，且 f 零平均的情况下，可以类似地计算配对 C_2。对于 $\ell \ge 3$，C_ℓ 的计算不太明了，但一个自然的归纳假设是，对所有 $|\alpha| \le \ell - 1$ 都有 $P_\alpha^+f_{\boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}} = 0$。

4.6. **双线性形式的非消失。** 最后，我们证明双线性形式C_j 在（4.34）中定义的并不消失：

引理 4.16. 对所有 $j \ge 1$，双线性形式 C_j：$C^\infty_{\mathrm{comp}}(M) \times C^\infty_{\mathrm{comp}}(M) \to \mathbb{C}$ 不为零。

证明。表达式 (4.34) 中 $C_j(f,g)$ 的算子 L_j 是作用于 $\langle \Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+ f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle$（并在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处求值）的 $2j$ 阶椭圆微分算子。回想在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$,$\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+ = \langle \bullet, v_{\boldsymbol{\theta}}\rangle u_{\boldsymbol{\theta}}$ 附近，其中 $u_{\boldsymbol{\theta}}$（相应地 $v_{\boldsymbol{\theta}}$）是相应的共振态（相应地余共振态），见 (4.13) 及下文的讨论。因此，在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 附近，对 f, $g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$,$\langle \Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+ f_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle = \langle f_{\boldsymbol{\theta}}, v_{\boldsymbol{\theta}}\rangle\langle u_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle$。

我们考虑 f，$g \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$，其中 $\int_{M_0} f_{\mathbf{0}} \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0} = 1 = \int_{M_0} g_{\mathbf{0}} \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{M_0}$，并令 $c(\boldsymbol{\theta}) := \langle f_{\boldsymbol{\theta}}, v_{\boldsymbol{\theta}}\rangle\langle u_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle$。这是 $\boldsymbol{\theta}$ 在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 附近的一个光滑函数。当 $u_{\mathbf{0}} = v_{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_{M_0}$ 时，我们发现 $c(\mathbf{0}) = 1$。还要注意，对于 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$，$\tau^*_{\mathbf{k}} f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$ 以及 $(\tau^*_{\mathbf{k}} f)_{\boldsymbol{\theta}} = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{k}} f_{\boldsymbol{\theta}}$。因此，$\langle \Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+ (\tau^*_{\mathbf{k}} f)_{\boldsymbol{\theta}}, g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{k}} c(\boldsymbol{\theta})$ 在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 附近。

随后，我们在 $\mathbf{k}=(k,\ 0,\ \dots,\ 0)\in\mathbb{Z}^d$ 且 $k\to+\infty$ 的特定情形下，对 $L_j\langle\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+(\tau^*_{\mathbf{k}}f)_{\boldsymbol{\theta}},\ g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}$ 进行渐近式计算。由于 L_j 是一个 $2j$ 阶微分算子，我们得到：

$$\begin{aligned}L_j\langle\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+(\tau^*_{\mathbf{k}}f)_{\boldsymbol{\theta}},g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=0}&=L_j(e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{k}}c(\boldsymbol{\theta}))|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}=k^{2j}\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\mathbf{e}_1^*)c(\mathbf{0})+\mathcal{O}(k^{2j-1})\\&=k^{2j}\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\mathbf{e}_1^*)+\mathcal{O}(k^{2j-1}),\end{aligned}$$

其中 $\sigma_{L_j}\in C^\infty(T^*\mathrm{U}(1)^d)$表示 L_j的（齐次）主符号，在点 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}\in\mathrm{U}(1)^d$及余向量$\mathbf{e}_1^*\in T^*_{\mathbf{0}}\mathrm{U}(1)^d$处取值（使得$\mathbf{e}_1^*(\partial_{\theta_1})=1$且$\mathbf{e}_1^*(\partial_{\theta_j})=0$对 $j\geq 2$成立）。由于 L_j是椭圆的，$\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\mathbf{e}_1^*)\neq 0$，因此当 $k\gg 1$足够大时上述表达式非零。这就证明了该断言。□

注记 4.17. 关于 L_j 的主符号可由其在驻相位引理中的表达式读出，见（4.35）。事实上，主符号中只出现对应于 $\mu=0$ 与 $\nu=j$ 的项，其余各项阶数更低，这是因为 g 在 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$ 处三阶消失。因此

$$\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\xi)=i^{-j-1}2^{-j}(j!)^{-1}\langle(-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1}\xi,\xi\rangle^j,\quad \xi\in T^*_{\mathbf{0}}\mathrm{U}(1)^d\simeq\mathbb{R}^d. \tag{4.38}$$

4.7. **线性漂移**。令 $f,\ g\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(M)$。将 1.2 中的关联函数渐近展开应用于 $\tau^*_{\mathbf{k}}f$ 和 g，得到：

$$\begin{aligned}t^{d/2}\langle\tau^*_{\mathbf{k}}f\circ\varphi_{-t},g\rangle_{L^2(M)}=\kappa\int_M f\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M+\sum_{j=1}^{N-1}t^{-j}C_j(\tau^*_{\mathbf{k}}f,g)\\+\mathcal{O}\left(\langle t\rangle^{-N}\left(\|\tau^*_{\mathbf{k}}f\|_{B^{\vartheta N,0}}\|g\|_{B^{\vartheta N,0}}+\|\tau^*_{\mathbf{k}}f\|_{B^{s,2N+d+1}}\|g\|_{B^{s,2N+d+1}}\right)\right).\end{aligned}$$

注意，$\|\tau^*_{\mathbf{k}}f\|_{B^{\vartheta N,\,0}}=\|f\|_{B^{\vartheta N,\,0}}$以及$\|\tau^*_{\mathbf{k}}f\|_{B^{s,\,2N+d+1}}\leq C\langle\mathbf{k}\rangle^{2N+d+1}\|f\|_{B^{s,\,2N+d+1}}$。此外，利用 4.34，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\det\mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(\iota_{X_{M_0}}D\eta_{\mathbf{0}})}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}C_j(\tau^*_{\mathbf{k}}f,g)&=L_j\langle\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+(\tau^*_{\mathbf{k}}f)_{\boldsymbol{\theta}},g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\\&=L_j(e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\theta}}\langle\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+f_{\boldsymbol{\theta}},g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle)|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\\&=|\mathbf{k}|^{2j}\left(\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)\int_M f\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M+\mathcal{O}(|\mathbf{k}|^{-1})\right),\end{aligned}$$

其中，最后一行用到了 L_{2j} 是一个 $2j$ 阶微分算子，并且$\langle\Pi_{\boldsymbol{\theta}}^+f_{\boldsymbol{\theta}},\ g_{\boldsymbol{\theta}}\rangle|_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}=\int_M f\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M$。因此我们得到：

$$t^{d/2}\langle\tau^*_{\mathbf{k}}f\circ\varphi_{-t},g\rangle_{L^2(M)}=A\cdot\sum_{j=0}^{N-1}t^{-j}|\mathbf{k}|^{2j}\sigma_{L_j}(\mathbf{0},\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)+\mathcal{O}(|\mathbf{k}|^{2j-1})+\mathcal{O}(\langle t\rangle^{-N}\langle\mathbf{k}\rangle^{2N+d+1}),$$

其中

$$A:=\frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\int_M f\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M\int_M g\ \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M}{\sqrt{\det\mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(\iota_{X_{M_0}}D\eta_{\mathbf{0}})}}.$$

现在考虑 $|\mathbf{k}| = t^{1/2-\varepsilon}$ 且 $0 < \varepsilon \leq 1/2$ 的情形。于是：

$$t^{d/2}\langle \tau_{\mathbf{k}}^* f \circ \varphi_{-t}, g\rangle_{L^2(M)} = A \cdot \sum_{j=0}^{N-1} t^{-2\varepsilon j}\sigma_{L_j}(\mathbf{0}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|) + \mathcal{O}(t^{-2\varepsilon j - 1/2+\varepsilon}) + \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-N+(2N+d+1)(1/2-\varepsilon)}).$$

在求和中，当 $-2\varepsilon - 1/2 + \varepsilon = -\varepsilon - 1/2 < -2\varepsilon(N-1)$ 时，余项 $\mathcal{O}(t^{-2\varepsilon j-1/2+\varepsilon})$ 相较于展开中的主项可以忽略不计，也就是说 $\varepsilon < 1/(2(2N-3))$。此外，当 $-N + (2N+d+1)(1/2-\varepsilon) < -2(N-1)\varepsilon$ 时，余项 $\mathcal{O}(\langle t\rangle^{-N+(2N+d+1)(1/2-\varepsilon)})$ 相较于展开中的主项可以忽略不计，也就是说$\varepsilon > (d+1)/2(d+3)$。条件 $1/(2(2N-3)) > (d+1)/2(d+3)$ 等价于$\frac{d+1}{d+3} < \frac{1}{2N-3}$。对于 $N = 2$，无论 $d \geq 1$ 取何值，该条件总是成立；但对于 $N \geq 3$，即使是 $d = 1$，该条件也从不成立。令 $N = 2$，并利用 L_1 的主符号的表达式 (4.38)，于是得到：

$$t^{d/2}\langle \tau_{\mathbf{k}}^* f \circ \varphi_{-t}, g\rangle_{L^2(M)} = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_M f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M \int_M g \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_M}{\sqrt{\det \mathrm{Var}_{\mathrm{vol}}(\iota_{X_{M_0}} D\eta_{\mathbf{0}})}} \left(1 - t^{-2\varepsilon} 2^{-1} \left\langle (-\lambda_{\mathbf{0}}'')^{-1} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right\rangle\right) + o(t^{-2\varepsilon}).$$

这为关联函数展开中的第二项提供了相当明确的表达式。

5. 等距扩张的阿贝尔覆盖

在本节中，$p\colon P_0 \to M_0$ 是一个主 G-丛，$\pi\colon M \to M_0$ 表示 $\mathbb{Z}^d$-延拓，而 $P = \pi^* P_0 \to M$ 是拉回的 G-丛。在上下文明确时，我们约定投影 G-丛映射 $P \to P_0$ 也记作π，投影 $P \to M$ 记作 p；类似地，对于与 G 和 $P \to P_0$的子群相关联的丛之间的诱导映射，我们也记作 π。回顾引理 2.10，$P \to M_0$ 也是一个（$G \times \mathbb{Z}^d$）-丛。

5.1. **Borel-Weil-Floquet 理论。** 在本段中，我们推广 §2.2 中阐述的弗洛凯理论，以纳入一个 G-丛部分。令 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(P)$。应用命题 2.8，我们可以写成

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} F_{\boldsymbol{\theta}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta},$$

其中，$F_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(P)$ 是满足条件 $\tau_{\mathbf{n}}^* F_{\boldsymbol{\theta}} = e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}} F_{\boldsymbol{\theta}}$（对所有 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$）的 $\mathbb{Z}^d$-等变函数；这类函数构成的空间记为 $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(P)$。固定一个开可缩集$U \subset \mathrm{U}(1)^d$ 后，对于 $\boldsymbol{\theta} \in U$，该函数可写为 $F_{\boldsymbol{\theta}} = (\pi^* f_{\boldsymbol{\theta}}) s_{\boldsymbol{\theta}}$，其中 $f_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty(P_0)$，且 $s_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(P)$ 具有逐点单位范数。注意，$s_{\boldsymbol{\theta}}$ 可以直接取为相应的 $C^\infty_{\boldsymbol{\theta}}(M)$ 中元素在 p 下的拉回；稍微滥用一下记号，我们也将此元素记为 $s_{\boldsymbol{\theta}}$。进而，可利用群 G 上的逐纤维傅里叶变换（3.4）将 $f_{\boldsymbol{\theta}}$ 分解为 $\mathcal{F}(f_{\boldsymbol{\theta}}) = (f_{\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{k},\,i})_{\mathbf{k}\in\widehat{G},\ i=1,\ \ldots\ldots d_{\mathbf{k}}}$，其中

$f_{\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{k},\,i} \in C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\,\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$，且 $F_0 := P_0/T$ 是 M_0 上的旗丛。我们注意到，严格来说，在群 G 的傅里叶变换中还包含一个额外的指标 $i = 1,\,\ldots\ldots,\,d_{\mathbf{k}}$。这里回顾一下，$d_{\mathbf{k}}$ 表示表示 $\mathbf{k}$ 的维数，而 i 为同一表示的同构副本编号。不过，由于下文的论证对每个 i 都相同，我们通常省略傅里叶分量中的指标（$\mathbf{k}$ i），只写 $\mathbf{k}$。

我们也可以定义 $F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}} := (\pi^* f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}})s_{\boldsymbol{\theta}} \in C^\infty_{\mathrm{hol},\boldsymbol{\theta}}(F, \pi^*\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$，其中 $F := P/T = \pi^* F_0$ 是 M 上的旗丛，并且我们将 $s_{\boldsymbol{\theta}}$ 视为 F 上的函数；与 (2.5) 类似，下标 $\boldsymbol{\theta}$表示该截面相对于 $\mathbb{Z}^d$ 在F 上的自然诱导作用的等变性，该作用提升为 $C^\infty(F, \pi^*\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$ 上的 $\mathbb{Z}^d$-作用。下文为简化记号，我们将用 $\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}} \to F$代替 $\pi^*\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}} \to F$。于是我们可以写成 $\mathcal{F}(f) = (f_{\mathbf{k},i})_{\mathbf{k}\in\widehat{G},\, i=1,\ldots,d_{\mathbf{k}}}$，其中 $f_{\mathbf{k},i} \in C^\infty_{\mathrm{hol}}(F, \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$ 以及

$$f_{\mathbf{k},i} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\ \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

注意，这里的 $F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}$ 不依赖于 U 以及在选取 $(s_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 时所做的选择。总之，我们可以先在 G 中取部分傅里叶变换，然后再在 $\mathbb{Z}^d$ 中取，或者反之，这两种程序可交换。

或者，也可以选择不对线丛 $L_{\boldsymbol{\theta}} \to M_0$ （使用截面 $s_{\boldsymbol{\theta}}$）作平凡化；在这种情况下，$f_{\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{k}}$ 应视为 $p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}} \to F_0$ 的纤维全纯截面，其中 $p\colon\ F_0 \to M_0$ 是底点投影，而 $p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \to F_0$ 是拉回丛。由于此处描述的各种实现均酉等价，我们不再区分相应的对象。

下面的结果推广了命题 2.8；其证明直接由上一段以及傅里叶变换是一个 L^2-等距映射这一事实得出，参见例如 [CL24a，引理 2.2。4]:

命题 5.1. 设 $f \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(P)$。则

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{U}(1)^d} \mathcal{F}^{-1} \left(\bigoplus_{\mathbf{k}\in\widehat{G}, i=1,\ldots,d_{\mathbf{k}}} F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

此外，我们有如下帕塞瓦尔恒等式：对所有 $f, g \in C^\infty(P)$，

$$\langle f, g\rangle_{L^2(P)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}} d_{\mathbf{k}} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}} \int_{\mathrm{U}(1)^d} \langle F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}, G_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\rangle_{L^2(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

令 $\mathbf{X} := X_P$ 为 P 上的流生成元，并将 P_0 上的流生成元记为 X_{P_0}。由此诱导出一族算子

$$X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\colon C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}) \to C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$$

在博雷尔-韦伊演算中。或者，在开可缩子集 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$ 上进行计算，算子 $X_{\boldsymbol{\theta}} : C^\infty(P_0) \to C^\infty(P_0)$ 具有如下形式

$$X_{\boldsymbol{\theta}} = X_{P_0} + ip^*(\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}),$$

其中 $(\eta_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in U}$ 是 1-形式构成的族，定义在 M_0 上，并由命题 2.2 构造；参见 §4.1.1，其中讨论了延拓到 $M \to M_0$ 的情形（且其中 $P_0 = M_0$）。不难看出，相应的算子 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}$：$C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}) \to C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$ 具有如下形式

$$X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}} = (X_{P_0})_{\mathbf{k}} + ip^*(\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}). \tag{5.1}$$

注意，对于 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$，可得算子族$X_{\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{k}=\mathbf{0}} = X_{\boldsymbol{\theta}}$ 作用于$C^\infty(M_0,\ L_{\boldsymbol{\theta}})$，或等价地作用于 $C^\infty(M_0)$ 当如上所述对 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 进行平凡化时，其中 $\boldsymbol{\theta} \in U$。这已在 §4中研究过。

5.2. **预解算子与各向异性 Sobolev 空间。** 回顾一下，$\mathbb{H} \to F_0$ 表示由动力学联络诱导的水平丛，见 §2.5；其对偶 $\mathbb{H}^*$ 定义为 $\mathbb{V}$的湮灭子；$\mathbb{V}$是 $F_0 \to M_0$的纤维的切空间，见 §3.2。令

$$p^*(e^{sG_m}) \in C^\infty(\mathbb{H}^*)$$

将 §4.1.2 中引入的逃逸函数拉回到丛 $\mathbb{H}^*$ 上 F_0，其中丛位于 $dp^\top$ 之上，且借助同构 $T^*M_0 \to \mathbb{H}^*$: 定义，见式（ 3.5 ）（为简化记号，我们省略底点投影中的下标 ）。也就是说，对于 (，) :

$$p^*(e^{sG_m})(w,\xi) := e^{sG_m(x,dp^{-\top}\xi)}, \qquad x := p(w), p\colon F_0 \to M_0.$$

（光滑）函数 $p^*e^{sG_m}$ 是各向异性类中的一个符号 $S^{sp^*m}{}_{(x,\xi)}(\mathbb{H}^*)$。根据[CL24a，引理 4.3。1]，这允许定义

$$\mathbf{A}(s) \in \Psi^{sm(x,\xi)}_{h,\mathrm{BW}}(P_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}}), \qquad \mathbf{A}(s) := \mathrm{Op}^{\mathrm{BW}}_h(p^*e^{sG_m} \otimes \mathbf{1}_{L_{\boldsymbol{\theta}}}),$$

这是博雷尔-韦伊演算中的一族伪微分算子，由$\widehat{\ }$ $s \geq 0$参数化，并对所有 $h > 0$，$\mathbf{k} \in G$ 使得 $h|\mathbf{k}| \leq 1$ 作用为

$$A_{h,\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}(s)\colon C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}) \to C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}).$$

在对符号作低阶修正的意义下，上述映射可成为同构。如同§4.1.2中所述，我们通过对 $f_{\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{k}} \in C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\ p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$作如下设定来定义各向异性 Sobolev 空间：

$$\|f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\|_{\mathcal{H}^s_{h,\pm}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})} := \|A_{h,\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}(s)^{\mp 1} f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\|_{L^2(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}.$$

空间$\mathcal{H}^s_{h,\ \pm}(F_0,\ p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$则定义为 $C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,\ p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$关于上述范数的完备化。

当 $h = 1/\langle\mathbf{k}\rangle$ 时，我们就简写为 $\mathcal{H}^s_{\pm}(F_0,\ p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$。与引理 4.1 类似，预解算子

$$z \mapsto (\mp X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}} - z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s_{h,\pm}(F_0, p^*L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}))$$

可从 $\{\Re(z) \gg 0\}$ 亚纯延拓至 $\{\Re(z) > -cs\}$，参见 [CL24a，定理 4.3。1]。其极点包含在 $\{\Re(z) \leq 0\}$中，且与构造过程中所作的选择无关。

或者，如上文 §5.1 中所述，取一个开可缩集 $U \subset \mathrm{U}(1)^d$，我们可以将 $L_{\boldsymbol{\theta}}$相对于 $\boldsymbol{\theta} \in U$平凡化。在这种情况下，我们得到通常空间 $\mathcal{H}^s_{\pm}(F_0、\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$ 及其范数

其上的范数不依赖于 $\boldsymbol{\theta}$；在这些空间上，预解算子 $(\mp X_{\boldsymbol{\theta},\,\mathbf{k}}-z)^{-1}$ 起作用（当 4 时的情形，参见第 $P_0=M_0$）。

5.3. **虚轴上的共振**。回想一下，$F_1,\dots,F_a\in\mathcal{D}'(M_0,\Lambda^2T^*M_0)$ 是对应于中心部分的动力学联络的曲率2-形式。我们令 $(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$ 表示由 $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 P_0 上诱导的流。

引理 5.2。假设$(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$ 在 F_0 上是遍历的，并且$(d\alpha,F_1,\dots,F_a)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关。设 $\mathbf{k}\in\widehat{G}$、$\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{U}(1)^d$。那么 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}$ 在 $i\mathbb{R}$ 上没有共振。

证明。反设存在一个非平凡解

$$u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\in\mathcal{H}^s_{\pm}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}),\qquad(-X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}-i\lambda)u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}=0,$$

对于某个 $\lambda\in\mathbb{R}$。根据 [Lef25，命题9.2.3(ii)]，$u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\in C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$。由于$X_{F_0}|u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}|^2=2\Re(\langle X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}})u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\rangle)=0$，我们推得$|u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}|=c>0$ 在 F_0上的$(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$ 的遍历性下为常数。将其限制到纤维 $F_0(x_0)\simeq G/T$ 上，其中 $x_0\in M$，我们发现$u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}$ 是 $p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}\to F_0(x_0)$的处处非零截面。然而，如果存在$k_i\neq0$使得 $i\in\{a+1,\dots,d\}$，那么 $p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}\to F_0(x_0)$就是一个非平凡线丛（见[CL24a，命题2.1.8]），这就产生了矛盾。因此，$k_{a+1}=\cdots=k_d=0$。

由于 $p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}\to F_0$ 在 $F_0\to M_0$ 的每个纤维上都是平凡的，因此它是 M_0 上一个线丛 $L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}_{M_0}\to M_0$ 的拉回。此外，$C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})$ 中的纤维全纯截面沿每个纤维为常数，并且由 $L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}_{M_0}\to M_0$ 的截面拉回得到。也就是说，对于某个 $\tilde{u}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\in C^\infty(M_0,L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}_{M_0})$，有 $u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}=p^*\tilde{u}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}$（另见 [CL24a, (4.6.1)证明的情形2] 中的讨论，那里给出了类似的论证）。流不变性性质 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}u_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}=0$ 在底空间上转化为 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},M_0}\tilde{u}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}=0$。按照上文 §5.1 的说明将 $L_{\boldsymbol{\theta}}$ 平凡化后，利用 (5.1)，我们可以写成 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},M_0}=(\nabla^{\mathrm{dyn}}{}_{\mathbf{k},M_0})_{X_{M_0}}+i\iota_{X_{M_0}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}$，其中 $\nabla^{\mathrm{dyn}}{}_{\mathbf{k},M_0}$ 表示与动力学联络相关联的 $\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}_{M_0}$ 上的联络。仿照引理 4.2 的证明，我们类似于 (4.7) 得到（另见 [CL24a, (4.6.9)的推导]）

$$(-\nabla^{\mathrm{dyn}}_{\mathbf{k},M_0}-i\eta_{\boldsymbol{\theta}}\wedge-i\lambda\alpha\wedge)\tilde{u}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}=0.$$

由于$|\tilde{u}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}|=c>0$，我们得到联络 $\nabla^{\mathrm{dyn}}{}_{\mathbf{k},M_0}+i\eta_{\boldsymbol{\theta}}+i\lambda\alpha$ 存在一个平行截面，因此其曲率为零；也就是说，利用 $\eta_{\boldsymbol{\theta}}$ 是闭的，以及$\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}}_{M_0}$ 中的线丛的曲率可以取为与 $i(F_j)_{j=1}^a$相同，

$$k_1F_1+\cdots+k_aF_a+\lambda d\alpha=0.$$

根据假设，只有在 $k_1=\cdots=k_a=0$和 $\lambda=0$时才有可能。也就是说$\mathbf{k}=\mathbf{0}$，因此我们回到了引理4.2 的情形，该引理证明了当$\mathbf{k}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\theta}\neq\mathbf{0}$时，虚轴上不存在共振。证明至此完成。□

5.4. **高频估计与关联衰减**。关键结果是下面的高频估计，它类似于定理 4.5 （与 [CL24a，定理 4.4 进行比较。2]）。

定理 5.3（高频估计，$\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$）。假设 $(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$ 在 F_0上是遍历的，并且 $(d\alpha、F_1、\ldots、F_a)$ 在 $\mathbb{R}$上是线性无关的。令 $s>0$。存在 $C、\vartheta>0$，使得对于所有 $z\in\mathbb{B}、\mathbf{k}\in\widehat{G}\setminus\{0\}、\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d$:

$$\|(\mp X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{1/\langle\mathbf{k}\rangle,\pm}(F_0,L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}\leq C\langle\Im(z)\rangle^{\vartheta}\langle\mathbf{k}\rangle^{\vartheta}. \tag{5.2}$$

（5.2）的证明依赖于以下两个估计，它们对所有 $z\in\mathbb{B}、\mathbf{k}\in\widehat{G}\setminus\{0\}、\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{U}(1)^d$（下文中，$\lambda=\Im(z)$）均成立:

$$\begin{aligned}\|(\mp X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{1/\langle\mathbf{k}\rangle,\pm}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}&\leq C\langle\mathbf{k}\rangle^{\ell}, \qquad |\mathbf{k}|\geq|\lambda|,\\ \|(\mp X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{1/\langle\lambda\rangle,\pm}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}&\leq C\langle\Im(z)\rangle^{\ell}, \qquad |\lambda|\geq|\mathbf{k}|,\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\ell=\max(3\dim F_0+5、\dim F_0+11)$。$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}$的情形已在 [CL24a，第4节6]中得到证明。上述两个估计关于一致成立这一事实，可通过直接改编 [CL24a第4节6], 中的证明，并采用定理 4.5的证明中所使用的相同策略而得出。注意，根据引理5.2，算子 $(\mp X_{\boldsymbol{\theta}、\mathbf{k}}-z)^{-1}$ 在虚轴上没有共振。

这立即推出以下结果:

命题 5.4（$\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$时的关联函数展开）。假设 $(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$在 F_0 上是遍历的，并且（$d\alpha、F_1、\ldots、F_a$）在 $\mathbb{R}$上是线性无关的。存在 $\vartheta>0$，使得对所有 $N\geq1$，存在一个常数 $C_N>0$，满足以下结论。令$f、g\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(P)$ 使得

$$F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}=G_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}=0, \qquad \forall\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{U}(1)^d.$$

于是:

$$\left|\langle f\circ\psi_{-t},g\rangle_{L^2(P)}\right|\leq C_N\langle t\rangle^{-N}\|f\|_{B^{\vartheta N,0}(P)}\|g\|_{B^{\vartheta N,0}(P)}, \qquad t\geq0.$$

常数 $\vartheta>0$ 可以明确写出，且仅取决于 M_0 和G。例如，参见 [CL24a，定理 4.1。1] 注意，条件 $F_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}=0$ 对所有 $\boldsymbol{\theta}$ 均为零，与 $f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}=0$相同；这进而意味着，$f$ 在 P 中的G-纤维上的积分全都为零。

证明。利用命题 5.1，我们先展开

$$\langle f\circ\psi_{-t},g\rangle_{L^2(P)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}\setminus\{0\}}d_{\mathbf{k}}\sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}}\int_{\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{U}(1)^d}\langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}}f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i},g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\rangle_{L^2(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

然后，利用高频估计（5.2）以及类似于定理4.13 证明中的分部积分论证，可以对 $\boldsymbol{\theta}$ 的传播子 $X_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}$ 获得一致的多项式衰减（在此情形下无需进行轮廓变形，因为虚轴上不存在共振）。也就是说，存在 $C,\vartheta_0>0$，使得对每个 $N\geq1$ 以及所有 $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$

$$\langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}}f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}},g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\rangle_{L^2}\leq C\langle t\rangle^{-N}\langle\mathbf{k}\rangle^{\vartheta_0N}\|f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\|_{H^{\vartheta_0N}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}\|g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}\|_{H^{\vartheta_0N}(F_0,p^*L_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\mathbf{L}^{\otimes\mathbf{k}})}.$$

因此，对于每个 $N \geq 1$，我们可以估计

$$
\begin{aligned}
|\langle f \circ \psi_{-t}, g\rangle_{L^2(P)}| &\leq C\langle t\rangle^{-N} \int_{\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}\setminus\{\mathbf{0}\}} d_{\mathbf{k}}\langle \mathbf{k}\rangle^{\vartheta_0 N} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}} \|f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\|_{H^{\vartheta_0 N}} \|g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\|_{H^{\vartheta_0 N}} \\
&\leq C\langle t\rangle^{-N} \int_{\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}} d_{\mathbf{k}}\langle \mathbf{k}\rangle^{\vartheta_0 N} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}} \|f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\|^2_{H^{\vartheta_0 N}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}} d_{\mathbf{k}}\langle \mathbf{k}\rangle^{\vartheta_0 N} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}} \|g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\|^2_{H^{\vartheta_0 N}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\langle t\rangle^{-N} \int_{\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \|f_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^{3\vartheta_0 N/2}(P_0, p^* L_{\boldsymbol{\theta}})} \|g_{\boldsymbol{\theta}}\|_{H^{3\vartheta_0 N/2}(P_0, p^* L_{\boldsymbol{\theta}})} \\
&\leq C\langle t\rangle^{-N} \|f\|_{B^{\vartheta N,0}(P)} \|g\|_{B^{\vartheta N,0}(P)},
\end{aligned}
$$

在第二行中，我们使用了柯西-施瓦茨不等式，以及 $f_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = g_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = 0$ 根据假设，在第三行中，我们使用了各向异性水平空间嵌入到 P_0 上的索伯列夫空间的嵌入，这一结果证明于 [CL24a，引理 4.4。1], 在最后一行中，我们使用了引理2.14 ，并引入了 ϑ: $= 3\vartheta_0/2$。证明至此完成。（类似论证也可参见 [CL24a，第 4.4.1 节和第 4.4 节2] 。）□

最后，我们可以完成定理1.2的证明:

定理*1.2*的证明。 我们展开

$$
\begin{aligned}
\langle f \circ \psi_{-t}, g\rangle_{L^2(P)} = &\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d} \langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}} f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}, g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}}\rangle_{L^2(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}_{=A} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\mathbf{k}\in\widehat{G}\setminus\{\mathbf{0}\}} d_{\mathbf{k}} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{k}}} \int_{\boldsymbol{\theta}\in \mathrm{U}(1)^d} \langle e^{-tX_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}}} f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}, g_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k},i}\rangle_{L^2(F_0, p^* L_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \mathbf{L}^{\otimes \mathbf{k}})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}_{=B}.
\end{aligned}
$$

注意，在项 A, $f_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}=\mathbf{0}} \in C^\infty_{\mathrm{hol}}(F_0, p^* L_{\boldsymbol{\theta}})$ 中，它被视为 $C^\infty(M_0, L_{\boldsymbol{\theta}})$ 的一个元素。根据定理 1.1，项 A 按 t 的幂展开为渐近展开，如所述。若传递群 H 等于 G，则 $(\psi_t^{F_0})_{t\in\mathbb{R}}$ 在 F_0 上是遍历的。根据命题 5.4，项 B 被 $B \leq C_N\langle t\rangle^{-N} \|f\|_{B^{\vartheta N,0}} \|g\|_{B^{\vartheta N,0}}$所界定，其中 $t \geq 0$，由此证明得证。□

参考文献

[AN17] J. Aaronson 与 H. Nakada. 论“良好”的无穷测度保持变换的多重回复及其他性质. 遍历理论与动力系统, 37:1345–1368, 2017.[BBT23] Péter Bálint、Henk Bruin 与 Dalia Terhesiu. 具有小散射体的周期洛伦兹气体.概率论及相关领域, 186(1-2):159–219, 2023.

[Bea25] Louis-Brahim Beaufort. 关于负曲率流形上标架流的 Kanai 猜想. 预印本, arXiv:2509.09500 [math.DS](2025), 2025.[BFRT24] Henk Bruin、Charles Fougeron、Davide Ravotti 与 Dalia Terhesiu. 关于平移流的 $\mathbb{Z}^d$-延拓的遍历积分的渐近展开. arXiv 电子预印本, 页码 arXiv:2402.02266, 2024年2月.[BG80] Michael Brin 与 Mikhael Gromov. 关于标架流的遍历性. Invent. Math., 60(1):1–7, 1980.[BGHW25] Yannick Guedes Bonthonneau、Colin Guillarmou、Joachim Hilgert 与 Tobias Weich. Anosov 作用的 Ruelle-Taylor 共振. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 27(8):3085–3147, 2025.[BK84] M. Brin 与 H. Karcher. 具有夹紧负曲率的流形上的标架流. Compositio Math., 52(3):275–297, 1984.[Bon20] Yannick Guedes Bonthonneau. Ruelle共振的扰动与 Faure-Sjöstrand 各向异性空间. Rev. Un. Mat. Argentina, 61(1):63–72, 2020.[BP03] Keith Burns 与 Mark Pollicott. 稳定遍历性与标架流. Geom. Dedicata, 98:189–210, 2003.[Bri75a] Michael Brin. 某类动力系统的拓扑传递性, 以及负曲率流形上的标架流. Funkcional. Anal. i Priložen., 9(1):9–19, 1975.[Bri75b] Michael Brin. C-系统的群延拓的拓扑. Mat. Zametki, 18(3):453–465, 1975.[BtD95] Theodor Bröcker 与 Tammo tom Dieck. 紧李群的表示. 1985年原版的修订重印本, Grad. Texts Math. 第98卷. 纽约州纽约: Springer, 1985年原版的修订重印版, 1995.[Cha00] Laurent Charles. 几何量子化的半经典方面. 学位论文, 巴黎第九大学—巴黎多菲纳大学, 2000年12月. 评审人: Louis Boutet de Monvel、Yves Colin de Verdière. 答辩委员: Yvar Ekeland、André Voros、San Vu Ngoc.[CL24a] Mihajlo Cekić 与 Thibault Lefeuvre. 主丛上的半经典分析. 预印本, arXiv:2405.14846 [math.AP] (2024), 2024.[CL24b] Mihajlo Cekić 与 Thibault Lefeuvre. holonomy 逆问题的稳定性估计. Comm. Partial Differential Equations, 49(5-6):428–469, 2024.[CLMS22] Mihajlo Cekić、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 与 Uwe Semmelmann. 迈向关于标架流遍历性的 Brin 猜想：新进展与展望. Math. Res. Rep. (Amst.), 3:21–34, 2022.[CLMS24] Mihajlo Cekić、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 与 Uwe Semmelmann. 关于偶数维流形上标架流的遍历性. Invent. Math., 238(3):1067–1110, 2024.[CR24] Roberto Castorrini 与 Davide Ravotti. 负曲率曲面上阿贝尔覆盖的极限圆流. arXiv 电子预印本, 页码 arXiv:2405.08592, 2024年5月.[CS23] Michael Chow 与 Pratyush Sarkar. Anosov 齐性空间上单参数对角流的局部混合. Int. Math. Res. Not., 2023(18):15834–15895, 2023.[DN19] D. Dolgopyat 与 P. Nándori. 无穷测度更新定理及相关结果. Bulletin LMS, 51:145–167, 2019.[DN20] Dmitry Dolgopyat 与 Péter Nándori. 关于双曲流的混合与局部中心极限定理. 遍历理论与动力系统, 40(1):142–174, 2020.[DN25] D. Dolgopyat 与 P. Nándori. 具有无穷测度的非马尔可夫流的更新定理与混合. 2025. 预印本.[DNP22] Dmitry Dolgopyat、Péter Nándori 与 Françoise Pène. 双曲流的 $\mathbb{Z}^d$ 覆盖的相关函数的渐近展开 . Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., 58(2):1244–1283, 2022.[DZ16] Semyon Dyatlov 与 Maciej Zworski. 借助微局部分析研究阿诺索夫流的动力 zeta 函数. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 49(3):543–577, 2016.

[DZ17] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski. 曲面上的 Ruelle ζ函数在零点处. Invent. Math., 210(1):211–229, 2017.[DZ19] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski.《散射共振的数学理论》, Graduate Studies in Mathematics 第 200 卷. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2019.[FS11] Frédéric Faure 和 Johannes Sjöstrand. Anosov 流的 Ruelle 共振密度上界. Comm. Math. Phys., 308(2):325–364, 2011.[GBLW26] Yannick Guedes-Bonthonneau、Thibault Lefeuvre 和 Tobias Weich. Anosov 表示的谱. 编写中，2026.[GH88] Y. Guivarc'h 和 J. Hardy. 一类马尔可夫链的极限定理及其在 Anosov 微分同胚中的应用. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 24:73–98, 1988.[GK21] Colin Guillarmou 和 Benjamin Küster. 双曲 3-流形上标架流的谱理论. Ann. Henri Poincaré, 22(11):3565–3617, 2021.[GKL22] Colin Guillarmou、Gerhard Knieper 和 Thibault Lefeuvre. 测地线伸缩、压力度量与标记长度谱刚性. 遍历理论与动力系统, 42(3):974–1022, 2022.[Gou11] S. Gouëzel. 无穷测度动力系统中由大偏差得到的相关渐近展开. Colloq. Math., 125:193–212, 2011.[Gui89] Y. Guivarc'h. 某些纤维化动力系统在无穷测度下的遍历性质. Ergod. Th. Dynam. Sys., 9:433–453, 1989.[Gui17] Colin Guillarmou. Anosov 流的不变分布与 X 射线变换. J. Differential Geom., 105(2):177–208, 2017.[Hat02] Allen Hatcher. 代数拓扑. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.[Hör03] Lars Hörmander. 线性偏微分算子的分析. I. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. 分布理论与傅里叶分析，第二版（1990）的重印本 [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)].[Iwa08] Y. Iwata. 混合半流的广义局部极限定理. Hokkaido Math. J., 37:215–240, 2008.[Lef23] Thibault Lefeuvre. 通过微局部分析研究 Anosov 流的等距扩张. Commun. Math. Phys., 399(1):453–479, 2023.[Lef25] Thibault Lefeuvre. 双曲动力学与几何中的微局部分析. 编写中，2025.[LT16] C. Liverani 和 D. Terhesiu. 某些非一致双曲系统的混合. Ann. Henri Poincaré, 17:179–226, 2016.[MT13] I. Melbourne 和 D. Terhesiu. 无穷测度动力系统的一阶及高阶一致对偶遍历定理. Israel J. Math., 194:793–830, 2013.[MT17] I. Melbourne 和 D. Terhesiu. 有限与无穷测度连续时间动力系统的算子更新理论. Monatsh. Math., 182:377–431, 2017.[OP19] Hee Oh 和 Wenyu Pan. 阿贝尔覆盖上 horosphere 子群的局部混合与不变测度. Int. Math. Res. Not. IMRN, (19):6036–6088, 2019.[Pè19] F. Pène. 无穷测度下的混合与去相关：周期性 Sinai 台球情形. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 55:378–411, 2019.[Sam15] Andrés Sambarino. 超凸表示的轨道计数问题. Ann. Inst. Fourier, 65(4):1755–1797, 2015.[SV04] D. Szász 和 T. Varjú. Lorentz 过程的局部极限定理及其在平面上的复现. 遍历理论与动力系统, 24:254–278, 2004.[Ter22] Dalia Terhesiu. Gibbs–Markov 半流的 $\mathbb{Z}$-扩张的 Krickeberg 混合. Monatsh. Math., 198(4):859–893, 2022.[Thi09] Xavier Thirion. 乒乓群的 Weyl 室流的混合性质. Bull. Soc. Math. Fr., 137(3):387–421, 2009.

[Zwo12] Maciej Zworski. 半经典分析，Graduate Studies in Mathematics 第 138 卷.美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年.

法国国家科学研究中心和巴黎东克雷泰伊大学（LAMA），94010，法国克雷泰伊电子邮件地址：mihajlo.cekic@cnrs.fr

巴黎萨克雷大学，奥赛数学实验室，91405，法国奥赛。电子邮件地址：thibault.lefeuvre1@universite-paris-saclay.fr

巴黎萨克雷大学，奥赛数学实验室，91405，法国奥赛。电子邮件地址：sebastian.munoz-thon@universite-paris-saclay.fr