arXiv:2603.06417v1 [math.AP] 6 Mar 2026

ON S $\mathbb{R}^N$中的半线性 Grushin–Schr ¨ödinger 方程

J. CARVALHO 与 A. VIANA

Abstract. 我们证明了下述方程的非平凡非负弱解的存在性

$$-\Delta_\gamma u + V(z)u = Q(z)f(u), \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

其中 Δ_γ 表示 $\mathbb{R}^N$中所谓的 Grushin 型算子。假定势函数 V 与Q 分别由形如$(1+|z|)^a$, $a \in \mathbb{R}$的函数从下方和上方加以控制。主要结果是：在适当条件下，空间 E_V^γ 嵌入加权勒贝格空间 $L_Q^p(\mathbb{R}^N)$。最后，我们推导所得弱解的正则性结果。

1. Introduction and main results

考虑如下定义的 Grushin 型算子 Δ_γ

$$\Delta_\gamma u(z) := \Delta_x u(z) + |x|^{2\gamma}\Delta_y u(z), \tag{1.1}$$

其中 $\gamma > 0$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$，其中 $m + k = N \geq 3$，且 Δ_x 和 Δ_y 分别表示关于变量 x 和 y的经典拉普拉斯算子。(1.1) 中定义的算子最早见于 [15, 16]。这类算子自然出现在退化扩散和各向异性扩散问题中。当 γ取整数值时，这些算子属于一般的 H¨ormander 算子类 [17]。当 γ取正实数值时，它们是 Kogoj 和 Lanconelli 在 [18], 中引入的 Δ_λ-算子的最简单例子，同时也属于 [19]所研究的更广泛的 X-椭圆算子族。Franchi 和 Lanconelli 最早在其20世纪80年代初的开创性著作 [12, 13]中，为这类算子引入并研究了一种度量及其相应的底层次黎曼结构。

近年来，退化二阶椭圆算子一直备受关注，参见例如 [1, 6, 8]。另一方面，涉及这类算子的半线性方程研究仍在发展中；特别是，关于含 Grushin 型算子的半线性椭圆方程，相关结果相对较少，参见例如 [3, 4, 7, 11, 20–22]。

我们提及这一方向上的两项近期研究。在 [22], Loiudice 给出了如下形式的狄利克雷问题的解在奇点附近及无穷远处的渐近行为：

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma u - \mu\dfrac{\psi^2}{d^2}u = K(z)|u|^{2_\gamma^*-2}u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

2020年数学主题分类。35J70, 35A15, 35J61, 35H20,关键词和短语。Grushin算子、次椭圆算子、退化椭圆方程。

其中 $2^*_\gamma = \frac{2N_\gamma}{N_\gamma - 2}$, $N_\gamma = m + (\gamma+1)k$, 且 $\psi := |\nabla_\gamma d|$, 其中

$$d(z) = \left(|x|^{2(\gamma+1)} + (\gamma+1)^2|y|^2\right)^{\frac{1}{2(\gamma+1)}} \quad \text{and} \quad \nabla_\gamma d = (\nabla_x d, |x|^\gamma \nabla_y d).$$

这里，Ω 是 $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$, $K \in L^\infty(\Omega)$ 的开子集，且 $0 \le \mu < \left(\frac{N_\gamma - 2}{2}\right)^2$.

在 [2], Alves 和 de Holanda 证明了半线性椭圆方程存在非平凡的非负解

$$-\Delta_\gamma u + a(z)u = f(u), \quad z \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

其中 $N \ge 3$, 势函数 a 满足以下假设:

(1) $a(z) \ge a_0 > 0$, 对所有 $z \in \mathbb{R}^N$ 均成立; (2) $a(x, y) = a(x', y)$, 当 $|x| = |x'|$ 时成立; (3) 函数 $a(x, y)$ 关于 y 变量是周期的 y:

$$a(x, y) = a(x, y + y_0), \text{ for all } y_0 \in \mathbb{Z}^k,$$

或者关于 y 是强制的，即

$$a(x, y) \longrightarrow \infty, \text{ as } |y| \longrightarrow \infty, \text{ uniformly for } x \in \mathbb{R}^m.$$

此外，作者还考虑了 $a(z) = 0$ 的情形，这称为零质量情形。本文的主要目标是证明紧嵌入

$$E_V^\gamma \hookrightarrow L_Q^p(\mathbb{R}^N),$$

在对 V 和 Q 施加适当条件的情况下。由此，我们证明了该方程存在非负弱解

$$-\Delta_\gamma u + V(z)u = Q(z)f(u), \quad z \in \mathbb{R}^N. \tag{$\mathcal{P}$}$$

在本文中，我们改为对势函数作出以下假设:

(V) $V: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，并且存在常数 $C_V > 0$ 和$\alpha \in \mathbb{R}$，使得

$$\frac{C_V}{(1+|z|)^\alpha} \le V(z), \quad \text{for a.e. } z \in \mathbb{R}^N;$$

(Q) $Q: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，并且存在常数 $C_Q > 0$和 $\beta \in \mathbb{R}$，使得

$$0 < Q(z) \le \frac{C_Q}{(1+|z|)^\beta}, \quad \text{for a.e. } z \in \mathbb{R}^N.$$

我们的问题也不同于（1.2），这是由于势函数 Q（z）乘以 f（u）的存在；此外，我们对 V 采用了不同的假设，而不要求任何对称性，这使得我们无法沿用 Strauss 的方法 [27]，即通过证明径向引理，如 [28] 中所采用的做法。相反，我们将外部区域分解为环形区域——这一技巧类似于 [26] 中提出并在 [9, 10] 中成功应用的方法。Ambrosetti 等人 [5] 也曾将同一技巧用于一类类似的非线性薛定谔方程，其中涉及的是拉普拉斯算子而非 Grushin 算子。为应用这一技巧，我们证明了一个依赖于

由 Kogoj 与 Lanconelli 得到的索伯列夫嵌入 [18]：给定有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 以及 $p \in [1, 2^*_\gamma]$，则

$$H_0^{1,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

这里，

$$H_0^{1,\gamma}(\Omega) := \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{1,\gamma}}},$$

and

$$\|u\|_{H^{1,\gamma}} := \left(\int_\Omega |\nabla_\gamma u|^2 \, \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

由于索博列夫嵌入自然值得关注，我们提到，在全空间的情形下，Monti 和 Morbidelli [25] 指出，索博列夫嵌入是庞加莱不等式和表示公式的推论，前者由 [12] 证明，后者由 [14]，证明：

$$H^{1,\gamma}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{2^*_\gamma}\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{1.4}$$

其中 $2^*_\gamma = \frac{2N_\gamma}{N_\gamma - 2}$。另见 [24]。最近，Abatangelo、Ferrero 和 Luzzini [1]研究了有界区域中带势函数的线性格鲁申方程弱解的渐近行为和唯一延拓原理，即（$\mathcal{P}$），其中$Q \equiv 0$。他们还在某些条件下给出了索博列夫嵌入。

接下来，我们明确将要使用的空间。我们将 E_V^γ 定义为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数

$$\|u\|_{E_V^\gamma} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla_\gamma u|^2 + V(z)u^2\right] \, \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}.$$

该范数由以下内积诱导：

$$\langle u, v\rangle_{E_V^\gamma} := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma v + V(z)uv) \, \mathrm{d}z,$$

因此， E_V^γ 是一个希尔伯特空间。

对于 $1 \le p < \infty$，我们定义

$$L_Q^p(\mathbb{R}^N) := \left\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ measurable} : \int_{\mathbb{R}^N} Q(z)|u|^p \, \mathrm{d}z < \infty\right\},$$

关于范数

$$\|u\|_{L_Q^p(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z)|u|^p \, \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们的主要结果如下。

定理 1.1 (加权索伯列夫嵌入)。 假设 (V) 和 (Q) 成立。那么嵌入 $E_V^\gamma \hookrightarrow L_Q^p(\mathbb{R}^N)$ 在以下任一条件成立时均为连续：

(i) $\alpha \le N < \beta$ 和 $2 \le p \le 2^*_\gamma$;

(ii) $N \le \alpha < \beta$ 和 $2 \le p \le \overline{p}$，其中

$$\overline{p} := \min\left\{\frac{2(\beta - N)}{(\alpha - N)}, 2^*_\gamma\right\};$$

(iii) $\alpha \le N$、$\underline{\beta} \le \beta < N$ 和 $\underline{p} \le p \le 2^*_\gamma$，其中

$$\underline{\beta} := \max\left\{N - \frac{2^*_\gamma(N-2)}{2}, N - \frac{2^*_\gamma(N-\alpha)}{2}\right\}$$

and

$$\underline{p} := \max\left\{2, \frac{2(N-\beta)}{(N-2)}, \frac{2(N-\beta)}{(N-\alpha)}\right\}.$$

此外，在以下情形下，嵌入是紧的：

(i') $\alpha \le N < \beta$ 和 $2 \le p < 2^*_\gamma$;

(ii') $N < \alpha \le \beta$ 和 $2 \le p < p_0$。

我们称函数 $u \in E^\gamma_V$ 是问题 ($\mathcal{P}$) 的弱解，若对任意$\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$，均有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma \varphi + V(z)u\varphi)\, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^N} Q(z)f(u)\varphi\, \mathrm{d}z.$$

定理 1.1 有助于我们证明非平凡非负弱解的存在性，这正是下文的定理 1.2 。在其证明中，我们只考虑 $\alpha \le N < \beta$这一情形，因为其他情形类似。此外，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的，我们将假设

(f_1) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$; ($f_2$) 存在 $q \in \left(2, 2^*_\gamma\right)$ 使得

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty;$$

(f_3) 存在 $\theta > 2$ 使得

$$0 < \theta F(s) \le f(s)s, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

其中 $F(t) := \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s$。

在陈述下一个结果之前，我们先定义空间 $W^{2,\,_\gamma p}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right) : |x|^{|\beta|\gamma} D^\alpha_x D^\beta_y u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right),\right.$ 对于多重指标 $\left.|\alpha| + |\beta| \le 2\right\}$.特别地，将 $|x|^{|\beta|\gamma} D^\alpha_x D^\beta_y u$ 记为 $D^\alpha_\gamma u$，我们赋予 $W^{2,\,_\gamma p}(\mathbb{R}^N)$ 范数

$$\|u\|_{W^{2,p}_\gamma} = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha_\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla_\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.5}$$

参见 Metafune、Negro 和 Spina [23]。

最后，我们给出关于解的存在性和正则性的结果。

定理 1.2。 设定理 (i') 和 (ii') 中的条件成立，并假设 (V)、(Q)以及 (f_1)-(f_3)。则问题 $(\mathcal{P})$ 至少存在一个非负非平凡弱解 $u \in E_V^\gamma$。此外，

(i)若 $\frac{1}{Q} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，则 $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$；$(ii)$ 若存在 V_0、$V_1 > 0$，使得 $V_0 \le V(z) \le V_1$ 对所有 $z \in \mathbb{R}^N$ 成立，则 $u \in W^{2,}{}_{\gamma}{}^{\frac{2^*_\gamma}{q-1}}(\mathbb{R}^N)$。

2. Proof of Theorem 1.1

我们首先证明一个辅助结果。

引理 2.1. 设 $1 \le p \le 2^*_\gamma$、$R > 0$ 和 $u \in E_V^\gamma$。那么，存在 $C_0 := C_0(p, R) > 0$，使得

$$\|u\|_{L^p(B_R)} \le C_0 \|u\|_{E_V^\gamma}, \tag{2.1}$$

其中 B_R 表示欧几里得球

$$B_R := \left\{ z \in \mathbb{R}^N : |z| < R \right\}.$$

证明。 令 $u \in E_V^\gamma$。考虑满足以下条件的 $\varphi \in C_0^\infty(B_{2R})$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \ \text{ in } B_{2R}, \ \varphi \equiv 1 \ \text{ in } B_R, \ \text{and } |\nabla\varphi| \leqslant C \ \text{ in } B_{2R}. \tag{2.2}$$

特别地， $|\nabla_\gamma \varphi| \le C_1$ 属于 B_{2R}。我们断言 $\varphi u \in H^{1,}{}_0{}^\gamma(B_{2R})$。事实上，我们必须证明存在 $(\psi_n)_n \subset C_0^\infty(B_{2R})$，使得

$$\|\nabla_\gamma \psi_n - \nabla_\gamma(\varphi u)\|_{L^2(B_{2R})} \to 0,$$

因为 $n \to \infty$。根据 E_V^γ 的定义，存在一个序列 $(u_n)_n \subset C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足 $\|u_n - u\|_{E_V^\gamma} \to 0$，因为 $n \to \infty$。令 $\psi_n := \varphi u_n \in C_0^\infty(B_{2R})$，我们可以得出

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma \psi_n - \nabla_\gamma(\varphi u) &= [\varphi \nabla_\gamma u_n + u_n \nabla_\gamma \varphi] - [\varphi \nabla_\gamma u + u \nabla_\gamma \varphi] \\ &= \varphi [\nabla_\gamma u_n - \nabla_\gamma u] + \nabla_\gamma \varphi [u_n - u]. \end{aligned}$$

因此，我们利用关于 φ的条件、上述恒等式以及假设(V)，得到

$$\begin{aligned} \|\nabla_\gamma \psi_n - \nabla_\gamma(\varphi u)\|^2_{L^2(B_{2R})} &\le \|\nabla_\gamma(u_n - u)\|^2_{L^2(B_{2R})} + \frac{C_1^2}{\inf_{B_{2R}} V(z)} \int_{B_{2R}} V(z)|u_n - u|^2 \, \mathrm{d}z \\ &\le C_2 \|u_n - u\|^2_{E_V^\gamma} \to 0, \end{aligned}$$

因为 $n \to \infty$。我们的断言得证。

现在，我们可以应用 Kogoj 和 Lanconelli 的嵌入 [18, 定理 3.3]用 H^1重新表述，$H^{1,}{}_0{}^\gamma(B_{2R})$:

$$H_0^{1,\gamma}(B_{2R}) \hookrightarrow L^p(B_{2R}). \tag{2.3}$$

因此，

$$\int_{B_R} |u|^p \mathrm{d}z = \int_{B_R} |\varphi u|^p \mathrm{d}z \le \int_{B_{2R}} |\varphi u|^p \mathrm{d}z \le C_3 \left(\int_{B_{2R}} |\nabla_\gamma(\varphi u)|^2 \, \mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2.4}$$

So,

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|u|^p\mathrm{d}z &\le C_4\left(\int_{B_{2R}}\left[u^2\left|\nabla_\gamma\varphi\right|^2+\varphi^2\left|\nabla_\gamma u\right|^2\right]\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\le C_5\left(\int_{B_{2R}}\left[\left|\nabla_\gamma u\right|^2+V(z)u^2\right]\mathrm{d}z\right)^{\frac{p}{2}}\le C_5\|u\|^p_{E_V^\gamma}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

这证明了（2.1）。 □

定理 ***1.1*** 的证明。 注意，我们可以写成

$$\int_{\mathbb{R}^N}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z=\int_{B_1}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z.\tag{2.6}$$

由 (Q) 和 (2.1)（其中 $R=1$），可得

$$\int_{B_1}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z\le C_Q\int_{B_1}|u|^p\,\mathrm{d}z\le C_1\|u\|^p_{E_V^\gamma}.\tag{2.7}$$

还需估计 (2.6) 右侧的第二个积分。为此，对每个 $j\in\{0\}\cup\mathbb{N}$，定义环域

$$A_j=\{z\in\mathbb{R}^N:2^j<|z|<2^{j+1}\}.$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{A_j}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z.\tag{2.8}$$

由条件 (Q)，我们可以估计

$$\int_{A_j}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z\le C_Q\int_{A_j}\frac{1}{(1+|z|)^\beta}|u|^p\,\mathrm{d}z\le\frac{C_Q}{2^{\beta j}}\int_{A_j}|u|^p\,\mathrm{d}z.$$

通过进行变量替换 $w=2^{-j}z$，我们得到

$$\int_{A_j}|u(z)|^p\,\mathrm{d}z=\int_{A_0}|u(2^jw)|^p\;2^{Nj}\,\mathrm{d}w=2^{Nj}\int_{A_0}|u_j(w)|^p\,\mathrm{d}w,$$

其中 $u_j(w):=u(2^jw)$。因此，

$$\int_{A_j}Q(z)|u|^p\,\mathrm{d}z\le\frac{C_Q}{2^{(\beta-N)j}}\int_{A_0}|u_j(w)|^p\,\mathrm{d}w.\tag{2.9}$$

应用（2.5）（第一个不等式），并取 $R=2$ 且利用 $A_0\subset B_2$这一事实，可得

$$\int_{A_0}|u_j(w)|^p\,\mathrm{d}w\le C_2\left(\int_{B_4}\left[\left|\nabla_\gamma u_j(w)\right|^2+u_j^2(w)\right]\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{p}{2}}.\tag{2.10}$$

回顾一下，如果 $w=(x,\ y)$ 和 $z=(\widetilde{x},\ \widetilde{y})=(2^jx,\ 2^jy)=2^jw$，则恒等式

$$\nabla_\gamma u_j(w)=\left(2^j\nabla_x u(2^jw),2^j|x|^\gamma\nabla_y u(2^jw)\right)$$

给出

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma u_j(w)|^2 \,\mathrm{d}w = 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla_x u(2^j w)|^2 + |x|^{2\gamma} |\nabla_y u(2^j w)|^2 \right] \,\mathrm{d}w$$
$$= 2^{(2-N)j} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla_x u(z)|^2 + |2^{-j}\widetilde{x}|^{2\gamma} |\nabla_y u(z)|^2 \right] \,\mathrm{d}z.$$

So,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma u_j(w)|^2 \,\mathrm{d}w = 2^{(2-N)j} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(z)|^2 \,\mathrm{d}z + 2^{(2-N-2\gamma)j} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{x}|^{2\gamma} |\nabla_y u(z)|^2 \,\mathrm{d}z$$
$$\leq 2^{(2-N)j} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma u(z)|^2 \,\mathrm{d}z.$$

我们暂且假设 $\alpha \geq 0$。由 (V)，可得

$$\int_{B_4} u_j^2(w) \,\mathrm{d}w = 2^{-Nj} \int_{B_{4\cdot 2^j}} u^2(z) \,\mathrm{d}z \leq C_3 2^{(\alpha-N)j} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u^2(z) \,\mathrm{d}z. \tag{2.11}$$

结合最后两个不等式与（2.10），可推得

$$\int_{A_0} |u_j(w)|^p \,\mathrm{d}w \leq C_4 2^{\frac{(2-N)jp}{2}} \|u\|_{E_V}^p + C_4 2^{\frac{(\alpha-N)jp}{2}} \|u\|_{E_V}^p.$$

将此与（2.8）和（2.9）结合，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} Q(z)|u|^p \,\mathrm{d}z \leq C_5 \|u\|_{E_V}^p \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\zeta_1 j} + C_5 \|u\|_{E_V}^p \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\zeta_2 j},$$

其中

$$\zeta_1 := \frac{(2-N)p}{2} - (\beta - N) \quad \text{and} \quad \zeta_2 := \frac{(\alpha-N)p}{2} - (\beta - N). \tag{2.12}$$

对于 $\alpha < 0$，只需注意到，在估计式（ α 2.11）中可以用 0 替代。因此，仍有 $\zeta_2 < 0$。回顾（i） $-(iii)$，可得ζ_1， $\zeta_2 < 0$，于是

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\zeta_1 j} < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\zeta_2 j} < \infty.$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} Q(z)|u|^p \,\mathrm{d}z \leq C_6 \|u\|_{E_V^\gamma}^p.$$

将最后一个估计与（2.6）和（2.7）结合起来，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z)|u|^p \,\mathrm{d}z \leq (C_1 + C_6) \|u\|_{E_V^\gamma}^p.$$

由此，嵌入 $E_V^\gamma \hookrightarrow L_Q^p(\mathbb{R}^N)$ 是连续的。

为证明紧性，令 $(u_n)_{n} \subset E_V^\gamma$ 满足 $u_n \rightharpoonup 0$ 在 E_V^γ 中。我们在引理 2.1 的证明中看到， $\varphi u_n \in H^{1,\gamma}_0(B_{2R})$ ，其中 φ 定义见（2.2）。在此情况下，

有 $\varphi u_n \rightharpoonup 0$在 $H^1_{\cdot,0}{}^{\gamma}(B_{2R})$。由于嵌入 $H^1_{\cdot,0}{}^{\gamma}(B_{2R}) \hookrightarrow L^p(B_{2R})$ 是紧的，对于 $1 \le p < 2^*_\gamma$（见 [18, 定理 3.3]），我们可以利用（2.4）得到

$$\int_{B_R} |u_n|^p \mathrm{d}z \le \int_{B_{2R}} |\varphi u_n|^p \mathrm{d}z = o_n(1).$$

此处 $o_n(1) \to 0$，因为 $n \to \infty$。因此，对于任意的 $R > 0$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z)|u_n|^p \,\mathrm{d}z \le C_Q\, o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} Q(z)|u_n|^p \,\mathrm{d}z, \tag{2.13}$$

其中我们用到了 (Q)。为简单起见，我们将证明第 (i') 项。由于 $p < 2^*_\gamma$，我们可以选取$q_1 > 1$ 使得 $2 \le q_1 p < 2^*_\gamma$。因此，利用 H¨older 不等式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} Q(z)|u_n|^p \,\mathrm{d}z \le \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} Q(z)\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{q_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} Q(z)|u_n|^{pq_1}\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

其中 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$。对于 $\beta > N$，我们有 $Q(z) \le C_Q(1+|z|)^{-\beta} \in L^1(\mathbb{R}^N)$。由于 $(u_n)_n$ 在 E^γ_V 中有界，给定 $\varepsilon > 0$，我们可以取足够大的 $R > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} Q(z)|u_n|^p \,\mathrm{d}z \le \varepsilon.$$

将此应用于 (2.13) 即完成证明。 □

3. Proof of Theorem 1.2

我们将定理 1.2 的证明分为以下部分：研究问题（$\mathcal{P}$）的变分结构、证明解的存在性，最后证明正则性结果。

3.1. 变分结构。我们引入与问题（$\mathcal{P}$）相关的能量泛函 $I : E^\gamma_V \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{E^\gamma_V} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(z)F(u)\,\mathrm{d}z.$$

为证明 I 定义良好，注意到由 (f_1)-(f_2)可知，对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在$C = C(\varepsilon, q) > 0$ 使得

$$|f(s)| \le \varepsilon|s| + C|s|^{q-1} \quad \text{and} \quad |F(s)| \le \varepsilon s^2 + C|s|^q, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

结合此不等式与定理 1.1 可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z)F(u)\mathrm{d}z \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(z)u^2\,\mathrm{d}z + C\int_{\mathbb{R}^N} Q(z)|u|^q\,\mathrm{d}z < \infty. \tag{3.2}$$

此外，通过标准论证可验证 $I \in C^1(E^\gamma_V, \mathbb{R})$，其 h

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma \varphi + V(z)u\varphi)\,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} Q(z)f(u)\varphi\,\mathrm{d}z, \quad \forall\, u, \varphi \in E^\gamma_V. \tag{3.3}$$

I 的临界点是问题（$\mathcal{P}$）的弱解。

接下来，我们将证明 I 满足山路几何。

引理 3.1. 假设定理*1.2* 的条件成立。那么，

(a) 存在正数 ρ 和 τ，使得 $I(u) \geq \tau$，只要 $\|u\|_{E_V^\gamma} = \rho$；$(b)$ 存在 $e \in E_V^\gamma$，使得 $\|e\|_{E_V^\gamma} > \rho$ 且 $I(e) < 0$。

证明。由（3.2）及定理1.1，可得

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right) \|u\|_{E_V^\gamma}^2 - C_1 \|u\|_{E_V^\gamma}^q = \|u\|_{E_V^\gamma}^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right) - C_1 \|u\|_{E_V^\gamma}^{q-2}\right].$$

取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2C_1}$，并回忆 $q > 2$，利用上述表达式即可容易地得到结论（a）。

我们来证明（b）。由（f_3），存在正常数 C_2、C_3 使得

$$F(s) \geq C_2 |s|^\theta - C_3, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

现在，令 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$。由最后一个不等式可得

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|_{E_V^\gamma}^2 - C_2 t^\theta \int_{\operatorname{supp}\varphi} Q(z) |\varphi|^\theta \, \mathrm{d}z + C_3 \int_{\operatorname{supp}\varphi} Q(z) \, \mathrm{d}z.$$

由于 $\theta > 2$，最后一个估计意味着，当 $t \to \infty$ 时，$I(t\varphi) \to -\infty$。因此，存在$t_0 > 0$ 使得 $\|e\|_{E_V^\gamma} > \rho$ 且对 $e = t_0\varphi$ 有 $I(e) < 0$，其中 $t_0 > 0$ 足够大，从而完成证明。□

由引理3.1 可知，极小极大水平

$$c_{MP} := \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(g(t)) \geq \tau > 0,$$

其中 $\Gamma := \{g \in C([0,1], E_V^\gamma) : g(0) = 0 \text{ 且 } I(g(1)) < 0\}$，是良定义的。

3.2. 关于($\mathcal{P}$)的弱非负解。 我们称$(u_n)_n \subset E_V^\gamma$ 为$(PS)_c$序列，当

$$I(u_n) \to c \quad \text{and} \quad \|I'(u_n)\|_{(E_V^\gamma)'} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{3.4}$$

其中$(E_V^\gamma)'$表示 E_V^γ的对偶空间。此外，我们称 I 满足$(PS)_c$条件，如果任一$(PS)_c$序列都有一个收敛子列。

接下来，我们将证明，对任意 $c \in \mathbb{R}$，I 满足$(PS)_c$ 条件。

引理3.2. 设定理*1.2* 的假设成立。若$(u_n)_n \subset E_V^\gamma$ 是$(PS)_c$序列，则$(u_n)_n$ 在 E_V^γ 中有一个收敛子列。

证明。 由（3.3）、（3.4）和 (f_3)可知

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \|u_n\|_{E_V^\gamma} &\geq I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n) u_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_{E_V^\gamma}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) \left(F(u_n) - \frac{1}{\theta} f(u_n) u_n\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_{E_V^\gamma}^2. \end{aligned}$$

因此，$(u_n)_n$ 在 E_V^γ 中有界。故取一个子序列，$u_n \rightharpoonup u$ 在E_V^γ中弱收敛。

接下来，我们将证明$\|u_n - u\|_{E_V^\gamma} \to 0$，因为 $n \to \infty$。为此，首先回顾一下，(3.4) 可推出

$$I'(u_n)(u_n - u) \to 0, \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.5}$$

另一方面，

$$I'(u_n)(u_n - u) = \|u_n\|^2_{E_V^\gamma} - \langle u_n, u\rangle_{E_V^\gamma} - \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u_n)\,(u_n - u)\,\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

我们断言

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u_n)\,(u_n - u)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3.7}$$

事实上，由（3.1）和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u_n)\,(u_n - u)\,\mathrm{d}z \le{}& \varepsilon \|u_n\|_{L^2_Q(\mathbb{R}^N)} \|u_n - u\|_{L^2_Q(\mathbb{R}^N)} \\ &+ C\|u_n\|^{q-1}_{L_Q^{r_1(q-1)}(\mathbb{R}^N)} \|u_n - u\|_{L^{r_2}_Q(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

其中 r_1，$r_2 > 1$ 且 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$。注意到我们可以选取 r_1，r_2 使其满足$r_1(q-1)$ $r_2 \in (2,\ 2^*_\gamma)$。由定理 1.1，可知（3.7）成立。结合（3.5）-（3.7），可得

$$\|u_n - u\|^2_{E_V^\gamma} = \|u_n\|^2_{E_V^\gamma} - 2\langle u_n, u\rangle_{E_V^\gamma} + \|u\|^2_{E_V^\gamma} = o_n(1),$$

这里用到了 $\langle u_n,\ u\rangle_{E_V^\gamma} = \|u\|^2_{E_V^\gamma} + o_n(1)$。引理得证。 □

我们以下述存在性结果结束本小节。

命题 3.3。 设定理 *1.2* 的假设成立，则问题 $(\mathcal{P})$ 至少有一个非负的非平凡弱解。

证明。注意到不失一般性，我们可以假设 $f(s) = 0$ 当 $s \le 0$时；对于这一修正后的非线性项，上述结果同样成立，仍记为f。应用引理 3.1 和 3.2，我们得到 $u \in E_V^\gamma$ 使得 $I(u) = c_{MP} > 0$且 $I'(u) = 0$，也就是说，$u \neq 0$ 是（$\mathcal{P}$）的弱解。此外，定义$u^-(z) := \max\{-u(z)\ 0\}$，则

$$0 = I'(u)u^- = -\|u^-\|^2_{E_V^\gamma},$$

an因此，$u^- = 0$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^N$ 中。因此，$u \ge 0$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^N$ 中，证明完毕. □

3.3. **正则性**。 接下来，我们应用莫泽迭代，得到方程（$\mathcal{P}$）的任意弱解都属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。

命题 3.4。 设定理 *1.2* 的假设成立。若 $\dfrac{1}{Q} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，则命题 *3.3* 中得到的解属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\xi > 1$，我们考虑集合 $A_n := \left\{z \in \mathbb{R}^N : u^{\xi-1}(z) \leq n\right\}$ 和 $D_n := \mathbb{R}^N \setminus A_n$。令

$$w_n := \begin{cases} u^{2\xi-1}, & \text{in } A_n, \\ n^2 u, & \text{in } D_n. \end{cases}$$

我们断言 $w_n \in E_V^\gamma$。事实上，注意到

$$\nabla_\gamma w_n = \begin{cases} (2\xi-1)u^{2(\xi-1)}\nabla_\gamma u, & \text{in } A_n, \\ n^2 \nabla_\gamma u, & \text{in } D_n. \end{cases}$$

这意味着

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma w_n|^2 \,\mathrm{d}z \leq (2\xi-1)^2 n^4 \int_{A_n} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z + n^4 \int_{D_n} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z < \infty$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) w_n^2 \,\mathrm{d}z &= \int_{A_n} V(z) u^{4(\xi-1)} u^2 \,\mathrm{d}z + n^4 \int_{D_n} V(z) u^2 \,\mathrm{d}z \\ &\leq n^4 \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u^2 \,\mathrm{d}z < \infty. \end{aligned}$$

因此，$w_n \in E_V^\gamma$，断言得证。

另一方面，由于 u 是方程（$\mathcal{P}$）的解，因此

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u w_n \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z. \tag{3.8}$$

现在，考虑

$$v_n := \begin{cases} u^\xi, & \text{in } A_n, \\ nu, & \text{in } D_n. \end{cases}$$

因此,

$$\nabla_\gamma v_n := \begin{cases} \xi u^{\xi-1}\nabla_\gamma u, & \text{in } A_n, \\ n\nabla_\gamma u, & \text{in } D_n. \end{cases}$$

同样，$v_n \in E_V^\gamma$。注意,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z = (2\xi-1) \int_{A_n} u^{2(\xi-1)} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z + n^2 \int_{D_n} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z \tag{3.9}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma v_n|^2 \,\mathrm{d}z = \xi^2 \int_{A_n} u^{2(\xi-1)} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z + n^2 \int_{D_n} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z.$$

So,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma v_n|^2 \,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z = (\xi^2 - 2\xi + 1) \int_{A_n} u^{2(\xi-1)} |\nabla_\gamma u|^2 \,\mathrm{d}z.$$

由此以及（3.9），可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma v_n|^2 \,\mathrm{d}z \le \frac{(\xi^2 - 2\xi + 1)}{(2\xi - 1)} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z$$
$$< \xi^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\gamma u \cdot \nabla_\gamma w_n \,\mathrm{d}z.$$

应用（3.8），

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\gamma v_n|^2 \,\mathrm{d}z \le \xi^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u w_n \,\mathrm{d}z \right).$$

将上述不等式与 $\xi > 1$ 以及等式结合起来

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z) v_n^2 \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u w_n \,\mathrm{d}z,$$

我们可以推得

$$\|v_n\|^2_{E_V^\gamma} < \xi^2 \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z. \tag{3.10}$$

由（3.1）和估计式 $w_n \le u^{2\xi-1}$ 中的 $\mathbb{R}^N$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) u^{2\xi} \,\mathrm{d}z + C \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) u^{2\xi+q-2} \,\mathrm{d}z.$$

由 H¨older 不等式,

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z \le \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) u^{2r_2\xi} \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$+ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) u^{2q_1\xi} \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) u^{q_2(q-2)} \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{q_2}},$$

其中 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$，并且

$$\frac{2}{q-2} \le q_2 - 1 < q_2 < \frac{2^*_\gamma}{q-2}.$$

这是可能的，因为 $\frac{2^*_\gamma}{q-2} - \frac{2}{q-2} > 1$，对任意 $q \in (2, 2^*_\gamma)$。由于 $\beta > N$， $Q \in L^1(\mathbb{R}^N)$。此外， $E_V^\gamma \hookrightarrow L^{q_2(q-2)\,Q}(\mathbb{R}^N)$（见定理 1.1）。因此，若 $q_1 = r_2$，则

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(z) f(u) w_n \,\mathrm{d}z \le C_1 \|u\|^{2\xi}_{L_Q^{2q_1\xi}(\mathbb{R}^N)},$$

对某个 $C_1 = C_1(\|u\|_{E_V^\gamma}) > 0$。由此及（3.10）可推得

$$\|v_n\|^2_{E_V^\gamma} < \xi^2 C_1 \|u\|^{2\xi}_{L_Q^{2q_1\xi}(\mathbb{R}^N)}.$$

由定理 1.1以及最后一个不等式，我们得到

$$\left(\int_{A_n} Q(z) u^{2^*_\gamma \xi} \,\mathrm{d}z \right)^{\frac{2}{2^*_\gamma}} \le \|v_n\|^2_{L_Q^{2^*_\gamma}(\mathbb{R}^N)} \le \xi^2 C_2 \|u\|^{2\xi}_{L_Q^{2q_1\xi}(\mathbb{R}^N)}.$$

其中我们用到了 $v_n = u^\xi$ 属于 A_n。令 $n \to \infty$ 取极限，并利用 Fatou 引理，我们得到

$$\|u\|^{2\xi}_{L_Q^{2_\gamma^*\xi}(\mathbb{R}^N)} \le \xi^2 C_2 \|u\|_{L_Q^{2q_1\xi}(\mathbb{R}^N)}$$

or

$$\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\xi}(\mathbb{R}^N)} \le \xi^{\frac{1}{\xi}} C_2^{\frac{1}{2\xi}} \|u\|_{L_Q^{2q_1\xi}(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.11}$$

现在，我们开始进行莫泽迭代，取 $\xi = \sigma = \frac{2_\gamma^*}{2q_1} > 1$。事实上，

$$q_1 = \frac{q_2}{q_2 - 1} = q_2 \cdot \frac{1}{q_2 - 1} < \frac{2_\gamma^*}{q-2} \cdot \frac{q-2}{2} = \frac{2_\gamma^*}{2}.$$

因此，

$$\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma}(\mathbb{R}^N)} \le \sigma^{\frac{1}{\sigma}} C_2^{\frac{1}{2\sigma}} \|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

取 $\xi = \sigma^2$ 于（3.11）中，并注意到 $2q_1\sigma^2 = (2q_1\sigma)\,\sigma = 2_\gamma^*\sigma$，由最后一个估计可得

$$\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma^2}(\mathbb{R}^N)} \le (\sigma^2)^{\frac{1}{\sigma^2}} C_2^{\frac{1}{2\sigma^2}} \|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma}(\mathbb{R}^N)} \le \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}} C_2^{\frac{1}{2\sigma}+\frac{1}{2\sigma^2}} \|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

继续迭代，可得

$$\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma^j}(\mathbb{R}^N)} \le \sigma^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sigma^k}} C_2^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sigma^k}} \|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

由于这些级数收敛，我们得到

$$\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma^j}(\mathbb{R}^N)} \le C_3 \|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

现在，任取 $R > 0$。根据假设 $\frac{1}{Q} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，存在$Q_R > 0$，使得对于任意 $z \in B_R$，$Q(z) \ge Q_R$。因此，

$$\int_{B_R} |u|^{2_\gamma^*\sigma^j} \mathrm{d}z \le \frac{1}{Q_R}\int_{B_R} Q(z)|u|^{2_\gamma^*\sigma^j}\mathrm{d}z \le \frac{1}{Q_R}\|u\|^{2_\gamma^*\sigma^j}_{L_Q^{2_\gamma^*\sigma^j}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{C_3^{2_\gamma^*\sigma^j}}{Q_R}\|u\|^{2_\gamma^*\sigma^j}_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

因此，

$$\|u\|_{L^{2_\gamma^*\sigma^j}(B_R)} \le \frac{C_3}{Q_R^{\frac{1}{2_\gamma^*\sigma^j}}}\|u\|_{L_Q^{2_\gamma^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

取 $j \to \infty$，可得 $u \in L^\infty(B_R)$，证明完毕。 □

我们将通过证明第 1.2 条的第 (ii) 项来完成定理的证明。首先，我们给出一个辅助结果。

引理 3.5 $(W^{2,\ _\gamma\ p}$- 正则性)。假设 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且存在 $V_0 > 0$，使得对于所有 $z \in \mathbb{R}^N$，都有 $V_0 \le V(z)$。若 $p \in [2, 2_\gamma^*]$ 且 $u \in E_V^\gamma$ 是下列方程的弱解

$$-\Delta_\gamma u + Vu = h \in L^p(\mathbb{R}^N), \tag{3.12}$$

则 $u \in W^{2,\ _\gamma\ p}(\mathbb{R}^N)$。

证明。设 $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 是方程（3.12）的一个解。根据 [23],

$$\|v\|_{W_\gamma^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta_\gamma v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right),$$

对所有 $v \in W^{2,p}_\gamma(\mathbb{R}^N)$。因此，我们有

$$\|u\|_{W_\gamma^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left\|-\Delta_\gamma u + Vu\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1 + C\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

因为 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$。于是，我们得到

$$\|u\|_{W_\gamma^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right). \tag{3.13}$$

现在，若 $u \in E_V^\gamma$ 是该方程（3.12）的弱解，则 E_V^γ 的定义使我们可以取一个序列 $(u_n)_n$ 属于 $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，使得 $u_n \to u$ 在 E_V^γ 中，且当 $n \to \infty$ 时。接下来，定义 $h_n \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ 为

$$h_n := -\Delta_\gamma u_n + Vu_n,$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$。注意，（3.13）对 u_n 成立。我们断言 $h_n \to h$ 属于 $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$。事实上，对每个 $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (h_n - h)\,\varphi\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla_\gamma\left(u_n - u\right)\cdot\nabla_\gamma\varphi + V(z)\left(u_n - u\right)\varphi\right)\,\mathrm{d}z\right|.$$

再次利用 H¨older 不等式，我们可以得出

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (h_n - h)\,\varphi\,\mathrm{d}z\right| \leq C_2\left\|u_n - u\right\|_{E_V^\gamma}\|\varphi\|_{W_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \to 0, \tag{3.14}$$

如 $n \to \infty$，对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$。

这意味着 $h_n \to h$ 在分布的意义下成立。现在，取 $\{\varphi_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，其中 $\varphi_l \to \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$，以及 $\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} = 1$。那么，(3.14) 和 H¨older 不等式给出

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (h_n - h)\,\varphi\,\mathrm{d}z\right| \leq C_2\left\|u_n - u\right\|_{E_V^\gamma}\|\varphi_l\|_{W_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \|h_n - h\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\varphi_l - \varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$

由于 $\varphi_l \to \varphi$ 属于 $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$，给定 $0 < \varepsilon < 1$，存在 $l_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\|\varphi - \varphi_{l_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$。那么，由对偶性可得

$$(1-\varepsilon)\|h_n - h\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2\left\|u_n - u\right\|_{E_V^\gamma}\|\varphi_{l_0}\|_{W_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

如 $n \to \infty$。

正如 Alves 和 de Holanda 所指出的，[2], 我们有索博列夫嵌入

$$W_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),$$

对于 $p \in [2, 2_\gamma^*]$。还要注意，关于 V 的假设意味着 E_V^γ 和 $W^{1,2}_\gamma(\mathbb{R}^N)$ 以及 $(u_n)_n$ 和 $(h_n)_n$ 分别在 E_V^γ 和 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中一致有界。结合这些事实、(3.13) 以及前述索博列夫嵌入，可得

$$\|u_n\|_{W_\gamma^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\left(\|u_n\|_{W_\gamma^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right) \leq C_4, \tag{3.15}$$

在 $n \in \mathbb{N}$ 上一致成立。因此，由 $W^{2,p}_{,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ 的自反性，存在一个子序列 $u_{n_i} \rightharpoonup \tilde{u}$ 属于 $W^{2,p}_{,\gamma}(\mathbb{R}^N)$，当 $i \to \infty$ 时。由 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中弱极限的唯一性可知，$u = \tilde{u}$ 和

$$\|u\|_{W^{2,p}_{\gamma}} \leq C_4,$$

从而完成证明。 □

现在只需证明定理 1.2 的第 (ii) 部分。

证明。我们将证明 $Qf(u) \in L^s(\mathbb{R}^N)$，其中 $s = \frac{2^*_\gamma}{q-1}$。事实上，由 (3.1) 及估计 $(a+b)^s \leq C_s(a^s + b^s)$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q(z)f(u)|^s \, \mathrm{d}z \leq \varepsilon^s \int_{\mathbb{R}^N} Q^s(z)|u|^s \, \mathrm{d}z + C^s \int_{\mathbb{R}^N} Q^s(z)|u|^{s(q-1)} \, \mathrm{d}z.$$

一方面，H ¨older 不等式与 (Q) 给出

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q^s(z)|u|^s \, \mathrm{d}z \leq C_Q^{s-1} \|Q\|^{1-\frac{s}{2^*_\gamma}}_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u\|^s_{L^{2^*_\gamma}_Q(\mathbb{R}^N)}.$$

另一方面，由 (Q)，可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q^s(z)|u|^{s(q-1)} \, \mathrm{d}z \leq C_Q^{s-1} \|u\|^{2^*_\gamma}_{L^{2^*_\gamma}_Q(\mathbb{R}^N)}.$$

结合最后三个估计与定理1.1，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q(z)f(u)|^s \, \mathrm{d}z < \infty,$$

其中我们利用了 $Q \in L^1(\mathbb{R}^N)$，因为 $\beta > N$。因此，引理3.5给出了所需结果。□

Acknowledgments

我们感谢 A. Kogoj 教授就这一问题进行了许多富有成效的讨论。
J. Carvalho 获得了 CNPq 的资助，资助编号为 300853/2025-4。
A. Viana 获得了部分 CAPES-Humboldt 研究奖学金资助（PE32739979），并参与了 Universal Fapitec 项目 n° 019203.01303/2024-1。
A. Viana 在访问阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心（ICTP）以及应用数学研究所 ¨，乌尔姆大学 ¨乌尔姆校区期间开展了部分研究。他谨向这些机构致谢，感谢其热情接待。

References

[1] L. Abatangelo, A. Ferrero, P. Luzzini；关于一类含 *Grushin* 算子的退化方程解，《微分方程杂志》**445**（2025），论文编号 113666，共 52 页。[2] C. O. Alves, R. F. de Holanda. 一类含 *Grushin* 算子的退化椭圆问题的 *Berestycki-Lions* 型结果，爱丁堡皇家学会会刊A辑 **153**（2023），第 4 期，1244–1271。

[3] *C. O. Alves, A. R. F. de Holanda.* 关于一类含 *Grushin* 算子的半线性退化椭圆方程解的存在性：$\mathbb{R}^2$*Grushin* 临界指数与指数增长之间的相互作用，《数学新闻》*297*（*2024*），第 *3* 期，*861–877*。[4] *C. O. Alves, S. Gandal, A. Loiudice, J. Tyagi.* 一类含 *Grushin* 算子的退化椭圆问题的 *Br´ézis-Nirenberg* 型问题，《几何分析杂志》*34*（*2024*），第 *2* 期，论文编号 *52*，共 *41* 页。[5] *A. Ambrosetti, V. Felli, A. Malchiodi.* 势函数在无穷远处趋于零的非线性 *Schr¨ödinger* 方程的基态，《欧洲数学会杂志》（*JEMS*）*7*（*2005*），第 *1* 期，*117–144*。[6]*W. Bauer, K. Furutani, C. T. Iwasaki.* 高阶 *Grushin* 型算子的基本解，《数学进展》*271*（*2015*），*188–234*。[7]*A. Bahrouni, V. D. Rˇadulescu. Baouendi-Grushin* 算子的变增长奇异双相系统，《离散与连续动力系统》*41*（*2021*），第 *9* 期，*4283–4296*。[8] *S. Biagi, D. D. Monticelli, F. Punzo.* 以 *H¨ormander* 向量场为模型的退化椭圆方程的 *Liouville* 型性质，《美国数学会汇刊》*379*（*2026*），第 *1* 期，*425–457*。[9] *J. L. Carvalho, M. F. Furtado, E. S. de Medeiros.* 带边界项的尖锐 *Hardy-Sobolev* 不等式及其应用，《*NoDEA* 非线性微分方程及其应用》*29*（*2022*），第 *1* 期，论文编号 *5*，共 *20* 页。[10] *J. L. Carvalho, M. F. Furtado, E. S. de Medeiros.* 临界情形下加权 *Sobolev* 空间的嵌入定理及其应用，《纯粹与应用数学年刊》（*4*）*203*（*2024*），第 *1* 期，*345–359*。[11] *D. A. Tuan, Q. H. Phan.* 含 *Grushin* 算子的非线性椭圆方程组的 *Liouville* 型定理，《数学分析及其应用杂志》*454*（*2017*），第 *2* 期，*785–801*。[12] *B. Franchi, E. Lanconelli.* 关于一类具有可测系数的线性非一致椭圆算子的 *H¨older* 正则性定理，《比萨高等师范学校科学分类年刊》（*4*）*10*（*1983*），第 *4* 期，*523–541*。[13] *B. Franchi, E. Lanconelli.* 与非光滑向量场相关的 *Sobolev* 空间的嵌入定理及 *Harnack* 不等式，《偏微分方程通讯》*9*（*1984*），第 *13* 期，*1237–1264*。[14]*B. Franchi, G. Lu, R. L. Wheeden.* 齐性型空间中的 *Poincar´é* 型不等式与表示公式之间的关系，《国际数学研究通知》*1996*（*1996*），第 *1* 期，*1–14*。[15] *V. V. Grushin.* 一类亚椭圆算子，《数学文集》（新系列）*83(125)*（*1970*），*456–473*。[16] *V. V. Grushin.* 一类在子流形上退化的椭圆伪微分算子，《数学文集》（新系列）*84(126)*（*1971*），*163–195*。[17] *L. V. H¨örmander.* 亚椭圆二阶微分方程，《数学学报》*119*（*1967*），*147–171*。[18] *A. E. Kogoj, E. Lanconelli.* 关于半线性 $\mathbf{\Delta}_\lambda$*-Laplace* 方程，《非线性分析》*75*（*2012*），第 *12* 期，*4637–4649*。[19] *E. Lanconelli, A. E. Kogoj. X*-椭圆算子与 *X*-控制距离，《数学研究》*49*（*2000*），增刊，*223–243*。[20] *F. Lascialfari, D. Pardo.* 退化 *Sobolev* 空间的紧嵌入及 *Grushin* 型算子半线性方程整体解的存在性，《帕多瓦大学数学研讨班报告》*107*（*2002*），*139–152*。[21] *M. Liu, Z. Tang, C. Wang.* 利用局部 *Pohozaev* 恒等式求解临界 *Grushin* 型问题的无穷多个解，《纯粹与应用数学年刊》（*4*）*199*（*2020*），第 *5* 期，*1737–1762*。[22] *A. Loiudice.* 含 *Grushin* 型算子的带 *Hardy* 项临界问题的渐近估计与非存在性结果，《纯粹与应用数学年刊》*198*（*2019*），*1909–1930*。[23] *G. Metafune, L. Negro, C. Spina.* L^p *Baouendi-Grushin* 算子的估计，《纯粹与应用分析》*2*（*2020*），第 *3* 期，*603–625*。[24] *R. Monti.* 加权梯度的 *Sobolev* 不等式，《偏微分方程通讯》*31*（*2006*），第 *10–12* 期，*1479–1504*。[25] *R. Monti, D. Morbidelli. Grushin* 算子的 *Kelvin* 变换与临界半线性方程，《杜克数学杂志》*131*（*2006*），第 *1* 期，*167–202*。

[26] B. Opic, A. Kufner. *Hardy* 型不等式, Pitman 数学研究笔记丛书, 219, Longman Sci. Tech., 哈洛, 1990.[27] W. A.Strauss.高维孤立波的存在性, 《数学物理通讯》 **55** (1977), 第 2 期, 149–162.[28] J. Su, Z. Q. Wang, M. Willem. 非线性 *Schr ¨odinger* 方程，具有无界且衰减的径向势, 《当代数学通讯》 **9** (2007), 第 4 期, 571–583.Universidade Federal de Sergipe,
Departamento de Matemática, 49100-000 SãoCristóvão-SE, Brazil电子邮箱:
jonison@mat.ufs.brUniversidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática, 49100-000 SãoCristóvão-SE, BrazilUniversität Ulm,
Institut für Angewandte Mathematik, 89069, Ulm-BW, Germany电子邮箱:
arlucioviana@academico.ufs.br