arXiv:2603.06420v1 [math.DG] 6 Mar 2026

曲线折痕的刚性母线折叠：保持共轭网的半离散全局可展共轭网等距变形

Klara Mundilova

EPFL，瑞士

摘要

本文研究折痕规则图案的刚性母线折叠运动，即保持共轭性的可展半离散共轭网等距变换。我们推导出曲线对满足刚性母线可折叠性的两个条件，并探讨其两项应用。首先，我们介绍能够顺序构造刚性母线可折叠折痕规则图案的计算方法。其次，我们考察平面折痕与恒定折叠角折痕的组合。特别地，我们证明恒定折叠角折痕仅与其他恒定折叠角折痕相容，并给出平面折痕与恒定折叠角折痕的刚性母线可折叠组合的刻画。

1 引言

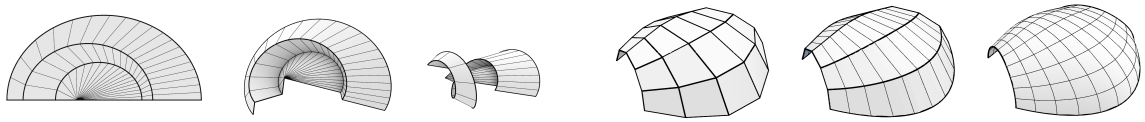
由片材制成的结构具有诸多优势，例如制造成本低，同时还能通过沿曲线边界连接片材来构造复杂形态。除了艺术魅力，这类结构还应用于建筑壳体 [27],创新家具设计 [40], 以及流体动力学船体 [29]。其中一个显著的子类是曲线折痕折纸，即沿曲线折叠片材而形成的结构。曲线折痕折纸形状最初在艺术领域受到探索 [6,18], ，此后逐渐发展为一个活跃的研究领域，既包括理论探究 [4] ，也包括可变形结构的应用研究 [37]。

从数学上讲，弯折纸张得到的形状是可展曲面的（部分）。作为直纹曲面的一个子类，可展曲面由一族称为母线的直线组成，并且其特征是沿每条母线的切平面保持不变 [28]。沿曲线边界连接的可展片组合构成半离散结构，可用于近似曲线几何形状，参见例如 [36] 及其中的参考文献。曲线折痕折纸是一个显著的子类，其中两片共有的边界曲线，即曲线折痕，具有这样的（几何）性质：相对于任一相邻片将其展平至平面时，该边界曲线重合，而两片则位于展平后曲线的两侧。

近年来，可展片的组合在曲线折痕折纸理论和半离散微分几何中均有所研究，由此形成了两套描述相同概念的术语。下文将简要概述这两种视角。

曲线折痕折纸。 在曲线折痕折纸研究中，一个基本问题是：给定的折叠形状在数学上是否“存在”，也就是说，它能否用可展片 [3] 描述。这个问题并非易解，因为确定母线本身就颇具挑战。一种方法是从由折痕和母线规定的二维构形出发，并考察给定的 折痕规则图案 是否允许一种折叠状态，也就是说，是否存在由可展片组成、与具有相同母线的二维构形等距（且非平面）的半离散结构。

一般而言，给定两个具有指定母线的二维可展曲面片，并沿一条光滑边界曲线将它们连接起来，通常会得到相应三维构型的一个单参数族 [21]。这些构型之间的平滑变化可解释为一种保持母线不变的折叠运动。相比之下，将三个具有指定母线的片连接起来通常会导致过约束，因而可能不存在三维构型。不过，也有一些例子表明，三个或更多二维直纹曲面片可以具有三维状态的连续族，使片与片之间的夹角能够平滑变化。我们



（a）刚性折痕规则图案的折叠运动。（b）离散、半离散和光滑共轭网 .

图1：第1节中讨论的概念示意图。

将这种运动称为刚性母线（折叠）运动。类似的考虑也适用于曲线折痕折纸这一特殊情形：涉及两条或更多折痕的折痕规则图案，只有在特殊情况下才具有刚性母线折叠运动（见图 1a）。

半离散微分几何。 光滑共轭网是具有如下特征的曲面参数化：其混合偏导数与曲面相切（或在某些情况下为零）。直观而言，这类参数化满足以下几何性质：沿一族参数曲线的切平面包络面的母线，与相交的另一族对应曲线相切。共轭网的离散对应物是正则平面四边形网格（PQ网格），其中折线的边对应共轭方向 [26, §27]（见图1b）。对PQ网格进行单向细分，可得到由可展条带组成的结构，参见例如 [19, §1.3], 这些结构对应于半离散共轭网，其中直纹折线和共用边界曲线分别表示共轭族。曲线折痕折纸形状是半离散共轭网的一个特殊子类，即全局可展。

经典微分几何研究光滑曲面的等距变形，其中保持共轭网的变形构成一个特殊子类。早在1860年，Bianchi便提出了光滑曲面存在将共轭网映射为共轭网的等距变形的充要条件 [9,§141]。

在离散情形中，共轭网的等距变形对应于柔性 （或刚性可折叠PQ 网格，即仅通过改变二面角便可连续变形的网格。在此前研究的基础上，例如 [35], 直到最近才对所有 3×3柔性四边形网格完成了全面分类，Izmestiev [12]。尽管四边形网格柔性当且仅当其所有 3×3 子网格均柔性 [33, 定理 3.2], 但将这类子网格组装成更大的柔性四边形网格并非易事，迄今仅有一些特殊情形得到研究。对所有柔性四边形网格的完整刻画仍是一个开放问题。

保持母线不变的可展片组合折叠运动，是一种同时保持共轭网的等距变换。因此，可展片组合的刚性母线折叠运动对应于半离散共轭网的保共轭网等距变换。这引出了以下问题：哪些曲线与母线的组合彼此相容，以及这些半离散构形是否具有光滑或完全离散的对应物。为解决这些问题，我们回顾共轭网子类的相关结果：

- *T*网： 一类重要的共轭网是其共轭族分别位于彼此正交平面内的共轭网，这类网称为T网。其离散对应物称为*T*多面体，其特征是具有梯形面，这也正是该类网名称的由来。Graf和Sauer [32]最早发现离散T网具有柔性，近期研究则给出了光滑类比，以及对光滑和半离散情形的综合描述 [13]。近年来，T多面体已被应用于管状结构 [34]的设计。

  在折纸领域，折叠运动过程中始终保持平面的折痕构成一个特殊类别，并且可以通过反射生成。Nawratil [23]刻画了离散圆柱面和圆锥面上在变形过程中始终保持平面的所有折线对。这项研究的一个结论是，并非所有可刚性折叠的离散平面折痕图案都对应于 T多面体。与此相反，在半离散情形下，Mundilova 和 Nawratil [22] 表明，任何允许刚性母线折叠运动的平面折痕组合都是半离散 T网。

- *V*网：另一类同时也是测地网的著名共轭网子类，最早由 Voss 于 1889年 研究，如今称为 V网 [39]。在离散情形下，测地

条件转化为每个顶点处相对扇形角相等 [31, 第 12 节。2]。离散 V 网与反 V 网密切相关，后者也在具有四价顶点的可平折折纸背景下得到研究。由于它们在可变形结构中的应用，离散 V 网和反 V 网都受到广泛研究，并由此产生了多种设计方法；例如参见 [17]及其中的参考文献。

一系列沿主折痕连接的可平折可展顶点保持恒定的二面角。因此，在半离散情形中，反 V 网对应于恒定折叠角折痕。受 David Huffman 对圆锥形曲线折痕的艺术探索启发，Demaine 等人 [5] 刻画了圆柱面与圆锥面之间的所有恒定折叠角折痕。在后续工作中，Demaine 等人 [7] 表明，此类图案具有两种离散化形式，且均可刚性折叠；他们还强调了这些离散化形式甚至可平折所需满足的条件。Izmestiev 等人 [14]目前正在准备一篇关于光滑、离散和半离散 V 网的论文。

- 圆锥网： 离散圆锥折痕图案是离散圆锥网的实例，具体而言，是由圆柱面或圆锥面条带组成的 PQ 网格。此外，它们还代表了轴向 圆锥网的一个子类，因为在整个折叠运动过程中，其圆锥顶点（对于圆柱面而言，则为无穷远点）始终共线。最近，Nawratil [24] 在此项工作的基础上刻画了所有可变形轴向离散圆锥网。

贡献。 本文研究规则折痕规则图案的刚性母线可折叠性，也就是说，这类折痕图案由一系列片组成，片与片之间以折痕分隔。换言之，这相当于研究全局可展半离散共轭网的保共轭网等距变换。在第 2 节回顾本文的符号约定并介绍预备结果后，本文的主要贡献如下：

(1) 在第 3 节中，我们确定给定的含有两条折痕的折痕规则图案在何种条件下具有刚性母线折叠运动。(2) 在第4.2节中，我们展示如何通过依次添加曲线折痕和片来构造刚性母线可折叠折痕图案，同时保持刚性母线折叠运动。(3) 最后，在第 4.3 节中，我们分析两类特殊折痕——平面折痕和恒定折叠角折痕——的刚性母线折叠相容性。

通过这项工作，我们希望朝着理解半离散共轭网的保共轭网等距变换迈进一步。

2 预备知识

为使本文内容自成一体，我们收录了分析可展曲面复合时所用的记号，这些记号见 $[21, 22],$，其基础工作由 $[4, 5]$ 完成。关于直纹曲面和可展曲面的更多背景知识，请参阅 [28]。

2.1 可展曲面

本文将可展曲面参数化为直纹曲面，同时施加额外约束以确保其可展性。

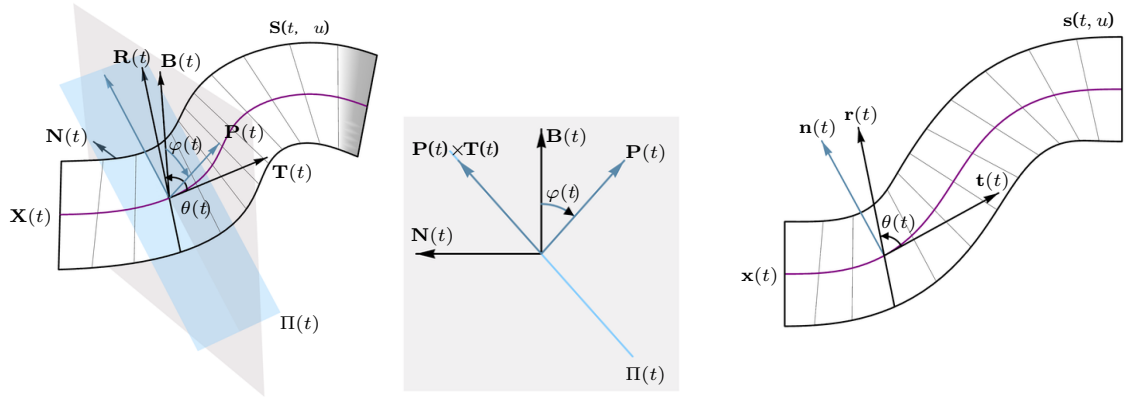
2.1.1 直纹面

回顾一下，直纹面 可参数化为

$$\mathbf{S}(t,u) = \mathbf{X}(t) + u\mathbf{R}(t), \tag{1}$$

其中，$\mathbf{X}(t) : T \to \mathbb{R}^3$ 是曲线，即准线；$\mathbf{R}(t) : T \to S^2$ 是单位长度向量，称为母线方向。不失一般性，假设 $T = [0, t_{\max}]$，其中 $t_{\max} > 0$，且 $u \in \mathbb{R}$。此外，为使曲面满足 C^2，要求$\mathbf{X}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 均为 C^2。

我们假设曲线配有一个正交归一标架，并描述母线向量相对于该标架的位置。为确保曲线的标架连续，我们规定



Fig图 2：可展片及其展开的符号示意图（如 [21, 22] 中所示） .

曲线 $\mathbf{X}(t)$ 由三个函数给出： $K(t): T \to \mathbb{R}$, $\tau(t): T \to \mathbb{R}$，以及 $s(t): T \to \mathbb{R}$。这些函数通过弗雷内-塞雷公式确定 $\mathbf{X}(t)$（相差一个欧几里得运动），即 $\mathbf{X}'(t) = s'(t)\mathbf{T}(t)$，其中

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'(t) \\ \mathbf{N}'(t) \\ \mathbf{B}'(t) \end{pmatrix} = s'(t) \begin{pmatrix} 0 & K(t) & 0 \\ -K(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{B}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

参见 [25]。这里我们要求 $K(t)$、 $\tau(t)$ 和 $s'(t)$ 连续，且 $s'(t) > 0$。

请注意，我们允许 $K(t)$ 取负值。此外，在 $K(t) = 0$或 $\tau(t) = 0$ 的孤立点或区间上，仍可得到连续标架（$\mathbf{T}(t)$，$\mathbf{N}(t)$，$\mathbf{B}(t)$）。所述标架不是 Frenet标架。然而，在 Frenet标架有定义的参数值处，计算所得的标架与 Frenet标架一致，仅相差一个符号。此外， $K(t)$ 对应于准线的曲率（相差一个符号），而 $\tau(t)$ 在有定义时为准线的挠率。下文中，我们将 $K(t)$ 称为（带符号的）曲率，将 $\tau(t)$ 称为挠率。此外， $s(t)$ 表示准线的弧长，而 $s'(t)$ 表示参数化速度。

为了确定相对于标架（$\mathbf{T}(t)$，$\mathbf{N}(t)$，$\mathbf{B}(t)$）的母线方向，我们引入另外两个角函数：倾角 $\varphi(t): T \to \mathbb{R}$ 和母线角 $\theta(t): T \to \mathbb{R}$；见图 2。

倾角 $\varphi(t)$ 表示包含曲线切向量$\mathbf{T}(t)$ 的单参数平面族 $\Pi(t)$ 之间的夹角。如果直纹面可展，这些平面将对应于切平面。我们将 $\Pi(t)$ 的法向量$\mathbf{P}(t)$ 表示为

$$\mathbf{P}(t) = \cos\varphi(t)\ \mathbf{B}(t) + \sin\varphi(t)\ \mathbf{N}(t), \tag{3}$$

因此， $\varphi(t)$ 是$\mathbf{P}(t)$ 与$\mathbf{B}(t)$ 之间的有向角。

在平面 $\Pi(t)$ 内，我们用母线角将母线方向确定为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \cos\theta(t)\ \mathbf{T}(t) + \sin\theta(t)\,(\mathbf{P}(t) \times \mathbf{T}(t)) \\ &= \cos\theta(t)\ \mathbf{T}(t) + \sin\theta(t)\,(\cos\varphi(t)\ \mathbf{N}(t) - \sin\varphi(t)\ \mathbf{B}(t))\,. \end{aligned} \tag{4}$$

要使母线方向为 C^2，我们要求 $\theta(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都为 C^2。注意，对于后续的计算， C^1 就足够了。

2.1.2 可展条件

已知，公式（1）中的直纹面可展，当且仅当对每条直纹线而言，该直纹线上各点的切平面都相同 [28]。这一条件可表示为

$$\det\left(\mathbf{X}'(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{R}'(t)\right) = 0. \tag{5}$$

利用公式 对于具有平面导线的直纹曲面，公式（2）和公式（4）中的这一条件可简化 es to

$$\frac{\varphi'(t)}{s'(t)} = \tau(t) + K(t)\sin\varphi(t)\cot\theta(t); \tag{6}$$

更多详情请参见 [21] 。

给定可展曲面$\mathbf{S}(t,u)$，我们将其展平构形，即展开，参数化为$\mathbf{s}(t,u) = \mathbf{x}(t) + u\mathbf{r}(t)$，其中$\mathbf{x}(t)$: $T \to \mathbb{R}^2$ 表示准线$\mathbf{X}(t)$的二维对应曲线，而$\mathbf{r}(t)$: $T \to S^1$ 表示单位长度的二维母线方向；见图 2。

为获得展开后的准线$\mathbf{x}(t)$，我们考察$\mathbf{X}(t)$作为曲面$\mathbf{S}(t,u)$上一条曲线的测地曲率，即参数为 t时$\mathbf{X}(t)$在 $\Pi(t)$上的投影的曲率，

$$k(t) = K(t)\cos\varphi(t). \tag{7}$$

通过确定有向曲率为 $k(t)$且参数化速度为 $s(t)$的二维曲线，我们得到$\mathbf{x}(t)$。这相当于求解以下微分方程组$\mathbf{x}'(t) = s'(t)\mathbf{t}(t)$，其中

$$\begin{pmatrix}\mathbf{t}'(t)\\ \mathbf{n}'(t)\end{pmatrix} = s'(t)\begin{pmatrix}0 & k(t)\\ -k(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}(t)\\ \mathbf{n}(t)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

由于等距变换保持曲面上的角度，尤其是$\mathbf{T}(t)$与$\mathbf{R}(t)$或$\mathbf{P}(t) \times \mathbf{T}(t)$之间的有向角，因此展开后的母线方向为

$$\mathbf{r}(t) = \cos\theta(t)\ \mathbf{t}(t) + \sin\theta(t)\ \mathbf{n}(t).$$

2.1.3 母线曲率

在后续章节中，我们将考虑平面可展片$\mathbf{S}(t,\ u)$的弯曲构形$\mathbf{s}(t,\ u)$。为证明两个此类变形相同，我们按照 [4,5] 的方法，计算表面在垂直于母线的方向上的弯曲程度，即母线曲率。该母线曲率 是弧长参数化曲线上给定点处的法曲率，其中曲线在参数t处垂直于母线，其表达式为:

$$V(t) = s'(t)K(t)\sin\varphi(t)\frac{1}{\sin\theta(t)} = s'(t)k(t)\tan\varphi(t)\frac{1}{\sin\theta(t)} \tag{9}$$

我们注意到以下性质，它可直接由公式（9）、公式（7）和公式（6）得出。

引理 1. 母线曲率决定了可展片的弯曲构形，且唯一性仅相差一个欧几里得运动。

2.2 折痕规则图案的折叠状态

本节讨论支配给定折痕规则图案折叠状态计算的微分方程和代数方程。

2.2.1 单折痕的几何

我们首先回顾单折痕折叠状态的经典计算，其中两个相邻曲面片的母线已知 [4, 10]。

曲线折痕记作$\mathbf{x}(t)$，它在局部将片材分为两侧，相对于$\mathbf{x}(t)$的正交归一标架，分别称为“左侧”和“右侧”，

$$\mathbf{s}_L(t,u) = \mathbf{x}(t) + u\mathbf{r}_L(t) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{s}_R(t,u) = \mathbf{x}(t) - u\mathbf{r}_R(t),$$

其中，$\mathbf{r}_j(t) = \cos\theta_j(t)\,\mathbf{t}(t) + \sin\theta_j(t)\,\mathbf{n}(t)$ 对于 $j \in \{L,R\}$ 是（左侧）母线方向，而 $(\mathbf{t}(t),\mathbf{n}(t))$ 是局部正交归一标架；参见图3。设 $k(t)$ 和 $s(t)$ 分别表示折痕曲线$\mathbf{x}(t)$的曲率和弧长。

为计算相应的三维构型，即，

$$\mathbf{S}_L(t,u) = \mathbf{X}(t) + u\mathbf{R}_L(t) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{S}_R(t,u) = \mathbf{X}(t) - u\mathbf{R}_R(t),$$

我们求出三维折痕的曲率 $K(t)$ 和挠率 $\tau(t)$，以及相邻曲面的倾角 $\varphi_L(t)$ 和$\varphi_R(t)$。

由于公式（7）适用于两个倾角，因此可得 $\cos\varphi_L(t) = \cos\varphi_R(t)$。“折叠”这一有趣情形出现在 $\varphi(t) = \varphi_L(t) = -\varphi_R(t)$ [10] 时。在这种情况下，我们考虑可展性

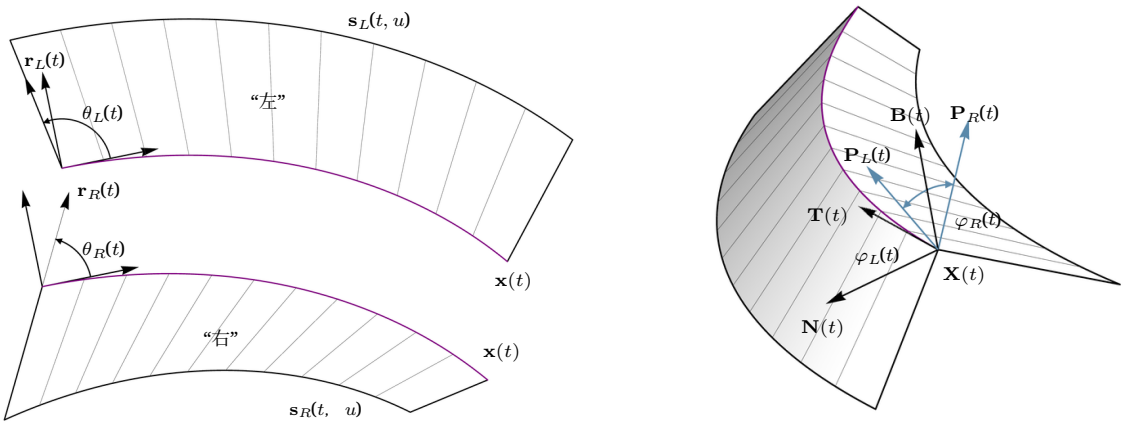


图3：第2.2.1节中引入的记号示意图（如 [21,22]所示）。

条件（公式（6））对两个关联面以及公式（7）均成立。求解 $\varphi'(t)$、 $\tau(t)$ 和 $K(t)$，得到

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}s'(t)k(t)\left(\cot\theta_R(t) + \cot\theta_L(t)\right)\tan\varphi(t), \tag{10}$$

$$\tau(t) = \frac{1}{2}s'(t)k(t)\left(\cot\theta_R(t) - \cot\theta_L(t)\right)\tan\varphi(t), \tag{11}$$

$$K(t) = \frac{k(t)}{\cos\varphi(t)}. \tag{12}$$

函数 $2\varphi(t)$量化了相对于切平面相互对齐的构型的偏离程度，对应纸张局部未出现折痕的状态。因此， $\varphi(t)$表示折叠角的一半。此外，需要注意， $\varphi(t)$由公式（10）中的微分方程确定，仅相差一个初值。事实上，倾角可求得为

$$\varphi(t) = \arcsin\left(c_0 e^{\int_0^t f(\bar{t})d\bar{t}}\right), \qquad \text{where} \qquad f(t) = \frac{1}{2}s'(t)k(t)\left(\cot\theta_L(t) + \cot\theta_R(t)\right) \tag{13}$$

以及 $c_0 = \sin\ \varphi(0)$是一个适当的初值。为使 $\varphi(t)$对所有 $t \in T$取实值，我们要求

$$|c_0| \le c_{\max} = \min_{t\in T} e^{-\int_0^t f(\bar{t})d\bar{t}}.$$

在成功计算倾角 $\varphi(t)$之后，$\mathbf{X}(t)$的曲率和挠率由公式（11）和公式（12）得出。

随后，通过求解公式（2）中的弗雷内-塞雷公式，并针对适当的倾角和直纹角[1]构造相应的三维直纹方向$\mathbf{R}_L(t)$和$\mathbf{R}_R(t)$（公式（4））， 即可得到三维构型。

以下是两种特殊情况，分别对应直纹角相等或相加为 π 的情况:

- 平面折痕：如果 $\theta_L(t) = \theta_R(t)$，由方程 (11) 可知挠率为零， $\tau(t) = 0$，且折痕成为平面折痕。一般而言，当一个切平面垂直于包含该曲线的平面时，就会出现“最大折叠状态”。

- 恒定折叠角折痕：如果 $\theta_L(t) = \pi - \theta_R(t)$，由方程 (10) 可知，倾角的一阶导数 $\varphi'(t) = 0$ 为零，这表明折痕的倾角保持恒定，因此沿折痕的折叠角也保持恒定。由于 $\varphi(t) = \arcsin(c_0)$ 在 $c_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时为实数，因此完整折叠运动存在。在离散情形下，这种折痕对应于一列沿离散化折痕具有相同指派的可平折顶点。光滑构型的完全平折状态对应于完全“卷起”的构型。

此外 ，我们将沿直线段的折痕视为平面折痕和恒定折叠角折痕 s, 无论 其相邻直母线如何。

[1]由于 ty 通常情况下 $c_{\max} > 0$，在 fl 附近通常存在一族适合的折叠角。 at 状态。

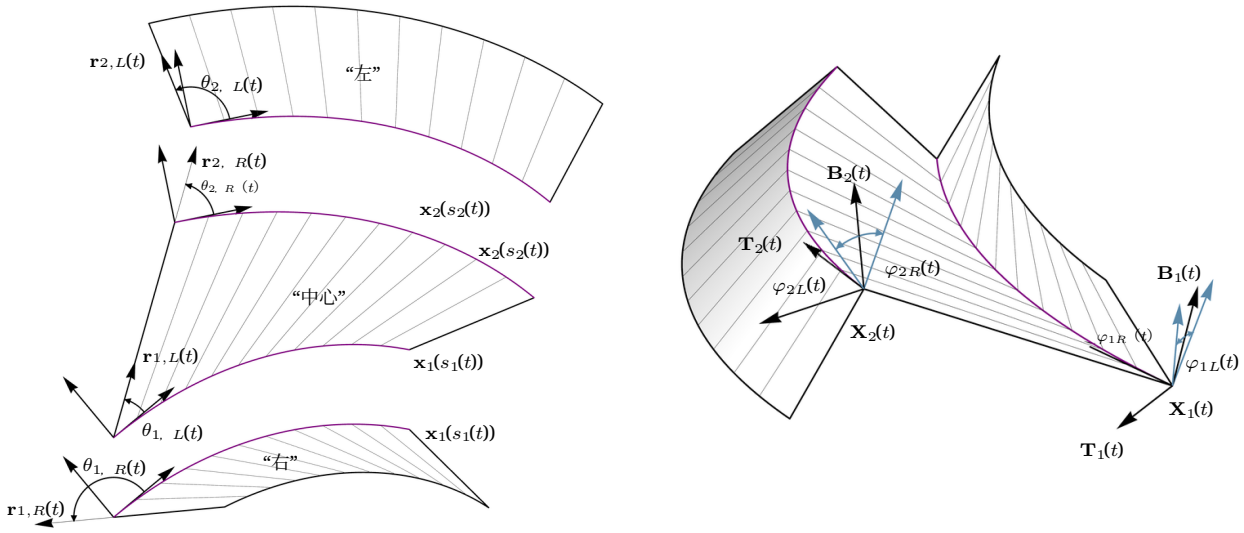


图4：第2.2.3节中引入的符号说明（与 [21, 22] 中相同）。

2.2.2 折痕规则图案

本文旨在分析通过对 PQ 网格进行单向细分而得到的共轭网的共轭网保持等距变换。尽管艺术性的曲线折痕折纸设计可以采用多种不同的折痕排列方式，我们仅关注由顺序排列形成的那些设计。

定义 1. 正则折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 是由一列互不相交的平面光滑折痕曲线$\mathbf{x}_1(t)$、. . .、$\mathbf{x}_n(t)\colon T \to \mathbb{R}^2$以及两条边界曲线$\mathbf{x}_0(t)$、$\mathbf{x}_{n+1}(t)\colon T \to \mathbb{R}^2$组成的序列，满足

- *Each* $\mathbf{x}_i(t)$ *lies to the left of* $\mathbf{x}_{i-1}(t)$*, for all* $i \le n+1$*, and*
- 片的内部

$$\mathbf{p}_{i,R}(t,u) = (1-u)\mathbf{x}_i(t) + u\mathbf{x}_{i+1}(t) \quad \textit{with} \quad (t,u) \in T \times (0,1),$$

互不相交，其母线不与边界曲线的切向量对齐，并且边界曲线上不存在片的奇点。

下文中，我们用 $s_i(t)$ 表示曲线的$\mathbf{x}_i(t)$弧长，用 $k_i(t)$ 表示其曲率。由两条折痕围成的片的（左侧）直纹线方向为

$$\mathbf{r}_{i,L}(t) = \mathbf{r}_{i+1,R}(t) = \frac{\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t)}{|\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t)|}. \tag{14}$$

此外，由两条折痕围成的片的母线角可由下式求得

$$\theta_{i,j}(t) = \arctan\left(\mathbf{t}_{ij}(t)\cdot\mathbf{r}_{ij}(t), \mathbf{n}_{ij}(t)\cdot\mathbf{r}_{ij}(t)\right), \tag{15}$$

其中 $j \in \{L, R\}$。这里，$\mathbf{t}_i(t)$ 表示单位切向量，而$\mathbf{n}_i(t)$ 分别表示$\mathbf{x}_i(t)$ 的（左侧）法向量。

2.2.3 折痕规则图案折叠状态的计算

接下来，我们讨论正则折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 的折叠状态计算。该图案由 n 条折叠折痕曲线$\mathbf{X}_i(t)$ 组成，由相应的曲率 $K_i(t)$、挠率 $\tau_i(t)$ 以及左、右倾角 $\varphi_{iL}(t)$ 和 $\varphi_{iR}(t)$ 确定。

之前 接下来，我们按照单折痕的情形进行类似的简化。具体而言， as
曲率 曲率和倾斜角之间的关系为

$$k_i(t) = K_i(t)\cos\varphi_{iL}(t) \quad \text{and} \quad k_i(t) = K_i(t)\cos\varphi_{iR}(t), \tag{16}$$

我们有 $\cos\varphi_{iL}(t) = \cos\varphi_{iR}(t)$。与单折痕的情况类似，我们重点关注$\varphi_i(t) = \varphi_{iL}(t) = -\varphi_{iR}(t)$的情况。经过这一简化，剩下 $3n$ 个未知量，即三维曲率$K_i(t)$、挠率 $\tau_i(t)$和倾角 $\varphi_i(t)$。

有效的折叠状态满足以下代数与微分约束：

- 对于每条折痕，其左侧和右侧的片必须是可展的，

$$\varphi_i'(t) = \sigma_{ij} s_i'(t)\tau_i(t) + s_i'(t)k_i(t)\tan\varphi_i(t)\cot\theta_{ij}(t), \tag{17}$$

  其中 $\sigma_{iL} = +1$ 和 $\sigma_{iR} = -1$。这会产生 $2n$ 个约束。

- 此外，对于每条折痕，我们通过以下关系将曲率与倾角联系起来：

$$k_i(t) = K_i(t)\cos\varphi_i(t), \tag{18}$$

  从而得到另外 n 个约束。

- 最后，对于每一对重叠曲面，我们要求它们具有相同的母线曲率。该要求产生以下 $n-1$ 个约束：

$$s_i'(t)k_i(t)\tan\varphi_i(t)\frac{1}{\sin\theta_{i,L}(t)} = -s_{i+1}'(t)k_{i+1}(t)\tan\varphi_{i+1}(t)\frac{1}{\sin\theta_{i+1,R}(t)}. \tag{19}$$

请注意，这些 $4n-1$ 约束的解为计算折叠状态提供了充分条件：折痕曲线可以依次确定，并且能够保证通过等距变换彼此吻合（见引理 1）。边界曲线则通过沿边界可展面从最外侧折痕曲线传递距离而得到。

定义 2. 如果存在函数 $K_i(t)$、 $\tau_i(t)$和 $\varphi_i(t)$，使得正则折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 具有折叠状态，则称该图案具有折叠状态，且

- 对于每条折痕，方程(17)和方程(18) 均成立，并且
- 对于每个内部面片，方程(19)均成立。

如果所有倾角均不恒等于零，则该折叠状态是非平凡的。

如果一个折痕规则图案具有一族连续的非平凡折叠状态，则称其具有刚性母线折叠运动。

最终，对于具有 n 条折痕的正则折痕规则图案，该系统涉及施加于 $3n$ 个变量上的 $4n-1$ 个约束。因此，对于 $n > 1$，该系统通常是过约束的。这是因为每对相邻曲面片都充当一个单自由度机构，可能无法形成共享曲面的全等构形。 [21,第一部分]讨论了为该系统引入额外自由度的策略。

关于曲率消失的说明。请注意，折痕规则图案的定义并未明确禁止折痕曲线上存在曲率为零的点或线段。直观而言，在 $k_i(t)$ 的区域，折叠构形对应于沿折痕连接的两个平坦区域。为避免区分不同情形，以下讨论仅关注折痕曲率只在孤立点处消失的折痕图案。

为使公式（19）在此类参数值处成立且不引入奇点，沿同一母线相连的折痕曲率也应为零。因此，我们将讨论范围限定为拐点由母线相连的图案：

定义 3. 设 $\mathcal{P}$ 为至少包含一条折痕的正则折痕规则图案，并令 $T_0 \subseteq T$ 表示满足 $k_1(t) = 0$的孤立参数值集合。若对于图案中的所有其他折痕， $k_1(t) = 0$ 蕴含 $k_i(t) = 0$，则称 $\mathcal{P}$ 为候选折痕规则图案。

虽然我们推测，不属于候选图案的折痕规则图案无法实现刚性母线折叠运动，但此处省略相应的技术细节。第 3 节的主要结果给出了候选折痕规则图案能够实现刚性母线折叠运动的两个充要条件。

2.3 折痕规则图案上的保性质操作

作为前面讨论的总结，我们介绍两种涉及平行性的折痕规则图案操作。这两种操作都能保留折叠状态的存在性、图案的刚性母线可折叠性，以及曲线折痕的类型（平面型或恒定折叠角型）。尽管这两种操作自然可以推广到一般的半离散共轭网，见 [21], 本文仅关注整体可展情形。

2.3.1 预备知识

We 首先回顾具有平行标架的曲线的性质及其计算方法 s.

具有平行标架的曲线。 回顾一下，在对应参数值处具有平行标架（且向量方向相同）的曲线满足相同的弗雷内–塞雷公式 [11, 30]。因此，三维曲线 $\mathbf{X}(t)$ 的曲率 $K(t)$、挠率 $\tau(t)$ 和弧长 $s(t)$，与具有平行标架的曲线的˜曲率 $K(t)$、挠率 $\tilde{\tau}(t)$ 和弧长 $\tilde{s}(t)$ 之间的关系为

$$s'(t)K(t) = \tilde{s}'(t)\tilde{K}(t) \qquad \text{and} \qquad s'(t)\tau(t) = \tilde{s}'(t)\tilde{\tau}(t),$$

而这些曲线通过对具有不同参数化˜速度的切向量进行积分而相互关联，也就是说，$\mathbf{X}'(t) = s'(t)\mathbf{T}(t)$ 和 $\mathbf{X}'(t) = \tilde{s}'(t)\mathbf{T}(t)$，其中 $\mathbf{T}(t)$ 是公共切向量。˜等价地，这些曲线满足关系 $s'(t)\mathbf{X}'(t) = \tilde{s}'(t)\mathbf{X}'(t)$。

弧长为 $\tilde{s}(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 的平行曲线 $\mathbf{x}(t)$ 和˜$\mathbf{x}(t)$ 的曲率 $k(t)$ 与 $k(t)$˜满足

类似地，在二维情形下，两条

$$s'(t)k(t) = \tilde{s}'(t)\tilde{k}(t),$$

并且有 $\mathbf{x}'(t) = s'(t)\mathbf{t}(t)$ 和 ˜$\mathbf{x}'(t) = \tilde{s}'(t)\mathbf{t}(t)$，其中 $\mathbf{t}(t)$ 是公共切向量。

具有平行标架的可展片上的曲线。在众多具有平行标架的曲线中，以下折痕规则图案修改方案利用了在给定可展曲面上寻找具有平行标架的曲线。下文将简要讨论相应的计算。

设 $\mathbf{s}(t,u) = \mathbf{x}(t) + u\mathbf{r}(t)$ 为一个二维片片，且 $\mathbf{x}_t(t)$ 为一条二维曲线。我们的目标是在$\mathbf{s}(t,u)$ 上找到一条曲线 ˜$\mathbf{x}(t)$，使其在对应参数 t 处的切向量平行于$\mathbf{x}_t(t)$ 的切向量。虽然以下计算要求对所有 $t \in T$，$|\mathbf{x}_t'(t) \times \mathbf{r}(t)| \neq 0$，但我们不假设曲线 $\mathbf{x}_t(t)$ 位于 $\mathbf{s}(t,u)$ 上。

为求出未知曲线 ˜$\mathbf{x}(t)$，我们假设它可参数化为 ˜$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + l(t)\mathbf{r}(t)$，其中 $l(t)$ 是一个初始未知函数。令$\mathbf{n}_t(t)$ 表示曲线 $\mathbf{x}_t(t)$ 的法向量。要求导数 ˜$\mathbf{x}'(t)$ 与 $\mathbf{n}_t(t)$ 正交，即 ˜$\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{n}_t(t) = 0$，可得

$$l'(t) = -\frac{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}(t)}l(t) - \frac{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{x}'(t)}{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}(t)}.$$

This 该条件是关于长度函数 $l(t)$ 的显式一阶微分方程，求解后得到 b y

$$l(t) = e^{\int_0^t a(\xi)d\xi}\left(l(0) + \int_0^t e^{-\int_0^\eta a(\xi)d\xi}b(\eta)d\eta\right), \quad \text{where} \quad a(t) = -\frac{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}(t)} \text{ and } b(t) = -\frac{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{x}'(t)}{\mathbf{n}_t(t)\cdot\mathbf{r}(t)}.$$

给定合理组合的可展片、曲线和初值 $l(0)$，因此我们预期能够找到 $l(t)$ 的局部解。

2.3.2 折痕规则图案的Combescure变换

回顾一下，若两个光滑或离散共轭网在每一点上对应的偏导数或边都平行 [2, 8, 16]，则称它们通过 Combescure 变换相关联。

本节将介绍如何计算半离散Combescure变换

本 折痕规则图案 $\mathcal{P}$，并强调变换后图案的关键性质。此操作对于简化分类讨论特别有用，例如 [22] 中所用的方法，或第 3 节后文中的方法。

接下来，假设给定一个折痕规则图案 $\mathcal{P}$，其中包含 n 条折痕 $\mathbf{x}_i(t)$ 及其相邻直母线、一个连续函数 $p_0(t) > 0$，以及 $n+1$ 个正的初始长度 $(l_0(0)\ldots, l_n(0))$。

为初始化这一构造，我们使用函数 $p_0(t)$来确定与$\mathbf{x}_0(t)$平行的边界曲线 $\mathbf{x}_0(t)$。具体而言，令

$$\tilde{s}_0'(t) = p_0(t)s_0'(t)$$

并通过对 $\mathbf{x}_0'(t) = p_0(t)\mathbf{x}_0'(t)$ 进行积分，得到第一条曲线 $\mathbf{x}_0(t)$；等价地，也可表示为 $\mathbf{x}_0'(t) = \tilde{s}_0'(t)\mathbf{t}_0(t)$，其中 $\mathbf{t}_0(t)$ 是 $\mathbf{x}_0(t)$ 的切向量。此外，我们定义 $\mathbf{s}0,_L = \mathbf{x}_0(t) + u\mathbf{r}0,_L(t)$，其中 $\mathbf{r}0,_L(t)$ 是位于 $\mathbf{x}_0(t)$ 与 $\mathbf{x}_1(t)$ 之间的片的母线。

当存在一条折痕 $\mathbf{x}_i(t)$ 位于与曲线 $\mathbf{x}_{i-1}(t)$ 对应的最后一条积分曲线左侧时，对于给定的初始距离 $l_{i-1}(0)$，我们在 $\mathbf{s}_{i-1,L}(t,u)$ 上找到一条曲线 $\mathbf{x}_i(t)$，使其切向量与 $\mathbf{x}_i(t)$ 平行，参见第 2.3.1 节。计算成功后，我们再次设定 $\mathbf{s}_{i,L}(t,u) = \mathbf{x}_i(t) + u\mathbf{r}_{i,L}(t)$。

对于合理的输入，该过程描述了 Combescure 变换折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 的顺序构造。我们注意到，以下性质可直接由平面折痕、恒定折叠角折痕和平行性的定义得出：

引理 2. 如果 $\mathbf{x}_i(t)$ 是平面折痕或恒定折叠角折痕，那么 $\mathbf{x}_i(t)$ 也具有相同性质。

接下来，我们证明两个折痕图案之间的 Combescure 关系会在其折叠状态之间诱导出相应的 Combescure 关系：

引理 3. 如果折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 有一个折叠状态 $\mathcal{F}$，那么它的 *Combescure* 变换 $\mathcal{P}$ 也有一个折叠状态 $\mathcal{F}$。

证明。 我们通过从折叠状态 $\mathcal{P}$ 构造 $\mathcal{P}$ 的一个有效折叠状态来证明这一结论。

首先，通过对 $\mathbf{X}_0'(t) = p_0(t)\mathbf{X}_0'(t)$ 积分，得到 $\mathbf{X}_0(t)$，并利用折叠状态 $\mathcal{P}$中 $\mathbf{X}_0(t)$ 与 $\mathbf{X}_1(t)$ 之间片的母线方向 $\mathbf{R}0,_L(t)$，定义 $\mathbf{S}0,_L(t,u) = \mathbf{X}_0(t) + u\mathbf{R}0,_L(t)$。当 先前计算出的曲线 $\mathbf{X}_{i-1}(t)$ 左侧存在一条曲线时，我们将 $\mathbf{X}_i(t)$ 定位为 $\mathbf{S}_{i-1,L}(t,u)$ 上的一条曲线，并令 $\mathbf{S}_{i,L}(t,u) = \mathbf{X}_i(t) + u\mathbf{R}_{i,L}(t)$。

注意，由于等距变换，母线与切向量之间的角度保持不变，曲线 $\mathbf{X}_i(t)$ 和 $\mathbf{X}_i(t)$ 的切向量平行，因而其标架也平行。因此，存在正的连续函数 $p_i(t)$，使与曲线 $\mathbf{X}_i(t)$ 和 $\mathbf{X}_i(t)$ 相关的量满足以下关系：

$$\tilde{s}_i(t) = p_i(t)s_i(t), \quad \tilde{K}_i(t) = p_i(t)K_i(t), \quad \text{and} \quad \tilde{\tau}_i(t) = p_i(t)\tau_i(t).$$

此外，同样由于等距变换，我们有：

$$\tilde{k}_i(t) = p_i(t)k_i(t).$$

我们得出结论，所构造的半离散结构是 $\mathcal{P}$ 的一个有效折叠状态，因为满足定义 2 中条件的量 $K_i(t)$、$\tau_i(t)$ 和 $\varphi_i(t)$，意味着相应的量 $K_i(t)$、$\tilde{\tau}_i(t)$ 和 $\varphi_i(t)$ 也满足这些条件。

最后，我们注意到，根据构造，$\mathcal{P}$ 的曲线的切向量和母线与 平行，因此这些折叠状态通过 Combescure 变换相关联。 □

最后，我们得出结论，折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}$ 的折叠性质相同：

推论 1。 折痕图案 $\mathcal{P}$ 存在折叠状态，当且仅当 $\mathcal{P}$ 存在。因此，$\mathcal{P}$ 存在刚性母线折叠运动，当且仅当 $\mathcal{P}$ 存在刚性母线折叠运动。

2.3.3 向折痕规则图案添加平行褶皱

接下来，我们回顾一种受 Combescure 启发的方法，该方法利用平行性向折痕规则图案 [15, 38], 添加折痕，同时再次保留其折叠性质，见图 5。

下文中，设 $\mathcal{P}$ 为折痕规则图案，$l_n(0)$ 和 $l_{n+1}(0)$ 为两个初值。我们讨论如何生成折痕图案 $\mathcal{P}$，其中包含 $\mathcal{P}$的曲线 $\mathbf{x}_0(t)\ldots,\mathbf{x}_n(t)$，并增加一条折痕 $\mathbf{x}_{n+1}(t)$，以及一条新的左边界 $\mathbf{x}_{n+2}(t)$。

具体而言，使用第 2.3.1 节中描述的方法和第一个初值 $l_n(0)$，我们在 $\mathbf{s}_{n,L}(t,u)$ 上确定一条曲线 $\mathbf{x}_{n+1}(t)$，其切向量与 $\mathbf{x}_n(t)$ 在由一条直纹线相连的点处的切向量平行，并令 $\mathbf{s}_{n+1,L}(t,u) = \mathbf{x}_{n+1}(t) + u\mathbf{r}_{n-1,L}(t)$。此外，使用第二个初值 $l_{n+1}(0)$，我们将最左侧边界确定为 $\mathbf{s}_{n+1,L}(t,u)$ 上一条与 $\mathbf{x}_{n+1}(t)$ 平行的曲线。

注意，该构造不仅保证曲线 $\mathbf{x}_n(t)$ 与 $\mathbf{x}_{n+1}(t)$ 平行，而且保证经过这些曲线的母线也彼此平行。具体而言，$\mathbf{r}_{n+1,L}(t) = \mathbf{r}_{n,R}(t)$ 与 $\mathbf{r}_{n+1,R}(t) = \mathbf{r}_{n,L}(t)$。由此直接得到如下结论：

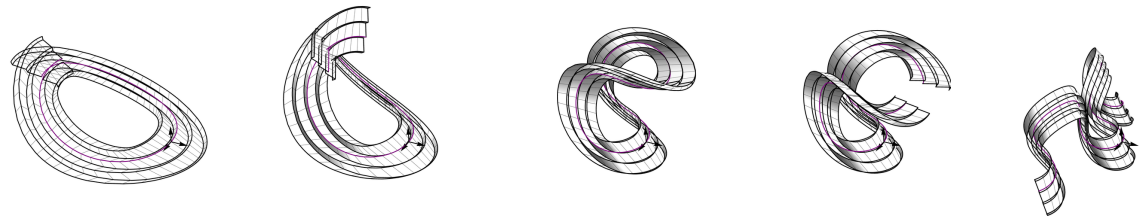


图 5：具有切线平行折痕 [21] 的折痕规则图案的刚性母线折叠运动示意图。

引理4. 若折痕 $\mathbf{x}_n(t)$ 为平面折痕或恒定折叠角折痕，则 $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}(t)$亦然。

接下来，采用与前文类似的论证，我们证明：

引理5. 若折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 具有折叠状态，则 $\mathcal{P}$ 亦具有折叠状态。因此， $\mathcal{P}$ 的刚性母线折叠运动的存在性蕴含 $\mathcal{P}$的刚性母线折叠运动的存在性。

证明. 与上一节类似，我们可以利用等距变换构造一个对应于折痕规则图案 $\mathcal{P}$的三维构型。

为证明这是一个折叠状态，我们确认定义 2 中的方程成立。具体而言，由 $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}(t)$ 的定义可知，曲线 $\mathbf{x}_n(t)$ 与 $\mathbf{x}_{n+1}(t)$ 的参数化速率 $s_n'(t)$ 与 $\tilde{s}_{n+1}'(t)$，以及它们的曲率 $k_n(t)$ 与 $k_{n+1}(t)$，相差一个因子 $p(t) > 0$，即，

$$s_{n+1}'(t) = p(t)s_n'(t) \qquad \text{and} \qquad k_{n+1}(t) = \frac{1}{p(t)}k_n(t),$$

类似地，三维曲线的量之间满足

$$\tilde{K}_{n+1}(t) = p(t)K_n(t) \qquad \text{and} \qquad \tilde{\tau}_{n+1}(t) = \frac{1}{p(t)}\tau_n(t).$$

此外，我们有 $\theta_{n+1,\ L}(t) = \theta_{n,\ R}(t)$ 和 $\theta_{n+1,\ R}(t) = \theta_{n,\ L}(t)$。

我们注意到，如果与 $\mathcal{P}$ 相关的量满足定义 2，那么与 $\tilde{\mathcal{P}}$ 相关的量也将满足定义 2，其中 $\tilde{\varphi}_{i+1}(t) = \varphi_i(t)$。 □

3 折痕规则图案的刚性母线折叠条件

鉴于第2.2.3节中讨论的系统具有过度约束的性质，一般折痕规则图案无法实现折叠状态，而刚性母线折叠运动的存在则属于一种特殊情况。本节将介绍我们关于规则折痕规则图案的刚性母线可折叠性的新颖成果。

3.1 刚性母线可折叠性的局部条件

已有研究表明，规则 PQ 网格（不一定是可展的）刚性可折叠，当且仅当每个（3×3）-子网格都是刚性可折叠的 [33]。同样，对于具有 $n >$ 条折痕的折痕规则图案，是否存在刚性母线折叠运动这一问题，可以归结为一系列规模更小的问题：

引理 6。 在规则折痕规则图案中，如果每一对相邻折痕及其关联面都能够进行刚性母线折叠运动，那么整个结构同样能够进行这种运动。

证明。 这一推导基于如下性质：每对相邻曲面构成一个单自由度机构，且在平面构型附近存在一族折叠状态。因此，只要能将这些机构两两组合起来，就足以保证整个结构能够组装起来。

□

3.2 两条折痕的刚性母线折叠相容性

对于正则折痕规则图案，引理 6 表明，只需考察成对的可刚性母线折叠的折痕。本节给出我们的主要结果，将关于两条平面折痕的刚性母线相容性的先前工作加以拓展 [22], ，并确立了使含有两条折痕的折痕规则图案 $\mathcal{P}$ 刚性可折叠的两个条件。本节中，我们继续使用第 2 节引入的记号。

3.2.1 准备工作

回顾第2.2.1节，沿曲线折痕 $\mathbf{x}_i(t)$连接的一对片的折叠状态由其倾角决定

$$\varphi_i(t) = \arcsin\left(c_i e^{I_i(t)}\right) \tag{20}$$

for

$$I_i(t) = \frac{1}{2}\int_0^t s_i'(\tilde{t})k_i(\tilde{t})\left(\cot\theta_{iL}(\tilde{t}) + \cot\theta_{iR}(\tilde{t})\right)d\tilde{t}, \tag{21}$$

其中， c_1 和 c_2 是满足以下条件的两个常数

$$|c_i| \le c_{i,\max} := \min_{t\in T} e^{-I_i(t)}.$$

我们将公式（20）中的倾角表示式代入公式（19）给出的、具有相同母线曲率的两片之间的相容条件，得到

$$\frac{s_1'(t)k_1(t)}{\sin\theta_{1L}(t)}\tan\left(\arcsin\left(c_1e^{I_1(t)}\right)\right) = -\frac{s_2'(t)k_2(t)}{\sin\theta_{2R}(t)}\tan\left(\arcsin\left(c_2e^{I_2(t)}\right)\right). \tag{22}$$

利用三角恒等式 $\tan(\arcsin(x)) = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，我们将该条件改写为

$$F_1(t)\frac{c_1e^{I_1(t)}}{\sqrt{1-c_1^2e^{2I_1(t)}}} = -F_2(t)\frac{c_2e^{I_2(t)}}{\sqrt{1-c_2^2e^{2I_2(t)}}} \tag{23}$$

其中

$$F_1(t) := \frac{s_1'(t)k_1(t)}{\sin\theta_{1L}(t)} \quad \text{and} \quad F_2(t) := \frac{s_2'(t)k_2(t)}{\sin\theta_{2R}(t)}.$$

若刚性母线折叠运动存在，则要求该方程对一对初值 $(c_1,\ c_2)$ 的某个单参数族成立，该族从平展构型 $(c_1,\ c_2) = (0,\ 0)$ 开始。下文假设 $c_1,\ c_2 \neq 0$。

3.2.2 折叠运动过程中的相容性

做好这些准备工作后，我们给出以下定理。

定理 1 (折痕的相容性)。 候选折痕规则图案具有刚性母线折叠运动，当且仅当对所有非零曲率参数 $t \in T\backslash T_0$,

$$\frac{F_1'(t)}{F_1(t)} - \frac{F_2'(t)}{F_2(t)} + I_1'(t) - I_2'(t) = 0 \tag{24}$$

and

$$F_2(t)^2 I_1'(t) = F_1(t)^2 I_2'(t). \tag{25}$$

均成立。

证明。 我们的证明分为三个步骤。第一步，我们关注参数值 $t \in T\backslash T_0$ ，并推导出两个约束，以确保公式（23）对于由 c_1 和 c_2 构成的单参数族值成立。第二步，我们证明这两个约束蕴含了初值 c_1 与 c_2 之间的光滑连接。最后，通过考虑所有参数值 $t \in T$，我们论证刚性母线折叠运动的存在性。

步骤 1（约束推导）。 下文中，我们假设 $t \in T\backslash T_0$，因此 $F_i(t) \neq 0$。对公式（23）关于 c_2 的平方求解，得到

$$c_2^2 = \frac{A(t)c_1^2}{B(t)c_1^2 + C(t)},$$

其中

$$A(t) = F_1(t)^2 e^{2I_1(t)}, \qquad B(t) = \left(F_1(t)^2 - F_2(t)^2\right) e^{2I_1(t)} e^{2I_2(t)}, \qquad C(t) = F_2(t)^2 e^{2I_2(t)}.$$

注意，分母不可能对所有 t 都为零，这等价于 $B(t) = C(t) = 0$，因为我们的假设蕴含 $C(t) \neq 0$。

值 c_2 在 t 中为常数，当且仅当其关于参数 t 的导数为零，即

$$0 = \frac{d}{dt}c_2^2 = \frac{\left(A'(t)B(t) - A(t)B'(t)\right)c_1^2 + A'(t)C(t) - A(t)C'(t)}{(B(t)c_1^2 + C(t))^2}c_1^2.$$

该方程必须对所有合适的 c_1 值成立。当且仅当分子中 c_1^4 和 c_1^2 的系数为零时，这一条件才成立，从而得到以下两个约束：

$$0 = A'(t)B(t) - A(t)B'(t) \qquad \text{and} \qquad 0 = A'(t)C(t) - A(t)C'(t). \tag{26}$$

首先，我们化简方程（26）（右侧），得到公式（24）。 接下来，我们考虑将公式（26）右侧的方程乘以 $e^{2I_1(t)}$ 倍后加到左侧方程所得的方程：

$$A'(t)\left(B(t) + e^{2I_1(t)}C(t)\right) - A(t)\left(B'(t) + e^{2I_1(t)}C'(t)\right) = 0. \tag{27}$$

化简该方程可得公式（25）。

注意，由公式（25）可知，$I_1'(t) = 0$ 当且仅当 $I_2'(t) = 0$。由于恒定折叠角折痕$\mathbf{x}_i(t)$的特征是 $I_i'(t) = 0$，因此，如果一个折痕具有恒定折叠角，那么要使该折痕规则图案刚性母线可折叠，另一个折痕也必须具有恒定折叠角。

步骤 2（初值之间的光滑连接）。接下来，我们证明 c_2 平滑依赖于c_1，并且存在一种运动，其起始构型中这两个值均为零。我们继续假设 $t \in T\backslash T_0$。

- 恒定折叠角折痕：首先，我们考虑两个折痕的折叠角均为恒定的情形，也就是说，对所有 $t \in T$，$I_1(t) = I_2(t) = 0$。对公式（24）积分，得到

$$\frac{F_1(t)}{F_2(t)} = c_3,$$

其中，$c_3 > 0$ 是由折痕规则图案的几何形状确定的常数。

T为建立 c_1 与 c_2 之间的关系，我们考虑公式（23），该式可简化为

$$c_3\frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2}} = -\frac{c_2}{\sqrt{1-c_2^2}}. \tag{28}$$

由此可得

$$c_2^2 = \frac{c_1^2 c_3^2}{1 - c_1^2(1-c_3^2)}. \tag{29}$$

因此，只有当 $1 - c_1^2(1-c_3^2) > 0$ 时，常数 c_2 才是实数。这种情况在以下两种情形下成立：$c_3^2 > 1$，或 $c_3^2 < 1$ 且 $c_1^2 < 1/(1-c_3^2)$。

在这两种情况下，将公式（29）中关于 c_2 的两个解代入公式（28），可得

$$c_2 = -\frac{c_1 c_3}{\sqrt{1 - c_1^2(1-c_3^2)}},$$

这表明常数之间存在平滑的关系，因此意味着存在一种从平坦状态开始的光滑折叠运动。

这些考量基于折痕规则图案确定了可达到的最大折叠角。也就是说，如果 $c_3^2 < 1$，则有 $c_1 \in (-c_{1,\,\max}, c_{1,\,\max})$，其中 $c_{1,\,\max} := 1/\sqrt{1-c_3^2}$；否则，$c_1$ 不受约束，且对所有 c_1 都存在折叠运动。

- 非恒定折叠角折痕：接下来，我们考虑 $I_1'(t) = I_2'(t) = 0$ 仅在孤立值处成立的情况。

  对公式（24）积分可得

$$0 = I_1(t) - I_2(t) + \ln F_1(t) - \ln F_2(t) + \text{const},$$

  这意味着

$$\frac{F_1(t)e^{I_1(t)}}{F_2(t)e^{I_2(t)}} = c_3, \tag{30}$$

  其中，$c_3 > 0$ 是一个取决于给定折痕规则图案的常数。
  下文中，我们假设 $t \in T$ 满足 $I_i'(t) \neq 0$，并在后文进一步讨论 $I_i'(t) = 0$ 的情况。将方程（30）与公式（25）结合，可得

$$I_1'(t)e^{2I_1(t)} = c_3^2 I_2'(t)e^{2I_2(t)}, \tag{31}$$

  再进行一次积分可得

$$e^{2I_1(t)} = c_3^2 e^{2I_2(t)} + c_4, \tag{32}$$

  其中，c_4 是一个同样由折痕图案确定的常数，具体而言，

$$c_4 = e^{2I_1(t)}\left(1 - \frac{F_1(t)^2}{F_2(t)^2}\right).$$

  为了找出 c_1 和 c_2之间的联系，我们将推导出的关系代入相容条件。具体而言，将方程（30）代入公式（23）可简化为

$$c_3 = -\frac{c_2}{c_1}\frac{\sqrt{1 - c_1^2(c_3^2 e^{2I_2(t)} + c_4)}}{\sqrt{1 - c_2^2 e^{2I_2(t)}}},$$

  解出 c_2^2 可得

$$c_2^2 = \frac{c_1^2 c_3^2}{1 - c_1^2 c_4}. \tag{33}$$

  同样，当 $c_4 < 0$，或 $c_4 > 0$ 和 $c_1^2 < 1/c_4$ 时，c_2 为实数。若情况如此，则有 t

$$c_2 = -\frac{c_1 c_3}{\sqrt{1 - c_1^2 c_4}}$$

  这是常数 c_1 和 c_2 之间的光滑关系，因此存在光滑折叠运动。

  我们将这些讨论推广到满足 $I_1(t) = I_2(t) = 0$ 的孤立值，并注意到公式（32）意味着 $c_4 = 1 - c_3^2$，由此建立了与恒定折叠角情形的联系。

至此，我们完成了论证：对于图案中折痕的拐点所不对应的 t 值，这两个约束也足以保证刚性母线运动的存在。

步骤 3（具有零曲率的参数值）。最后，我们将考察范围扩展到所有参数值 $t \in T$。由公式（23）可知，在满足 $k_1(t) = k_2(t) = 0$ 的参数值处，相容条件平凡地成立，且不对 c_1和 c_2 上的连接构成约束。因此，它们的值仅由曲面区域决定。至此证明结束。

□

在第 4.3 节中，为了对平面折痕与恒定折叠角折痕的组合进行分类，使用定理 1 中约束的积分形式比直接使用约束本身更方便。因此，我们指出如下：

推论 2. 候选折痕规则图案具有刚性母线折叠运动，当且仅当对于所有非零曲率参数 $t \in T\backslash T_0$，方程 (30) 和方程 (31) 对某些 $c_3 > 0$ 和 c_4 成立。

我们强调恒定折叠角折痕具有以下性质：

引理7. 在一个能够进行刚性母线运动且至少包含一条恒定折叠角折痕的候选折痕规则图案中，所有折痕都是恒定折叠角折痕。

证明。 对于曲率非零的点，该结论可由公式（32）直接得出。在曲率为零的非空区间上，相邻折痕沿直线折叠时，其折叠角保持恒定。对于折叠角恒定的孤立参数值，公式（32）不适用。尽管如此，由于假定折痕和母线方向连续，恒定折叠角这一性质会从一条折痕延续到下一条折痕。

□

4 刚性母线可折叠折痕规则图案

定理 1 和推论 2 提供了判断候选折痕规则图案是否能够进行刚性母线折叠运动的工具。然而，将这些结果直接应用于此类图案的设计并不容易。本节介绍前述结果的两种应用，有助于进行设计并加深理解。

4.1 预备知识

本节介绍的两种应用均聚焦于由三个曲面片组成的刚性母线可折叠图案。在第一种应用中，我们从由单折痕构成的折痕规则图案出发，沿着一条满足刚性母线可折叠性的曲线折痕附加一个曲面片。在第二种应用中，我们对能够组成刚性母线可折叠组合的特殊折痕类型对进行分类。

在这两种应用中，我们都根据可展曲面的不同类型，对中央曲面片进行分类讨论。回顾一下，可展曲面的母线要么局部平行，要么交于一点，要么与一条空间曲线相切。因此，任何可展曲面都可以分解为圆柱形、圆锥形或切线可展曲面片。

遵循 Sauer [31], 的方法，我们通过对折痕规则图案施行 Combescure 变换，将中央切线可展面片转化为圆锥形曲面片，从而简化分类讨论。由于 Combescure 变换保留折痕规则图案的折叠性质，这种简化不会影响分析。

作为准备，我们建立中央曲面片为圆柱形或圆锥形的折痕规则图案的参数化，并表示定理 1 和推论 2 中出现的量。我们继续采用第 2 节的记号，但将公共母线方向 $\mathbf{r}_{1L}(t) = \mathbf{r}_{2R}(t)$ 简写为 $\mathbf{r}(t)$。

圆柱面。 对于中央曲面片为圆柱面的情形，不失一般性，我们假设

$$\mathbf{x}_i(t) = (t, 0) + l_i(t)\mathbf{r}(t) \qquad \text{for} \qquad \mathbf{r}(t) = (0, 1),$$

其中 $l_i(t)$ 是两个初始未知的 C^2 长度函数，满足 $l_1(t) < l_2(t)$。

利用第 2.1.2 节中的描述，我们计算得

$$s_i'(t)k_i(t) = \frac{l_i''(t)}{1 + l_i'(t)^2}.$$

中央曲面片的直纹角可简化为

$$\theta_{1L}(t) = \arccos\left(\frac{l_1'(t)}{\sqrt{1 + l_1'(t)^2}}\right) \qquad \text{and} \qquad \theta_{2R}(t) = \arccos\left(\frac{l_2'(t)}{\sqrt{1 + l_2'(t)^2}}\right),$$

并且我们有

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{l_i''(t)}{\sqrt{1+l_i'(t)^2}}, \\ I_1'(t) &= \frac{\left(\cot\theta_{1R}(t)+l_1'(t)\right)l_1''(t)}{2\left(1+l_1'(t)^2\right)}, \\ I_2'(t) &= \frac{\left(\cot\theta_{2L}(t)+l_2'(t)\right)l_2''(t)}{2\left(1+l_2'(t)^2\right)}. \end{aligned} \tag{34}$$

若$\mathbf{x}_i(t)$是平面折痕，则方程（21）中的表达式可简化为

$$I_i(t) = \frac{1}{2}\log\left(1+l_i'(t)^2\right) \qquad \text{and} \qquad \varphi_i(t) = \arcsin\left(c_i\sqrt{1+l_i'(t)^2}\right), \tag{35}$$

其中， c_1 和 c_2 是适当的常数。

圆锥面。 在中央曲面片为圆锥的情况下，不失一般性，我们假设

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v} + l_i(t)\left(\cos t, -\sin t\right), \qquad \text{where} \qquad \mathbf{r}(t) = \left(\cos t, -\sin t\right),$$

且 $l_i(t)$和 $l_1(t) < l_2(t)$是两个起初未知的 C^2 长度函数。

根据第 2.1.2 节中的描述，我们计算得

$$s_i'(t)k_i(t) = -\frac{f_i(t)}{e_i(t)},$$

其中

$$\begin{aligned} e_i(t) &= l_i(t)^2 + l_i'(t)^2, \\ f_i(t) &= l_i(t)^2 + 2l_i'(t)^2 - l_i(t)l_i''(t). \end{aligned}$$

中央曲面片的直纹角可简化为

$$\theta_{1L}(t) = \arccos\left(\frac{l_1'(t)}{\sqrt{e_1(t)}}\right) \qquad \text{and} \qquad \theta_{2R}(t) = \arccos\left(\frac{l_2'(t)}{\sqrt{e_2(t)}}\right),$$

并且有

$$\begin{aligned} F_i(t) &= -\frac{f_i(t)}{l_i(t)\sqrt{e_i(t)}}, \\ I_1'(t) &= \frac{1}{2}\left(l_1'(t)+l_1(t)\cot\theta_{1R}(t)\right)\frac{f_1(t)}{l_1(t)e_1(t)}, \\ I_2'(t) &= \frac{1}{2}\left(l_2'(t)+l_2(t)\cot\theta_{2L}(t)\right)\frac{f_2(t)}{l_2(t)e_2(t)}. \end{aligned} \tag{36}$$

如果$\mathbf{x}_i(t)$是平面折痕，则方程（21）中的表达式可简化为

$$I_i(t) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{e_i(t)}{l_i(t)^4}\right) \qquad \text{and} \qquad \varphi_i(t) = \arcsin\left(c_i\frac{\sqrt{e_i(t)}}{l_i^2(t)}\right),$$

其中 c_1 和 c_2 是适当的常数。

最后请注意，微分方程 $f_i(t) = 0$ 的解具有以下形式

$$l_i(t) = \frac{c_2}{\cos(t+c_1)},$$

并对应于圆锥上的直线。

4.2 刚性母线可折叠折痕规则图案的顺序构造 s

在折叠结构上添加一道折痕，是通过增加褶皱来提升设计复杂度的一种有效方法 [1, 21]。一般来说，对于给定的可展片，几乎任何合适的相交曲线都可以成为曲线折痕；添加的片则可通过将切平面关于该曲线的密切平面反射后形成的包络面来确定。然而，如果原始曲面属于某个刚性可折叠结构，那么通常添加新片会导致该结构失去这一性质。

在本节中，我们讨论如何沿一条曲线折痕将一个片附加到折痕规则图案上，同时保持其刚性母线可折叠性，从而提供一种生成刚性母线可折叠折痕规则图案的方法。尽管此类曲线的一种特殊情形——具有平行切线的曲线——已在第2.3.3节中给出，我们表明，一般而言，这些曲线及其对应的片可以用三个参数来指定。

在下文中，我们分别考虑中央曲面片$\mathbf{s}_{1,L}(t,u)$的三种情形（圆柱形、圆锥形或切线可展曲面），并说明如何求出折痕$\mathbf{x}_2(t)$以及邻接曲面$\mathbf{s}_{2,L}(t,u)$的母线，使得组合后的折痕规则图案具有刚性母线折叠运动。

4.2.1 向中央圆柱面附加一个片

在本节中，我们沿用第4.1节中圆柱情形的记号，并假设由长度函数 $l_1(t)$定义的折痕$\mathbf{x}_1(t)$不是一条直线，从而有 $l_1'(t) \neq 0$。利用定理 1，我们旨在求出由 $l_2(t)$所刻画的$\mathbf{x}_2(t)$，以及第三个面片的母线 $\theta_{2L}(t)$。

首先，我们考虑定理 1 中的第二个约束条件，并观察到将公式（34）中的表达式代入公式（25）后得到

$$\cot\theta_{2L}(t) = \frac{l_2''(t)}{l_1''(t)}\left(\cot\theta_{1R}(t) + l_1'(t)\right) - l_2'(t) \tag{37}$$

接下来，我们考虑定理 1 中的第一个约束条件。利用公式（24），我们化简下列表达式

$$\frac{F_i'(t)}{F_i(t)} = -\frac{l_i'(t)l_i''(t)}{1+l_i'(t)^2} + \frac{l_i'''(t)}{l_i''(t)}.$$

利用该表达式和方程（37），公式（24）可化简为

$$l_2''' = \frac{l_2''}{2}\left(\frac{(\cot\theta_{1R} - l_1')l_1''}{1+l_1'^2} - \frac{(\cot\theta_{1R} + l_1')l_2''^2}{l_1''(1+l_2'^2)} + \frac{2l_2'l_2''}{1+l_2'^2} + \frac{2l_1'''}{l_1''}\right).$$

注意，这是关于长度函数 $l_2(t)$ 的一个显式非线性三阶微分方程。因此，局部解一般依赖于三个参数，分别对应于 $l_2(t)$、$l_2'(t)$ 和 $l_2''(t)$ 的初值。计算成功后，由此可确定 $\mathbf{x}_2(t)$，并利用方程（37）确定其左侧曲面片的母线方向。我们得出结论：

推论 3. 对于给定的一条与圆柱相接的折痕，一般存在圆柱上的曲线与相接母线的一个三参数族，它们可形成具有刚性母线折叠运动的折痕-母线图案。

4.2.2 向中央圆锥面附加一片

接下来，我们考虑中央曲面片为圆锥的情形。我们沿用第4.1节中圆锥情形的记号，并假设由长度函数 $l_1(t)$定义的折痕$\mathbf{x}_1(t)$不是直线，这意味着 $f_1(t) \neq 0$。同样，利用定理 1，我们旨在求出由 $l_2(t)$以及第三个面片的母线 $\theta_{2L}(t)$所刻画的$\mathbf{x}_2(t)$。

同样，我们首先考虑定理 1中的第二个约束条件，并注意到将公式（36）中的表达式代入公式（25）后得到

$$\cot\theta_{2L} = \frac{1}{l_2^2}\left(-l_2l_2' + \frac{f_2}{f_1}\left(l_1l_1' + l_1^2\cot\theta_{1R}\right)\right) \tag{38}$$

接下来, 我们考虑定理 1 中的第一个约束条件。利用公式（24），我们将下式简化 g

表达式

$$\frac{F_i'(t)}{F_i(t)} = \frac{-2l_i'^5 + 4l_i^3l_i'l_i'' + 2l_il_i'^3l_i'' - l_i^4l_i''' + l_i^2l_i'(l_i''^2 - l_i'(3l_i' + l_i'''))}{l_i(l_i^2+l_i'^2)(l_i^2+2l_i'^2 - l_il_i'')}$$

利用这个表达式和方程（37），公式（24）可简化为

$$l_2''' = \frac{f_2}{2l_2}\left(\frac{2l_1'}{l_1} - \frac{2l_2'}{l_2} + (l_1' + l_1\cot\theta_{1R})\left(\frac{f_1}{l_1e_1} - \frac{l_1f_2^2}{l_2^2e_2f_1}\right) + \frac{2l_1'(l_1+l_1'')}{e_1} - \frac{2l_2'(l_2+l_2'')}{e_2} + \frac{-2l_1'(2l_1+3l_1'') + 2l_1l_1'''}{f_1} + \frac{4l_2l_2' + 6l_2'l_2''}{f_2}\right).$$

注意到，这再次是关于长度函数 $l_2(t)$ 的显式非线性三阶微分方程。因此，局部解通常取决于三个参数，分别对应于 $l_2(t)$、$l_2'(t)$ 和 $l_2''(t)$ 的初值。计算成功后，即可确定 $\mathbf{x}_2(t)$，并利用方程（38）确定其左侧曲面片的母线方向。我们得到：

推论4。对于给定的、与圆锥相邻的折痕，通常存在一个三参数曲线族及与之相邻的母线，使其形成具有刚性母线折叠运动的折痕规则图案。

4.2.3 向中心切线可展面追加一个片

最后，我们简要讨论中心曲面为切线可展曲面的情形。如第4.1节所述，这种情形可以在局部约化为第4.2.2节讨论的圆锥情形。具体而言，我们可以利用第2.3.2节讨论的平行性，将折痕规则图案变换为如下构型：曲面 $\tilde{\mathbf{s}}_{1L}(t,u)$ 对应于$\mathbf{s}_{1L}(t,u)$，且为一个圆锥。借助第4.2.2节的方法，我们确定 $\tilde{\mathbf{s}}_{1L}(t,u)$ 上具有刚性母线折叠运动的曲线。这些相容曲线可以变换为 $\mathbf{s}_{1L}(t,u)$ 上的曲线，从而得到具有一般曲面且具备刚性母线折叠运动的折痕规则图案。

注意，不可能存在其他曲线$\mathbf{x}_2(t)$，因为$\mathbf{s}_{1L}(t,u)$上的每条相容曲线都对应于 $\tilde{\mathbf{s}}_{1L}(t,u)$上一条未被声明的曲线。与前文类似，我们得出：

推论5. 对于给定的一条与切线可展曲面片相邻的折痕，通常存在一个三参数族的曲线，它们位于该切线可展曲面片及相邻直母线上，并能形成具有刚性母线折叠运动的折痕-直纹线图案。

4.3 两条平面折痕或恒定折叠角折痕的刚性母线折叠组合

本节探讨由平面折痕或具有恒定折叠角的折痕组成的折痕对之间的刚性母线折叠相容性。

Mundilova 和 Nawratil 在 [22] 中研究了两条刚性母线可折叠平面折痕的组合，这也构成了我们此处工作的基础。他们发现，两条平面折痕的刚性母线可折叠组合受到限制：当两条折痕沿圆柱片区组合时，它们可能是彼此的缩放版本。其他情况下，唯一相容于刚性母线折叠的折痕，是第2.3.3节讨论的切向平行曲线。

相比之下，引理7指出，恒定折叠角折痕只能与其他恒定折叠角折痕相容。对于给定的折痕，这些相容折痕可构成一个至多具有三个参数的族，正如第4.2节所讨论的，这引出了一个问题：情况是否确实如此?

在下一节中，我们将拓展 Mundilova 和 Nawratil 的工作 [22]，并运用推论 2，通过以下方式研究引理7的影响：

- 对于两个恒定折叠角折痕的组合，我们简化第3节推导出的微分方程，并在第 4.3 节的 4.3.1 小节中确认：对于给定的恒定折叠角折痕，第二条相容折痕具有三个自由度。

- 将恒定折叠角折痕与平面折痕组合时，引理7指出，平面折痕也必须是恒定折叠角折痕。因此，它对应于一条垂直于可展曲面母线的曲线。我们在第 4.3 节的 4.3.2 小节中证实了这一发现。

我们重点关注折痕并非直线的情形，此时只有孤立点满足 $l_i''(t) = 0$ （对于圆柱面），或 $f_i(t) = 0$ （对于圆锥面）。

4.3.1 C两条恒定折叠角折痕的组合

折痕

给定一个含有两条恒定折叠角折痕的折痕图案，我们注意到两者均 $I_1(t) = I_2(t) = 0$。因此，推论2中的两个条件之一——方程（31）——显然成立，而第二个条件方程（30）则简化为 $F_1(t) = c_3 F_2(t)$。

接下来，我们根据中心片的类型进一步简化这一约束 h..

圆柱情形。 对于圆柱片区的情形，使用第4.1节中的表达式，方程（30）可简化为

$$\frac{l_1''(t)}{\sqrt{1+l_1'(t)^2}} = c_3 \frac{l_2''(t)}{\sqrt{1+l_2'(t)^2}}$$

因此，通过积分可得

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{l_1'(t)}{\sqrt{1+l_1'(t)^2}}\right) = c_3 \operatorname{arctanh}\left(\frac{l_2'(t)}{\sqrt{1+l_2'(t)^2}}\right) + c_4,$$

其中 c_4 是某个常数。

给定其中一条曲线，例如用 $l_2(t)$ 表示的 $\mathbf{x}_2(t)$，因此我们可以计算出一条相容曲线，其形式为

$$l_1(t) = c_5 \pm \int_0^t \frac{\tanh(h(\tilde{t}))}{\sqrt{1-\tanh^2(h(\tilde{t}))}} d\tilde{t}, \quad \text{where} \quad h(t) = c_3 \operatorname{arctanh}\left(\frac{l_2'(t)}{\sqrt{1+l_2'(t)^2}}\right) + c_4.$$

最后需要注意的是，对于给定的曲线 $\mathbf{x}_2(t)$，通常可以找到一个相容曲线的三参数族，对应于常数 c_3、c_4 和 c_5。

圆锥情形。 另一方面，对于中心圆锥片的情形，利用第4.1节中的表达式，方程30可化简为

$$\frac{f_1(t)}{l_1(t)\sqrt{e_1(t)}} = c_3 \frac{f_2(t)}{l_2(t)\sqrt{e_2(t)}},$$

或者等价地，

$$l_1''(t) = l_1(t) + 2\frac{l_1'(t)^2}{l_1(t)} - c_3 \frac{\sqrt{l_1(t)^2 + l_1'(t)^2}}{l_2(t)\sqrt{l_2(t)^2 + l_2'(t)^2}} \left(l_2(t)^2 + 2l_2'(t)^2 - l_2(t)l_2''(t)\right).$$

虽然我们无法找到闭式解，但预计可以找到一个相容曲线的三参数族 $l_2(t)$，其中两个参数分别对应于 $l_2(t)$ 和 $l_2'(t)$ 的初值，而c_3 是另一个参数。

4.3.2 平面折痕与恒定折叠角折痕的组合

最后，我们将注意力转向由平面折痕 $\mathbf{x}_1(t)$ 和具有恒定折叠角的折痕 $\mathbf{x}_2(t)$ 组成的折痕图案。我们考察推论 2 中的两个条件在这种情况下如何简化。注意，由于 $\mathbf{x}_2(t)$ 具有恒定折叠角， $I_2(t) = 0$。

圆柱情形。 利用第4.1节中关于中心圆柱片的相应表达式，方程（30）和方程（31）可简化为

$$l_1''(t) = c_3 \frac{l_2''(t)}{\sqrt{1+l_2'(t)^2}} \qquad \text{and} \qquad l_1'(t)l_1''(t) = 0.$$

第二个条件意味着 $l_1''(t) = 0$，因此平面折痕是直的。由此可知，这种情况下不存在非平凡组合。

圆锥情形。 将第4.1节中中心圆锥片的相应表达式代入后，方程(30)和方程(31)简化为

$$\frac{f_1(t)}{l_1(t)^3} = c_3 \frac{f_2(t)}{l_2(t)\sqrt{e_2(t)}} \qquad \text{and} \qquad l_1'(t) f_1(t) = 0.$$

假设$\mathbf{x}_1(t)$不是一条直线，即除孤立值外 $f_1(t) \neq 0$，我们得出$l_1'(t) = 0$，从而 $l_1(t) = \text{const}$。因此，平面折痕$\mathbf{x}_1(t)$是一条垂直于该圆锥母线的曲线，因而也是一条恒定折叠角折痕。

沿一条垂直于其母线的平面折痕对圆锥所作的任何折叠构形都会得到一个正圆锥。正圆锥面上的恒定折叠角曲线已在与伪测地线的连接中得到研究，即曲面上其密切平面与相邻切平面保持恒定夹角的曲线，由Walter Wunderlich [41, IV], 加以描述，其中它们通过旋转二次曲面上斜率线的极化来刻画。相应四类曲线在其展开形式中的参数化给出于 [41, VIII] 或 [20, 第3节2]。

切线可展曲面。 将圆锥情形中的结果推广到切线可展曲面后，仍保留了这样的性质：平面曲线是具有恒定折叠角的曲线，即垂直于母线；而第二类曲线则对应于旋转圆锥上平行于伪测地线的曲线。

5 结论与未来工作

总而言之，本文研究了具有刚性母线运动的折痕规则图案，并对全局可展共轭网的保持共轭网的等距变形得出了新的研究结果。

我们推导出了刚性母线可折叠性的两个条件，并将其应用于两种情形。首先，我们证明，在刚性母线可折叠图案中引入一条折痕通常会引入三个自由度。其次，我们研究了平面折痕与恒定折叠角折痕的组合。特别是，我们证明恒定折叠角折痕仅与其他恒定折叠角折痕相容。此外，在同时具有恒定折叠角和平面性质的折痕中，相容性要求它们垂直于片的母线。这给出了相容的平面折痕与恒定折叠角折痕的完整刻画。

在未来的工作中，我们希望超越整体可展的情形，刻画所有与刚性折叠相容的可展片组合。我们还希望找出并描述光滑情形与离散情形之间的对应关系，最终搭建起光滑与离散微分几何之间的桥梁，加深对二者相似之处与差异的理解。

致谢。 作者谨向 Georg Nawratil 致谢，感谢他在平面折痕相容性方面的合作，这项工作构成了本文的基础。她也感谢 Tomohiro Tachi 在 2024年夏季 接待她访问 TachiLab；她正是在那段时间开始研究这一问题。她还感谢 EPFL 的几何计算实验室，尤其是 Mark Pauly。

本研究得到瑞士政府卓越奖学金和瑞士国家科学基金会（SNSF）的资助，项目编号为 200021-231293。

参考文献

[1] Leonardo Alese。曲线折叠的传播：具有多条折痕的折叠环带存在。代数与几何贡献 ¨代数与几何贡献，63(1):19–43，2022年。[2] Ed Combescure。论函数行列式与曲线坐标。载于《年报》´高等师范学校科学 ´学报，第4卷，93–131页，1867年。[3]Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Vi Hart、Gregory N. Price 和 Tomohiro Tachi。褶皱折叠的（非）存在性：纸张如何在折痕之间折叠。图与组合，27(3):377–397，2011年。[4] Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、David A. Huffman、Duks Koschitz 和 Tomohiro Tachi。曲线折痕与母线的特征刻画：透镜镶嵌的设计与分析。载于折纸[6]：第六届折纸科学、数学与教育国际会议论文集（*OSME 2015*），209–230页，2015年。

[5] Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、David A. Huffman、Duks Koschitz 和 Tomohiro Tachi。带反射准线的圆锥折痕图案。载于《折纸》[7]：第七届折纸科学、数学与教育国际会议论文集（OSME 2018），573–590页，2018年。[6] Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Duks Koschitz 和 Tomohiro Tachi。艺术、设计与数学中的曲线折痕综述。《对称：文化与科学》，26(2):145–161，2015年。[7] Erik D. Demaine、Klara Mundilova 和 Tomohiro Tachi。带反射准线的圆锥折痕图案的局部平坦且刚性可折叠离散化。载于《几何与图形国际会议》，185–196页。施普林格，2023年。[8] Luther Pfahler Eisenhart。《曲面变换》。普林斯顿大学出版社，1923年。[9] Luther Pfahler Eisenhart。《曲线与曲面微分几何论》。Courier Corporation，2013年。[10] Dmitry Fuchs 和 Serge Tabachnikov。关于折纸的更多论述。《美国数学月刊》，106(1):27–35，1999年。[11] N. J. Hatzidakis。关于 Frenel 与 Brunel 公式的若干推论。《数学新期刊》，13:49–58，1902年。[12] Ivan Izmestiev。四边形底面的柔性 Kokotsakis 多面体分类。《国际数学研究通知》，2017(3):715–808，2016年5月。[13] Ivan Izmestiev、Arvin Rasoulzadeh 和 Jonas Tervooren。离散与光滑 T曲面的等距变形。《计算几何》，122:102104，2024年。[14] Ivan Izmestiev、Arvin Rasoulzadeh 和 Jonas Tervooren。光滑、离散与半离散 Voss 曲面。2025年。[15] Caigui Jiang、Cheng Wang、Florian Rist、Johannes Wallner 和 Helmut Pottmann。基于四边形网格的等距映射与可展曲面。《ACM Transactions on Graphics》，39(4)，2020年8月。[16] Martin Kilian、Christian M¨uller 和 Jonas Tervooren。光滑与离散圆锥网。《数学研究成果》，78(3):110，2023年6月。[17] Martin Kilian、Georg Nawratil、Matteo Raffaelli、Arvin Rasoulzadeh 和 Kiumars Sharifmoghad- dam。离散 Voss 网的交互式设计及其刚性折叠模拟。《计算机辅助几何设计》，111:102346，2024年。[18] Duks Koschitz。曲线折痕的计算设计：David Huffman 的折纸方法。博士论文，麻省理工学院，2014年。[19]Christian M¨uller。半离散常平均曲率曲面。《数学杂志》，279(1):459–478，2015年。[20] Klara Mundilova。曲线折痕的几何与交互式设计。硕士论文，维也纳，2017年。[21] Klara Mundilova。沿曲线粘合和折叠纸张：用于分析与设计的计算方法。博士论文，麻省理工学院，2024年。[22] Klara Mundilova 和 Georg Nawratil。平面折痕的刚性母线折叠相容性。载于《折纸》[8]：第八届折纸科学、数学与教育国际会议论文集（OSME 2024），澳大利亚墨尔本，2024年7月16–18日，即将出版，2024年。[23] Georg Nawratil。带有平面曲线且可等距变形的圆锥与圆柱。载于 IFToMM 世界机构与机器科学大会，218–227页。施普林格，2023年。[24] Georg Nawratil。从轴向C多面体到一般P网。载于机器人运动学进展国际研讨会，340–347页。施普林格，2024年。[25] Anthony William Nutbourne 和 Ralph R Martin。应用于曲线与曲面设计的微分几何。（无题），1988年。.[26] Karl Peterson。论曲线与曲面。作者德译。莫斯科—莱比锡，1868年。

[27] Helmut Pottmann、Alexander Schiftner、Pengbo Bo、Heinz Schmiedhofer、Wenping Wang、Niccolo Baldassini 和 Johannes Wallner。由单一曲面板构成的自由曲面。*ACM Transactions on Graphics*，27(3):1–10，2008年8月。[28] Helmut Pottmann 和 Johannes Wallner。计算直线几何。《数学与可视化》。施普林格·柏林·海德堡，2010年。[29] F. P´erez-Arribas、J.A. Su´arez-Su´arez 和 L. Fern´andez-Jambrina。船体的自动曲面建模。计算机辅助设计，38(6):584–594，2006年。[30] Erich Salkowski。空间曲线的变换。《数学年刊》，66(4):517–557，1909年。[31] Robert Sauer。差分几何。施普林格，1970年。.[32]Robert Sauer 和 Heinrich Graf。关于曲面的弯曲，与开式多面体折叠的类比。《数学年刊》，105(1):499–535，1931年。[33] Wolfgang K Schief、Alexander I Bobenko 和 Tim Hoffmann。关于多面体曲面的无穷小变形与有限变形的可积性。载于离散微分几何，第67–93页。施普林格，2008年。[34] Kiumars Sharifmoghaddam、Rupert Maleczek 和 Georg Nawratil。t面体类型刚性可折叠管状结构的推广。《力学研究通讯》，132:104151，2023年。[35] Hellmuth Stachel。研究 Kokotsakis 网格的运动学方法。计算机辅助几何设计，27(6):428–437，2010年。[36] Oded Stein、Eitan Grinspun 和 Keenan Crane。三角网格的可展性。*ACM Transactions on Graphics*，37(4)，2018年7月。[37] Tomohiro Tachi。复合刚性可折叠曲面折纸结构。*Transformables*会议论文集，第18–20页，2013年。[38] Tomohiro Tachi 和 Gregory Epps。通过曲线折叠的有理化，为建筑设计单自由度机构。载于国际建筑与城市设计算法设计研讨会（*ALGODE-AIJ*）。东京，第5卷，第6页，2011年。[39] Aurel Voss。关于具有两族测地线构成共轭系的曲面。《*1888*年会议报告》，第*6*卷，1889年。[40] Tony Wills。D形体：由两张二维片材构成的三维形体。载于*Bridges*会议论文集 *206*：数学、艺术、音乐、建筑、教育与文化，第503–510页，2006年。[41] Walter Wunderlich。锥面上的伪测地线。维也纳科学院会议报告，第*158*卷，第61–73页，1949年。