arXiv:2603.06430v1 [math.LO] 6 Mar 2026

CO弱拟o-极小理论的不可数模型 I

SLAVKO MOCONJA 与 PREDRAG TANOVI´C

Abstract. 我们证明了马丁猜想对于弱拟o-极小理论的一个广泛子类成立。

1. Introduction and preliminaries

本文继续 [MT20] 和 [MT24], 中的工作；在这些文献中，我们开始发展弱拟o-极小理论的可数模型的分类理论。在 [MT20], 中，二元的此类理论的情形已得到解决；而在 [MT24]中，我们开始研究一般情形下的“非结构”部分，即寻找能够推出存在最大数量可数模型的条件。在那里，我们发现了一个这样的条件：存在一个 $(\mathfrak{C}, <)$ 的可定义半区间族，其中包含一个平移。本文研究定义在弱 o-极小类型轨迹上的相对可定义半区间族，并受 Baizhanov 和 Kulpeshov 的工作 [BK06], 启发，引入这些半区间的简单性概念。主要结果如下定理所述。

定理 1. 设 T 是一个可数的弱拟 o-极小理论。假设以下两个条件至少有一个成立。

(1) T 没有简单半区间；(2) 存在一个非凸型 $p \in S_1(T)$。那么 $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$。

半区间的简单性等价于小的弱拟 o-极小理论中不存在移位。然而，这是一项强有力的技术性质，保证了完全 1-型轨迹上的相对可定义二元子集具有非凡的简单性。结合类型的凸性，它足以发展几乎 $\aleph_0$- 范畴弱拟 o- 极小理论的分类理论之 “ 结构 ” 部分；对于这类理论，我们验证了马丁猜想这一沃恩特猜想的加强形式。

定理 2. 马丁猜想适用于几乎 $\aleph_0$-范畴的弱拟 o-极小理论 .

在第 4节中，我们证明每个准 o-极小理论都满足以下条件：

(R) 对所有 A 和所有 $p \in S_1(A)$，$p(\mathfrak{C})$ 的轨迹上的每个相对 A-可定义的等价关系都是相对 0-可定义的。

我们证明，若一个弱准 O-极小理论只有少可数模型，并且还是 rosy 或具有有限凸性秩，那么它也满足 (R)。接着我们证明，任何满足 (R) 且具有简单半区间的弱准 O-极小理论必定是二元的。由于根据 [MT20，引理 8。1]，任何只有少可数模型的二元（弱准 O-极小）理论都是几乎 $\aleph_0$-范畴的，作为定理 2 的推论，我们得到以下定理。

定理3。 马丁猜想对具有以下附加性质之一的弱准 O-极小理论成立：二元的、rosy、准 o-极小，或具有有限凸性秩。

一个非二元（甚至对所有 $\aleph_0$都不是 n元的）弱 o-极小$n \in \mathbb{N}$范畴理论的例子由 Herwig 等人在 [HMM+99]中发现。因此，并非所有具有少可数模型的几乎 $\aleph_0$范畴理论都是二元的，所以定理2 强于定理3。不过，也存在具有 3 个可数模型但并非几乎 $\aleph_0$范畴的弱 o-极小理论，见 [MT24],中的例 7.9 和 7.10。因此，弱（准）o-极小理论的沃恩特猜想仍有许多未解之处；我们在第7节探讨后续研究。

本文结构如下。第2节中，我们引入并研究 p-半区间，其中 $\mathfrak{p} = (p, <)$ 是 A上的一个弱 o-极小对。在命题 2.13 中，我们证明，$\mathfrak{p}$ 具有简单半区间，当且仅当每个相对 A-可定义子集 $p(\mathfrak{C})^2$ 都可相对地定义为公式的布尔组合 $x \leqslant y, y \leqslant x$和 $\{E(x, y) \mid E \in \mathcal{E}_p\}$，其中 $\mathcal{E}_p$是 $p(\mathfrak{C})$上所有相对A-可定义等价关系的集合。接着我们推导出，半区间的简单性是类型 $p \in S(A)$的一种性质：如果某个弱 o-极小对 $(p, <)$ 具有简单半区间，那么所有这类有序对都具有简单半区间。我们还证明，只要 $\mathrm{tp}(a/A)$ 和 $\mathrm{tp}(b/A)$是弱 o-极小的，且其中至少一个具有简单半区间，就有 $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(aA) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(bA)} b$。据此可以说明，假设半区间具有简单性，则二元分叉依赖由某个交树的元素刻画。

第3 节的主要结果是定理3.7，其中我们证明，小弱准 o-极小理论 T 具有简单半区间，当且仅当不存在包含某个平移的半区间可定义族 $(\mathfrak{C}, <)$。结合 [MT24，定理 1] 即可证明定理1的一部分：若 T 不具有简单半区间，则 $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$。

在第4节中，我们研究条件 (R)。利用第2节中发展的技巧，我们证明，对于所有具有简单半区间的弱拟 o-极小理论，条件 (R) 等价于该理论的二元性。结合 [MT20，定理 1]，便足以证明定理3中提及的理论等价类满足沃恩特猜想。要证明这些理论的马丁猜想，我们还需要第5节的结果。在该节中，我们利用半区间的简单性，证明定理1的第二部分：具有少可数模型的弱拟 o-极小理论中的所有类型 $p \in S_1(T)$ 都是凸的。随后，在命题5.15 中，我们证明一个一般性结果，说明凸弱 o-极小类型的可定义性与其平凡性之间的关系（在任意 T中）。特别地，命题5.15 蕴含，在任意 T中，模型上的每个可定义的凸弱 o-极小 1-类型都是平凡的；这推广了 [MT24，命题 5.18]，后者涵盖了 o-极小模型上的完全 1-类型的情形 M。这些结果在第6节中发挥了关键作用，我们将在该节证明定理2 和3。

第7 节专门讨论可能与后续工作相关的问题。

1.1. **预备知识**。 在本文中， T 是一个任意的、可能是多排序的完备一阶理论，而 $\mathfrak{C}$ 是其怪兽模型。我们将采用 [MT24]，中的记号和结果，并偶尔回顾该文中引入的概念的定义和性质。

处理一个可定义的稠密线性序 $(D$时，$<)$ 使用戴德金完备化的 T^{eq}-排序通常很方便（见 D （ [MMS00]）。但在本文中，我们讨论任意线性序中的半区间，因此下面这个 $(D$的完备扩张 $<)$ 更为方便：

- $\overline{D}^{in}$ 表示 $(D$的 $<)$所有初始部分组成的集合。

注意，$(\overline{D}^{in}, \subset)$ 是一个完备线性序，其中可以嵌入 $(D, <)$，因而也可以嵌入 $(D, <)$。一般而言，D^{in} 和 D 并不是同构序；例如，当 D 稠密时，区间 $(-\infty, d)$和 $(-\infty, d]$ 是 D^{in}的不同成员。通常，我们将元素 $d \in D$ 与 $(-\infty, d] \in D^{in}$等同；在这种情况下，由于对于所有 $I \in D^{in}$ 和所有 $d \in D$，$\overline{I} < d$和 $I \subset (-\infty, d]$ 是等价的，$x]$ 定义了 $(D, <)$ 到 $(D^{in}, \subset)$中的一个嵌入。回忆一下，对于 $X \subseteq D$，在 $\mathrm{in}_D(X) = \{d \in D \mid (\exists x \in X)\, D \leqslant x\}$ 中，$\overline{X}$是所包含的最小初始部分；如果 D 的含义可由上下文明确，则记作在(X)中。此外，如果 $P \subseteq D$，则在$_P(X)$ 中是 $(P, <)$的相应初始部分。类似地，$\mathrm{fin}(X)$ 是包含 X的最小终段。两个凸集 X_1 和 X_2相等，当且仅当$\mathrm{in}(X_1) = \mathrm{in}(X_2)$ 且$\mathrm{fin}(X_1) = \mathrm{fin}(X_2)$。

D^{in} 中的型按惯常方式定义。对于每个公式 $\phi(x,$ 若 $y)$ 使得对所有 $b \in \mathfrak{C}^{|y|}$，集合 $\phi(\mathfrak{C}, b)$ 都是 D 的初始部分，令 E_ϕ 为定义在 $\mathfrak{C}^{|x|+|y|}$ 上的等价关系，其定义为 $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \phi(\mathfrak{C}, y) = \phi(\mathfrak{C}, y')$。型 $\mathfrak{C}^{|x|+|y|}/E_\phi$的元素是 E_ϕ-等价类；对于每个等价类 e，集合 $e_\phi = \phi(\mathfrak{C}, y)$ 对所有 $(x, y) \in e$都保持不变；注意，e_ϕ 是 $(D, <)$的初始部分。通常，我们不区分 e 与 e_ϕ；这是因为 e 与 e_ϕ 互相可定义，也就是说，$e \in \mathfrak{C}^{eq}$ 是 e_ϕ的一个典范参数。一致可定义族 $\{e_\phi \mid e \in \mathfrak{C}^{|x|+|y|}/E_\phi\}$ 是 $\mathfrak{C}^{eq}$中的一个型；这类型称为 D^{in}-型，并将其视同 $\{\phi(\mathfrak{C}, y) \mid y \in \mathfrak{C}^{|y|}\}$。所谓到 D^{in} 的（相对）

可定义函数，我们总是指到这些型之一的函数；若 $f\colon C \to D^{in}$ 是这样的函数，则 $f(x) \prec d$, $f(x) \subset (-\infty,\ d]$ 和 $d \notin f(x)$ 的含义相同。

回顾弱 o-极小对 $(p, <)$ 关于 A 的以下约定：我们总是假设序 $<$ 由公式 $x < y$ 相对可定义；当我们说序 $(D, <)$ 是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的可定义扩张时，意指 $D = \theta(\mathfrak{C})$ 存在某个 $\theta(x) \in p$，使得 $x < y$ 在 D上定义了一个线性序。当 E 是 $p(\mathfrak{C})$上的相对可定义等价关系时，也采用类似约定。

2. $\mathbf{p}$-SEMIINTERVALS

设 $(D, <)$ 为线性序。回顾 [MT24 第 6] 节，若 $S \subseteq D$ 是 $(D, <)$ 的半区间，则 S 是凸的，且 $a = \min S$ 存在；此时，我们将其记作 S_a，以强调 $a = \min S_a$。另外，回顾由 D 的半区间组成的族 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 是 A-可定义的，当且仅当 $(D, <)$ 是 A-可定义的，且存在某个 L_A 公式 $S(x, y)$，使得对所有 $a \in D$，都有 $S_a = S(a, \mathfrak{C})$。若对 D 中所有元素 $x \leqslant y$，都有 $(S_x) \subseteq$ 包含于 (S_y)，则族 $\mathcal{S}$ 是单调的。本节主要研究弱 o- 极小类型轨迹的相对可定义半区间。

定义 2.1. 设 $\mathbf{p} = (p,\ <)$ 其中 $p \in S(A)$，且 $<$ 是 $p(\mathfrak{C})$上的相对可定义序。

(a) 集合 $S \subset p(\mathfrak{C})$ 是一个$\mathbf{p}$-半区间，如果它在 $(p(\mathfrak{C})$中是凸的，$<)$，$a = \min S$ 存在，并且 S 在 $p(\mathfrak{C})$内是相对 Aa-可定义的；在这种情况下，我们用 $S_a^{\mathbf{p}}$ 代替 S；如果对于某个 $b \in p(\mathfrak{C})$, $S_a^{\mathbf{p}} < b$，那么 $S_a^{\mathbf{p}}$ 是一个有界$\mathbf{p}$-半区间。(b) $\mathbf{p}$-半区间 族 是指满足以下条件的一个集合 $(S_x^{\mathbf{p}} \mid x \in p(\mathfrak{C}))$：对于某个 L_A-公式 $S(x,\ y)$ 以及所有 $x \in p(\mathfrak{C})$，$S_x^{\mathbf{p}} = S(x,\ p(\mathfrak{C}))$ 成立。(c) $\mathbf{p}$-半区间族 $(S_x^{\mathbf{p}} \mid x \in p(\mathfrak{C}))$ 是单调的，如果对于所有实现 p的$x < y$，$_{p(\mathfrak{C})}(S_x^{\mathbf{p}}) \subseteq$ 在$_{p(\mathfrak{C})}(S_y^{\mathbf{p}})$ 中。

注记 2.2. 如果 p 是凸弱 o-极小类型，那么每个 $\mathbf{p}$-半区间都是可定义的。

设 $\mathcal{S} = (S(x, D) \mid x \in D)$ 是由 $(D, <)$上的半区间组成的 A-可定义族。

- 对于 $D' \subseteq D$，记作 $\mathcal{S}^{D'} = (S(x, D') \mid x \in D')$；我们称 $\mathcal{S}^{D'}$ 为由 $\mathcal{S}$ D' 诱导的半区间族。
- 如果 $p \in S_x(A)$，且若 $p(x)$ 则推出 $x \in D$，那么根据 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$，我们将诱导的 $\mathbf{p}$-半区间族记作：$\mathcal{S}^{\mathbf{p}} = (S(x, p(\mathfrak{C})) \mid x \in p(\mathfrak{C}))$，其中 $\mathbf{p} = (p, <)$。

引理 2.3. 假设 $\mathcal{S}_0 = (S(x, p(\mathfrak{C})) \mid x \in p(\mathfrak{C}))$ 是一个由 $\mathbf{p}$-半区间组成的族，其中公式 $S(x, y)$ 和有序对 $\mathbf{p} = (p, <)$ 在 A上定义。那么存在 A-可定义扩张，$(D, <)$，它是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的扩张，使得 $\mathcal{S} = (S(x, D) \mid x \in D)$ 是 $(D, <)$上的半区间族；特别地，$\mathcal{S}$ 诱导出 $\mathcal{S}_0$。此外，若 $\mathcal{S}_0$ 是单调的，则可以找到序 $(D, <)$，使得族 $\mathcal{S}$也是单调的。

证明。事实是，$S(x,\ p(\mathfrak{C}))$对于 $x \models p$，是 $p(\mathfrak{C})$ 的一个凸子集，其最小值为 x，这可由以下 tp-全称句的合取来表达[1]：

(1) $(\forall x \models p)\ S(x,\ x)$, (2) $(\forall x,\ y \models p)(S(x, y) \to x \leqslant y)$, 以及 (3) $(\forall x,\ y,\ z \models p)(x \leqslant z < y \wedge S(x, y) \to S(x,\ z))$。

此外，“$x < y$ 相对定义 $p(\mathfrak{C})$上的一个线性序”是一个 tp-全称性质，因此通过同时对该性质以及 (1)–(3) 应用紧致性，我们可以找到 $\theta(x) \in p(x)$，使得 $(\theta(\mathfrak{C}),\ <)$ 是 $(p(\mathfrak{C}),\ <)$的一个 A-可定义扩张，并且 $\mathcal{S} = (S(x,\ \theta(\mathfrak{C})) \mid x \in \theta(\mathfrak{C}))$ 是 $(\theta(\mathfrak{C}),\ <)$的一个 A-可定义半区间族。显然，$\mathcal{S}^{\mathbf{p}} = \mathcal{S}_0$。关于“此外”部分，请注意，$\mathcal{S}$ 的单调性可由以下内容表达：

(4) $(\forall x, y, z \models p)(x < y \wedge S(x, z) \to z < y \vee S(y, z))$.

根据紧致性，可以选择公式 $\theta(x) \in p(x)$，使得族 $\mathcal{S}$ 也是单调的。 □

[1]关于 tp-普遍性质和语句的定义，参见 [MT24，第2节小节。1]。

约定。 从现在起，当我们用 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$ 表示某个由 $\mathbf{p}$-半区间组成的族时，其中 $\mathbf{p} = (p, <)$，我们默认 $\mathcal{S}$ 是某个（未指定的）序 $(D, <)$ 上的 A-可定义族，而该序是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的一个 A-可定义扩张。除非另有说明， $S(x, y)$ 表示定义 $\mathcal{S}$ 的公式。

注 2.4。 设 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 是 $(D$ 上的 A-可定义半区间族，$<)$ 且$p \in S_x(A)$ 与 $x \in D$ 相容。记 $\mathbf{p} = (p, <)$。若 $D' \subseteq D$ 是一个 A-可定义集，且$(x \in D') \in p$，那么 $(D'$ 上由 $\mathcal{S}^{D'} = (S_x \cap D' \mid x \in D')$ 诱导的半区间族，$<)$ 也诱导出族 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$。此外，若 $\mathcal{S}$ 是单调的，那么 $\mathcal{S}^{D'}$ 和 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$ 也都是单调的。

回顾一下，半区间族 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 的幂递归定义如下： $S_x^1 = S_x$ 且 $S_x^{n+1} = \bigcup_{t \in S_x^n} S_t$; $\mathcal{S}^n = (S_x^n \mid x \in D)$; 若 $\mathcal{S}$ 是 A-可定义的，则每个 $\mathcal{S}^n$ 也是如此。另请回顾，若幂序列 $(S_a^n \mid n \in \mathbb{N})$ 严格 $\subset$ 递增，或者等价地说，并非最终恒定，则 S_a 是一个 $\mathcal{S}$- 平移，其中 $a \in D$。由归纳法可容易看出，$S_x^{n+m} = \bigcup_{t \in S_x^n} S_t^m$；我们将在下文中随时使用这一事实。

引理 2.5。 设 $(D', <)$ 是一个 A-可定义的序， $D \subseteq D'$ 是 A-可定义的，且 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 是 $(D$, $<)$ 的一个 A-可定义半区间族。那么：

(a) 存在一个 $(D', <)$ 的 A-可定义半区间族 $\mathcal{R} = (R_x \mid x \in D')$ ，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{R}^n)^D = \mathcal{S}^n$ 。**(b)** 若 $\mathcal{S}$ 单调，则也可以找到 (a) 中的 $\mathcal{R}$ ，使其单调。

此外， 以下结论在 (a)-(b) 中成立：对所有 $x \in D'$， R_x 是一个 $\mathcal{R}$-平移，当且仅当 S_x 是一个 $\mathcal{S}$-平移 .

证明。 (a) 对 $x \in D'$ 定义：若 $x \notin D$, 则 $R_x = \{x\}$ ；若 $x \in D$, 则 $R_x =$ 凸 (S_x) ，其中凸包取自 $(D', <)$。我们断言，对所有 $n \in \mathbb{N}$: 若 $x \notin D$, 则 $R_x^n = \{x\}$ ；若 $x \in D$, 则 $R_x^n =$ 凸 (S_x^n)。该断言的第一部分显然，第二部分通过对 n 使用归纳法证明。 $n = 1$ 的情形显然： $R_x \cap D =$ 凸 $(S_x) \cap D = S_x$。归纳步骤由以下内容证明：

$$R_x^{n+1} = \bigcup_{t \in R_x} R_t^n = \bigcup_{t \in R_x \cap D} R_t^n \cup \bigcup_{t \in R_x \setminus D} R_t^n = \bigcup_{t \in S_x} \operatorname{conv}(S_t^n) \cup \bigcup_{t \in R_x \setminus D} \{t\} =$$

$$= \bigcup_{t \in S_x} \operatorname{conv}(S_t^n) \cup (\operatorname{conv}(S_x) \setminus D) = \bigcup_{t \in S_x} \operatorname{conv}(S_t^n) = \operatorname{conv}(\bigcup_{t \in S_x} S_t^n) = \operatorname{conv}\left(S_x^{n+1}\right).$$

这里， $\bigcup_{t \in S_x} \mathsf{conv}(S_t^n) = \mathsf{conv}(\bigcup_{t \in S_x} S_t^n)$ 的依据如下：对于所有 $t \in S_x$，我们有 $S_t^n \cap S_x \neq 0$。这意味着 $\mathsf{conv}(S_t^n) \cup \mathsf{conv}(S_x) = \mathsf{conv}(S_t^n \cup S_x)$，结合 $\mathsf{conv}(S_x) \subseteq \bigcup_{t \in S_x} \mathsf{conv}(S_t^n)$，即可得到前两个等式

$$\bigcup_{t \in S_x} \operatorname{conv}(S_t^n) = \bigcup_{t \in S_x} (\operatorname{conv}(S_t^n) \cup \operatorname{conv}(S_x)) = \bigcup_{t \in S_x} \operatorname{conv}(S_t^n \cup S_x) = \operatorname{conv}(\bigcup_{t \in S_x} (S_t^n \cup S_x)) = \operatorname{conv}(\bigcup_{t \in S_x} S_t^n).$$

第三个等式成立是因为族 $(S_t^n \cup S_x \mid t \in S_x)$ 具有有限交性质，而第四个等式则由 $S_x \subseteq \bigcup_{t \in S_x} S_t^n$ 推出。这就证明了该断言。现在， $(\mathcal{R}^n)^D = \mathcal{S}^n$ 很容易得到：对于 $x \in D$，我们有 $D \cap R_x^n = D \cap \mathsf{conv}(S_x^n) = S_x^n$，从而完成了 (a) 的证明。

(b) 假设 $\mathcal{S}$ 是单调的。对于 $x \in D'$ ，定义：

$$R_x = \{x\} \text{ if } x < D \text{ and } R_x = \{x\} \cup \operatorname{conv}(\bigcup_{t \in D,\ t \leqslant x} S_t \cap [x, +\infty)_{D'}) \text{ if } x \not< D.$$

显然， $\mathcal{R}$ 是单调的，并且对于所有的 $x \in D$ ，都有 $R_x = \mathsf{conv}(S_x)$ 和 $R_x \cap D = S_x$。对n使用归纳法，我们证明 $x \in D$的 $R_x^n \cap D = S_x^n$:

$$R_x^{n+1} \cap D = \bigcup_{t \in R_x} R_t^n \cap D = \bigcup_{t \in \operatorname{conv}(S_x)} (R_t^n \cap D) = \bigcup_{t \in S_x} (R_t^n \cap D) = \bigcup_{t \in S_x} S_t^n = S_x^{n+1}.$$

这里，第三个等式成立是因为 $\mathcal{R}^n$ 是单调的，并且 S_x 在$\mathsf{conv}(S_x)$中是共尾的。 □

引理 2.6. 假设 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 是一个单调的 A-可定义半区间族，$(D, <)$, $p(x) \in S(A)$ 与 $x \in D$ 相容，$\mathbf{p} = (p, <)$, $k \geqslant 2$, $a \models p$，且 $(S_a^k)^{\mathbf{p}} \neq S_a^{\mathbf{p}}$。那么 S_a 是一个 $\mathcal{S}$-平移。

证明。显然，$(S_a^k)^{\mathfrak{P}} \neq S_a^{\mathfrak{P}}$ 蕴含 $S_a^{\mathfrak{P}}$ 是 $(S_a^k)^{\mathfrak{P}}$的一个真初始部分，因此对某个 $x \in (S_a^k)^{\mathfrak{P}}$，$S_a^{\mathfrak{P}} < x$ 成立。于是，我们可以递归地定义一个由 p 的实现组成的序列 $(a_n \mid n \in \omega)$，使得对所有 $n \in \omega$，$a_0 = a$，$a_{n+1} \in (S_{a_n}^k)^{\mathfrak{P}}$ 和 $S_{a_n}^{\mathfrak{P}} < a_{n+1}$ 成立；这是可行的，因为 $a_{n+1} \in (S_a^k)^{\mathfrak{P}}$。注意，$a_{n+1} \models p$ 和 $S_{a_n}^{\mathfrak{P}} < a_{n+1}$ 蕴含 $S_{a_n} < a_{n+1}$。接下来，对每个 n，选取满足$a_{n+1} \in S_{b_n}^{k-1}$的 $b_n \in S_{a_n}$；这是可行的，因为 $a_{n+1} \in (S_a^k)^{\mathfrak{P}}$。于是 $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n)$是一个 $\mathcal{S}^{k-1}$-路径，因此我们得出 $a_n \in S_a^{2n(k-1)}$。通过归纳法，我们证明对所有 $n \geqslant 1$都有 $S_a^n < a_n$。$n = 1$ 的情形显然，因此假设对某个 n，$S_a^n < a_n$ 成立。于是我们有

$$\mathrm{in}_D(S_a^{n+1}) = \mathrm{in}_D(\bigcup_{t \in S_a^n} S_t) = \bigcup_{t \in S_a^n} \mathrm{in}_D(S_t) \subseteq \mathrm{in}_D(S_{a_n}) < a_{n+1};$$

这里，第一个等式由 S_a^{n+1}的定义得出，第二个等式显然，而包含关系则是 $\mathcal{S}$的单调性的结果：由归纳假设，对每个 $t \in S_a^n$，我们都有 $t < a_n$，因此在$_D(S_t) \subseteq$中，$_D(S_{a_n})$ 由单调性得出；不等式由 $S_{a_n} < a_{n+1}$得出。这就证明了$S_a^{n+1} < a_{n+1}$。

现在，$a_n \in S_a^{2n(k-1)} \setminus S_a^n$ 蕴含 $S_a^n \subset S_a^{2n(k-1)}$，因此序列 $(S_a^n \mid n \in \mathbb{N})$ 不可能最终为常值。所以，它严格递增，并且 S_a 是一个 $\mathcal{S}$-平移。□

注 2.7。平移的定义源于 Alibek、Baizhanov 和 Zambarnaya 在 [ABZ14]中引入的准后继概念。设 $\mathcal{S} = (S(D、x) \mid x \in D)$ 是 $(D$的 A-可定义半区间族。公式 $S(x、y)$称为 $D' \subseteq D$上的准后继，若$\mathcal{S}^{D'} = (S(D'、x) \mid x \in D')$是 $(D'、<)$的单调半区间族，且对所有 $x \in D'$都有 $(S_x^{D'})^2 \neq S_x^{D'}$；若$y)$在 $p(\mathfrak{C})$上是准后继，则称 $S(x$是 $p \in S(A)$上的准后继。注意，若$y)$是 p上的准后继，则由引理 2.6 可知，对所有 $a \models p$，S_a 都是一个 $\mathcal{S}$-平移；若$y)$ 是 D上的准后继，则稍作修改引理 2.6 的证明即可说明，对所有 $x \in D$，S_x 都是一个$\mathcal{S}$-平移。

2.1. p-半区间的简单性。从现在起，我们将处理 p 为弱 o-极小对的 p-半区间。（关于弱 o-极小类型的预备知识，见 [MT24，第2.2]小节。）回顾：$\mathcal{E}_p$ 表示$p \in S(A)$的轨迹上所有相对 A-可定义的等价关系的集合；$\mathbf{1}_p$ 表示完全等价关系 $p(\mathfrak{C})^2$。若 $(p、<)$是弱 o-极小对，则每个$E \in \mathcal{E}_p$在 $(p(\mathfrak{C})、<)$上是凸的，且 $(\mathcal{E}_p、\subseteq)$是全序（见 [MT25，引理3.6与命题3.10]）。

定义2.8. 设$\mathbf{p} = (p, <)$ 为 A上的弱 o-极小对。

(a) 若存在某个 $E \in \mathcal{E}_p$ 使得 $S_a^{\mathfrak{P}} = \{x \in [a]_E \mid a \leqslant x\}$，则半区间 $S_a^{\mathfrak{P}}$ 是 $\mathcal{E}_p$-确定的；此时，我们称 E 确定 $S_a^{\mathfrak{P}}$。(b) 若其某个（等价地，任意一个）成员如此，则族 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 是 $\mathcal{E}_p$-确定的。

这个定义取自 Baizhanov 和 Kulpeshov 在 [BK06] 中的著作。他们引入了 p-稳定[2] 右凸、由等价关系生成的公式这一概念，其中 $(M, <)$ 是线性序结构，且 $p \in S_1(A)$。用我们的术语来说，第一个概念对应于公式 $S(x, y)$，它们相对地定义了一个有界的非平凡 $(p, <)$-半区间族，使得对于所有 $a \models p$，可定义集$S(a, M)$ 在 $p(M)$ 中有上界和下界；第二个概念则对应于这些半区间的简单性。这一概念在研究具有少可数模型的弱 o-极小理论时很有用，例如见 [Kul07], [AK20], [Kul20], 和 [Kul21]。

注 2.9. 令 $\mathcal{S} = (S(x, D) \mid x \in D)$ 为 $(D, <)$ 的一个 A-可定义半区间族，并令$\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 为$\mathbf{p}$-半区间的诱导族。

(a) 当且仅当公式 $S(x,\ y) \vee S(y,\ x)$ 相对定义了 $p(\mathfrak{C})$上的一个等价关系时，族 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 才是 $\mathcal{E}_p$-确定的；在这种情况下，此关系确定了 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$。

(b) $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 是 $\mathcal{E}_p$-决定的，当且仅当 $\mathrm{in}_{p(\mathfrak{C})}(S_x^{\mathfrak{P}}) = \mathrm{in}_{p(\mathfrak{C})}(S_y^{\mathfrak{P}})$ 是关于 $p(\mathfrak{C})$ 的相对可定义关系；此时，它由 $S(x, y) \vee S(y, x)$ 相对定义。另一个等价条件是：

[2]也称为 p-保持的。

对于所有实现 p 的 $x<y$：当且仅当 $\mathrm{in}_{p(\mathfrak{C})}(S^{\mathbf{p}}_x)=\mathrm{in}_{p(\mathfrak{C})}(S^{\mathbf{p}}_y)$ 时，$y\in S^{\mathbf{p}}_x$。

定义 2.10. 设 $\mathbf{p}=(p,<)$ 是关于 A 的弱 o-极小对。

(a) 若每个 $\mathbf{p}$-半区间都是 $\mathcal{E}_p$-确定的，则有序对 $\mathbf{p}$ 具有简单半区间。(b) 若关于 A 的每个弱 o-极小对 $(p,<_p)$ 都具有简单半区间，则类型 p 具有简单半区间。(c) 若每个扩展 p 的完备类型都具有简单半区间，则类型 p 具有遗传简单半区间。(d) 若所有类型 $p\in S_1(T)$ 都具有遗传简单半区间，则弱拟 o-极小理论 T 具有简单半区间。

所有 $\aleph_0$-范畴的以及所有几乎 $\aleph_0$-范畴的[3] 弱 o-极小理论都具有简单半区间，参见 [BK06] 和 [AK20]。

例 2.11. 弱 o-极小类型可能具有简单半区间，但不一定具有遗传简单半区间。考虑实数加法有序群 $(\mathbb{R},m,<)$的约化结构，其中 $m(x,y,z):=x-y+z$。该结构是 o-极小的，且有唯一的类型 $p\in S_1(\varnothing)$。恰有三个完备 2-类型，分别由 $x<y$、$y<x$和 $x=y$决定；这说明 p 具有简单半区间。然而，若将 0 命名并令 $q=\mathrm{tp}(1/0),$，则 $S_a=\{t\mid a\leqslant t\leqslant m(a,\ 0,a)\}$ 是一个$\mathbf{q}$-半区间，但它不是 $\mathcal{E}_q$-确定的。

在命题 2.13 中，我们将给出一个与 $\mathbf{p}$-半区间的简单性等价的句法条件，并据此简洁地描述由 p 的轨迹所诱导的相对可定义二元结构。由此可推得，$p\in S(A)$ 的半区间的简单性源于 某个弱 o-极小对 $(p$ 在 $<)$ 上的 A。

注2.12。 设 $\mathbf{p}=(p,\ <)$ 是一个关于 A 的弱 o-极小对，并且 $a\models p$。

(a) 区间 $(a,\ +\infty)$（属于 $(p(\mathfrak{C}),\ <)$）的每个凸且相对 Aa-可定义子集，都是两个 $\mathbf{p}$-半区间之差（其最小值为 a）。因此，$[a,\ +\infty)$的每个相对 Aa-可定义子集，都是最小值为 a 的 $\mathbf{p}$-半区间的有限布尔组合。类似地，$(-\infty,\ a]$ 的每个相对 Aa-可定义子集，都是最小值为 a 的 $\mathbf{p}^*$-半区间的有限布尔组合；这里，$\mathbf{p}^*$ 是反序 $\mathbf{p}^*=(p,\ >)$。

(b) 每个相对 Aa可定义的 $p(\mathfrak{C})$ 子集都是$\mathbf{p}$-半区间和 $\mathbf{p}^*$-半区间的有限布尔组合，其中$\mathbf{p}^*$ 是$\mathbf{p}$的逆序。

(c) 集合 $\mathcal{D}_p(a)=\{b\models p\mid b\not\perp_A a\}$ 是所有有界 $\mathbf{p}$-半区间和 $\mathbf{p}^*$- 半区间的并（见 [MT24，注 2.4]）。

命题 2.13. </style}关于 上的弱 o-极小对，$\mathbf{p}=(p,\ <)$，具有简单半区间，当且仅当每个相对 A可定义的 $p(\mathfrak{C})^2$ 子集都能由某个有限布尔组合相对定义，该组合由 $x\leqslant y$、$y\leqslant x$ 以及形如 $E(x,\ y)$（其中 $E\in\mathcal{E}_p$）的公式构成。

证明. 令 $\mathcal{B}$ 表示由 $x\leqslant y$、$y\leqslant x$ 以及 $E(x、y)$（其中 $E\in\mathcal{E}_p$）构成的所有布尔组合的集合。为证明 $(\Rightarrow)$，假设每个 p-半区间都是 $\mathcal{E}_p$决定的，并令 D 为 $p(\mathfrak{C})^2$ 的相对 A可定义子集。只需证明集合 $D_1=\{(x、y)\in D\mid x\leqslant y\}$ 和$D_2=\{(x、y)\in D\mid y\leqslant x\}$ 分别由 $\mathcal{B}$ 中的公式相对定义。固定 $a\models p$，并考虑纤维 $D_1(a、p(\mathfrak{C}))$。注意 $D_1(a、p(\mathfrak{C}))\subseteq[a、+\infty)_{\mathbf{p}}$，因此根据注2.12，$D_1(a、p(\mathfrak{C}))$ 是最小值为 a 的 p-半区间的有限布尔组合。由于 p 具有简单半区间，这些半区间中的每一个都由某个 $E\in\mathcal{E}_p$ 的 $a\leqslant x\wedge E(a、x)$ 相对定义；注意，该公式是一个 $\mathcal{B}$ 公式的a实例。因此，$D_1(a、p(\mathfrak{C}))$ 由一个 $\mathcal{B}$ 公式的 a 实例相对定义；令 $\phi(x、y)\in\mathcal{B}$ 满足 $\phi(a、y)$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 内相对定义 $D_1(a、p(\mathfrak{C}))$。于是 $\phi(x、y)\wedge x\leqslant y$ 在 $p(\mathfrak{C})^2$ 内相对定义 D_1。类似地，考察纤维 $D_2(p(\mathfrak{C})、a)$，可知 D_2 由某个 $\mathcal{B}$ 公式相对定义。这就证明了 $(\Rightarrow)$。

为证明 $(\Leftarrow)$，假设 $p(\mathfrak{C})^2$ 的每个相对 A-可定义子集都由某个$\mathcal{B}$-公式相对定义。设 S_a 是一个有界的 $\mathbf{p}$-半区间。我们需要证明 S_a 是 $\mathcal{E}_p$-确定的；不失一般性，假设 $(\Leftarrow)$。

[3]几乎 $\aleph_0$-范畴性在定义6.1中给出。

选择 $\phi(x,\ y)\in\mathcal{B}$，它相对定义了 S_a。设 $E_1,\dots,E_n$ 是 $\mathcal{E}_p$ 中出现在 ϕ里的所有等价关系组成的序列。由于 $\mathcal{E}_p$ 在包含关系下是全序的，我们可以假设该序列严格递增。此外，我们可以假设 E_1 是平凡的，而E_n 是全集关系。于是

$$\{E_1(a,p(\mathfrak{C}))\}\cup\{(E_i(a,p(\mathfrak{C})))\smallsetminus E_{i-1}(a,p(\mathfrak{C}))\cap[a,+\infty)_{\mathbf{p}}\mid i=2,\dots,n\}$$

是 $[a,\ +\infty)_{\mathbf{p}}$的一个凸划分，其中每个部分都由一个 a-实例的 $\mathcal{B}$-公式相对定义。容易看出，由一个仅出现等价关系 $[a,\ +\infty)_{\mathbf{p}}$的 a-实例的 $\mathcal{B}$-公式定义的每个 E_1，…，E_n 的相对可定义子集，都等于划分中某些成员的并。特别地，这对 S_a 成立，因此，如果 i 是满足 $(E_i(a,\ p(\mathfrak{C})))\smallsetminus E_{i-1}(a,\ p(\mathfrak{C}))\cap[a,\ +\infty)_{\mathbf{p}}\subseteq S_a$ 的极大者，则 S_a 的凸性与 $a=\min S_a$ 共同推出 S_a 可由 $a\leqslant x\wedge E_i(a,\ x)$ 相对定义，于是结论成立。□

令 $(p,\ <)$ 为在 A上的弱 o-极小对。在下面的证明中，我们将使用 A-可定义序在 $p(\mathfrak{C})$上的刻画，该刻画已在 [MT25] 的定理3.2中得到。对于严格递增序列 $\vec{E}=(E_1,\ \dots,\ E_n)\in\mathcal{E}_p^n$，序 $<_{\vec{E}}$递归定义如下：

- $x<_{E_1}y$ if and only if $[x]_{E_1}<[y]_{E_1}$ or $[x]_{E_1}=[y]_{E_1}\wedge y<x$;
- $<_{(E_1,\dots,E_{k+1})}=\left(<_{(E_1,\dots,E_k)}\right)_{E_{k+1}}$.

显然，$<_{\vec{E}}$ 是一个相对 A-可定义的序，定义在 $p(\mathfrak{C})$上，由公式的布尔组合所定义$x\leqslant y$，$y\leqslant x$与 $E_i(x,\ y)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$；这里，$E_i(x,\ y)$是任意相对定义 E_i的公式。由[MT25，定理3。2], 每一个相对 A-可定义的序，定义在 $p(\mathfrak{C})$ 上，等于$<_{\vec{E}}$，对某个 $\vec{E}$。

推论 2.14。弱 o-极小类型 $p\in S(A)$ 具有简单半区间，当且仅当某个弱 o-极小对$\mathbf{p}=(p,\ <)$ 在 A 上具有简单半区间。

证明。假设 $\mathfrak{p}=(p,\ <)$ 具有简单半区间。设 $\mathcal{B}_<$ 表示所有 L_A-公式的集合，这些公式在 $p(\mathfrak{C})^2$ 内相对定义与公式 $x\leqslant y$、$y\leqslant x$和 $E(x、\ y)$（$E\in\mathcal{E}_p$）的某个布尔组合相同的集合。由命题 2.13，$p(\mathfrak{C})^2$ 的每一个相对 A-可定义子集都可以由 $\mathcal{B}_<$中的一个公式定义，因此 $\mathcal{B}_<$ 是所有二元 L_A-公式的集合。现在，设 $\mathfrak{p}=(p,\ <_p)$ 是 A上的另一个弱 o-极小对，并设 $\mathcal{B}_{<_p}$ 为相应的公式集合。由 [MT25，定理4。2] 我们有 $<=(<_p)_{\vec{E}}$，对来自 $\mathcal{E}_p$的某个等价关系递增序列。由 $(<_p)_{\vec{E}}$的定义，我们容易推出 $(x\leqslant y)$，$(y\leqslant x)\in\mathcal{B}_{<_p}$，从而得到 $\mathcal{B}_<\subseteq\mathcal{B}_{<_p}$。由于 $\mathcal{B}_<$是所有二元 L_A-公式的集合，故 $\mathcal{B}_<=\mathcal{B}_{<_p}$ 成立，因此再由命题 2.13，有序对 $\mathfrak{p}$ 具有简单半区间。因此，每一个弱 o-极小对 $(p,\ <_p)$ 都具有简单半区间，且 p具有简单半区间。□

注记 2.15. 对于弱 o-极小类型 $p\in S_x(A)$，固定如下记号。

- $S_{p,p}(A):=\{P(x,y)\in S_{x,y}(A)\mid P(x,y)\supseteq p(x)\cup p(y)\}$;
- $\mathcal{E}(P)=\{E\in\mathcal{E}_p\mid E(x,y)\in P\}$ 其中 $P\in S_{p,p}(A)$;
- $\mathcal{F}_p$ 是 $(\mathcal{E}_p,\subseteq)$ 的所有末段的集合。

（a）假设 p 具有简单半区间。由命题 2.13，对每个终段 $F\in\mathcal{F}_p$，如下部分类型：

$$p(x)\cup p(y)\cup\{E(x,y)\mid E\in F\}\cup\{\neg E(x,y)\mid E\in\mathcal{E}_p\smallsetminus F\}$$

确定唯一的完备类型 $P\in S_{p,p}(A)$；注意 $\mathcal{E}(P)=F$。因此，$P\mapsto\mathcal{E}(P)$ 是 $S_{p,p}(A)$ 与 $\mathcal{F}_p$ 之间的双射。此外，若我们赋予 $\mathcal{F}_p$ 以 $(\mathcal{F}_p,\supseteq)$ 的序拓扑，则该双射是一个同胚。

(b) 假设 $\mathcal{E}_p$ 是可数的。那么存在一个严格递增连续函数 $\delta:\mathcal{F}_p\to[0,1]$，使得 $\delta(\mathcal{E}_p)=0$ 且 $\delta(\varnothing)=1$。对于 $a,\ b\models p$，定义 $d(a,b)=\delta(\mathrm{tp}(a,b/A))$。那么 $(p(\mathfrak{C}),d)$ 是一个超度量空间：超度量不等式 $d(x,y)\leqslant\max(d(x,z),d(y,z))$ 可改写为：

$$(\mathcal{E}(\mathrm{tp}(x,z))\cap\mathcal{E}(\mathrm{tp}(y,z)))\subseteq\mathcal{E}(\mathrm{tp}(x,y)).$$

很容易验证：如果 $E\in(\mathcal{E}(\mathrm{tp}(x,\ z))\cap\mathcal{E}(\mathrm{tp}(y,\ z)))$，那么 $\models E(x,\ z)\wedge E(y,\ z)$，因此 $\models E(x,\ z)$，进而 $E\in\mathcal{E}(\mathrm{tp}(x,\ y))$。

(c) 一般而言，超度量 d 可以是平凡的，例如在 o-极小理论中。然而，如果 $p \in S(\varnothing)$ 具有简单半区间，那么距离 $d(a,b)$ 就能度量 a 与 b之间分叉依赖的程度，正如我们在命题 2.24 中所证明的。Herwig 等人最早在 [HMM+99 的定理 2.2–2.3] 中指出了这一超度量空间的重要性，针对的是 $\aleph_0$-范畴弱 o-极小理论中的 1-类型。在这种情况下，对于所有 $r \in [0,1]$，$d(x,y) = r$ 都是 A-可定义的；他们还证明，扩展 $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y\}$ 的 A 上每个完全 2-类型都由某个公式 $d(x,y) = r$ 孤立。换言之，$p(\mathfrak{C})$ 上的二元结构完全由超度量和序<决定。命题 2.13 可以视为对任意具有简单半区间的弱 o-极小类型所作的同一论断。

命题 2.16。设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是关于 A 的弱 o-极小对，并且 $a \models p$。假设 p是非代数的，且具有简单半区间。

(a) p 在相对 A-可定义函数下的像是一个具有简单半区间的弱 o-极小类型。(b) 唯一的相对 A-可定义映射 $f\colon p(\mathfrak{C}) \to p(\mathfrak{C})$ 是恒等映射。(c) 对每个 $E \in \mathcal{E}_p \setminus \{\mathbf{1}_p\}$，$(p(\mathfrak{C})/E, <)$ 都是没有端点的稠密线性序。(d) 若类 $[b]_F$是 $A \cup \{[a]_E\}$-不变的，其中 $b \in p(\mathfrak{C})$ 且 $E, F \in \mathcal{E}_p$，则 $[a]_E \subseteq [b]_F$。

证明。(a) 设 $f\colon p(\mathfrak{C}) \to \mathfrak{C}$ 是相对 A-可定义函数，并设 $q = f(p)$。根据 [MT25，命题 3.13(i)]，$f^{-1}(\{y\}) < f^{-1}(\{y'\})$定义了一个相对 A-可定义的线性序，记作$<_f$，其定义在 $q(\mathfrak{C})$上，使得 $\mathbf{q} = (q, <_f)$是关于 A的弱 o-极小对。为验证 q具有简单半区间，设 $b = f(a)$，令 S_b为一个由 $S(b,y)$相对定义的 q-半区间，并令$X_a \subseteq p(\mathfrak{C})$为由 $(a \leqslant x \wedge S(f(a), f(x)))$相对定义的；显然 X_a是一个 p-半区间。选取 $E \in \mathcal{E}_p$，使其确定 X_a。于是根据 [MT25，命题 2.13](b)，$f(E) \in \mathcal{E}_q$，并且容易看出 S_a 是由 $f(E)$确定的。因此，q 具有简单半区间。

(b) 假设 $f\colon p(\mathfrak{C}) \to p(\mathfrak{C})$ 是相对 A-可定义的。必要时反转序 $<$，假定 $a \leqslant f(a)$。考虑集合 $S_a = \{x \in p(\mathfrak{C}) \mid a \leqslant x \leqslant f(a)\}$；显然，$S_a$是一个p-半区间，且$f(a) = \max S_a$。令 $E \in \mathcal{E}_p$确定 S_a。由于 $[a]_E = [f(a)]_E$，元组 $f(a)$满足：$x \in p(\mathfrak{C})$是其 E-类的最大元素；a亦如此，从而 $a = f(a)$ 成立。

(c) 设$\hat{}E$是 E的一个 A-可定义扩张。则 $(p(\mathfrak{C})/E, <)$ 与 $(p/\hat{}E(\mathfrak{C}^{eq}), <)$ 被自然地$\hat{}$等同。由(a)部分，类型 p/E 是弱 o-极小的，并且具有简单半区间。注意到$\hat{}(p/E(\mathfrak{C}^{eq}), <)$ 不是离散序，否则后继函数将与(b)部分矛盾。因此，$(p/\hat{}E(\mathfrak{C}^{eq}), <)$ 是稠密序。

（d）不失一般性，假设 $A = \varnothing$。设 E、$F \in \mathcal{E}_p$，且等价类 $[b]_F$ 是 $\{[a]_E\}$-$\hat{}\hat{}$不变的。选取 E 和 F，分别作为 E 和 F 的可定义扩张。于是$[b]\hat{}_F \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}([a]\hat{}_E)$，记作$[b]_{\hat{F}} = h([a]\hat{}_E)$。不失一般性，假设 $a < b$。由于 E 和 F 是 $\subseteq$-可比较的，等价类 $[a]_E$ 和 $[b]_F$ 是 $\subseteq$-可比较的或不相交的，因此要证明 $[a]_E \subseteq [b]_F$，只需排除 $[a]_E \supset [b]_F$ 和 $[a]_E \cap [b]_F = \varnothing$ 的情形。若 $[a]_E \supset [b]_F$ 成立，则存在某个 $b' \in [a]_E$ 使得 $[b]_F \neq [b']_F$，因此任何将 b 移到 b' 的 $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ 都会固定 $[a]_E = [b]_E = [b']_E$；这与 $[b]_F$ 的 $\{[a]_E\}$-不变性矛盾。因此，$[a]_E \not\supset [b]_F$。接下来，假设 $[a]_E \cap [b]_F = \varnothing$。那么 $a < b$ 蕴含 $[a]_E < [b]_F$，因此 $a < [b]_F$ 蕴含 $[a]_F < [b]_F$。

考虑集合 $X_a = \{x \in p(\mathfrak{C}) \mid a \leqslant x < [b]_F\}$，并注意到它由公式$a \leqslant x < h([x]_{\hat{E}})$相对定义。因此，$X_a$ 是一个有界的 p-半区间；由 p 的半区间的简单性可知，存在某个 $G \in \mathcal{E}_p$，使得 X_a 是等价类 $[a]_G$的一个终段。特别地，集合 $Y = [a]_G \cup [b]_F$在 $(p(\mathfrak{C}), <)$中是凸的。根据 (c)，$(p(\mathfrak{C})/F, <)$ 是一个稠密无端点序，因此 $[a]_F < [b]_F$ 蕴含着在 $[a]_F$与 $[b]_F$之间严格地存在无限多个 F-等价类；由于 Y是凸的，这些等价类中至少有一个真包含于 $[a]_G$；由此得出 $F \subset G$。现在，由于 $[a]_G < b$ 蕴含 $[a]_G < [b]_G$，$[b]_F \subset [b]_G$，且 Y 在 $p(\mathfrak{C})$中是凸的，$[a]_G \cup [b]_G$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 中也同样是凸的，因此 $[a]_G$ 和 $[b]_G$ 是两个相邻的 G-等价类。这与 $(p(\mathfrak{C})/G, <)$ 根据 (c) 是一个稠密序相矛盾。□

引理 2.17。设 $A \subseteq B$，设 $p \in S(A)$ 为一个弱 o-极小类型，并设 $q \in S(B)$ 为其扩张。假设 $E \in \mathcal{E}_q \setminus \{\mathbf{1}_q\}$。以下条件等价：

1) 存在 $E_0 \in \mathcal{E}_p$，使得 $(E_0)_{\restriction q(\mathfrak{C})} = E$；

2) E 是相对 A可定义的；3) 对于某些（所有） $a \models q$，
类 $[a]_E$ 是 Aa-不变的。

证明。 不失一般性，假设 $A = \varnothing$ 并固定一个弱 o-极小对 $\mathbf{p} = (p, <)$ 在 $\varnothing$上。1)⇒2) 显然。

2)⇒3) 假设 2)。令 $E(x, y)$ 为一个 L-公式，它在 $q(\mathfrak{C})$上相对定义 E，并令 $a \models q$。由 q 的弱序极小性，且由于 $E \neq \mathbf{1}_q$，类 $[a]_E = E(a, q(\mathfrak{C}))$ 是 $q(\mathfrak{C})$的一个凸有界子集；因此，由于 $q(\mathfrak{C})$ 是 $p(\mathfrak{C})$的一个凸子集（见 [MT25，引理 3.6(ii)]），$[a]_E$ 是集合 $E(a, p(\mathfrak{C}))$ 在 $p(\mathfrak{C})$内的一个凸分支。由于每个分支在$p(\mathfrak{C})$ 内都是相对 a 可定义的（见 [MT25，引理 3.6(i)]），所以 $[a]_E$也是如此。特别地， $[a]_E$ 是 a-不变的，从而证明了 3)。

3)⇒1) 设 $E(x, y; b)$ 是一个公式，它在 $q(\mathfrak{C})$ 上相对定义 E，其中 b 是来自 B 的参数，并设 $a \models q_0$。记作： $s(\bar{z}) = \mathrm{tp}(b)$ 和 $r(x, \bar{z}) = \mathrm{tp}(a, b)_0$。显然， $r(x, \bar{z}) \supset p(x)$ 且 $q(x) \supseteq r(x, b)_0$

由 2)⇒3) 的证明可知，类 $[a]_E = E(a, q(\mathfrak{C}); b)$ 是 $E(a, p(\mathfrak{C}); b)$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 内的一个凸分支，并且 $[a]_E$ 在 $q(\mathfrak{C})$ 内是凸且有界的。我们还知道，这些分支中的每一个在 $p(\mathfrak{C})$ 内都是相对 ab-可定义的，因此可以将 $E(x, y; \bar{z})$ 替换为一个公式，使其实例 $E(a, y; b)$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 内相对定义类 $[a]_E$，也就是说，假设 $E(a, p(\mathfrak{C}); b) = [a]_E$。由于经过此替换后 $r(x, b) = \mathrm{tp}_x(a/b) \subseteq q(x)$,， $E(x, y; b)$ 仍在 $q(\mathfrak{C})$ 上相对定义 E。因此，我们有

(1) $$s(\bar{z}) \vdash \text{“}E(x, y; \bar{z}) \text{ relatively defines an equivalence relation on } r(\mathfrak{C}, \bar{z}).\text{”}$$

此外， $E(a, q(\mathfrak{C}); \bar{b}) = E(a, p(\mathfrak{C})\bar{b})$ 蕴含 $p(y) \cup \{E(a, y; \bar{b})\} \vdash q(y)$；由于 $q(x) = r(x\bar{b})$，我们有：

(2) $$r(x, \bar{z}) \cup p(y) \cup \{E(x, y; \bar{z})\} \vdash r(y, \bar{z}).$$

现在注意到， $ab' \models r$ 蕴含 $E(a, p(\mathfrak{C}); b) = E(a, p(\mathfrak{C}); b')$ 由于 $[a]_E = E(a, p(\mathfrak{C}); b)$ 根据 3) 是 a-不变的。这与 (2) 一起给出：

(3) $$r(x, \bar{z}) \cup r(x, \bar{z'}) \cup p(y) \vdash E(x, y; \bar{z}) \leftrightarrow E(x, y; \bar{z'}).$$

考虑类型 $\Pi(x, y) = (\exists \bar{z'})(\bigwedge r(x, \bar{z'}) \wedge \bigwedge r(y, \bar{z'}) \wedge E(x, y; \bar{z'}))$. 由 (2) 和 (3) 可推得

(4) $$r(x, \bar{z}) \cup \Pi(x, y) \vdash \bigwedge r(y, \bar{z}) \wedge E(x, y; \bar{z}).$$

这与 (1) 一起给出：

(5) $$\Pi(x, y) \cup \Pi(y, u) \cup r(y, \bar{z}) \vdash \bigwedge r(x, \bar{z}) \wedge \bigwedge r(u, \bar{z}) \wedge E(x, u; \bar{z}).$$

注意，将 $(\exists \bar{z})$ 应用于 (5) 右边即可得到 $\Pi(x, u)$ 的定义，因此特别地，$\Pi(x, y) \wedge \Pi(y, u) \vdash \Pi(x, u)$ 成立。由此可知， $\Pi(x, y)$ 的轨迹（记作 E_0）是 $p(\mathfrak{C})$ 上的一个等价关系；根据 Π 的定义，自反性和对称性显然成立。显然， $E \subseteq E_0$成立，因为 $\Pi(x, y)$ 中的存在量词由 b 作证。另一方面，若 a_1, $a_2 \models q$ 且$\not\models \Pi(a_1, a_2)$，则 $\not\models E(a_1, a_2; b)$ 由 (4) 得出；这证明了 $(E_0)_{\restriction q(\mathfrak{C})} \subseteq E_0$。因此， $(E_0)_{\restriction q(\mathfrak{C})} = E_0$。

到目前为止，我们知道 E 是 E_0的限制，且在 $\varnothing$上类型可定义。要证明 1)，还需说明 E_0 是相对 0-可定义的。对 $r(x, \bar{z}) \cup \Pi(x, y) \vdash E(x, y)$应用紧致性；$\bar{z}$) 由 (4) 可知，存在一个有限合取 $\pi(x, y)$，它由 $\Pi(x, y)$ 中的公式组成，使得：

(6) $$r(x, \bar{z}) \cup \{\pi(x, y)\} \vdash E(x, y; \bar{z}).$$

我们断言 E_0 在 $p(\mathfrak{C})$上由 $\pi(x, y)$ 相对定义。为证明这一点，设 $a_1, a_2 \models p$ 且 $\models \pi(a_1, a_2)$。取满足 $a_1 b' \models r$的 $b' \models s$。那么，由 (6) 得到 $\models E(a_1, a_2; b')$，它与 $a_1 b' \models r$ 一起根据 (2) 推出 $a_2 b' \models r$，因此根据定义， $\models \Pi(a_1, a_2)$ 成立（其中 b' 见证了存在量词）。所以， E_0 在 $p(\mathfrak{C})$上相对 0-可定义，从而完成引理的证明。□

推论 2.18。 </style}假设 $p \in S(A)$ 是弱 o-极小的， $a \models p$, $A \subseteq B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$，且$q = \mathrm{tp}(a/B)$。

(a) 所有等价关系 $E \in \mathcal{E}_q$ 都是相对 A-可定义的。(b) 每个有界 $(q, <)$-半区间 S_a 也是一个 $(p, <)$-半区间。此外， S_a 是 $\mathcal{E}_p$-确定的当且仅当它是 $\mathcal{E}_q$-确定的。

(c) 如果 p 具有简单半区间，则 q 也具有简单半区间。

证明。 (a) 若 $E = \mathbf{1}_q$，结论显然成立，因此设 $E \neq \mathbf{1}_q$。由引理 2.17，只需证明类 $[a]_E$ 是 Aa-不变的。然而，这显然成立，因为 $B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$。

(b) 可由 (a) 轻易推出，而 (c) 则由 (b) 和推论 2.14 得出。 □

2.2. **半区间的简单性与二元分叉依赖**。 在本小节中，我们将在命题 2.24 中证明，集合 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$ 能够相当准确地衡量 a 对 b 的分叉依赖程度，只要 $\mathrm{tp}(a)$ 和 $\mathrm{tp}(b)$ 是弱 o-极小的，且至少其中一个具有简单半区间。这看起来是 1-基性的一个非常弱的形式，但其背后的直觉是，半区间的简单性意味着二元分叉依赖由某个交树的元素来衡量，推论 2.22 也印证了这一点。

记号 2.19。 对于任意 $D \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$，我们将使用以下记号：

- $\mathcal{W}_A(D) = \{a \in D \mid \mathrm{tp}(a/A)$ 是弱 o-极小的$\}$；
- $\mathcal{W}^{ss}_A(D) = \{a \in \mathcal{W}_A(D) \mid \mathrm{tp}(a/A)$ 具有简单半区间$\}$；
- $\mathcal{T}_A(D) = \{X \subset \mathfrak{C}^{eq} \mid X = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(AX) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$ 对于某个 $a \in \mathcal{W}_A(D)\}$；
- $m_A(a, b) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Ab)$。

如果 $A = \varnothing$，我们就不在下标中特别强调这一点。

在推论 2.22 中，我们将证明 $(\mathcal{T}_A(D), \subset)$ 是一个交树，其 m_A 交运算将在命题 2.24的证明中使用。

备注 2.20。 (a) 注意， $A \subseteq B$ 蕴含 $\mathcal{W}_A(D) \subseteq \mathcal{W}_B(D)$：若 $a \in \mathcal{W}_A(D)$，则 $a \in \mathcal{W}_B(D)$，因为弱 o-极小类型的任意扩张都是弱 o-极小的。

（b）一般而言， $A \subset B$ 并不蕴含 $\mathcal{W}^{ss}_A(D) \subseteq \mathcal{W}^{ss}_B(D)$：正如例$(a/A)$ 2.11(a/B) 所示，$\mathrm{tp}(a/A)$ 可能具有简单半区间，但 $\mathrm{tp}(a/B)$ 却不具有。2.11。

（c） $a \mapsto \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$ 是将 $\mathcal{W}_A(\mathfrak{C}^{eq})$ 的元素与 $\mathcal{T}_A(\mathfrak{C}^{eq})$的元素进行自然对应的方式，因此我们可以将 $\mathcal{W}_A(\mathfrak{C}^{eq})$ 视为 $\mathcal{T}_A(\mathfrak{C}^{eq})$的子集。

引理 2.21。 设类型 $p = \mathrm{tp}(a/A)$ 是弱 o-最小的。

（a）对于每个元素 $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$，存在 $E \in \mathcal{E}_p$，使得 e，并且（ A-超虚元） $[a]_E$ 在 A上互相可定义；即 $\mathrm{Aut}_{Ae}(\mathfrak{C}^{eq}) = \mathrm{Aut}_{A\{[a]_E\}}(\mathfrak{C}^{eq})$。 （b）集合 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$ 在 $x \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Ay)$下是全预序的。

证明。 不失一般性，假设 $A = \varnothing$ 和 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$。

(a) 设 $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$。取一个 0-可定义函数 f，使得 $f(a) = e$，并令 $E \in \mathcal{E}_p$ 为 $f_{\restriction p(\mathfrak{C})}$的核关系。容易看出，超虚元 $[a]_E$ 正如断言所述。

(b) 我们只需验证对于 b_1， $b_2 \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$、 $b_1 \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b_2)$ 或 $b_2 \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b_1)$ 成立。由 (a) 部分可知，对于 $i = 1, 2$，存在 $E_i \in \mathcal{E}_p$，使得 b_i 和 $[a]_{E_i}$ 互相可定义。由弱序极小性， E_1， $E_2 \in \mathcal{E}_p$ 可比较，因此不失一般性，设 $E_1 \subseteq E_2$。于是我们有

$$\mathrm{Aut}_{b_1}(\mathfrak{C}^{eq}) = \mathrm{Aut}_{\{[a]_{E_1}\}}(\mathfrak{C}^{eq}) \subseteq \mathrm{Aut}_{\{[a]_{E_2}\}}(\mathfrak{C}^{eq}) = \mathrm{Aut}_{b_2}(\mathfrak{C}^{eq}).$$

现在， $\mathrm{Aut}_{b_1}(\mathfrak{C}^{eq}) \subseteq \mathrm{Aut}_{b_2}(\mathfrak{C}^{eq})$ 蕴含 $b_2 \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b_1)$。 □

推论 2.22. $(\mathcal{T}_A(D), \subset)$ 对所有 $D \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$是以 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ 为根的交树。

证明。为简单起见，假设 $A = \varnothing$。设 $X \in \mathcal{T}(D)$。选取 $a \in \mathcal{W}(D)$ 使得 $X = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(X) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$。由引理 2.21，集合 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$被 $x \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(y)$全预序。注意， $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$ 的每个 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}$-闭子集都是该预序的一个初始部分。由于一个全预序的所有初始部分所成的集合按包含关系全序，我们得出集合 $\{Y \in \mathcal{T}(D) \mid Y \subset X\}$ 是 $(\mathcal{T}(D), \subset)$中的一条链。这表明 $(\mathcal{T}(D), \subset)$ 是一棵树。容易看出，对所有$X, Y \in \mathcal{T}(D)$都有 $X \cap Y \in \mathcal{T}(D)$，因此 $X \cap Y \in \mathcal{T}(D)$ 是 X, Y的交； $(\mathcal{T}(D), \subset)$ 是一棵交树。显然， $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ 是 $\mathcal{T}(D)$的根。 □

引理 2.23。 对于所有 $a \in \mathcal{W}^{ss}_A(\mathfrak{C}^{eq})$ 和 $b \in \mathcal{W}_A(\mathfrak{C}^{eq})$： $a \not\perp_A b$ 当且仅当 $m_A(a, b) \neq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$。

证明。不失一般性，假设 $A=\varnothing$。记 $p=\mathrm{tp}(a)$ 和 $q=\mathrm{tp}(b)$。设 $\mathfrak{q}=(q,<_q)$是一个弱 o-极小对，并设 $(D_q,<_q)$ 是 $(q(\mathfrak{C}),<_q)$的一个 0-可定义扩张。

为证明从右到左的蕴涵，假设 $m(a,b)\neq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$，并令 $c\in m(a,b)\setminus \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$。由引理 2.21(a)，存在某个 $E\in\mathcal{E}_p$，使得 c 与等价类 $[a]_E$互相可定义；类似地，对某个 $F\in\mathcal{E}_q$，c与 $[b]_F$ 互相可定义。注意，等价类 $[a]_E$ 与 $[b]_F$ 也互相可定义。取 $b_1,b_2\models q$，使得 $b_1\lhd^{\mathfrak{q}} b\lhd^{\mathfrak{q}} b_2$。于是，由于 $c\notin \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ 蕴含 $F\neq \mathbf{1}_q$，我们得出$[b_1]_F<_q[b]_F<_q[b_2]_F$。结合 $[b]_F$ 是 $\{[a]_E\}$-不变这一事实，可得 $b_1\neq b$ (a)和 $b\neq b_2$ (a)。因此，$\mathrm{tp}(b/a)$ 的轨迹是区间 $[b_1,b_2]_{q(\mathfrak{C})}$的子集，从而是 $q(\mathfrak{C})$的一个有界子集；由此得出 $a\not\perp b$。

为证明另一个蕴含，假设 $a\not\perp b$。用公式 $\phi(x,a)\in\mathrm{tp}(b/a)$ 见证该分叉，使得 $\phi(q(\mathfrak{C}),a)$ 是 $(q(\mathfrak{C}),<_q)$的有界子集：$e_1<_q\phi(q(\mathfrak{C}),a)<_q e_2$ 其中 $e_1,e_2\in q(\mathfrak{C})$。根据紧致性，我们可以修改 ϕ，使得 $e_1<_q\phi(\mathfrak{C},a)<_q e_2$；特别地，$\phi(\mathfrak{C},a)$ 是 D_q的有界子集。定义：

$$F(a)=\{y\in D_q\mid y<_q\phi(\mathfrak{C},a)\}\quad\text{and}\quad G(a)=\mathrm{in}(\phi(\mathfrak{C},a)).$$

注意到 $F(a)$ 和 $G(a)$ 都是 D_q、$F(a)<e_2$和 $G(a)<e_2$的初始部分。因此，我们刚刚定义了函数 F、G：$p(\mathfrak{C})\to D_q^{in}$；显然，它们中的每一个都在 $p(\mathfrak{C})\times D_q$内相对可定义。还要注意，对于所有 $x\in p(\mathfrak{C})$，$F(x)\subset G(x)$都成立（因为 $b\in G(a)\setminus F(a)$）。令 $<_p$为 $p(\mathfrak{C})$ 上的一个相对可定义的线性序，使得函数 F 是 $<_p$-递增的；根据 [MT25，定理 1(i)]，它存在。记 $\mathfrak{p}=(p,<_p)$ 并定义：

$$S_a=\{x\in p(\mathfrak{C})\mid a\leqslant_p x\wedge F(x)\subset G(a)\}.$$

我们证明 S_a 是一个有界$\mathfrak{p}$-半区间：这里，$\min S_a=a$ 显然，而 S_a在 $(p(\mathfrak{C}),<_p)$ 中的凸性由 F的单调性可知。因此，S_a是一个$\mathfrak{p}$-半区间。为说明它有界，取满足 $G(a)\subset F(a')$的 $a'\in p(\mathfrak{C})$；例如，令 a'满足 $e_2\in F(a')$。于是 $a'\notin S_a$。由 F的单调性，$F(a)\subset G(a)\subset F(a')$推出 $a<_p a'$，再结合 $a'\notin S_a$可得 $S_a<_p a'$。因此，S_a 是一个有界$\mathfrak{p}$-半区间。由于 $a\in\mathcal{W}^{ss}(\mathfrak{C}^{eq})$，$p$ 具有简单半区间，所以S_a 由 $E\in\mathcal{E}_p$决定，记作 $\mathcal{E}_p$：$S_a=\{x\in p(\mathfrak{C})\mid a\leqslant_p x\wedge x\in[a]_E\}$；由于 S_a 有界，E 是真。我们断言，对所有 a_1，$a_2\in p(\mathfrak{C})$：

(1) $[a_1]_E<_p[a_2]_E$蕴含 $F(a_1)\subset G(a_1)\subseteq F(a_2)\subset G(a_2)$.

这里，$F(a_1)\subset G(a_1)$和 $F(a_2)\subset G(a_2)$是$\mathrm{tp}(a)=\mathrm{tp}(a_1)=\mathrm{tp}(a_2)$的推论。为证明$G(a_1)\subseteq F(a_2)$，注意到 $[a_1]_E<_p[a_2]_E$ 和$S_{a_1}\subseteq[a_1]_E$ 共同蕴含$S_{a_1}<_p a_2$，而根据 S_{a_1}的定义，这又蕴含 $F(a_2)\not\ni G(a_1)$；因此 $G(a_1)\subseteq F(a_2)$，从而证明了(1)。

由(1)可知，对于属于不同 E-等价类的任意 a_1、$a_2\in p(\mathfrak{C})$，集合 $G(a_1)\setminus F(a_1)$ 和 $G(a_2)\setminus F(a_2)$ 是不相交的。因此，$[a]_E$ 是唯一包含满足 $b\in G(t)\setminus F(t)$的元素t 的 E-等价类；特别地，$[a]_E$在$\mathrm{Aut}_b(\mathfrak{C})$下不变。设 $(D_p,<_p)$是 $(p(\mathfrak{C}),<_p)$ 的一个可定义扩张，并设E 是 D_p 上的一个0-可定义凸等价关系，使得 $E=\hat{}E_{\restriction p(\mathfrak{C})}$。那么$[a]\hat{}_E\in\mathfrak{C}^{eq}$在$\mathrm{Aut}_b(\mathfrak{C}^{eq})$下不变，因此$[a]\hat{}_E\in\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$。由于 $[a]_{\hat{E}}\in\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$ 平凡成立，我们得到$[a]\hat{}_E\in m(a,b)$。由于 E是真，我们有$[a]\hat{}_E\notin\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$，因此 $m(a,b)\supset\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$。引理得证。□

命题 2.24。$a\perp_{m_A(a,b)}b$ 对所有 $a\in\mathcal{W}^{ss}_A(\mathfrak{C}^{eq})$ 和 $b\in\mathcal{W}_A(\mathfrak{C}^{eq})$ 都成立。

证明。不失一般性，假设 $A=\varnothing$。记 $B=m(a,b)$。那么 $b\in\mathcal{W}(\mathfrak{C}^{eq})$ 蕴含$b\in\mathcal{W}_B(\mathfrak{C}^{eq})$，并且根据推论 2.18(c)，我们知道 $a\in\mathcal{W}^{ss}_B(\mathfrak{C}^{eq})$。因此，我们可以应用引理 2.23：

(1) $a\perp_B b$ 当且仅当 $m_B(a,b)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$。注意，$B\subseteq\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$ 蕴含 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Ba)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$，类似地，$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Bb)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$。因此，(2) $m_B(a,b)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Ba)\cap\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Bb)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)\cap\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)=B=\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$。由 (1) 和 (2) 可得 $a\perp_B b$。

□

命题 2.25. 假设 $a,b,c\in\mathcal{W}_A(\mathfrak{C}^{eq})$，并且其中至少两个属于 $\mathcal{W}^{ss}_A(\mathfrak{C}^{eq})$.

(a) $a\perp_B b$ 对所有满足 $m_A(a,b)\subseteq B\subseteq\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$的集合 B 成立。

(b) 对所有 $A \subset \mathfrak{C}^{eq}$，集合 $\{a, b, c\}$ 在 $m_A(a, b) \cup m_A(b, c) \cup m_A(a, c)$ 上两两独立。

证明。 不失一般性，假设 $A = \emptyset$。

(a) a 和 b 中至少有一个属于 $\mathcal{W}^{ss}(\mathfrak{C}^{eq})$，因此我们可以应用命题 2.24：$a \downarrow_{m(a,b)} b$。考虑类型 $q = \mathrm{tp}(b/m(a, b))$ 及其扩张 $q' = \mathrm{tp}(b/B)$；令 $\mathfrak{q} = (q, <)$ 为关于 $m(a, b)$的弱 o-极小有序对，并令 $\mathfrak{q}' = (q', <)$。反设 $a \not\downarrow_B b$。这意味着存在一个相对 Ba-可定义的有界子集 D，它包含 b；我们可以假设 D 是凸的。由于 $B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$, D 是 a-可定义的；令 $\phi(x, a)$ 相对定义 D。由于 $\phi(q'(\mathfrak{C}), a)$在 $q'(\mathfrak{C})$ 内有界，且 $q'(\mathfrak{C})$ 是 $q(\mathfrak{C})$的凸子集，所以 $\phi(q'(\mathfrak{C}), a)$ 在$q(\mathfrak{C})$内是凸且有界的。这意味着 $\phi(q'(\mathfrak{C}), a)$ 是 $\phi(q(\mathfrak{C}), a)$ 在$(q(\mathfrak{C}), <)$ 内的（有限多个）凸分支之一。如有必要，修改 $\phi(x, a)$，我们可以假设 $\phi(q(\mathfrak{C}), a) = \phi(q'(\mathfrak{C}), a)$。因此，$\phi(x, a)$相对定义了 $q(\mathfrak{C})$ 的一个有界子集，该子集包含 b，所以$a \not\downarrow_{m(a,b)} b$。矛盾。

(b) 记 $B = m(a、b) \cup m(b、c) \cup m(a、c)$。由于 $(\mathcal{T}(\mathfrak{C}^{eq})、\subset)$ 是一棵交树，交 $m(a、b)$、$m(b、c)$与 $m(a、c)$ 两两 $\subseteq$-可比较，因此 B 等于其中之一，不妨设为 $B = m(b、c)$。于是$m(a、b) \subseteq B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$，所以由该引理的 (a) 部分可得 $a \downarrow_B b$；同理，$a \downarrow_B c$。最后，由命题 2.24 可得 $b \downarrow_B c$。证明完毕。□

3. Existence of shifts vs simplicity of semiintervals

不同于 [MT24 第 6], 节中研究的可定义情形，平移的概念不适用于 $\mathbf{p}$-半区间族：如果 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$ 是这样的一个族，那么没有理由认为幂 $(S_a^{\mathbf{p}})^2 = \{x \in p(\mathfrak{C}) \mid (\exists t \models p)(t \in S_a \wedge x \in S_t)\}$ 本身是相对可定义的。在本节中，我们比较弱准 O-极小 T 的以下两个条件：

(NS) T 没有简单半区间；(SH) T 承认一个半区间的可定义族，其中包含平移，其基数为 $(\mathfrak{C}, <)$ 。

本节的主要技术结果是命题 3.6，我们在其中证明，每个非 $\mathbf{p}$-确定的 $\mathcal{E}_p$-半区间都可以略微扩大，使得新的 $\mathbf{p}$-半区间由某个单调可定义的半区间族的平移所诱导。由此立即可得，(NS) 蕴含 (SH)。例 3.8 表明反向推论并非总成立；但在定理 3.7(b) 中，我们证明，若再假设 T 是小的或弱 o-极小的，则反向推论成立。作为推论，我们得到：每个具有少可数模型的弱拟 o-极小理论都有简单半区间；并且，具有少可数模型的理论中的每个凸弱 o-极小类型都有遗传简单半区间。

事实 3.1. 设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是 A 上的弱 o-极小对，并设 $\mathcal{S}^{\mathbf{p}} = (S_x^{\mathbf{p}} \mid x \in p(\mathfrak{C}))$ 是相对 A-可定义的 $\mathbf{p}$-半区间族。则不 存在 a, b, $c \in p(\mathfrak{C})$ 使得 $S_a^{\mathbf{p}} < b$ 且 $S_a^{\mathbf{p}} \cup S_b^{\mathbf{p}} \subseteq S_c^{\mathbf{p}}$。

证明。 这是对 [MT25引理 4 的改述。1]。 □

引理 3.2. 设 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$ 是 $(D, <)$ 的 A-可定义的半区间族，并设 $a \in D$。假设 $p = \mathrm{tp}(a/A)$ 是弱 o-极小的，并设 $\mathbf{p} = (p, <)$。则下列各项等价：(1) $\mathcal{S}^{\mathbf{p}}$ 是 $\mathcal{E}_p$-确定的；(2) $(\mathcal{S}^{\mathbf{p}})^2 = \mathcal{S}^{\mathbf{p}}$；(3) 对某个公式 $\theta(x) \in p$, $(\mathcal{S}^{\theta})^2 = \mathcal{S}^{\theta}$ 成立；

证明。 (1)⇒(2) 很容易。为证明 (2)⇒(3)，假设 $(S_x^{\mathbf{p}})^2 = S_x^{\mathbf{p}}$ 对所有 $x \models p$都成立。 n

$$\models (\forall x, y, z \models p)(y \in S_x \wedge z \in S_y \to z \in S_x).$$

由紧致性，存在一个公式 $\theta(x) \in p$ 蕴含 $x \in D$，使得

$$\models (\forall x, y, z \in \theta(D))(y \in S_x \wedge z \in S_y \to z \in S_x).$$

很容易看出，这蕴含 $(\mathcal{S}^{\theta})^2 = \mathcal{S}^{\theta}$。

(3)⇒(2) 假设对于某个公式 $\theta(x) \in p$, $(\mathcal{S}^{\theta})^2 = \mathcal{S}^{\theta}$ 成立。那么对于所有 $a \models p$，我们有 e

$$(S_a^{\mathbf{p}})^2 \subseteq (S_a^{\theta})^2 \cap p(\mathfrak{C}) = S_a^{\theta} \cap p(\mathfrak{C}) = S_a^{\mathbf{p}} \subseteq (S_a^{\mathbf{p}})^2,$$

由此可得 $(S_a^{\mathbf{p}})^2 = S_a^{\mathbf{p}}$。

(2)⇒(1) 假设 $(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}})^2 = \mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$，也就是说，$(S_x^{\mathfrak{P}})^2 = S_x^{\mathfrak{P}}$ 对所有 $x \models p$ 均成立。为验证 (1)，根据注释 2.9，只需证明以下内容

$$\text{for all } x < y \text{ realizing } p\text{:} \quad y \in S_x^{\mathfrak{P}} \quad \text{if and only if} \quad \mathrm{in}(S_x^{\mathfrak{P}}) = \mathrm{in}(S_y^{\mathfrak{P}}),$$

其中，初始部分取自 $(p(\mathfrak{C}), <)$。从右到左的蕴含显然。为证明另一个方向，设 $a \models p$ 且设 $b \in S_a^{\mathfrak{P}}$。首先，我们断言 对于所有的 $z \models p$，$z \in S_a^{\mathfrak{P}}$蕴含在$(S_z^{\mathfrak{P}}) \subseteq$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$。否则，存在某个 $t \in S_z^{\mathfrak{P}}$满足 $S_a^{\mathfrak{P}} < t$，于是 $t \in S_z^{\mathfrak{P}} \wedge z \in S_a^{\mathfrak{P}}$将蕴含 $t \in (S_a^{\mathfrak{P}})^2 \smallsetminus S_a^{\mathfrak{P}}$，这与 (2) 矛盾。因此，在$(S_z^{\mathfrak{P}}) \subseteq$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$，断言得证。

由于 $b \in S_a^{\mathfrak{P}}$，根据该断言，我们有在$(S_b^{\mathfrak{P}}) \subseteq$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$，因此 $S_b^{\mathfrak{P}} \subseteq S_a^{\mathfrak{P}}$。还需排除在$(S_b^{\mathfrak{P}}) \subset$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$。如果在$(S_b^{\mathfrak{P}}) \subset$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$成立，就会存在某个 $c \in S_a^{\mathfrak{P}} \smallsetminus S_b^{\mathfrak{P}}$ 使得 $S_b^{\mathfrak{P}} < c$。根据该断言，$c \in S_a^{\mathfrak{P}}$蕴含在$(S_c^{\mathfrak{P}}) \subseteq$中属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$，因此 $S_c^{\mathfrak{P}} \subseteq$属于$(S_a^{\mathfrak{P}})$。于是，$S_b^{\mathfrak{P}} \cup S_c^{\mathfrak{P}} \subseteq S_a^{\mathfrak{P}}$且 $S_b^{\mathfrak{P}} < c$；这与事实 3.1 矛盾，从而证明了 (1)。□

在弱 o-极小理论的背景下，引理3.2 中条件 (1) 和 (2) 的等价性最初由 Baizhanov 和 Kulpeshov 在 [BK06]中证明。

例 3.3 （一个单调族 $\mathcal{S}$，其 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 是由 $\mathcal{E}_p$ 确定的，但对所有 $a \models p$，S_a 都是一个 $\mathcal{S}$-平移）。考虑结构 $(\mathbb{Z}, <, P)$，其中 P 是所有能被 3 整除的整数构成的集合。该结构是一个着色线性序，因此其理论是弱准 O-极小的。令 $p \in S_1(T)$ 为由能被 3 整除的元素构成的类型。定义 $S_x := \{x, x+1\}$。显然，$\mathcal{S} = (S_x \mid x \in \mathbb{Z})$ 是一个半区间单调族，并且 $S_x^n = \{x, x+1, \ldots\ldots, x+n\}$；特别地，$S_0$ 是一个 $\mathcal{S}$-平移。另一方面，$\mathfrak{p}$-半区间$S_0^{\mathfrak{P}} = S_0 \cap p(\mathfrak{C}) = \{0\}$ 显然由 $\mathcal{E}_p$ 确定；$\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 也如此。</output>

我们的下一个目标是证明，每个并非 $\mathfrak{p}$-半区间的 $\mathcal{E}_p$-决定的半区间，都可以稍作扩张，使得新的 $\mathfrak{p}$-半区间由某个单调可定义半区间族的平移所诱导。我们将在下文的命题3.6 中证明这一点；但在此之前，我们先说明两个 $\mathfrak{p}$-半区间近似具有相同大小的含义。对于 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$，一个 $\mathfrak{p}$-半区间族，以及 $S_a^{\mathfrak{P}} \in \mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$，定义

- $\mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}}) := \{E \in \mathcal{E}_p \mid S_a^{\mathfrak{P}} \subseteq [a]_E\}$.

显然，$\mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}})$ 是 $(\mathcal{E}_p, \subseteq)$的终段。若 $\mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{E}(R_a^{\mathfrak{P}})$，则两个$\mathfrak{p}$-半区间（记作 $S_a^{\mathfrak{P}}$和 $R_a^{\mathfrak{P}}$）近似具有相同大小；如下方的注记所示。

注记 3.4. 设 $\mathfrak{p} = (p, <)$ 是关于 $\varnothing$ 的弱 o-极小对，并设 $S_a^{\mathfrak{P}}$和 $R_a^{\mathfrak{P}}$是 $\mathfrak{p}$-半区间。(a) 假设 $(\mathcal{E}_p, \subseteq)$ 可数，并设 d 是 $p(\mathfrak{C})$ 上的一个超度量，如注记 2.15中所定义。我们可以如下定义 $\mathfrak{p}$-半区间的长度：

$$\lg(S_a^{\mathfrak{P}}) = \max\{d(a, x) \mid x \in S_a^{\mathfrak{P}}\}.$$

这里注意，所有与 $x \in S_a^{\mathfrak{P}}$ 相容的 p 的扩张构成 $S_x(Aa)$ 的一个闭子集，并且在 $<$下全序，因此由紧致性可知最大值存在。注意，如果 p 有简单半区间，那么 $S_a^{\mathfrak{P}} = R_a^{\mathfrak{P}}$ 当且仅当 $\lg(S_a^{\mathfrak{P}}) = \lg(R_a^{\mathfrak{P}})$。

(b) 如果 $\mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}}) \subset \mathcal{E}(R_a^{\mathfrak{P}})$，那么 $R_a^{\mathfrak{P}}$ 比 $S_a^{\mathfrak{P}}$ 短得多，具体而言：$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(R_a^{\mathfrak{P}})^n \subset S_a^{\mathfrak{P}}$。为验证这一点，令 $E \in \mathcal{E}(R_a^{\mathfrak{P}}) \smallsetminus \mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}})$。由归纳法，很容易证明对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $(R_a^{\mathfrak{P}})^n \subset [a]_E$，这意味着 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(R_a^{\mathfrak{P}})^n \subset S_a^{\mathfrak{P}}$。

下面的引理是命题 3.6证明的主要部分。

引理 3.5。设 $\mathfrak{p} = (p, <)$ 是 A 上的弱 o-极小对，并设 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}} = (S_x^{\mathfrak{P}} \mid x \in p(\mathfrak{C}))$ 是一个 $\mathcal{E}_p$-确定的 $\mathfrak{p}$-半区间族。存在一个 A-可定义扩张 $(D, <)$，它是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的扩张，并且存在一个单调的 A-可定义半区间族 $\mathcal{R} = (R_x \mid x \in D)$，使得对所有 $x \in p(\mathfrak{C})$ 都有 $S_x^{\mathfrak{P}} \subseteq R_x^{\mathfrak{P}}$，$\mathcal{R}^{\mathfrak{P}}$ 不是 $\mathcal{E}_p$-确定的，且 $\mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{E}(\mathcal{R}^{\mathfrak{P}})$。

证明。不失一般性，假设 $A = \varnothing$，并且我们在 $\mathfrak{C}^{eq}$中工作。假设族 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ 不是 $\mathcal{E}_p$-确定的；特别地，它由有界的$\mathfrak{p}$-半区间组成。固定 $a \models p$ 以及下列对象：

- $(D, <)$，$(p(\mathfrak{C})$的一个 0-可定义扩张，$<)$；• $\mathcal{S} = (S(x, D) \mid x \in D)$，$(D$的一个 0-可定义半区间族，满足 $S_a^{\mathfrak{P}} = S(a, p(\mathfrak{C}))$;

• 对于 $E \in \mathcal{E}_p$，令 $\hat{}E$ 为 (D上的一个 0-可定义凸等价关系，且 $<$) 满足 $\hat{}\, E_{\restriction p(\mathfrak{C})} = E$。注意，集合 D 和族 $\mathcal{S}$ 由引理 2.3 保证存在。对于每个 $E \in \mathcal{E}_p$，由紧致性，存在一个包含 $p(\mathfrak{C})$ 的可定义子集 $D' \subseteq D$，以及一个定义在 D'上并扩张 E的可定义凸等价关系 E'；现在我们可以通过 $x = y \vee (\exists u, v \in D')(\hat{}E'(u,v) \wedge u \leqslant x, y \leqslant v)$来定义 $\hat{}\, E(x,y)$。接下来，我们引入以下记号：

- $\Pi(x,\ y) := p(x) \cup p(y) \cup \{\hat{}E(x,\ y) \mid \hat{}E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})\}$;
- $B := \{[a]_{\hat{E}} \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})\}$;• $q(y) := \mathrm{tp}(a/B)$ 和 $\mathfrak{q} = (q,$ $<)$.

显然，$\Pi(x,y)$ 是关于 $\varnothing$ 和 $B \subset \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$的一个部分类型。此外，容易看出 $\Pi(x,y)$在 $p(\mathfrak{C})$上定义了一个等价关系。首先，我们断言：

(1) $\Pi(a, \mathfrak{C}) = \bigcap\{[a]_E \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})\} = q(\mathfrak{C})$；特别地，$\Pi(a, \mathfrak{C})$ 是 $p(\mathfrak{C})$的一个凸子集。

这里，第一个等式以及 $q(\mathfrak{C}) \subseteq \bigcap([a]_E \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}}))$ 是显然的。为了证明反向包含关系，假设 $a' \in \bigcap\{[a]_E \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})\}$，我们需要证明 $a' \in q(\mathfrak{C})$。注意到 $a, a' \models p$ 蕴含存在某个 $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^{eq})$ 使得 $f(a) = a'$。由于对所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})$, f，$[a]\hat{}_E = [a']\hat{}_E$逐点固定 B。于是，$f(a,B) = (a', B)$ 蕴含 $a' \models q$，正如所需。这就完成了 (1) 的证明。接下来，我们断言：

(2) $S_a^{\mathfrak{p}}$ 是一个有界的$\mathfrak{q}$-半区间，且不是由 $\mathcal{E}_q$ 决定的。

设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})$，也就是说，$S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq [a]_E$。由于 $S_a^{\mathfrak{p}}$ 不是由 $\mathcal{E}_p$ 决定的，它是 $[a]_E$ 的有界子集；这对所有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})$ 都成立。因此，借助 $\mathfrak{C}$ 的紧致性和饱和性，$S_a^{\mathfrak{p}}$ 是$\bigcap\{[a]_E \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})\}$ 的有界子集。由 (1) 可知，它等于 $q(\mathfrak{C})$。因此，$S_a^{\mathfrak{p}}$ 是一个有界 $\mathfrak{q}$-半区间。由于$B \subset \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$，我们可以应用推论 2.18(b)，得出 $S_a^{\mathfrak{p}}$ 不是由 $\mathcal{E}_q$ 决定的。这就证明了 (2)，其直接推论是 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{D}_q(a)$，显然这意味着以下结论：

(3) $a \lhd^{\mathfrak{q}} a'$ implies $S_a^{\mathfrak{p}} < a'$.

在这个证明中，一个重要环节是确立以下两个性质；事实上，引入类型 q 就是为了满足这两个性质。

(4) 如果 $E \in \mathcal{E}_q$ 和 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq [a]_E$，那么 $E = q(\mathfrak{C})^2$。(5) 如果 $X_a^{\mathfrak{p}}$是一个有界的$\mathfrak{q}$-半区间，且满足 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq X_a^{\mathfrak{p}}$，那么 $X_a^{\mathfrak{p}}$不是由 $\mathcal{E}_q$ 决定的。

为证明 (4)，假设 $E \in \mathcal{E}_q$ 且 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq [a]_E$。由推论 2.18(a) 可知，$E$ 等于来自 $\mathcal{E}_p$ 的某个关系（记为 E'）的限制。于是 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq [a]_{E'}$ 蕴含 $E' \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}})$，再由 (1) 得到$q(\mathfrak{C}) \subseteq [a]_{E'}$。因此，$E = q(\mathfrak{C})^2$，从而证明了 (4)。为证明 (5)，设某个 $\mathfrak{q}$-半区间 $X_a^{\mathfrak{p}}$由 $F \in \mathcal{E}_q$和 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq X_a^{\mathfrak{p}}$确定。则 $X_a^{\mathfrak{p}}$是 $[a]_F$的终段，故由 (4)，$S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq [a]_F$蕴含$F = \mathbf{1}_q$，从而 $X_a^{\mathfrak{p}}$不是有界的。因此，不存在包含 $S_a^{\mathfrak{p}} \subseteq X_a^{\mathfrak{p}}$的有界 $\mathfrak{q}$-半区间 $X_a^{\mathfrak{p}}$是$\mathcal{E}_q$-确定的。

考虑$D(S_x)$中包含 S_x的 $(D, <)$ 的最小初始部分。显然，$t \in$ 在$D(S_x)$ 中是 0-可定义的，例如由公式 $I(x,t)$定义，并且对每个 $x \in D$：$I(x, \mathfrak{C})$ 是 $(D, <)$的初始部分，$x \in I(x, \mathfrak{C})$，且 $S(x, \mathfrak{C})$ 是 $I(x, \mathfrak{C})$的终段。特别地，我们有：

(6) $I(x,\ p(\mathfrak{C}))$ 是 $p(\mathfrak{C})$ 的初始部分，且 $S_x^{\mathfrak{p}}$是 $I(x,\ p(\mathfrak{C}))$的终段；(7) $a \lhd^{\mathfrak{q}} a'$ 蕴含 $I(a,\ \mathfrak{C}) < a'$。

为证明(7)，假设 $a \lhd^{\mathfrak{q}} a'$。由(3)可知 $S_a^{\mathfrak{p}} < a'$。由于根据(6)，$S_a^{\mathfrak{p}}$是 $I(a, p(\mathfrak{C}))$的终段，我们得出 $I(a, p(\mathfrak{C})) < a'$，这蕴含 $a' \in I(a', p(\mathfrak{C})) \setminus I(a, p(\mathfrak{C}))$。由于 $I(a, \mathfrak{C})$ 和 $I(a', \mathfrak{C})$ 都是 D的初始部分，且 $a' \models p$，我们得出 $I(a, \mathfrak{C}) < a'$。

考虑函数 I：$q(\mathfrak{C}) \to D^{in}$，由 $x \mapsto I(x, \mathfrak{C})$给出；显然，$I$是相对 B可定义的。为说明 I不是常值函数，取满足 $a \lhd^{\mathfrak{q}} a'$的 a'。那么由(7)可得 $I(a, \mathfrak{C}) < a'$，由(6)可得 $a' \in I(a', \mathfrak{C})$；二者合起来蕴含 $I(a, \mathfrak{C}) \subset I(a', \mathfrak{C})$，因此 I不是常值函数。这使我们能够应用MT25中的上单调性定理定理3。6]：存在 $F_q \in \mathcal{E}_q \setminus \{\mathbf{1}_q\}$ 使得：

(8) $q(x) \cup q(y) \cup \{[x]_{F_q} < [y]_{F_q}\} \vdash I(x, \mathfrak{C}) \subset I(y, \mathfrak{C})$.

根据推论2.18(a)，存在 $F \in \mathcal{E}_p$ 使得 $F_{\restriction q(\mathfrak{C})} = F_{q^\circ}$ 然后，由于 $[a]_F$ 和 $q(\mathfrak{C})$都是 $p(\mathfrak{C})$的凸子集，并且 $[a]_{F_q} = [a]_F \cap q(\mathfrak{C})$ 是 $q(\mathfrak{C})$的有界子集，我们可得$[a]_F = [a]_{F_q}$。特别地，$[a]_F$是 $q(\mathfrak{C}) = \Pi(a$的有界子集，$\mathfrak{C})$；这里的等式由

(1)。关键观察是，$F_q \neq \mathbf{1}_q$由(4)可推出 $S_a^{\mathfrak{P}} \not\subseteq [a]_{F_q}$。这意味着 $S_a^{\mathfrak{P}} \not\subseteq [a]_F$，因此$F \notin \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}})$。由此证明：

(9) $F \notin \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}})$ 和 $[x]_F$ 是 $\Pi(x, \mathfrak{C})$ 的有界子集，对所有 $x \models p$均成立。

接下来，我们证明：

(10) $p(x) \cup p(y) \cup \{[x]_F < [y]_F\} \vdash I(x, \mathfrak{C}) \subset I(y, \mathfrak{C})$.

首先注意，与 **(8)** 不同，**(10)** 中没有出现参数，因此只需证明将 x 替换为 a后的结论。设 $a' \models p$ 满足 $[a]_F < [a']_F$；我们需要证明 $I(a, \mathfrak{C}) \subset I(a', \mathfrak{C})$。分两种情况讨论。第一种情况是 $a' \models q$，此时 $I(a, \mathfrak{C}) \subset I(a', \mathfrak{C})$ 由 **(8)** 推出。在第二种情况下，由于 $q(\mathfrak{C})$ 是 $p(\mathfrak{C})$的凸子集，$a' \not\models q$ 和 $a < a'$ 合起来推出 $q(\mathfrak{C}) < a'$，因此根据 **(1)**，$\Pi(a, \mathfrak{C}) < a'$ 成立。由于 $\Pi(x, y)$ **(** 类型 **-)** 在 $p(\mathfrak{C})$ 上定义了一个等价关系，且该关系的等价类是凸的（同样由 **(1)** 得出），$q(\mathfrak{C}) < a'$蕴含 $\Pi(a, \mathfrak{C}) < \Pi(a', \mathfrak{C})$；又因为 $S_a^{\mathfrak{P}}$是 $\Pi(a$的有界子集，且 $\mathfrak{C})$和 $S_{a'}^{\mathfrak{P}}$是 $\Pi(a'$的有界子集，所以我们推出 $\mathfrak{C})$。最后，由于 $S_a^{\mathfrak{P}} < S_{a'}^{\mathfrak{P}}$是 $S_a^{\mathfrak{P}}$的终段，$I(a, \mathfrak{C})$ 和 $a' \models p$，我们得出 $S_a^{\mathfrak{P}} < a', I(a_0$。显然，这蕴含$p(\mathfrak{C})) < a', I(a, \mathfrak{C}) \subset I(a'$，从而完成了 **(10)** 的证明。

考虑 $\hat{}F$，这是 F 到 $(D$ 的一个 **0**-可定义凸扩张，$<)$。那么 (10) 意味着：

$$\models (\forall x, y \models p)([x]_{\hat{F}} < [y]_{\hat{F}} \to I(x, \mathfrak{C}) \subset I(y, \mathfrak{C})).$$

由紧致性可知，存在一个公式 $\theta(x) \in p$，它蕴含 $x \in D$，并满足以下性质：

(11) $\models (\forall x, y \in \theta(\mathfrak{C}))([x]_{\hat{F}} < [y]_{\hat{F}} \to I(x, \mathfrak{C}) \subset I(y, \mathfrak{C}))$.

为简化下文的记号，我们假设 $\theta(x)$ 是 $x \in D$；或者，也可以用 $\theta(D)$ 替换 D 。注意，这不会影响 **(1)–(11)** 的有效性。现在我们修改公式 $I(x, t)$。选取一个 L-公式 $J(x, t)$，以表示 $t \in \bigcup_{z \in [x]_{\hat{F}}} I(z, \mathfrak{C})$；显然，$J(x, \mathfrak{C})$ 是 D 中包含所有 $z \in [x]\hat{}_F$ 的初始部分 $I(z, \mathfrak{C})$ 的最小初始部分。考虑函数 J：$D \to D^{in}$，其定义为 $x \mapsto J(x, \mathfrak{C})$。显然，对所有 $x \in D$，$I(x, \mathfrak{C}) \subseteq J(x, \mathfrak{C})$ 都成立。由 **(11)** 容易推出，J 是递增的。

定义 $R(x, t) := x \leqslant t \wedge J(x, t)$。那么 $\mathfrak{R} = (R(x, \mathfrak{C}) \mid x \in D)$ 是$(D, <)$的半区间族，并且对所有 $x \in D$，$R(x, \mathfrak{C})$ 都是 $J(x, \mathfrak{C})$ 的终段；由于 J是单调的，$\mathfrak{R}$ 也是单调的。考虑 **p**-半区间 $R_a^{\mathfrak{P}} = R(a, p(\mathfrak{C}))$。由于根据 **(6)**，$I(x, p(\mathfrak{C}))$ 是 $p(\mathfrak{C})$ 的初始部分，且 $S_x^{\mathfrak{P}}$是 $I(x, p(\mathfrak{C}))$的终段，又由于 $I(x, \mathfrak{C}) \subseteq J(x, \mathfrak{C})$，我们得出 $S_a^{\mathfrak{P}} \subseteq R_a^{\mathfrak{P}}$。接下来，我们断言：

(12) $R_a^{\mathfrak{P}}$ 是一个有界的**q**-半区间。

为证明这一点，取满足 $a \lhd^{\mathfrak{q}} a' \lhd^{\mathfrak{q}} a''$的 a', a''，只需证明 $R_a^{\mathfrak{P}} < a''$。由 **(9)** 可知，类 $[a]_F$是 $\Pi(a, \mathfrak{C}) = q(\mathfrak{C})$的有界子集，因此 $[a]_F \subseteq \mathcal{D}_q(a)$，所以 $a \lhd^{\mathfrak{q}} a'$推出 $[a]_F < a'$，由此得到 $[a]_F < [a']_F$，进而得到$[a]\hat{}_F < a'$。由 **(11)** 我们推出，对所有$t \in [a]\hat{}_F$，都有 $I(t, \mathfrak{C}) \subset I(a', \mathfrak{C})$ ；由此可得 $J(a, \mathfrak{C}) = \bigcup_{t \in [a]_{\hat{F}}} I(t, \mathfrak{C}) \subseteq I(a', \mathfrak{C})$，再结合 **(3)** 中的 $I(a', \mathfrak{C}) < a''$，推出$J(a, \mathfrak{C}) < a''$。然后，$R_a^{\mathfrak{P}} \subseteq J(a, \mathfrak{C})$ 推出 $R_a^{\mathfrak{P}} < a''$，证毕。

由于 $R_a^{\mathfrak{P}}$ 是一个有界 **q**-半区间且 $S_a^{\mathfrak{P}} \subseteq R_a^{\mathfrak{P}}$，根据 **(5)**，我们有 **q**-半区间 $R_a^{\mathfrak{P}}$ 不是由 $\mathcal{E}_q$ 决定的；因此，它也不是由 $\mathcal{E}_p$ 决定的。至此，我们找到了一个 **0**-可定义扩张 $(D$、$<)$ 的 $(p(\mathfrak{C})$、$<)$，以及一个单调的 **0**-可定义半区间族 $\mathfrak{R} = (R_x \mid x \in D)$，使得 $\mathfrak{R}^{\mathfrak{P}}$ 不是由 $\mathcal{E}_p$ 决定的，并且 $S_x^{\mathfrak{P}} \subseteq R_x^{\mathfrak{P}}$ （对所有 $x \in p(\mathfrak{C})$）。为了完成引理的证明，还需验证 $\mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{E}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{P}})$。令 $E \in \mathcal{E}(R_a^{\mathfrak{P}})$。那么 $S_a^{\mathfrak{P}} \subseteq R_a^{\mathfrak{P}} \subseteq [a]_E$ 蕴含 $E \in \mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}})$；因此 $\mathcal{E}(R_a^{\mathfrak{P}}) \subseteq \mathcal{E}(S_a^{\mathfrak{P}})$。反向包含关系由 $R_a^{\mathfrak{P}} \subseteq q(\mathfrak{C}) = \bigcap\{[a]_E \mid E \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}})\}$ 得出。证明完毕。□

命题 3.6。设$\mathbf{p} = (p, <)$ 是关于 A 的弱 **o**-极小对，并设 $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}} = (S_x^{\mathfrak{P}} \mid x \in p(\mathfrak{C}))$ 是一个由 **p** 半区间组成的、非 $\mathcal{E}_p$ 决定的族。则存在一个 A-可定义扩张 $(D, <)$ **of**$(p(\mathfrak{C}), <)$ 以及一个单调的 A-可定义半区间族 $\mathfrak{R} = (R_x \mid x \in D)$，使得 $S_x^{\mathfrak{P}} \subseteq R_x^{\mathfrak{P}}, \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{E}(\mathfrak{R}^{\mathfrak{P}})$, $R_x^{\mathfrak{P}}$ 不是 $\mathcal{E}_p$ 决定的，并且对于所有 $x \models p$，R_x 都是一个 $\mathfrak{R}$ 平移。

证明。 证明的大部分包含在引理 3.5中，其中有一个 A-可定义扩张 $(D, <)$（对 $(p(\mathfrak{C}), <)$的）以及一个单调的 A-可定义的半区间族 $\mathfrak{R} = (R_x \mid x \in D)$ 已被找到，使得：$\mathfrak{R}^{\mathfrak{P}}$

不是 $\mathcal{E}_p$-确定的， $\mathcal{E}(\mathcal{S}^{\mathfrak{p}}) = \mathcal{E}(\mathcal{R}^{\mathfrak{p}})$，并且 $S_x^{\mathfrak{p}} \subseteq R_x^{\mathfrak{p}}$ （对所有 $x \in p(\mathfrak{C})$）。由于 $\mathcal{R}^{\mathfrak{p}}$ 不是 $\mathcal{E}_p$-确定的，由引理 3.2 我们推出 $(R_a^{\mathfrak{p}})^2 \neq R_a^{\mathfrak{p}}$ 对所有 $a \models p$，因此 R_x 是一个 $\mathcal{R}$-平移（据引理 2.6）。□

定理 3.7。设 T 是一个弱准 O-极小理论，且 $<$ 是 $\mathfrak{C}$上的一个 0-可定义序。(a) 若 T 满足 (NS)，则它也满足 (SH)。(b) 若 T 是小的或弱 o-极小的，且满足 (SH)，则它也满足 (NS)。

证明。(a) 假设 $p \in S_1(A)$ 没有简单半区间，且 $\mathfrak{p} = (p, <)$。由命题 3.6，存在一个 A-可定义扩张 $(D, <)$，它是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的扩张；并存在一个 A-可定义的单调半区间族$\mathcal{R}$，其为 $(D, <)$ 的半区间，使得对于任意 $a \models p$， R_a 都是一个 $\mathcal{R}$-平移。由于 $(D, <)$ 是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的可定义扩张，因此有 $D \subseteq \mathfrak{C}$；于是根据引理 2.5(b)， $\mathcal{R}$ 可以扩展为一个单调的 A-可定义半区间族 $\mathcal{S}$，它是 $(\mathfrak{C}, <)$ 的半区间，且 S_a 是一个 $\mathcal{S}$-平移。

(b) 首先，假设 T 是小的。假设 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in \mathfrak{C})$ 是半区间的可定义族，$c_0 \in \mathfrak{C}$，且 S_{c_0} 是一个 $\mathcal{S}$- 平移。我们需要证明 T 不具有简单半区间。证明与 MT24 定理 1] 的证明第一部分非常相似。首先，根据 MT24 引理 6.7] ，我们可以假设 $\mathcal{S}$ 是单调的。接下来，将参数 c_0 以及定义族 $\mathcal{S}$ 所需的有限个参数并入语言；注意这不会影响所需的结论。然后令 $S_x = \{x\}$ 对所有 $x < c_0$ 成立，以此重新定义 $\mathcal{S}$ ，并通过将区间 $(-\infty, c_0)$ 移到右端来修改序 $<$ 。注意，重新定义后的族仍然是单调且 0-可定义的， $c_0 = \min \mathfrak{C}$，并且 $\mathcal{S}_{c_0}$ 仍然是一个平移。记 $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{c_0}^n$，并定义

$$\Pi(x) = \{\phi(x) \in L \mid \phi(\mathfrak{C}) \text{ is convex and contains a final part of } \mathcal{C}\}.$$

根据 [MT24，引理 6.9(b, c)], 集合 $\mathcal{C} \cup \Pi(\mathfrak{C})$ 是 $(\mathfrak{C}$ 的初始部分， $<)$ 且 $\Pi(x)$ 是 $\varnothing$ 上与 $\mathcal{C} < x$ 相容的最小区间类型。由于 T 很小，空间 p 中存在一个孤立点，记作 $S_\Pi = \{p \in S_1(T) \mid \Pi(x) \subseteq p(x)\}$；令 $\theta(x) \in p$ 孤立 p，即:

(1) $\Pi(x) \cup \{\theta(x)\} \vdash p(x)$，或者， $\Pi(\mathfrak{C}) \cap \theta(\mathfrak{C}) = p(\mathfrak{C})$。

令 $a \models p$。考虑集合 $D_a = \{x \in \mathfrak{C} \mid S_a < x \wedge \theta(x)\}$；显然，它是 a-可定义的， $D_a \subseteq \theta(\mathfrak{C})$，且 $D_a \cap \Pi(\mathfrak{C}) \neq \varnothing$。根据 [MT24，引理 6.12(b, c)], 存在 $b \in D_a$ 使得类型 $\mathrm{tp}(b/a)$ 被 $\phi(x$ 孤立， $a)$ 比如， $\phi(\mathfrak{C}, a)$ 是 $\Pi(\mathfrak{C})$ 的有界子集，且 b 是一个 $\mathcal{S}$-最小元素[4]，属于 D_a；后者意味着，对于某个 $d \in \mathfrak{C}$ ，我们有:

(2) $b \in S_d$ and $d < D_a$.

由于 $\phi(\mathfrak{C}, a)$ 是 $\Pi(\mathfrak{C})$ 的有界子集，并且由于 $\phi(\mathfrak{C}, a) \subseteq \theta(\mathfrak{C})$，根据 (1)，我们推得 $\phi(\mathfrak{C}, a)$ 是 $p(\mathfrak{C})$ 的有界子集，且 $\phi(\mathfrak{C}, a) \subseteq D_a$和 $S_a < \phi(\mathfrak{C}, a)$。

定义 $R_a = \bigcup_{t\in\phi(\mathfrak{C},a)}([a, t] \cap \theta(\mathfrak{C}))$；显然， R_a 是一个 a-可定义的 p-半区间，而 $\phi(\mathfrak{C}, a)$ 是它的终段。因此，$\mathcal{R}^{\mathfrak{p}} = (R_x \mid x \models p)$ 是一个由可定义的 p-半区间构成的族。我们断言 $\mathcal{R}^{\mathfrak{p}}$ 不是由 $\mathcal{E}_p$决定的；根据引理 3.2，我们需要证明 $(\mathcal{R}^{\mathfrak{p}})^2 \neq \mathcal{R}^{\mathfrak{p}}$ ，或等价地证明 $R_a^2 \neq R_a$。取 $c \in \phi(\mathfrak{C}, b)$；显然， $c \in D_b$ 蕴含 $S_b < c$。此外，由于 $\phi(\mathfrak{C}, b)$ 是 R_b的终段，我们有 $c \in R_b$，这与 $b \in R_a$ 一起蕴含 $c \in R_a^2$。要完成该断言的证明，只需证明 $c \notin R_a$。由于 $\phi(\mathfrak{C}, a)$ 是 R_a的终段， $b \in \phi(\mathfrak{C}, a)$，且 $b < c$，因此只需证明 $c \notin \phi(\mathfrak{C}, a)$；否则，$c \in \phi(\mathfrak{C}, a)$ 将蕴含 $c \equiv b\,(a)$ ，因为 $\phi(x, a)$ 孤立了 $\mathrm{tp}(b/a),$ ，所以会存在某个 $e \in \mathfrak{C}$ 使得 $ce \equiv bd\,(a)$，进而根据 (2)，我们有 $c \in S_e$ 和 $e < D_a$。注意， $e < D_a$ 和 $b \in D_a$一起蕴含 $e < b$，因此由 $\mathcal{S}$的单调性，我们在$(S_e) \subseteq$ 中得到(S_b)，这与$S_b < c$ 一起蕴含 $S_e < c$；这与 $c \in S_e$矛盾，从而证明了该断言。

因此，族 $\mathcal{R}^{\mathfrak{p}}$ 不是 $\mathcal{E}_p$-确定的，所以 T 不具有简单半区间。这就完成了 T 为小的情形下的证明。

现在，假设 T 是弱 o-极小的，并且 $\mathcal{P} = (P_x \mid x \in \mathfrak{C})$ 是一个包含某个平移的 0-可定义半区间族；同样，我们可以假设 $\mathcal{P}$ 是单调的。考虑部分类型 $\Sigma(x) = \{P_x^n \subset P_x^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$。注意， $\Sigma(\mathfrak{C})$ 是所有满足 P_x 为平移的元素所构成的集合。由于 T 是弱 o-极小的，集合 $S_\Sigma = \{p \in S_1(T) \mid \Sigma(x) \subset p(x)\}$ 是 $S_1(T)$的闭子集，而 $S_1(T)$按 $<$ 线性有序。因此， $S_\Sigma = \{p \in S_1(T) \mid \Sigma(x) \subset p(x)\}$ 包含一个最大元素，记作 $q \in S_1(T)$。由其最大性可知，

[4]$\mathcal{S}$-极小性定义见 [MT24，定义 6。11]。

我们有 $P_x \subset q(\mathfrak{C})$ 对所有 $x \models q$，因此 P_x 是一个满足 **q**-半区间，且 $P_x^2 \neq P_x$ 成立。根据引理 3.2，P_x 并非由 $\mathcal{E}_q$决定。这就完成了该定理的证明。□

下一个例子表明，定理 3.7（a）的逆命题一般并不成立 .

例 3.8（具有简单半区间和可定义平移的弱准 O-极小理论）。考虑结构 $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, R_{q,k})_{q\,\text{prime}}$ 的理论 T，其中 $R_{q,k} = q\mathbb{Z} + k$。由于 $\mathcal{Z}$是一个$0 \leqslant k < q$着色线性序， T 是弱准 O-极小的。容易验证，在加入后继¯函数后， T 消去量词。对于每个序列 $k = (k_q)_{q\text{ prime}}$，其中对所有 q都有 $0 \leqslant k_q < q$，我们都有一个唯一的类型 $p_{\bar{k}} \in S_1(\varnothing)$，它包含 $\{R_{q,k_q}(x) \mid q\,\text{prime}\}$。这些就是 $\varnothing$ 上的全部 1-类型，因为对于每个 prime q，每个元素都恰好由颜色 $R_{q,k}$（$0 \leqslant k < q$）中的一种着色。注意，对于任意a，若 $b \in \mathfrak{C}$ 处于有限距离，则当且仅当 $a = b$ 时，$\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$；因此，利用量词消去，容易验证，对于每个 $p \in S_1(A)$，每个有界 p-半区间都是单点集； T 具有简单半区间。另一方面，后继函数在 $(\mathfrak{C}, <)$ 上产生了一个平移。

定理 3.9 ($I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$)。 每个有限域上的凸弱 o-极小类型都具有遗传简单半区间。

证明。设 $p \in S(A)$ 是一个凸弱 o-极小类型，其中 A 是有限的。假设 p 的某个扩张（记作 $q \in S(B)$）不具有简单半区间，我们将证明 $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$。由引理 3.5，存在某个 B-可定义扩张 $(D, <)$，它是 $(q(\mathfrak{C}), <)$ 的扩张；并且存在一个单调的 B-可定义半区间族 $\mathcal{S} = (S_x \mid x \in D)$，其属于 $(D, <)$，使得对于某个（所有）$a \models q$， $S_a^{\mathbf{q}}$ 不是由 $\mathcal{E}_q$ 决定的。由于 q 是凸的，根据 [MT24，命题 3.4], ，存在一个公式 $\theta(x) \in q$，使得 $q(\mathfrak{C})$ 在 $(\theta(D), <))$ 中是凸的。将诱导族 $\mathcal{S}^\theta$ 记作 $\mathcal{R}$，使得对所有 $x \in \theta(D)$，都有 $R_x = \theta(D) \cap S_x$。注意，族 $\mathcal{R}$ 是单调的，并且由引理 2.6， 对所有 $x \models q$， R_x 都是一个平移。

固定 $a \models q$，并选取 b_1 和 b_2，使其实现带有 $b_1 < R_a^\omega < b_2$的 q。令 $\mathcal{R}' = (R'_x \mid x \in [b_1, b_2]_{\theta(D)})$为 $\mathcal{R}$ 在区间 $[b_1, b_2]_{\theta(D)}$上诱导的族： $R'_x = R_x \cap [b_1, b_2]_{\theta(D)}$。那么 $\mathcal{R}'$ 是单调的，并且由 $q(\mathfrak{C})$ 在 $(\theta(\mathfrak{C}), <)$中的凸性可知，我们有 $[b_1, b_2]_{\theta(D)} \subseteq p(\mathfrak{C})$。根据我们对 b_1 和 b_2的选择，有 $R_a^n \subseteq [b_1, b_2]_{\theta(D)}$，所以对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $(R'_a)^n = R_a^n$；因此 R'_a 是一个 $\mathcal{R}'$-平移。由此，我们得到一个可定义的半区间族 $[b_1, b_2]_{\theta(D)}$，其中包含一个平移。令 $A_0 \supseteq A$ 为定义区间 $[b_1, b_2]_{\theta(D)}$所需的有限参数集。注意，所有与 $x \in [b_1, b_2]_{\theta(D)}$ 相容的完备类型 $r \in S_1(A_0)$ 都是弱 o-极小的，因为它们扩张了 p。按照 [MT25，定义 4.8], 中的术语，这意味着线段 $[b_1, b_2]_{\theta(D)}$ 在 A_0上是弱准 O-极小的。因此，我们得到一个在有限参数集上弱准 O-极小的可定义集，以及一个包含平移的可定义半区间族；在这种情况下， [MT24，定理 6.17] 保证了 $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$。证明完毕。□

回顾 [MT24，定理 1] 指出，任何满足（SH）的弱拟o-极小理论 T 都有 $2^{\aleph_0}$ 可数模型。由定理 3.7可知，对于小 T，（SH）与（NS）等价；特别地，对于只有少可数模型的理论也是如此。

定理 3.10。只有少可数模型的弱拟o-极小理论具有简单半区间。

4. Condition (R)

本节中，我们研究满足以下条件的弱拟o-极小理论。

（R）对于所有 $A \subseteq \mathfrak{C}$ 和所有 $p \in S_1(A)$，每个等价关系 $E \in \mathcal{E}_p$ 都是相对 0-可定义的。

我们证明，所有拟o-极小理论，以及具有简单半区间且还满足 rosy 或具有有限凸性秩的弱拟o-极小理论，都满足（R）。本节中技术难度最大的结果是命题4.6，其中我们证明，具有简单半区间的弱拟o-极小理论 T 满足（R）当且仅当它是二元的；这足以证实 T的沃恩特猜想。

命题 4.1。 拟 o-极小理论满足条件 (R)。

证明。 假设 T 关于 $<$是准 o-极小的，并令 $p_A \in S_1(A)$ 和 $E_A \in \mathcal{E}_p$，我们证明 E_A 是相对 0-可定义的。我们可以假设 $E_A \neq \mathrm{id}^{p_A(\mathfrak{C})}$ 且 $E_A \neq \mathbf{1}_{p^\circ}$ 令 $p_0 = (p_A)_{\restriction \varnothing}$，并固定 $a \models p_A$。由于 $p_A(\mathfrak{C})$ 是 $p_0(\mathfrak{C})$ 的凸子集，且 $[a]_E$ 是 $p_A(\mathfrak{C})$的有界凸子集，因此 $[a]_E$ 是 $p_0(\mathfrak{C})$的有界凸子集，并且它在 $p_0(\mathfrak{C})$内是相对 Aa-可定义的。我们证明存在 $\theta(x) \in p_0(x)$ 和 $b,\ c \in \mathfrak{C}$，使得:

$$[a]_{E_A} = (\theta(\mathfrak{C}) \cap (b, c)) \cap p_0(\mathfrak{C}). \tag{1}$$

由于 T 是准 o-极小的，在 $p_0(\mathfrak{C})$ 内相对定义 $[a]_{E_A}$ 的公式可取为形式$\bigvee_{i=1}^n \theta_i(x) \wedge x \in J_i$，其中 $\theta_i(x)$ 是 L-公式，而 J_i是 $\mathfrak{C}$中的区间。由于 $[a]_{E_A} \subset p_0(\mathfrak{C})$，我们可以假设对所有 $i = 1, \ldots, n$均有 $\theta_i(x) \in p_0(x)$，并注意到 $\theta(x) \wedge \bigvee_{i=1}^n x \in J_i$仍在 $p_0(\mathfrak{C})$内相对定义$[a]_{E_A}$，其中 $\theta(x) = \bigwedge_{i=1}^n \theta_i(x)$。此外，我们可以假设每个 J_i 都与 $[a]_{E_A}$交。某个 J_i 的左端，记作 b，满足 $b \leqslant [a]_{E_A}$，而某个 J_i 的右端，记作 c，满足 $[a]_{E_A} \leqslant c$。容易看出，$[a]_{E_A}$在 $p_0(\mathfrak{C})$内由 $\theta(x) \wedge x \in J$相对定义，其中 J是某个以 b和 c为端点的区间。现在注意到，类 $[a]_{E_A}$ 没有极小（极大）元素；否则，p_A 的每一个实现在其 E_A-类中都将是极小（极大）的，从而我们会有$E_A = \mathrm{id}^{p_A(\mathfrak{C})}$，但情况并非如此。因此 b, $c \notin [a]_{E_A}$，所以我们可以假设 $J = (b,\ c)$，从而我们已确立(1)。

由引理 2.17 可知，只需证明等价类 $[a]_{E_A}$ 是 a-不变的。为导出矛盾，假设存在 $A' \equiv A\,(a)$ 使得$[a]_{E_A} \neq [a]_{E_{A'}}$（其中 $E_{A'}$ 是 E_A的共轭）。那么，经过可能的调换序的方向和／或交换 A 与 A'的角色，我们可以假设在$_{p_0(\mathfrak{C})}([a]_{E_{A'}}) \subset$中$_{p_0(\mathfrak{C})}([a]_{E_A})$。记：$q_0 = \mathrm{tp}(c)$，$q_A = \mathrm{tp}(c/A)$, 以及 $C_A(a) = \{x \in p_0(\mathfrak{C}) \mid [a]_{E_A} < x\}$。由 (1) 可推出:

$$[a]_{E_A} < c \ \text{ and } \ c \leqslant C_A(a). \tag{2}$$

注意，集合 $C_A(a) \cap p_A(\mathfrak{C})$是 $C_A(a)$的一个初始部分，并且对 E_A-等价类封闭。因此，由于没有任何 E_A-等价类包含最小元素，$C_A(a)$也不包含最小元素，所以 $c \notin C_A(a)$。那么，$[a]_{E_A} < c <$$C_A(a)$ 推出 $c \notin p_0(\mathfrak{C})$，因此 $q_0 \neq p_0$。

选取 $a_0 c_0 \equiv ac\,(A)$ 使得 $[a_0]_{E_A} < [a]_{E_A}$。于是 $c_0 \models q_A$, $[a_0]_{E_A} < c_0$，并且在 $[a_0]_{E_A}$ 和 c_0之间不存在 p_A 的实现。由于 $q_A \neq p_A$ 且 $[a_0]_{E_A} < [a]_{E_A}$，我们得出 $c_0 < [a]_{E_A} < c$。接下来，选取 $c' \models q_0$使得 $c'A' \equiv cA\,(a)$。注意，在$_{p_0(\mathfrak{C})}([a]_{E_{A'}}) \subset$中，$_{p_0(\mathfrak{C})}([a]_{E_A})$蕴含对于某个 $d \in [a]_{E_A}$有$[a]_{E_{A'}} < d$。于是 $d \in C_{A'}(a)$，因此 $c' < d$且 $c' \in$是 ($\mathfrak{C}$中的$[a]_{E_A}$ 的凸包 conv$([a]_{E_A})$，$<$)。我们得出，c' 将集合 conv$([a]_{E_A})$ 分成两部分，每部分都包含 $p_A(\mathfrak{C})$的实现。此外，$c' \in$conv$([a]_{E_A})$ 与 $c_0 < [a]_{E_A} < c$ 结合，得到 $c_0 < c' < c$。由于$q_A(\mathfrak{C})$ 是 $q_0(\mathfrak{C})$的凸子集，$c_0 < c' < c$ 连同 c_0、$c \models q_A$ 和 $c' \models q_0$ 蕴含 $c' \models q_A$; 因此 $c \equiv c'\,(A)$。根据我们对 c的选择，$[a]_{E_A} < c < C_A(a)$ 蕴含 c 不将任何 E_A类的凸包分成两部分；另一方面，c' 将 conv$([a]_{E_A})$分成两部分。这与 $c \equiv c'\,(A)$ 矛盾，并完成了该命题的证明。□

注 4.2. 不难验证，所有二元一阶理论都满足条件 (R)。

现在，我们考察不满足条件 (R) 的弱拟o-极小理论。

引理 4.3. 设 $<$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的一个 0-可定义线性序，$p_A \in S_1(A)$ 弱 o-极小，且 $E_A \in \mathcal{E}_{p_A}$。假设 E_A 不是相对 0-可定义的，并且 $(p_A(\mathfrak{C})/E_A, <)$ 是一个稠密线性序。那么，对于所有 $b \models p_A$，存在一个序列 $(A_n \mid n \in \omega)$，使得 $A_0 = A$、$\mathrm{tp}(A_n) = \mathrm{tp}(A)$，并且对于所有 $n \in \omega$，等价类$[b]_{E_{A_n}}$ 都包含无限多个 $E_{A_{n+1}}$-等价类（其中 E_{A_n} 是 E_A的共轭）。

证明。 首先，我们断言 对于所有 $b \models p$，存在一个自同构 $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$，使得$E_A$-等价类 $[b]_{E_A}$ 包含无限多个 $f(E_A)$-等价类，其中一个就是 $[b]_{E_{f(A)}}$。

为证明该断言，固定 $a \models p_A$并令 $p = \mathrm{tp}(a)$。由于 E_A 不是相对 0-可定义的，由引理2.17 等价类 $[a]_{E_A}$ 不是 a-不变的，因此存在一个 $f \in \mathrm{Aut}_a(\mathfrak{C})$ 使得 $f([a]_{E_A}) \neq [a]_{E_A}$。于是$E_{f(A)} \in \mathcal{E}_{p_{f(A)}}$ 且 $f([a]_{E_A}) = [a]_{E_{f(A)}}$，其中 $p_{f(A)}$ 表示 p_A的共轭。等价类 $[a]_{E_A}$和 $[a]_{E_{f(A)}}$ 是 $p(\mathfrak{C})$的两个不同凸子集，因此由 $(p(\mathfrak{C})$和 $<)$ 生成的初始或末段

它们彼此不同。不失一般性，假设 $\mathrm{in}([a]_{E_{f(A)}}) \subset \mathrm{in}([a]_{E_A})$；其他情况的处理方式类似。由于 $(p_A(\mathfrak{C})/E_A, <)$ 是稠密无限序，对于每个 $c > [a]_{E_A}$，都有无穷多个满足 $[a]_{E_A} < [x]_{E_A} < c$ 的 E_A-等价类。特别地，$\mathrm{in}([a]_{E_{f(A)}}) \subset \mathrm{in}([a]_{E_A})$ 蕴含着 $[a]_{E_A}$ 内有无穷多个 $E_{f(A)}$-等价类；从中选取 b。显然，等价类 $[b]_{E_A}(= [a]_{E_A})$ 包含无穷多个 $E_{f(A)}$-等价类，其中一个是 $[b]_{E_{f(A)}}$。既然这对一个$b \models p_A$成立，对所有的都成立。这就证明了断言。

为完成该引理的证明，固定 $b \models p$，并通过递归定义：$A_0 = A$，$A_{n+1} = f_n(A_n)$，其中f_n 由将该断言应用于 b、并以 A_n 代替 A而给出。□

由此可见，弱拟 o-极小理论满足 (R)，当且仅当不存在完全1-型 p_A，$b \models p_A$，以及序列 $(A_n \mid n \in \omega)$ 满足该引理的结论。这一等价条件，在任何同时具有简单半区间且所有1-类型均为凸的线性序结构的背景下，已由 Baizhanov 与 Zambarnaya 研究，见 [BZ26]。

注 4.4. 考虑可数弱准 o-极小理论的类 T。我们已经指出，二元的 T 与准 o-极小 T 满足条件 (R)。利用引理4.3，我们得到两个新的子类。

(a) T 具有有限凸性秩，且只有少可数模型。
Kulpeshov 在 [Kul98]中引入了弱 o-极小理论中一元公式的凸性秩，记为 $\phi(x)$，定义如下：$RC(\phi(x))$

(i) $RC(\phi(x))) \geqslant 0$，若 $\phi(x)$ 相容；(ii) $RC(\phi(x)) \geqslant n+1$，若存在参数可定义的凸等价关系 $E(x,\ y)$定义在 $\mathfrak{C}$ 上，并且存在一个无限集合 $\{b_i \mid i \in \omega\}$，其元素是不同 E-等价类的代表元，使得 $RC(\phi(x) \wedge E(x,\ b_i)) \geqslant n$ 对所有 $i \in \omega$都成立；(iii) $RC(\phi(x)) = n$，若 n 是满足 $RC(\phi(x)) \geqslant n$的最大 n；如果不存在这样的 n，则 $RC(\phi(x)) = \infty$。

T 具有有限凸性秩，当且仅当 $RC(x = x) < \omega$。由于 T 只有少可数模型，定理 3.10适用，并保证对于所有非代数类型 $(p(\mathfrak{C})/E, <)$ 以及所有 $p \in S_1(A)$，序 $E \in \mathcal{E}_p \setminus \{\mathbf{1}_p\}$都是稠密且无端点的。因此，我们可以应用引理 4.3；由于其结论与 $RC(x = x) < \omega$矛盾，E 是相对 0-可定义的。因此，T 满足 (R)。

(b) T 是 rosy 的，并且只有少可数模型。
Ealy 和 Onshuus 在 [EO07] 中引入了等价秩 $eq - rk_\Delta(\Pi(\bar{x}))$，其中 $\Pi(\bar{x})$ 是一个部分类型，而 Δ 是任意一阶理论中 L 的公式构成的有限集。定义的主要条款如下：

- $eq - rk_\Delta(\Pi(\bar{x})) \geqslant \alpha + 1$ 当且仅当在 $\mathfrak{C}^{|\bar{x}|}$, $E(\bar{x}, \bar{y})$ 上存在某个等价关系$^-$，由 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ 定义，且满足 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Delta$ 和 $\bar{c} \in \mathfrak{C}$，并且存在 $(b_j \mid j \in \omega)$ 个来自不同E-等价类的代表元，使得 $eq - rk_\Delta(\Pi(\bar{x}) \wedge E(\bar{x}, b_j)) \geqslant \alpha\ (j \in \omega)$。

他们证明，一阶理论是 rosy 的，当且仅当所有等价秩 $eq - rk_\Delta(\Pi(\bar{x}))$ 都是有限的（对所有 $\bar{x}$，$\Pi(\bar{x})$，以及有限的 Δ）。仿照 (a) 部分的论证，我们得出 T 满足 (R)。

引理 4.5。如果弱准 O-极小理论 T 满足条件 (R)，那么它也满足：$(\mathrm{R})^{\mathrm{eq}}$ 对所有 $A \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$ 和所有 $p \in S_1(A)$，关系 $E \in \mathcal{E}_p$ 都是相对 0-可定义的。

证明。固定 $\mathfrak{C}$，$A \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$上的0-可定义线性序 $<$、实类型 $p \in S_1(A)$以及 $E \in \mathcal{E}_p$；记$\mathfrak{p} = (p, <)$。若 $E = \mathbf{1}_p$，则结论显然，故假设 $E \neq \mathbf{1}_p$。选取 $B \subseteq \mathfrak{C}$ 使得$A \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$。令 $p_{AB} = (\mathfrak{p}_r)_{\restriction AB}$，并令 $p_B = (\mathfrak{p}_r)_{\restriction B}$；显然，集合 $p_B(\mathfrak{C}) = p_{AB}(\mathfrak{C})$ 是 $p(\mathfrak{C})$的终段。注意 E 在 $p(\mathfrak{C})$上相对 B-可定义，且对所有 $b \models p_B$，$E \neq \mathbf{1}_p$ 蕴含类$[b]_E$ 是 $p_B(\mathfrak{C})$的有界凸子集；由此可知，关系 $E_B = E_{\restriction p_B(\mathfrak{C})}$ 是 $p_B(\mathfrak{C})$, $E_B \neq \mathbf{1}_{p_B}$上的相对 B-可定义等价关系，并且对所有 $b \models p_B$，$[b]_E = [b]_{E_B}$ 成立。于是条件(R)适用于类型 p_B 与关系 E_B：E_B 是相对0-可定义的。固定 $b \models p_B$。由引理2.17，存在 $p_{\restriction \varnothing}(\mathfrak{C})$ 上的0-可定义等价关系 E_0，使得 $[b]_{E_0} = [b]_{E_B}$。于是$[b]_E = [b]_{E_0}$，故 $[b]_E$ 是 b-不变的。由引理2.17，E 在 $p(\mathfrak{C})$上相对0-可定义。□

命题 4.6. 对任意具有简单半区间的弱拟 o-极小理论 T，下列条件等价。

1) T 满足条件 (R)；2) 对所有 $A \subset \mathfrak{C}^{eq}$，每个实排序类型 $p \in S_1(A)$ 都是平凡的；3) T 是二元的。

证明。 1)⇒2) 假设 T 满足条件 (R)。设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是定义在 $A \subset \mathfrak{C}^{eq}$上的弱 o-极小对，其中 $p \in S_1(A)$。我们需要证明 p 是平凡的。反设不然。那么，根据 [MT24，注 5，8], 在可能略微扩大参数集 A 后，我们可以找到一个 $\mathbf{p}_r$-三角形（这里 $\mathbf{p} = (p, <)$）：

$$a_0, a_1, a_2 \models p, \quad a_0 \lhd^{\mathbf{p}} a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2 \quad \text{and} \quad a_1 \not\perp_{Aa_0} a_2. \tag{1}$$

记 $q = \mathrm{tp}(a_1/Aa_0)$，并选取公式 $\phi(x, y) \in \mathrm{tp}(a_1, a_2/Aa_0)$ 作为 $a_1 \not\perp_{Aa_0} a_2$ 的见证：集合 $\phi(a_1, \mathfrak{C})$ 在 $q(\mathfrak{C})$ 中有一个上界。以显然的方式修改 ϕ，使得 $\phi(a_1, q(\mathfrak{C}))$ 是一个 q-半区间。由于 T 具有简单半区间，存在一个等价关系 $E \in \mathcal{E}_q$，使得$\phi(a_1, q(\mathfrak{C})) = \{y \in [a_1]_E \mid a_1 \leqslant y\}$。于是 $a_2 \in [a_1]_E$。此外，由于 $\phi(a_1, q(\mathfrak{C}))$ 在$q(\mathfrak{C})$ 中有一个上界，类 $[a_2]_E$ 也有上界；因此，$E \neq \mathbf{1}_q$。由引理 4.5，理论 T 满足条件 (R)^{eq}，所以 E 在 $q(\mathfrak{C})$ 上相对 0-可定义。于是，由引理 2.17，存在一个 0-可定义等价关系E_0，定义在 $\mathrm{tp}(a_2)$ 的轨迹上，使得 $[a_2]_E = [a_2]_{E_0}$。由此可知，类 $[a_2]_{E_0}$ 是 $q(\mathfrak{C})$ 的有界子集，因此它在 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 中有界。由于 E_0 相对 0-可定义，$a_1, a_2 \models p$，且 $a_2 \in [a_1]_{E_0}$，我们推得 $a_1 \not\perp_A a_2$，这与 (1) 中的 $a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2$ 矛盾。因此，p 是平凡的，证毕。

2)⇒3) 假设 2) 成立，我们证明对于所有 a，b，$c \in \mathfrak{C}$ 以及所有 $A \subseteq \mathfrak{C}^{eq}$，以下结论成立：

$$\mathrm{tp}_{xy}(ab/A) \cup \mathrm{tp}_{yz}(bc/A) \cup \mathrm{tp}_{xz}(ac/A) \vdash \mathrm{tp}_{xyz}(abc/A). \tag{1}$$

显然，这足以得出 T 是二元的。

为简化记号，将参数 A 并入语言；这不会影响关于 T 的假设。固定 a，b，$c \in \mathfrak{C}$，并记 $p = \mathrm{tp}(a)$、$q = \mathrm{tp}(b)$ 和 $r = \mathrm{tp}(c)$。证明分为两种情形；第一种情形又分为两个子情形，而第二种情形可归结为第一种。

情形 Ia. $\{a, b, c\}$ 是一个两两独立集，且类型 $\{p, q, r\}$ 两两 $\not\perp^w$.

为类型 p、q 和 r 各配备一个序，使弱 o-极小对 $\mathcal{F} = \{\mathbf{p}、\mathbf{q}、\mathbf{r}\}$ 直接非正交。由于元素 a、b 和 c 两两独立，根据 [MT24，定理 2.12]，它们是 $\lhd^{\mathcal{F}}$-可比较的。不失一般性，假设 $c \lhd^{\mathcal{F}} b \lhd^{\mathcal{F}} a$。根据 [MT24，命题 5.13]，来自 $\mathcal{F}$ 的平凡弱 o-极小类型的每个 $\lhd^{\mathcal{F}}$-递增实现序列都是 $\mathcal{F}$-独立的，也就是说，

$$c \lhd^{\mathcal{F}} b \lhd^{\mathcal{F}} x \vdash cb \lhd^{\mathcal{F}} x; \text{ in particular, this holds for } x = a. \tag{2}$$

注意，信息 $b \lhd^{\mathcal{F}} a$ 表示 $\mathrm{tp}_x(a/b) = (\mathbf{p}_r)_{\restriction b}$，而 $cb \lhd^{\mathcal{F}} a$ 表示 $\mathrm{tp}_x(a/bc) = (\mathbf{p}_r)_{\restriction bc}$。因此，(2) 蕴含 $\mathrm{tp}_x(a/b) \vdash \mathrm{tp}_x(a/bc)$, ，这显然蕴含 (1)。

Case Ib. $\{a, b, c\}$ 是一个两两独立集，而类型 $\{p, q, r\}$ 并非两两 $\not\perp^w$.

不失一般性，假设 $p \perp^w q$ 并记 $p_c = \mathrm{tp}(a/c)$，$q_c = \mathrm{tp}(b/c)$。由于 p 和 q 是平凡类型，并且根据 [MT24定理 5.10(c)]，平凡类型的弱正交性可传递到它们的非分叉扩张，因此我们有 $p_c \perp^w q_c$，从而 $\mathrm{tp}_x(a/c) \cup \mathrm{tp}_y(b/c) \vdash \mathrm{tp}_{xy}(ab/c)$。显然，这蕴含 (1)。

情形 II。$\{a, b, c\}$ 不是一个两两独立集。

令 $D = m(a, b) \cup m(b, c) \cup m(c, a)$ 并且不失一般性，假设 $D = m(a, b)$。那么由命题 2.25(b)，元素 $\{a, b, c\}$ 在 D上两两独立，因此由情形 I 可得：

$$\mathrm{tp}_{xy}(ab/D) \cup \mathrm{tp}_{yz}(bc/D) \cup \mathrm{tp}_{xz}(ac/D) \vdash \mathrm{tp}_{xyz}(abc/D). \tag{3}$$

固定 a, b 作为 (3) 中的参数。我们得到 $\mathrm{tp}_z(c/Db) \cup \mathrm{tp}_z(c/Da) \vdash \mathrm{tp}_z(c/Dab)$，结合$D \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$ 和 $D \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$，可得 $\mathrm{tp}_z(c/b) \cup \mathrm{tp}_z(c/a) \vdash \mathrm{tp}_z(c/ab)$；(1) 随之成立。

3)⇒1) 我们已在注记 4.2 中指出，任意二元的 T 都满足 (R)。 □

定理 4.7。 对于满足 (R) 的弱拟o-极小理论，沃恩特猜想成立。

证明。 设 T 是弱拟o-极小的，满足 (R)，且 $I(T,\ \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$。根据定理 3.10，$T$ 具有简单半区间，因此命题4.6 适用： T 是二元的。于是，根据 T [MT20，定理 1]，沃恩特猜想对其成立。 □

推论 4.8. 对任何此外为准 o-极小的、rosy 的或具有有限凸性秩的弱拟 o-极小理论，沃恩特猜想成立。

证明。 假设 $I(T,\ \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$。则由定理 3.10， T 具有简单半区间。此外，T 满足 (R)。对于 T 为准 o-极小的情形，这由命题 4.1 得出，而对于 T 为 rosy 或具有有限凸性秩的情形，这由注记 4.4 得出。由定理 4.7 ，沃恩特猜想对 T 成立。 □

5. Convex types, definabilty and triviality

本节的主要技术结果是如下定理。

定理 5.1. 假设 T 是可数的，且 $I(T,\ \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$。则每一个具有遗传简单半区间的弱 o-极小类型都是凸的。

有了这个定理和定理 3.9 ，我们就能迅速完成小节 5.2 中定理 1 的证明。随后，我们将在小节 5.3中证明命题5.15，该命题将凸弱 o-极小类型的可定义性与其平凡性联系起来，并将在第6节马丁猜想的证明中发挥关键作用。特别是，命题 5.15意味着，模型上的每个凸可定义弱 O-极小类型（任意一阶 T）都是平凡的。

5.1. p-大集合。

定义 5.2。 设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是 A 上的弱 o-极小对。

(a) 参数可定义集 $D \subset \mathfrak{C}$ 若存在实现 p 的 $a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2$ ，使得 $(p(\mathfrak{C})$ 的线段 $[a_1, a_2]$ 完全包含于 D 中，则称其为 p-大；否则称 D 为 p-小。 (b) 公式 $\phi(x, b)$ 是 p-大的，当且仅当集合 $\phi(\mathfrak{C}, b)$ 是 p-大的。(c) 类型是 p-大的，当且仅当它由 p-大的公式组成。

注 5.3。 设 $p \in S_1(A)$ 是一个弱 o-极小类型。显然， p-大集合的超集也是 p-大的；此外， p 的任意非分叉扩张都是 p-大类型。

(a) p-大集合包含 p 中具有任意序型的 Morley 序列；这样的序列总能在见证 p-大的区间 $[a_1,\ a_2]$ 内找到。

(b) 对每个 p-大集合 D 和每个小集 $C \subseteq p(\mathfrak{C})$ ，都存在一个 $C' \subset D$ ，使得 $C \equiv C'\,(A)$: 若 C 是 p 的一个小实现集，则对于某个由 p 的实现构成的独立对， $b_1 < C < b_2$ 成立。通过一个 A-自同构将区间 $[b_1,\ b_2]$ 移至 D，便将 C 移至 C'。

(c) 设 $(\mathfrak{C},\ <) \models DLO$，设 p 是 $\varnothing$ 上唯一的类型，并设 $a,\ b \in \mathfrak{C}$ 满足 $a < b$。那么，由 $a < x < b$ 确定的 $q \in S_1(a,\ b)$ 是 p 的一个分叉的、 p-大扩张。

弱 o-极小类型的大扩张由以下引理刻画。

引理 5.4. 设 $(p, <)$ 是 A 上的弱 o-极小对，并设 $q \in S(B)$ 是 p 的一个扩张。记 $\mathbf{q} = (q, <)$。以下条件等价:

(1) q 是 p-大的；(2) 对所有 $a, b \models q$, $a \lhd^{\mathbf{q}} b$ 蕴含 $a \lhd^{\mathbf{p}} b$ ；(3) 对所有 $a \models q$, $\mathcal{D}_p(a) \subseteq \mathcal{D}_q(a)$ 。

证明. (1)⇒(2) 假设 q 是 p-大的。设 $a, b \models q$ 满足 $a \lhd^{\mathbf{q}} b$；我们需要证明 $a \lhd^{\mathbf{p}} b$。由于 q 是 p-大的，存在某个 $c \models q$ 使得 $b \lhd^{\mathbf{p}} c$；我们有 $a \lhd^{\mathbf{q}} b \lhd^{\mathbf{p}} c$。于是 $a \lhd^{\mathbf{q}} b < c$ 蕴含$a \lhd^{\mathbf{q}} c$，因此 $b \equiv c\,(Ba)$，并且存在一个 d使得 $db \equiv bc\,(Ba)$；于是 $a \lhd^{\mathbf{q}} d \lhd^{\mathbf{p}} b$。特别地， $a < d \lhd^{\mathbf{p}} b$蕴含 $a \lhd^{\mathbf{p}} b$，即为所需。

(2)⇒(3) 假设 (2) 成立，并令 $a \models q$。我们需要证明 $\mathcal{D}_p(a) \subseteq \mathcal{D}_q(a)$。否则，将存在某个 $b \in \mathcal{D}_p(a) \setminus \mathcal{D}_q(a)$。由于 $\mathcal{D}_p(a) \cap q(\mathfrak{C})$ 和 $\mathcal{D}_q(a)$ 是 $q(\mathfrak{C})$ 的凸子集，且包含 a，又由于 $\mathcal{D}_q(a)$ 是 $q(\mathfrak{C})$的有界子集，因此可以在 $q(\mathfrak{C})$内找到这样的 b。不失一般性，我们可以

还假设 $\mathcal{D}_q(a) < b$，也就是说，$a \lhd^{\mathbf{q}} b$（另一种情况 $b < \mathcal{D}_q(a)$ 类似）。由 (2) 可得$a \lhd^{\mathbf{p}} b$，因此 $b \notin \mathcal{D}_p(a)$。矛盾。

(3)⇒(1) 假设 $\mathcal{D}_p(a) \subseteq \mathcal{D}_q(a)$ 对所有 $a \models q$ 成立。设 $a_1, a_2 \models q$ 使得 $a_1 \lhd^{\mathbf{q}} a_2$；我们证明$a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2$。显然，$a_1 \lhd^{\mathbf{q}} a_2$ 蕴含 $\mathcal{D}_q(a_1) < \mathcal{D}_q(a_2)$，因此 (3) 蕴含 $\mathcal{D}_p(a_1) < \mathcal{D}_p(a_2)$，即 $a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2$。现在，$a_1, a_2 \models q$、$a_1 \lhd^{\mathbf{p}} a_2$ 以及 $q(\mathfrak{C})$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 内的凸性共同蕴含 q 是 p-大的，从而证明了 (1)。□

引理 5.5. 设 $p \in S(A)$ 是一个平凡的弱 o-极小类型，并设 $q \in S(B)$是 p 的一个 p-大扩张。则 q 是平凡的，且对所有 $a \models q$ 有 $\mathcal{D}_q(a) = \mathcal{D}_p(a)$。

证明。设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是一个关于 A 的弱 o-极小对，且 $\mathbf{q} = (q, <)$。首先，我们证明对所有 $a \models q$，$\mathcal{D}_q(a) = \mathcal{D}_p(a)$。反之，依据引理 5.4，我们有 $\mathcal{D}_p(a) \subset \mathcal{D}_q(a)$。令 $a_0 \models q$为任意元素，并取 $b_0 \models q$ 使得 $b_0 \in \mathcal{D}_q(a_0) \setminus \mathcal{D}_p(a_0)$；如有必要，反转序后，我们可以假设 $a_0 \lhd^{\mathbf{p}} b_0$，但 $a_0 \not\lhd^{\mathbf{q}} b_0$。取 $a_1, b_1 \models q$ 使得 $b_0 \lhd^{\mathbf{q}} a_1 \lhd^{\mathbf{q}} b_1$。注意到$a_0 b_0 \not\equiv a_1 b_1\ (B)$，因此存在 $\theta(x, y) \in \mathrm{tp}(a_0, b_0/B)$ 使得 $\models \neg\theta(a_1, b_1)$。我们有：

$$a_0 \lhd^{\mathbf{p}} b_0 \lhd^{\mathbf{q}} a_1 \lhd^{\mathbf{q}} b_1, \quad a_0 \not\lhd^{\mathbf{q}} b_0 \quad \text{and} \quad \models \theta(a_0, b_0) \wedge \neg\theta(a_1, b_1).$$

通过递归，定义 $n \geqslant 1$ a_{2n}，b_{2n}，a_{2n+1}，$b_{2n+1} \models q$使得：

$$b_{2n-1} \lhd^{\mathbf{q}} a_{2n} \quad \text{and} \quad a_{2n} b_{2n} a_{2n+1} b_{2n+1} \equiv a_0 b_0 a_1 b_1\ (B).$$

根据引理 5.4，$a_0 \lhd^{\mathbf{p}} b_0 \lhd^{\mathbf{p}} a_1 \lhd^{\mathbf{p}} \cdots \lhd^{\mathbf{p}} a_n \lhd^{\mathbf{p}} b_n \lhd^{\mathbf{p}} \ldots$。这是 $_r\mathbf{p}A$上的一个 Morley 序列 $\lhd^{\mathbf{p}}$，因为每个[-递增的平凡类型实现序列都是（[MT24，引理 5.1]）。特别地，序列 $(a_n b_n \mid n \in \omega)$ 在 A上不可分辨，因此 $\models \theta(a_{2n}, b_{2n}) \wedge \neg\theta(a_{2n+1}, b_{2n+1})(n \in \omega)$ 与 p 具有非独立性性质这一事实矛盾。因此，$\mathcal{D}_q(a) = \mathcal{D}_p(a)$ 对所有 $a \models q$均成立。

现在，我们证明 q 是平凡的。令 $C = (c_i)_{i \in \omega}$ 为一个 $\lhd^{\mathbf{q}}$-递增序列；我们需要证明它是 B上的 $\mathbf{q}_r$ 的 Morley 序列。根据引理 5.4，我们知道序列 C 是 $\lhd^{\mathbf{p}}$-递增的，因此 p 的平凡性蕴含 C 是 A上的 $\mathbf{p}_r$ 的 Morley 序列。通过对 n 作归纳，我们证明 $C_n = (c_i)_{i \leqslant n}$是 B上的 $\mathbf{q}_r$ 的 Morley 序列。对于 $n = 1$，这是显然的，因此假设对于某个 $n \geqslant 1$，C_n 是 Morley 序列。令$p_n = (\mathbf{p}_r)_{\restriction A\bar{c}_{<n}}$ 和 $q_n = (\mathbf{q}_r)_{\restriction B\bar{c}_{<n}}$。那么 c_n、$c_{n+1} \models q_n$，并且由于 C 是 A 上的 $\mathbf{p}_r$ 的 Morley 序列，我们有$c_n \lhd^{\mathbf{p}_n} c_{n+1}$，从而 $\mathcal{D}_{p_n}(c_n) < \mathcal{D}_{p_n}(c_{n+1})$。显然，这意味着 q_n 是一个 p_n-large 类型。还要注意，p_n 是平凡的，因为它是平凡类型的非分叉扩张，所以根据上面的证明，对于 $i = n$、$n+1$，我们有$\mathcal{D}_{p_n}(c_i) = \mathcal{D}_{q_n}(c_i)$。于是 $\mathcal{D}_{q_n}(c_n) < \mathcal{D}_{q_n}(c_{n+1})$，即 $c_n \lhd^{\mathbf{q}_n} c_{n+1}$。这证明了$C_{n+1}$ 是 B 上的 $\mathbf{q}$ 的 Morley 序列，并完成了该引理的证明。□

5.2. **凸弱 o-极小类型。**

引理 5.6。 每个具有完备凸 p-大的扩张的弱 o-极小类型 p 都是凸的.

证明。设 $(p, <)$ 是 $\varnothing$ 上的弱 o-极小对，且 $q \in S_1(A)$ 是 p 的一个凸 p-大扩张。取 $(D, <)$，即 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的一个 0-可定义扩张。由于 q 是凸的，我们可以应用 MT24，命题 3.4]：存在一个公式 $\theta_A(x) \in q$，使得 $(\theta_A(\mathfrak{C}), <)$ 是 $(p(\mathfrak{C}), <)$ 的一个可定义扩张，且 $q(\mathfrak{C})$ 是 $\theta_A(\mathfrak{C})$ 的一个凸子集；不失一般性，假设 $\theta_A(\mathfrak{C}) \subseteq D$。由于 $q(\mathfrak{C})$ 是 $p(\mathfrak{C})$ 的凸子集，我们有：

$$q(x_1) \cup p(x) \cup q(x_2) \cup \{x_1 < x < x_2\} \vdash q(x).$$

那么 $q(x_1) \cup p(x) \cup q(x_2) \cup \{x_1 < x < x_2\} \vdash \theta_A(x)$，因此根据紧致性，存在一个公式 $\phi_p(x) \in p$ 这意味着 $x \in D$ 使得：

$$q(x_1) \cup \{\phi_p(x)\} \cup q(x_2) \cup \{x_1 < x < x_2\} \vdash \theta_A(x). \tag{1}$$

我们将证明 $\phi_p(x)$ 见证了 p 的凸性：$p(\mathfrak{C})$ 在 $(\phi_p(\mathfrak{C}), <)$ 中是凸的。假设 $a_1, a_2 \in p(\mathfrak{C})$ 和 $\models \phi_p(a) \wedge a_1 < a < a_2$；我们需要证明 $a \models p$。由于 q 是 p-大的，根据注 5.3(b)，存在 $b_1, b_2 \in q(\mathfrak{C})$，使得 $\mathrm{tp}(a_1, a_2) = \mathrm{tp}(b_1, b_2)$。取一个 $b \in \phi_p(\mathfrak{C})$，使得 $\mathrm{tp}(b, b_1, b_2) = \mathrm{tp}(a, a_1, a_2)$。于是 $b_1, b_2 \models q$, $b \in \phi_p(\mathfrak{C})$，且 $b_1 < b < b_2$，因此由 (1) 可得 $\models \theta_A(b)$。现在我们有：$b_1, b_2 \models q$,$b_1 < b < b_2$，且 $b \in \theta_A(x)$。由于 $\theta_A(x)$ 见证了 $q(\mathfrak{C})$ 的凸性，我们得出 $b \in q(\mathfrak{C})$。特别地，$b \models p$ 成立。根据 b 的选取，我们有 $\mathrm{tp}(b) = \mathrm{tp}(a)$，因此 $a \models p$。所以，p 是一个凸类型。□

由于孤立弱 o-极小类型是凸的，我们立即得到一个推论。

推论 5.7. 若弱 o-极小类型 p 有一个孤立的、 p-大扩张，则 p 是凸的。

在引理5.9的证明中，我们将需要以下事实。

事实 5.8 ([MT25，命题 7.8(a)])。 设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 为 A上的弱 o-极小对。假设 $I = (a_j \mid j \in J)$ 是$\mathbf{p}^r$ 中在 A、 $a \models p$上的（可能有限的）Morley 序列，且 $a \in \mathrm{conv}(I)$ （<-凸包，即 I的凸包）。则我们至多可从 I 中去掉一个元素，并将 a 插入其位置，使得该序列在 A上仍为 Morley 序列。

沿用 Newelski [New03], 的说法，我们称元组 b 在 A 上几乎原子，如果存在有限 $A_0 \subseteq A$，使得 $\mathrm{tp}(b/A_1)$ 对所有有限 A_1 （满足 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A$）都是孤立的；集合 B 在 $A \subseteq B$上几乎原子，如果每个有限元组 $b \in B$ 都如此。若理论是小的，则在任意可数集上存在几乎原子模型。此外，若 T 是小的， A是可数的，且 $\Pi(x)$ 是 A上局部可省略的部分类型（没有相容公式 $\phi(x)$ 蕴涵 $\Pi(x)$），则存在可数的 $M \models T$，它在 A 上几乎原子并省略 $\Pi(x)$；对局部可省略部分类型的任意可数族，同样的结论成立。

引理 5.9 (T 小)。 设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是关于 $\varnothing$ 的弱 o-极小对，且具有遗传简单半区间。假设 $A = (a_i \mid i \in I)$ 是 $\mathbf{p}^r$ 中的可数 Morley 序列， M 可数，且在 A 上几乎原子， $b \in p(M)$ 和 $b \in \mathrm{conv}(A)$。那么 $b \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_p(a_i)$ 或类型 $\mathrm{tp}(b/A)$ 是 p-大的。

证明。 假设$b \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_p(a_i)$，我们将证明类型 $\mathrm{tp}(b/A)$是 p-大的，也就是说，$\mathrm{tp}(b/A)$ 中的每个公式都是 p-大的。事实上，只需证明对于某个有限 $A_0 \subseteq A$，每个隔离 $\mathrm{tp}(b/A_0)$ 的公式 $\phi(x)$都是 p-大的；那么，由于类型 $\mathrm{tp}(b/A)$ 在 A 上几乎原子，该类型中的每个公式都蕴含于这样一个 p $\phi(x)$，因此也会是 p-大的。

假设 $\phi(x)$ 是在有限参数集 $A_0 \subset A$ 上，且 $\phi(x) \vdash \mathrm{tp}(b/A_0)$。此外，我们可以假设 A_0 足够大，使得 $b \in \mathrm{conv}(A_0)$。于是事实 5.8 适用，因此存在$a_k \in A_0$ 满足 $b \equiv a_k\,(A_0 \setminus \{a_k\})$；记 $A_k = A_0 \setminus \{a_k\}$ 并令 $q = \mathrm{tp}(b/A_k)$。假设$b \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_p(a_i)$ 推出 $b \notin \mathcal{D}_p(a_k)$，因此 $\mathcal{D}_p(a_k) < \mathcal{D}_p(b)$ 或 $\mathcal{D}_p(b) < \mathcal{D}_p(a_k)$ 成立。从现在起，我们假设 $\mathcal{D}_p(a_k) < \mathcal{D}_p(b)$；另一种情形的处理类似。

现在我们想要将参数 a_k 显示在公式 $\phi(x)$中：令 $\phi(x, y) \in \mathrm{tp}(b, a_k/A_k)$。定义

$$S_{a_k} := \{x \in q(\mathfrak{C}) \mid a_k \leqslant x \wedge (\exists t)(x \leqslant t \wedge \phi(t, a_k))\}.$$

注意， S_{a_k} 是一个包含 b 的 $(q,<)$-半区间，因此，由于 p 具有遗传简单半区间，它是由 $E \in \mathcal{E}_q$决定的 $\mathcal{E}_q$-决定的；注意， $E(a_k, b)$ 成立。取满足 $a_k b \equiv bc\,(A_k)$的 $c \in \mathfrak{C}$。于是$a_k < b < c$, $b \in [a_k]_E$ 和 $c \in [b]_E$ 成立，因此 $c \in [a_k]_E$。由于 E 决定 S_{a_k}, $a_k < c$，且 $c \in [a_k]_E$实现了 q，我们得出 $c \in S_{a_k}$。根据 S_{a_k}的定义，存在 $b' \in \phi(\mathfrak{C}, a_k)$ 满足 $c \leqslant b'$。由于公式 $\phi(x, a_k)$ 孤立了 $\mathrm{tp}(b/A_0),$，我们有 $b \equiv b'(A_0)$。现在，$a_k b \equiv bc\,(A_k)$ 和 $\mathcal{D}_p(a_k) < b$ 推出$\mathcal{D}_p(b) < c$，结合 $c \leqslant b'$ 即可证明 $\mathcal{D}_p(b) < b'$。接着， $b \lhd^{\mathbf{p}} b'$ 和 $b \equiv b'(A_0)$ 共同证明 $\mathrm{tp}(b/A_0)$ 的轨迹（它是孤立的）是一个 p-大集合。因此，假设 $b \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{D}_p(a_i)$，我们证明了 $\mathrm{tp}(b/A)$ 是 p-大的；引理的证明至此完成。□

定理 5.1 的证明。假设 T 是可数的，且 $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$；特别地， T 是小的。设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 为 $\varnothing$ 上具有遗传简单半区间的弱 o-极小对。假设 p不是凸的，我们将通过构造连续统多个非同构可数模型得出矛盾。固定一个可数的无端线性序 I，并令 $A = (a_i \mid i \in I)$ 为 $\mathbf{p}^r$ 中的 Morley 序列。由于 I 是无端的，容易看出 $(\mathbf{p}^r)_{\restriction A} = \bigcup_{i\in I} \mathrm{tp}(a_i/A_{<i})$ 成立，并蕴含 $(\mathbf{p}^r)_{\restriction A}$ 是非孤立型。由于 T 是小的且 A是可数的，存在一个可数模型 $M_{\mathbb{I}}$，它在 A 上几乎原子，并且省略 $(\mathbf{p}^r)_{\restriction A}$。我们断言：

(1) 对所有 $b \in p(M_{\mathbb{I}})$， $\mathrm{tp}(b/A)$ 是 p-小的。

由于 $M_{\mathbb{I}}$ 在 A上几乎原子，因此存在一个有限的 $A_0 \subseteq A$，使得 $\mathrm{tp}(b/A_0)$ 是孤立的，这由 $\theta(x)$ 可知。由于 p 不是凸的，由推论5.7可知， p 没有孤立的 p-大扩张。因此，公式 $\theta(x)$ 是 p-小的。于是，任何包含 $\theta(x)$的类型都是 p-小的；特别地，类型 $\mathrm{tp}(b/A)$是 p-小的。我们断言：

(2) $\bigcup_{i\in I}(\mathcal{D}_p(a_i)\cap M_{\mathbb{I}})$ 是 $(p(M_{\mathbb{I}})$的$<)$终段。

假设 $b\in p(M_{\mathbb{I}})$ 且 $b\not<\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_p(a_i)$；我们需要证明 $b\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_p(a_i)$。首先注意到$b\in$ 凸(A) 成立：否则，由于序 $\mathbb{I}$ 没有尽头，$\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_p(a_i)<b$ 将推出 $b\models(\mathbf{p}_r)_{\restriction A}$，这与 $M_{\mathbb{I}}$的选取矛盾。因此，$b\in$ 凸(A)，故引理5.9适用：$b\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_p(a_i)$ 或者类型 $\mathrm{tp}(b/A)$ 是 p-大的。根据 (1)，第二种情况不可能，因此 $b\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{D}_p(a_i)$，正如所需。

现在，考虑 $Inv_p(M_{\mathbb{I}})$，它是 $(\{\mathcal{D}_p(a)\mid a\in p(M_{\mathbb{I}})\},<)$ 的序型。根据断言 (2)，$Inv_p(M_{\mathbb{I}})$有一个与 $\mathbb{I}$ 序型相同的末段。考虑可数线性序的集合以及如下关系：$\mathbb{I}\sim\mathbb{J}$ 当且仅当 $\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{J}$ 有同构的末段；显然，$\sim$ 是一个等价关系。不难看出，存在连续统多个 $\sim$-等价类（例如，参见 [RS17，第4节.3]）。因此，当序 $\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{J}$ 属于不同的 $\sim$-等价类时，模型 $M_{\mathbb{I}}$ 和 $M_{\mathbb{J}}$ 不同构；$I(T,\aleph_0)=2^{\aleph_0}$随之得出。矛盾。这表明 p 是凸的，从而完成定理 5.1 的证明。□

回顾 [MT24，定义 3：7]完备一阶理论 T 是几乎弱 *o*-极小的，若每个类型 $p\in S_1(T)$ 都是弱 o-极小且凸的。作为定理5.1的推论，我们得到以下定理，它重述了定理1。

定理 5.10。每个具有少可数模型的弱准 O-极小理论都是几乎弱 o-极小的，并且具有简单半区间。

证明。设 T 是一个具有少可数模型的可数弱准 O-极小理论。那么，根据推论3.10，T 具有简单半区间，因此所有弱 o-极小类型 $p\in S_1(T)$ 都具有遗传简单半区间，从而由定理5.1可知它们是凸的；T 是几乎弱 o-极小的。□

5.3。**凸类型的可定义性与平凡性**。凸 so-对的左／右可定义性概念由 [MT20]引入；在此，我们只需在弱 o-极小对的语境中使用这些概念。

定义 5.11. 若凸弱 o-极小对 $\mathbf{p}=(p,<)$ 中的类型 $\mathbf{p}_l$（$\mathbf{p}_r$）是可定义的，则称其为左可定义（右可定义）。

凸弱 o-极小对的可定义性与$(p(\mathfrak{C}),<)$ 末段的可定义性，以及 p 非分叉扩张的非孤立性有关，具体如下：

注记 5.12. 设 $p\in S(A)$ 是弱 o-极小类型，且 $p(\mathfrak{C})$ 是 $(D,<)$的凸子集，其中 A 是可定义的线性序。

(a) 根据 [MT20]，的引理 7.2，当且仅当 $p(\mathfrak{C})$ 的某个初始部分是可定义集，当且仅当集合 $p^-(\mathfrak{C})=\{x\in D\mid x<p(\mathfrak{C})\}$ 是 A-可定义的，凸弱 o-极小对 $\mathbf{p}=(p,<)$ 才是左可定义的。右可定义的情形类似。(b) 对所有 $B\supseteq A$，$\mathbf{p}=(p,<)$ 是左可定义的，当且仅当 $((\mathbf{p}_l)_{\restriction B},<)$ 是左可定义的；$\mathbf{p}=(p,<)$ 是右可定义的，当且仅当 $((\mathbf{p}_r)_{\restriction B},<)$ 是右可定义的。(c) 若 p 不是左可定义的，则类型 $\mathbf{p}_l$ 在 $p^-(\mathfrak{C})$ 中有限可满足。事实上，若 $\phi(x)\in\mathbf{p}_l$，则 $\phi(\mathfrak{C})$ 包含 $p(\mathfrak{C})$ 的一个初始部分；因此，由于 $p(\mathfrak{C})$ 没有可定义的初始部分，$\phi(x)$ 在 $p^-(\mathfrak{C})$ 中实现。注意，在此情形下，类型 p 以及类型 $(\mathbf{p}_l)_{\restriction B}$（其中 $B\supseteq A$）都是非孤立的。(d) 若 p 是简单的，且 p 的类型是 (x,y)（x, y $\in$ {d, nd}）型，如下文所定义，则对所有 $a\models p$，$((\mathbf{p}_r)_{\restriction Aa},<)$ 是 (d,y) 型，而 $((\mathbf{p}_l)_{\restriction B},<)$ 是 (x,d) 型。

根据端点是否可定义，凸弱 o-极小有序对有四种类型。我们将它们标记为 (d,d)、(d,nd)、(nd,d) 和 (nd,nd)；例如，(d,nd) 表示左可定义但非右可定义的有序对。凸弱 o-极小类型有三种。

- p当 p 的两个全局非分叉扩张都可定义时，称其为 (d,d) 类型；也就是说，当且仅当每个（等价地，某个）弱 o-极小对 $(p,<_p)$ 在 A 上都是 (d,d) 类型时，情况如此。类似地：p为 (nd,nd) 类型。若恰有一个全局非分叉扩张可定义，则 • p 为混合类型；在这种情况下，每个（等价地，某个）弱 o-极小对 $(p,<_p)$ 在 A 上都是 (d,nd) 或 (nd,d) 类型。

注 5.13。 (a) 弱 o-极小凸类型 p是 (d,d) 类型，当且仅当它是孤立的：根据注 5.12， p 是 (d,d) 类型，当且仅当其轨迹 $p(\mathfrak{C})$ 有某个可定义的初始部分和某个可定义的终段；这很容易看出等价于 $p(\mathfrak{C})$的可定义性。最后， $p(\mathfrak{C})$ 可定义，当且仅当 p 是孤立的。

(b) 每一个可定义的、非代数的、模型上的弱 o-极小类型都属于混合类型。

(c) 在文献中，（弱）o-极小理论中属于 (nd,nd) 类型的完备 1-类型也称为割或无理类型，而属于混合类型的那些则称为非割、有理割或准有理类型。

事实 5.14. [MT20，引理 7。17] 直接非正交的凸弱O-极小对属于同一类型。

这一事实的一个推论是，来自同一 $\measuredangle^w$-类的所有凸弱 o-极小类型都属于同一类型。用不同的术语来说，Marker 在 [Mar86],中对 O-极小理论中的完备 1-类型证明了这一点，Baizhanov 在 [Bai99]中对弱 o-极小理论证明了这一点。

在 [MT24, 命题 5.18] 我们证明了，在稠密 o-极小 1
结构是 t 。现在，我们推广这一结果。

命题 5.15。 每个混合类型的凸弱 o-极小类型都是平凡的。

证明。 反设，令 $p \in S(A)$ 为一个非平凡的混合类型的凸弱 o-极小类型。不妨设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 的类型为 (nd,d)，并选取 $(D, <)$，这是一个 A-可定义的序，使得 $p(\mathfrak{C})$ 是 D 的一个终段。注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，幂 $(\mathbf{p}_r)^n$ 都在 A 上可定义。由于 p 是非平凡的，对于某个 $n \geqslant 3$，部分类型 $\Pi_n = x_1 \lhd^{\mathbf{p}} x_2 \lhd^{\mathbf{p}} \ldots \lhd^{\mathbf{p}} x_n$ 在 $S_{x_1, \ldots\ldots x_n}(A)$ 中至少有两个完备化。此外，假设选取 A 和 p 时，使得 $n \geqslant 3$ 尽可能小。

首先，我们断言 $n \geqslant 4$，也就是说，不存在 p-三角形。为证明这一点，设 (a_1, a_2, a_3) 是 $\mathbf{p}_r$ 在 A 上的一个 Morley 序列。根据 [MT24，引理 5.9]，当且仅当 (a_3, a_2, a_1) 是 $\mathbf{p}_l$ 在 A 上的一个 Morley 序列时，不存在 p-三角形。如果 (a_3, a_2, a_1) 不是 $\mathbf{p}_l$ 中的 Morley 序列，那么我们就有 $a_1 \models (\mathbf{p}_l)_{\restriction Aa_2a_3}$，因此存在一个公式 $\phi(x, x_2, x_3) \in \mathrm{tp}(a_1, a_2, a_3/A)$，使得 $\phi(\mathfrak{C}, a_2, a_3)$ 是 $p(\mathfrak{C})$ 的一个有界子集；于是公式 $(d_{\mathbf{p}_r^2} x_2, x_3)\, \phi(x, x_2, x_3) \in p(x)$ 将隔离 p，这与 $\mathbf{p}_l$ 不可定义这一事实矛盾。由此证明了该断言。证明的其余部分分为两种情形。

情形 I。 p 是简单的。

在这种情形下， $x \in \mathcal{D}_p(y)$ 是 $p(\mathfrak{C})^2$上的一个相对可定义关系，因此对所有 $m \leqslant n$， $x_1 \lhd^{\mathbf{p}} x_2 \lhd^{\mathbf{p}} \ldots \lhd^{\mathbf{p}} x_m$是 $p(\mathfrak{C})^m$ 上的相对可定义关系。选取 $\theta_m \in \Pi_m$ ，使得类型$\Pi_m(x_1, \ldots\ldots, x_m)$ 等价于 $p(x_1) \cup \{\theta_m(x_1, \ldots\ldots, x_m)\}$。设 $(a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 为 $p(x_1) \cup \{\theta_n(x_1, \ldots\ldots, x_n)\}$ 的一个实现，使得 $(a_n, \ldots\ldots, a_1)$ 不是 A上 $\mathbf{p}_l$ 中的 Morley 序列。由 n的极小性， $(a_1, a_3, \ldots\ldots, a_n)$ 与 $(a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n)$ 都实现 Π_{n-1}，但 a_1 并不实现 $(\mathbf{p}_l)_{\restriction Aa_2 \ldots a_n}$。后者意味着存在一个公式 $\phi(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathrm{tp}(a_1, \ldots\ldots, a_n/A)$，它蕴含 $\theta_{n-1}(x_1, x_3, \ldots\ldots, x_n) \wedge \theta_{n-1}(x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$，并且使得 $\phi(\mathfrak{C}, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ 是 $p(\mathfrak{C})$的一个有界子集。于是公式 $(d_{\mathbf{p}_r} x_2)(\exists x_3, \ldots\ldots, x_n)\, \phi(x, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \in p(x)$ 孤立 $p(x)$。矛盾。

情形 II。 $\mathbf{p}$ 不是简单的。

令 $(a_1, \ldots, a_n)$ 是 Π_n 的一个实现，但它不是关于 A 的 $\mathbf{p}_r$ 中的 Morley 序列；由 n 的极小性，长度为 $n-1$ 的每个子序列都是 Morley 序列。记 $q(x)$ 为类型 $a_1 \lhd^{\mathbf{p}} x\, (q = (\mathbf{p}_r)_{\restriction Aa_1})$，并令 $\mathbf{q} = (q, <)$。我们将证明 q 是混合类型，并且 $(a_2, \ldots, a_n)$ 见证了 q 的非平凡性。首先，我们看到 q 在 $\mathcal{D}_p(a_1)$ 中有限可满足：如果 $\psi(x, a_1) \in q$ 在 $\mathcal{D}_p(a_1)$ 中不满足，那么 $\psi(x, y) \wedge y < x$ 将在 $p(\mathfrak{C})^2$ 上相对定义 $y \lhd^{\mathbf{p}} x$，这与 p 的非简单性矛盾。因此， q 在 $\mathcal{D}_p(a_1)$ 中有限可满足，而 $\mathcal{D}_p(a_1)$ 是 $(q^-(\mathfrak{C}), <)$ 的一个终段，所以 $\mathbf{q}_l$ 不是可定义的。由于 $\mathbf{p}_r$ 是可定义的且 $\mathbf{q}_r = \mathbf{p}_r$，$\mathbf{q}$ 是 (nd,d) 类型； q 是混合类型。此外，注意到所假定的 $n \geqslant 4$ 的极小性意味着 $(a_1, \ldots, a_n)$ 的每个 3 元素子序列都是关于 A 的 $\mathbf{p}_r$ 中的 Morley 序列；特别地， $a_2 \lhd^{\mathbf{q}} a_3 \lhd^{\mathbf{q}} \cdots \lhd^{\mathbf{q}} a_n$。由于 $(a_2, \ldots, a_n)$ 不是关于 Aa_1 的 $\mathbf{q}_r (= \mathbf{p}_r)$ 中的 Morley 序列，这与 n 的极小性条件矛盾。

在这两种情况下，我们都得出了矛盾，因此该命题的证明完成。 □

6. Martin's conjecture

马丁猜想是对沃恩特猜想的加强。假设 T 是小的，并令 $L_1(T)$ 为 $L_{\omega_1,\omega}$ 中包含所有一阶公式和公式 $\bigwedge_{\phi(x)\in p}\phi(x)$（对所有 $p\in S(T)$）的最小可数片段。对于每个可数的 $M\models T$，令 $T_1(M)$ 表示 M 的 $L_1(T)$-理论。

马丁猜想。如果 $I(T,\ \aleph_0)<2^{\aleph_0}$ 那么 $T_1(M)$ 对所有可数的 $M\models T$ 都是 $\aleph_0$-范畴的。

注意，任何 $L_1(T)$-公式的量词秩都小于 $\omega+\omega$，因此马丁猜想预言：假设 $I(T,\ \aleph_0)<2^{\aleph_0}$，则 T 的可数模型的斯科特秩至多为 $\omega+\omega$；众所周知，这意味着沃恩特猜想。

定义 6.1。如果完备一阶理论 T 满足：对所有 n 以及所有类型 $p_1(x_1)$，……，$p_n(x_n)\in S_1(T)$，类型 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}p_i(x_i)$ 在 $S_n(T)$ 中有有限多个扩张，则称其几乎是 $\aleph_0$-范畴的。

几乎 $\aleph_0$-范畴理论由 Ikeda、Pillay 和 Tsuboi 在 [ITP98] 中引入。以下结论在任何几乎 $\aleph_0$-范畴理论中成立：

- 设 $A\subseteq B$ 是有限的。则 A 上的每个完备类型在 B 上只有有限多个扩张。
- 有限域上扩张孤立类型的每个完备类型也是孤立的。
- 几乎 $\aleph_0$-范畴性在命名有限多个参数后得以保持。

这些事实将在定理2的证明中被默认使用，我们在其中还需要以下 folklore 事实及其推论。

事实 6.2（任意可数的 T）。若存在有限元组的序列 $(a_n)_{n<\omega}$ 使得：

– $\mathrm{tp}(a_n)$ 对所有 $n<\omega$ 都是非孤立的，且 –

$\mathrm{tp}(a_n)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_{<n})$ 对所有 $n<\omega$ 成立，则 $I(\aleph_0,T)=2^{\aleph_0}$。

证明。假设序列 $(a_n)_{n<\omega}$ 满足这两个性质。回想一下，如果 a,b,c 是元组，且 $\mathrm{tp}(a)\perp^w\mathrm{tp}(b)$ 并且 $\mathrm{tp}(ab)\perp^w\mathrm{tp}(c)$，那么 $\mathrm{tp}(a)\perp^w\mathrm{tp}(bc)$（因为若 $a\equiv a'$，则 $ab\equiv a'b$ 如同 $\mathrm{tp}(a)\perp^w\mathrm{tp}(b)$，并令 c' 满足 $a'bc\equiv abc'$；由于 $abc'\equiv abc$ 如同 $\mathrm{tp}(ab)\perp^w\mathrm{tp}(c)$，我们得到 $a'bc\equiv abc$，从而 $\mathrm{tp}(a)\perp^w\mathrm{tp}(bc)$）。现在，对于所有 n，通过对 m 作归纳法，利用前述事实和序列的第二个性质可知 $\mathrm{tp}(a_n)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_{<n}a_{n+1}\dots a_{n+m})$，因此 $\mathrm{tp}(a_n)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_{\neq n})$。

任取 $S\subseteq\omega$，并设 $\bar a_S=(a_n)_{n\in S}$。我们将找到一个省略 $\mathrm{tp}(a_n)$ 的可数模型 $\mathcal{M}_S\supseteq\bar a_S$，当且仅当 $n\notin S$；这显然蕴含 $I(T,\aleph_0)=2^{\aleph_0}$。根据省略类型定理，只需证明对于 $n\notin S$，不存在相容公式 $\theta(x,\bar a_S)$ 蕴含 $\mathrm{tp}(a_n)$。为导出矛盾，假设 $\theta(x,\bar a_S)$ 是一个相容公式，且 $\theta(x,\bar a_S)\vdash\mathrm{tp}(a_n)$。由于 $\mathrm{tp}(a_n)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_S)$ 如同 $\mathrm{tp}(a_n)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_{\neq n})$，我们看到 $\mathrm{tp}(a_n)$ 的轨迹由 $\theta(x,\bar a_S)$ 定义；又因为它是 0-不变的，我们得出它是 0-可定义的。这与 $\mathrm{tp}(a_n)$ 是非孤立类型这一事实矛盾。□

推论 6.3. 假设 T 是可数的，且只有少可数模型。

(a) 存在一个有限的 $C\subseteq\mathfrak{C}$，使得对于每个非孤立类型 $p\in S_1(T)$，$\mathrm{tp}(C)\not\perp^w p$。(b) 对于所有 $M\models T$，存在一个有限的 $C\subseteq M$，使得对于在 M 中实现的所有非孤立类型 $p\in S_1(T)$，$\mathrm{tp}(C)\not\perp^w p$ 成立。(c) 不存在有限集 A 和族 $(p_n\mid n\in\omega)\subset S(A)$，使得其中每个 p_n 都是非孤立的、弱 o-极小的且平凡的，并且对所有 $i\neq j$，$p_i\perp^w p_j$ 都成立。

证明。（a）通过递归，构造单点集序列 a_0，a_1，……如下。任取 a_0，使得 $\mathrm{tp}(a_0)$ 是非孤立的。假设已经选取了 a_i，$i<k$，。若可能，任取 a_k，使得 $\mathrm{tp}(a_k)$ 是非孤立的，且 $\mathrm{tp}(a_k)\perp^w\mathrm{tp}(\bar a_{<k})$。由事实6.2 可知，这一过程会在有限步后终止，设为 n。于是 $C=\{a_i\mid i<n\}$ 即为所求。（b）的证明类似。

(c) 首先，我们断言对于所有 n、所有有限的 A 以及所有由两两弱正交的平凡弱 o-极小类型构成的序列 $(q_i\mid i<n)\subseteq S_n(A)$，类型 $\bigcup_{i<n}q_i(x_i)$ 在 $S_{x_0\dots x_{n-1}}(A)$ 中有唯一完备化。对 n 作归纳，假设对于某个 n 上述结论成立。设 $a_0\models q_0$，并令 $q_k'\in S(Aa_0)$ $(1\leqslant k\leqslant n$ 表示 q_k 的唯一扩张。那么，由于根据 [MT24定理 5，10]，弱极小类型的平凡性以及平凡弱 o-极小类型的正交性

在非分叉扩张下保持不变，序列 $(q'_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n)$ 满足归纳假设：$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} q'_i(x_i) \vdash \mathrm{tp}(x_1 \dots x_n/Aa_0)$。由于 $a_0 \models q_0$ 是任意的，因此可得 $\bigcup_{i\leqslant n} q_i(x_i) \vdash \mathrm{tp}(x_0 \dots x_n/A)$，从而证明了该断言。

现在，设 $(p_i \mid i \in \omega)$ 是非孤立、弱 o-极小且平凡的。对每个 $i \in \omega$，选取$a_i \models p_i$。由该断言，序列 $(a_n)_{n<\omega}$ 满足事实 6.2 的假设，因此 $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$。矛盾。□

6.1. **定理 2 的证明**。 在本小节中，我们假设：

- T 相对于 $<$是弱准 O-极小的；• $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$；
特别地， T 是小的；• T 是几乎 $\aleph_0$-范畴的。

作为定理 1 的推论，我们还有：

- T 具有简单半区间；• T 是几乎弱 0-极小的：对所有 A，所有类型
$p \in S_1(A)$ 都是凸的。

证明定理 2 的策略如下。设 $M \models T$ 可数。我们将找到一个有限集 $C_M \subset M$，称为 M的强基，以及 $\mathcal{U}_M$（一个全局 0-不变 1-类型的集合），使得对所有满足 D 的有限 $C_M \subseteq D \subset M$，以下两个条件都成立：

– $\mathfrak{p}_{\restriction D}$ 是平凡的，并且对所有 $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_M$，都在 M 中实现；且 – 若 $a \in M$ 且
$\mathrm{tp}(a/D)$ 是非孤立的，则对某个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_M$，有 $a \models \mathfrak{p}_{\restriction D}$。

我们将证明，可以从理论 $T_1(M)$重构 $\mathrm{tp}(C_M)$和 $\mathcal{U}_M$。于是，对于任意满足 $M \equiv_{L_1(T)} N$的可数 N，通过回归法，我们可以轻松构造 M与 N之间的同构。

引理 6.4。 设 $\mathbf{p} = (p, <)$ 是关于 $\varnothing$的弱 o-极小对。假设 C 是有限的，且 $\mathrm{tp}(C) \not\perp^w p$。令 $S_p(C) = \{q \in S_1(C) \mid p \subseteq q\}$。

(a) 如果 $q \in S_p(C)$ 是 p 的分叉扩张，那么 q 是孤立的。(b) 如果 $q = (\mathbf{p}_l)_{\restriction C}$，那么有序对 $\mathbf{q} = (q, <)$ 是右可定义的； q 是孤立的，当且仅当 $\mathbf{p}_l$ 是可定义的。对偶命题对 $q = (\mathbf{p}_r)_{\restriction C}$ 也成立。

证明。由于 p 是凸的，不失一般性，我们可以假设 $p(\mathfrak{C})$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一个凸子集。那么，来自 $S_p(C)$ 的类型的轨迹是 $\mathfrak{C}$ 的凸子集，并且按 $<$线性有序。由几乎 $\aleph_0$-范畴性，空间 $S_p(C)$ 是有限的，设为 $S_p = \{q_0, \dots\dots, q_n\}$，其中 $q_0(\mathfrak{C}) < q_2(\mathfrak{C}) < \dots < q_n(\mathfrak{C})$。注意， $q_0 = (\mathbf{p}_l)_{\restriction C}$ 和 $q_n = (\mathbf{p}_r)_{\restriction C}$；还要注意，$\mathrm{tp}\ p \not\perp^w (C)$ 蕴含 $q_0 \neq q_n$。我们看到，每个 $q_k(\mathfrak{C})$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 内都是相对可定义的：固定 $k \leqslant n$，并对每个 $i \neq k$ 选取 $\phi_i(x) \in q_k(x) \setminus q_i(x)$。那么， $q_k(\mathfrak{C})$ 就由 $\sigma_k(x) = \bigwedge_{i\leqslant n,\ i\neq k} \phi_i(x)$ 相对定义。

(a) 假设 q_k 是 p 的分叉扩张，即 $0 < k < n$。选取 $a_1 \models q_0$ 和 $a_2 \models q_n$。那么很容易看出， $q_k(\mathfrak{C})$ 由 $a_1 < x < a_2 \wedge \sigma_k(x)$ 定义。由于集合 $q_k(\mathfrak{C})$ 是可定义的且是不变的，因此它是左可定义的，所以 q_k 是孤立的。

(b) 考虑 $q = q_0 = (\mathbf{p}_l)_{\restriction C}$，并令 $\sigma(x) = \sigma_0(x) \wedge x < b$，其中 $b \models (\mathbf{p}_r)_{\restriction C}$。那么 $q(\mathfrak{C})$ 是 $(\sigma(\mathfrak{C}), <)$ 的终段，因此根据注记 5.12，$\mathbf{q}$ 是右可定义的，这就证明了第一个断言。为证明第二个断言，注意 $\mathbf{q}$ 是 (nd,d) 类或 (d,d) 类，并且根据注 5.13，后者成立当且仅当 q 是孤立的。由于 $q = (\mathbf{p}_l)_{\restriction C}$ 蕴含 $\mathbf{p}_l = \mathbf{q}_l$，$\mathbf{p}$ 是左可定义的当且仅当 $\mathbf{q}$ 是左可定义的。因此，$\mathbf{q}$ 属于 (d,d) 类当且仅当 $\mathbf{p}_l$ 是可定义的。证明完毕。□

在本小节余下部分中，固定使用以下记号：

- $\mathcal{P}$ 是所有全局、0-不变、不可定义的 1-类型的族。• 对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$，
令 $p = \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}$，并令 $\preccurlyeq$ 为 $<$ 或 $>$，使得 $(p, \preccurlyeq)_r = \mathfrak{p}$；• 对于 $\mathfrak{p} = (p, \preccurlyeq)_r \in \mathcal{P}$ 以及有限的 C，记作 $\mathfrak{p}_C = (\mathfrak{p}_{\restriction C}, \preccurlyeq)$。• 对于模型 $M \models T$，
定义：– $\mathcal{R}_M = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} \mid \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}$ 在 $M\}$ 中实现；– $\mathcal{U}_M = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} \mid \mathfrak{p}_{\restriction C}$ 对所有有限的 $C \subseteq M\}$，都在 M 中实现；– $\mathcal{B}_M = \mathcal{R}_M \setminus \mathcal{U}_M$。

定义 6.5。 设 $M \models T$。若有限子集 $C \subseteq M$满足对每个$\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_M$，$\mathrm{tp}(C) \not\perp^w \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}$，则称其为 M的基；若对于每个 $a \in M$ 和每个有限的 $D \supseteq C$，只要 $\mathrm{tp}(a/D)$ 是非孤立的，就存在某个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_M$使得 $\mathrm{tp}(a/D) = \mathfrak{p}_{\restriction D}$，则称 C 为强基。

注 6.6。 (a) 对所有 $p \in S_1(T)$ 和 $\lessdot \in \{<, >\}$: $\mathfrak{p} = (p, \lessdot)_r \in \mathcal{P}$ 当且仅当有序对 $(p, \lessdot)$是右不可定义的。 (b) 如果 $p \in S_1(T)$ 属于 (nd,nd) 类型且 $\mathfrak{p} = (p, <)$，那么 $\mathfrak{p}_r$，$\mathfrak{p}_l \in \mathcal{P}$。 (c) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$，$\mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}$ 都不是孤立的，因为根据定义，$\mathfrak{p}$ 不是可定义的。 (d) 如果 $p \in S_1(T)$ 是非孤立的，那么对于某个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$，有 $p = \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}$。 (e) 每个 $M \models T$ 都有一个基；这由推论 6.3(b) 得出。 (f) 显然，如果 C 是 M 的一个（强）基，且 $D \supseteq C$ 是有限的，那么 D 也是 M的一个（强）基。

引理 6.7。 假设 C 是模型 $M \models T$ 的一个基。

(a) 对所有 $a \in M$，如果 $\mathrm{tp}(a/C)$ 是非孤立的，那么存在 $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_M$ 使得 $\mathrm{tp}(a/C) = \mathfrak{p}_{\restriction C}$。 (b) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_M$，有序对 $\mathfrak{p}_C$ 属于 (d,nd) 类型。特别地，类型 $\mathfrak{p}_{\restriction C}$ 是平凡且非孤立的。(c) 对所有 $\mathfrak{p}$，$\mathfrak{q} \in \mathcal{R}_M$，我们有以下两种情况：(I) $\mathfrak{p} \not\perp^w \mathfrak{q}$。在这种情况下，$\mathfrak{p}_{\restriction C} \not\perp^w \mathfrak{q}_{\restriction C}$ 和 $\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C)$。(II) $\mathfrak{p} \perp^w \mathfrak{q}$。在这种情况下，$\mathfrak{p}_{\restriction C} \perp^w \mathfrak{q}_{\restriction C}$。 (d) $\mathcal{R}_M$ 有有限多个 $\not\perp^w$ 等价类。(e) 如果 $\mathfrak{p}_1$，……，$\mathfrak{p}_n$ 是 $\mathcal{B}_M$ 中所有 $\not\perp^w$ 等价类的代表元，那么 C 是强基，当且仅当每个 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction C}$ 都在 M 中被省略。(f) M 存在强基。(g) $\mathcal{P}$ 有有限多个 $\not\perp^w$ 等价类。

证明。(a) 设 $a \in M$ 满足 $\mathrm{tp}(a/C)$ 是非孤立的。那么，根据几乎 $\aleph_0$-范畴性，$p = \mathrm{tp}(a)$ 是非孤立的。由于 C 是一个基，我们有 $p \not\perp^w \mathrm{tp}(C)$，因此引理 6.4(a) 适用：$\mathrm{tp}(a/C)$ 是 $p = \mathrm{tp}(a)$ 的非分叉扩张。有两种可能：$\mathrm{tp}(a/C) = ((p, <)_l)_{\restriction C}$ 和 $\mathrm{tp}(a/C) = ((p, <)_r)_{\restriction C}$。在第一种情形下，根据引理 6.4(b)，有序对 $(\mathrm{tp}(a/C), <)$ 是右可定义的；因此，由于 $\mathrm{tp}(a/C)$ 是非孤立的，它属于 (nd,d) 类，此时 $\mathfrak{p} = (p, >)_r \in \mathcal{R}_M$ 和 $\mathrm{tp}(a/C) = \mathfrak{p}_{\restriction C}$。同理，在第二种情形下，$\mathfrak{p} = (\mathrm{tp}(a), <)_r \in \mathcal{R}_M$ 和 $\mathrm{tp}(a/C) = \mathfrak{p}_{\restriction C}$。

(b) 设 $\mathfrak{p} = (p, \lessdot)_r \in \mathcal{R}_M$。那么 $\mathrm{tp}(C) \not\perp^w p$。假设 $\lessdot$等于 $<$；当 $\lessdot$等于$>$ 时的证明类似。注意，$\mathfrak{p}$ 不是可定义的，因为 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$，所以 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_C)_r$ 意味着有序对 $\mathfrak{p}_C$ 不是右可定义的。由引理 6.4(b)，$\mathfrak{p}_C$ 是左可定义的，因此它属于 (d,nd) 类型。因此，$\mathfrak{p}_{\restriction C}$ 属于混合类型，故由命题 5.15，它是平凡的。

(c) 首先，假设 $\mathfrak{p} \not\perp^w \mathfrak{q}$。那么 $\mathfrak{p}_{\restriction C} \perp^w \mathfrak{q}_{\restriction C}$ 是不可能的，因为根据 [MT24，定理 5.10(c)]，平凡类型的 $\perp^w$会传递到其非分叉扩张。因此，$\mathfrak{p}_{\restriction C} \not\perp^w \mathfrak{q}_{\restriction C}$，所以 $\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C)$ 和 $\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C^*)$ 中必有一项成立。根据 (b)，有序对 $\mathfrak{p}_C$ 和 $\mathfrak{q}_C$ 属于 (d,nd) 类型。显然，$\mathfrak{q}_C^*$ 属于 (nd,d) 类型，因此 $\mathfrak{p}_C$ 和 $\mathfrak{q}_C^*$ 属于不同的类型，所以根据事实 5.14，$\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C^*)$ 是不可能的。由此得出 $\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C)$。

现在，假设 $\mathfrak{p} \perp^w \mathfrak{q}$。为导出矛盾，假设 $\mathfrak{p}_{\restriction C} \not\perp^w \mathfrak{q}_{\restriction C}$。那么，由于 $\mathfrak{p}_C$ 和 $\mathfrak{q}_C$ 属于 (d,nd) 类型，按照上一段中的论证，我们得出 $\delta_C(\mathfrak{p}_C, \mathfrak{q}_C)$。根据 [MT24，推论 5.11(a)]，这与 $\mathfrak{p}_{\restriction C}$ 和 $\mathfrak{q}_{\restriction C}$的平凡性一起，推出 $\mathfrak{p} \not\perp^w \mathfrak{q}$。矛盾。

(d) 反设 $(\mathfrak{p}_n \in \mathcal{R}_M \mid n < \omega)$两两弱正交。不失一般性，通过取子序列并视情况颠倒序的方向，我们可以假设 $\mathfrak{p}_n = (p_n, <)_r$，其中 $p_n \in S_1(C)$。由 (b)，每个 p_n 都是非孤立的且平凡的；由 (c)，$(p_n \mid n \in \omega)$ 两两弱正交。这与推论 6.3(c) 矛盾。

(e) 假设 $\mathfrak{p}_1$、……、$\mathfrak{p}_n$ 是 $\mathcal{B}_M$ 中的 $\not\perp^w$-代表元。由 (b)，每个 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction C}$ 都是非孤立的，因此若 C 是强基，则它必须作为 $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{B}_M$ 被 M 省略。反过来，假设每个 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction C}$ 都被 M 省略，我们来证明 C 是 M 的强基。设 $\mathrm{tp}(a/D)$ 是非孤立的，其中 $a \in M$，且 $D \supseteq C$ 有限。由 (a) 以及 D 是 M 的基这一事实，对某个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_M$，有 $\mathrm{tp}(a/D) = \mathfrak{p}_{\restriction D}$。还需证明 $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_M$。反设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M$；则对某个 i，有 $\mathfrak{p} \not\perp^w \mathfrak{p}_i$。由 (b) 和 (c)，$\mathfrak{p}_{\restriction D}$ 和 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D}$ 都是平凡的，且 $\delta_D(\mathfrak{p}_D, (\mathfrak{p}_i)_D)$。由于 $D \lhd^{\mathfrak{p}_D} a$，根据稠密性，[。由 MT24，推论 2.13(b)，],，存在 $b \in \mathfrak{C}$ 使得 $D \lhd^{(\mathfrak{p}_i)_D} b \lhd^{\mathfrak{p}_D} a$。由

(b)， $(\mathfrak{p}_i)_D$ 是 (d,nd) 类型，且由 (c)，$\mathrm{tp}(a/D) \not\perp^w (\mathfrak{p}_i)_{\restriction D}$，因此根据引理 6.4 在 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D}$ 上唯一的非孤立扩张 Da 是 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction Da}$。结合 $D \lhd^{(\mathfrak{p}_i)_D} b \lhd^{\mathfrak{p}} a$ 这意味着 $\mathrm{tp}(b/Da)$ 必定是孤立的，因此在 M中实现。于是 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D} \subseteq \mathrm{tp}(b/Da)$ 在 M中实现。这与假设 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction C}$ 被 M省略相矛盾。

(f) 令 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ 为 $\mathcal{B}_M$ 中所有 $\not\perp^w$-等价类的一组代表元。选取一个有限的 $D \subseteq C$，使得每个 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D}$都在 M 中被省略；根据 $\mathcal{B}_M$ 的定义，这是可能的。由 (e)， D 是 M 的强基。

(g) 设 $N \models T$ 可数且饱和。于是 $\mathcal{P} = \mathcal{R}_N$，故由 (d)， $\mathcal{P}$ 有有限多个 $\not\perp^w$-等价类。□

定理的证明 2。 设 $M, N \models T$是满足 $M \equiv_{L_1(T)} N$的可数模型。于是

$$\mathfrak{p} \in \mathfrak{R}_M \;\Leftrightarrow\; M \models (\exists x)\ \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}(x) \;\Leftrightarrow\; N \models (\exists x)\ \mathfrak{p}_{\restriction \varnothing}(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} \in \mathcal{R}_N$$

证明了 $\mathcal{R}_M = \mathcal{R}_N$。接下来，我们证明 $\mathcal{B}_M = \mathcal{B}_N$。设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M$。那么存在一个有限的 $C \subseteq M$，使得 $\mathfrak{p}_{\restriction C}$ 在 M 中被省略。令 $q(X) = \mathrm{tp}(C)$，并令 $r(C, y) = \mathfrak{p}_{\restriction C}(y)$；注意，对于 $C' \models q$, $r(C', y) = \mathfrak{p}_{\restriction C'}(y)$，由 $\mathfrak{p}$ 的 0- 不变性可知。由于 $M \models (\exists X)(q(X) \wedge \neg(\exists y)\ r(X, y))$, $N \models (\exists X)(q(X) \wedge \neg(\exists y)\ r(X, y))$ 同样成立，因此存在 $D \subseteq N$ 使得 $D \models q$，且 $r(D, y) = \mathfrak{p}_{\restriction D}(y)$在 N 中被省略。因此， $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N$，并且可得 $\mathcal{B}_M \subseteq \mathcal{B}_N$。通过对称论证可得 $\mathcal{B}_M = \mathcal{B}_N$。作为推论，我们得出$\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_N$。

令 $C_M \subseteq M$为 M的强基；根据引理 6.7(f)，它确实存在。我们断言存在 D_N，它是 N的强基，并且 $C_M \equiv D_N$。根据引理 6.7(d)， $\mathcal{R}_M$具有有限多个 $\not\perp^w$-等价类。选取$\mathfrak{p}_1$，……， $\mathfrak{p}_n \in \mathcal{B}_M$代表 $\not\perp^w$的所有 $\mathcal{B}_M$-等价类。由于 C_M是强基，依据引理 6.7(e)，所有 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction C_M}$都在 M 中被省略，因此我们有：

$$M \models (\exists X)\left(q(X) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(\exists y)\ r_i(X, y)\right), \tag{1}$$

其中，与上一段一样， $q(X) = \mathrm{tp}(C_M)$ 以及 $r_i(C_M、\ y) = (\mathfrak{p}_i)_{\restriction C_M}(y)$。同一个 $L_1(T)$-句子在 N中成立，因此存在某个 $D_N \subseteq N$，使得 $D_N \models q$，并且所有 $(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D_N}$ 都在N中被省略。我们证明 D_N是 N的强基：由于 C_M是 M的基， $\mathfrak{p}_{\restriction \varnothing} \not\perp^w \mathrm{tp}(C_M)$对所有$\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_M$都成立，因此 $\mathcal{R}_M = \mathcal{R}_N$和 $C_M \equiv D_N$共同推出 D_N是 N的基。此外，注意到$\mathfrak{p}_1$、……、$\mathfrak{p}_n$是 $\mathfrak{B}_N$中 $\not\perp^w$-等价类的代表元，因为 $\mathfrak{B}_M = \mathfrak{B}_N$，并且根据 (1) 和 $M \equiv_{L_1(T)} N$，每个$(\mathfrak{p}_i)_{\restriction D_N}$ 都在 N中被省略。由引理 6.7(e)，这意味着 D_N 是 N的强基，从而证明了该断言。

现在我们用回归法证明 $M \cong N$。设 f_0 是一个将C_M 映射到 D_N的部分（初等）同构。假设 $f : C' \mapsto D'$ 是一个扩张了 f_0的有限部分同构。我们证明，对于所有 $a \in M$，都可以将 f 扩张为 $C'a$。需要考虑两种情况。

情况 1。 $\mathrm{tp}(a/C')$ 是孤立的，例如由 $\phi(x, C')$孤立。那么 $\phi(x, D')$ 也孤立出一个类型，因此我们可以找到 $b \in N$，使得 $\models \phi(b, D')$。令 $f(a) = b$，显然我们就将 f扩张为一个有限部分同构。

情况 2。 $\mathrm{tp}(a/C')$ 是非孤立的。由于 C_M 是一个强基，存在某个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_M$，使得 $\mathrm{tp}(a/C') = \mathfrak{p}_{\restriction C'}$。注意，$\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_N$与 $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_N$相同，因此，特别地， $\mathfrak{p}_{\restriction D'}$在 N中实现，例如由 $b \in N$实现。根据 $\mathfrak{p}$的 0-不变性，同样令 $f(a) = b$，我们就将 f 扩张为一个有限部分同构。

通过对称论证，对于 $b \in N$ 我们可以找到某个 $a \in M$ 使得 $f(a) = b$ 将 f 扩展为有限部分同构。因此，回归法得以完成，定理2 的证明也就完成了。□

定理3的证明。假设 T 是一个弱准 O-极小理论，并且还具有以下某项特征：二元的、rosy、准 o-极小，或具有有限凸性秩。假设 $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$。根据推论4。8 T 是二元的，因此由 [MT20，引理 8 可知1] T几乎是 $\aleph_0$-范畴的。由定理2， 马丁猜想对 T成立。□

7. Concluding remarks

设 T 是一个弱准 O-极小理论。若 T 还是二元的，则所有完全 1-类型（在任意定义域上）都是平凡的。一个有趣的问题是，反过来是否也成立。如果将假设放宽为：在 $\mathfrak{C}$ 的有限子集上，每个完全 1-类型都是平凡的，那么这个问题的答案是否定的，正如[MT24的例 711] 所示。然而，根据命题4.6，对于具有简单半区间的理论，答案是肯定的。

问题 7.1. 如果一个弱准 O-极小理论的所有完全 1-类型（在任意域上）都是平凡的，那么它必定是二元的吗?

对于一个 T 且只有少可数模型的弱准 O-极小理论，我们知道每个类型 $p \in S_1(A)$ 都是凸的，并且具有简单半区间。为了进一步理解弱非正交性， T^{eq} 中的弱 o-极小类型可能会有所帮助；例如，可以解释何时一个 p 的分叉扩张 $\measuredangle^w$ 为某个 $q \in S_1(A)$的非分叉扩张。因此，如果下列两个一般性问题的答案为肯定，即使对于 T^{eq}中的类型而言，也会相当方便。

问题 7.2. 在一个只有少可数模型的一阶理论中，每个有限域上的弱 o-极小类型都具有简单半区间吗?

根据定理 5.1，若对此问题给出肯定回答，也将对下述问题给出肯定回答。

问题 7.3。 在一个具有少可数模型的一阶理论中，每个有限域上的弱 o-极小类型都是凸的吗?

在本节余下部分，设 T 是可数的、弱准 O-极小的，且具有少可数模型。记

$\mathcal{P}$ – 所有在某个有限参数集上不变但不可定义的全局 1-类型的集合。

对定理 2 的证明进行分析，便得到以下两个猜想；我们相信，若它们得到证实，将有助于证实 T 的马丁猜想。

猜想 1。 $\mathcal{P}$ 有有限多个 $\measuredangle^w$-等价类。

猜想 2. 对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$，都存在一个有限的 A，使得 $\mathfrak{p}$ 是 A-不变的，且 $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ 是平凡的。

我们陈述猜想 2的两个等价表述。若某个 p 在有限扩张域上的非分叉扩张是平凡的（简单的），则称弱 o-极小类型是最终平凡的（最终简单的）。

(2') 每个有限域上的完全非孤立 1-型都是最终平凡的。

(2") 每个有限域上的完全非孤立 1-型都是最终简单的。

容易看出，(2')等价于猜想 2；而根据 MT24 定理 5.22], ，(2')蕴含(2")，该定理指出，在少可数模型的理论中，有限域上的每个平凡弱 o-极小类型都是简单的。对于(2")蕴含(2')，假设 $p \in S_1(A)$ 是非孤立且最终简单的，并令 $\mathfrak{p} = (p, <)$ 是在 A上的一个弱 o-极小对。若 p 属于混合类型，则根据命题 5.15，它是平凡的，结论得证。因此，假设它不属于混合类型；那么它属于 (nd,nd) 类型。取 $B \supseteq A$ 使得 $(\mathfrak{p}_r)_{\restriction B}$ 是简单的，并令 $a \models (\mathfrak{p}_r)_{\restriction B}$。由于 $(\mathfrak{p}_r)_{\restriction B}$ 是简单的，有序对 $((\mathfrak{p}_r)_{\restriction Ba}, <)$ 是左可定义的，因此它属于 (d,nd) 类型；根据命题 5.15， $(\mathfrak{p}_r)_{\restriction B}$ 是平凡的。

References

[ABZ14] Alibek, Aida A、Baizhanov, Bektur S 和 Zambarnaya, Tanya S. “可定义集上的离散序及模型的数量”。载于： *Mathematical Journal* 14.3（2014），第 5–13 页。[AK20] Altayeva, AizhanB 和Kulpeshov, Beibut Sh. “几乎 ω-范畴的相当 o-极小理论的二元性”。载于： *Siberian Mathematical Journal* 61.3（2020），第 379–390 页。[Bai99] Baizhanov, Bektur S. “弱 o-极小理论中一型的正交性”。载于： *Algebra and Model Theory II*。A.G. Pinus 和 K.N. Ponomaryov 编。新西伯利亚国立技术大学，1999 年，第 5–28 页。

[BK06] Baizhanov, Bektur S 和 Kulpeshov, Beibut Sh. “弱 o-极小理论中 2-公式的行为”。载于：*Proceedings of the 9th Asian conference*。世界科学出版社，2006 年，第 31–40 页。 DOI：10.1142/9789812772749_0003.[BZ26] Baizhanov, Bektur S 和 Zambarnaya, Tanya S. “构造具有最大可数谱的小有序理论的模型”。载于：*Annals of Pure and Applied Logic* 177.2（2026），第 103659 页。[EO07] Ealy, Clifton 和 Onshuus, Alf. “刻画 rosy 理论”。载于：72 3 2007 919 940 DOI 10 2178 1191333848 *The Journal of Symbolic Logic* 。（），第 – 页。：./jsl/。[HMM+99] Herwig, Bernhard、Dugald Macpherson、Gary A. Martin、Nurtazin, Abyz T 和 Truss, John K. “关于 $\aleph_0$-范畴的弱 o-最小结构”。载于：*Annals of Pure and Applied Logic* 101.1（1999），第 65–93 页。 DOI：10.1016/S0168-0072(99)00029-9。[ITP98] Ikeda, Koichiro、Tsuboi, Akito 和 Pillay, Anand. “关于具有三个可数模型的理论”。载于：*Mathematical Logic Quarterly* 44.2（1998），第 161–166 页。 DOI：10.1002/malq.19980440203。[Kul98] Kulpeshov, Beibut Sh. “弱 o-极小结构及其某些性质”。载于：*The Journal of Symbolic Logic* 63 4 1998 1511 1528 DOI 10 2307 2586664 。（），第 – 页。：./。[Kul07] Kulpeshov, Beibut Sh. “ $\aleph_0$-范畴弱 o-极小理论的二元性判据”。载于：*Annals of Pure and Applied Logic* 145.3（2007），第 354–367 页。 DOI：10.1016/j.apal.2006.10.004。[Kul20] Kulpeshov, Beibut Sh. “有限凸性秩的弱 o-极小理论的沃恩特猜想”。载于：*Izvestiya: Mathematics* 84.2（2020），第 324–347 页。 DOI：10.1070/IM8894。[Kul21] Kulpeshov, Beibut Sh. “几乎 ω-范畴弱 o-极小理论的二元性判据”。载于：*Siberian Mathematical Journal* 62.6（2021），第 1063–1075 页。 DOI：10.1134/S0037446621060082

[MMS00] Dugald Macpherson、David Marker 和 Charles Steinhorn。“弱 o-极小结构与实闭域”。载于：*Transactions of the American Mathematical Society* 352.12（2000），第 5435–5483 页。 DOI：10.1090/S0002-9947-00-02633-7。[Mar86] David Marker。“O-极小理论中的省略类型”。载于：*The Journal of Symbolic Logic* 51.1（1986），第 63–74 页。 DOI：10.2307/2273943。[MT20] Slavko Moconja 和 Predrag Tanovi´c。“驻定序类型与可数模型的数量”。载于：*Annals of Pure and Applied Logic* 171.3（2020），第 102765 页。 DOI：10.1016/j.apal. 2019.102765。[MT24] Slavko Moconja 和 Predrag Tanovi´c。*Countable models of weakly quasi-o-minimal theories I*。2024。arXiv：2412.20589。 URL：https://arxiv.org/abs/2412.20589。[MT25] Slavko Moconja 和 Predrag Tanovi´c。“弱 o-极小类型”。*Annals of Pure and Applied Logic* 176 9 2025 103605 DOI 10 1016 2025 103605 。（），第 页。：https://doi.org/ 。/j.apal.。。[New03] Ludomir Newelski。“没有分叉的非常简单理论”。*Archive for Mathematical Logic* 载于：42 6 2003 601 616 DOI 10 1007 00153 003 0172 4 。（），第 – 页。：。/s - - - 。[RS17] Richard Rast 和 Davender Singh Sahota。“O- 极小理论同构的博雷尔复杂度 ”。载于：*The Journal of Symbolic Logic* 82.2（2017），第 453–473 页。 DOI：10.1017/jsl.2017.17。

(S. Moconja) University of Belgrade, Faculty of mathematics, Belgrade, Serbia
Email address: slavko@matf.bg.ac.rs

（P. Tanovi´c） Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts、 Belgrade、 Serbia
Email address: tane@mi.sanu.ac.rs