arXiv:2603.06432v1 [math.NT] 6 Mar 2026

关于幂整性与伽罗瓦群$x^{2p}+ax^p+b^p$

JOSHUA HARRINGTON 和 LENNY JONES

Abstract. 设 $f(x)=x^{2p}+ax^p+b^p$，其中 p 是一个素数，$a,\ b\in\mathbb{Z}$且 $ab\neq 0$。若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，则称 $f(x)$ 为单生成的，当且仅当$\{1,\theta,\theta^2,\dots,\theta^{2p-1}\}$ 是 $\mathbb{Q}(\theta)$ 的整数环的一组基，其中 $f(\theta)=0$。

本文根据伽罗瓦群，对单生成三项式 $f(x)$进行了刻画。这些结果拓展了作者先前的研究。

1. 引言

本文中，我们始终令

$$f(x)=x^{2p}+ax^p+b^p \quad\text{and}\quad \delta=a^2-4b^p, \tag{1.1}$$
$$\text{其中 } p\geq 3 \text{ 是素数，且 } a,\ b\in\mathbb{Z} \text{ 满足 } ab\neq 0。$$

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且 $\{1,\theta,\theta^2,\dots,\theta^{2p-1}\}$是 $K=\mathbb{Q}(\theta)$ 的整数环的一组基（记作 $\mathbb{Z}_K$），其中 $f(\theta)=0$，则称 $f(x)$ 是单生成的。众所周知，对于在 $\mathbb{Q}$ 上不可约的 $f(x)$，有 [2]

$$\Delta(f)=[\mathbb{Z}_K:\mathbb{Z}[\theta]]^2\,\Delta(K), \tag{1.2}$$

其中 $[\mathbb{Z}_K:\ \mathbb{Z}[\theta]]$称为 $f(x)$ 的指标，而 $\Delta(f)$ 和 $\Delta(K)$ 分别表示 $f(x)$ 及数域 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的判别式。因此，$f(x)$ 是单生成的，当且仅当 $\Delta(f)=\Delta(K)$，或者等价地，由 (1.2) 得 $\mathbb{Z}_K=\mathbb{Z}[\theta]$。

当 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约时，作者在 [3, 中的定理 4.2] 中确定了 $p=3$ 的伽罗瓦群 Gal(f)。第二作者在 [9] 中将这一结果推广到 $p\geq 5$ 且满足 $b=1$ 的情形。最近，Jim 和 Hagedorn 在不要求 $b=1$ [8] 的情况下，确定了 $p\geq 5$ 的伽罗瓦群 Gal(f)。综合所有这些结果可得

定理 1.1. 假设 $f(x)$（如 (1.1) 中所定义）在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，并令 C_N 表示阶为 N 的循环群。那么

$$\mathrm{Gal}(f)\simeq\begin{cases} C_p\rtimes C_{p-1} & \text{if } p\equiv 1 \pmod 4 \text{ and } \delta=py^2 \text{ for some } y\in\mathbb{Z}\\ \left(C_p\rtimes C_{(p-1)/2}\right)\times C_2 & \text{if } p\equiv 3 \pmod 4 \text{ and } \delta=-py^2 \text{ for some } y\in\mathbb{Z}\\ (C_p\rtimes C_{p-1})\times C_2 & \text{if } p\geq 3 \text{ and } \delta\neq(-1)^{p(p-1)/2}py^2 \text{ for any } y\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{1.3}$$

Date: 2026年3月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 11R09，11R04；次要分类 11R32，11R21。*Key words and phrases.* 单生成、三项式、伽罗瓦。

若 $p \nmid \delta$，由定理 1.1 可知，$\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_p \rtimes C_{p-1}) \times C_2$。由于 $\tilde{}$ $\tilde{}$，$\{\pm f(\pm x), \pm f(\pm x)\}$ 中的三项式要么全部是单生成的，要么全部不是，其中 f表示 f 的倒数多项式，因此，具有 $\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_p \rtimes C_{p-1}) \times C_2$ 的单生成三项式 $f(x)$ 的刻画可由 [10,11] 得出。因而，本文着重研究 $p \mid \delta$ 的情形，并在此情形下，根据定理 1.1 中的伽罗瓦群，对单生成三项式 $f(x)$ 给出完整刻画。这项研究一个颇为引人注目的推论将在下文的推论 1.3 中着重说明，它揭示了多项式的单生性与某种形式的素数的存在性之间的联系。本文拓展了作者此前的研究 [4–6, 9–11]。我们的主要结果如下：

定理 1.2. 设 p、$f(x)$与 δ 如 (1.1) 中所给。假设 $f(x)$在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且 $p \mid \delta$。

(1) If $\mathrm{Gal}(f) \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$, *then*

$$f(x) \text{ is monogenic} \iff (p,a,b) \in \{(5, \pm 3, 1), (a^2+4, a, -1)\}.$$

(2) If $\mathrm{Gal}(f) \simeq \left(C_p \rtimes C_{(p-1)/2}\right) \times C_2$, *then*

$$f(x) \text{ is monogenic} \iff (p,a,b) \in \{(3, \pm 1, 1)\}.$$

(3) If $\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_p \rtimes C_{p-1}) \times C_2$, *then*

(a) if $\delta = (-1)^{p(p+1)/2} p y^2$ *for some* y, *then*

$$f(x) \text{ is monogenic} \iff (p,a,b) \in \{(3, \pm 4, 1)\},$$

(b) if $\delta \neq (-1)^{p(p+1)/2} p y^2$ *for any* y, *then*

$$f(x) \text{ is monogenic} \iff \begin{cases} b = 1 \text{ with } a-2 \text{ and } a+2 \text{ squarefree,} \\ \qquad\qquad \text{or} \\ b = -1 \text{ with } 4 \nmid a \text{ and } (a^2+4)/\gcd(2,a)^2 \text{ squarefree.} \end{cases}$$

Moreover, for any prime $p \geq 3$, *there exist infinitely many such trinomials* $f(x)$ *for each case of item (3)b.*

定理 1.2 的下述有趣推论强调了：无穷多个具有特定二次型的素数的存在性，与无穷多个具有某种形式且伽罗瓦群$(f) \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$的单生成三项式 $f(x)$ 的存在性之间的联系。

推论 1.3. 设 a 与 z 表示正整数。对任意整数 $N > 2$，存在素数 $p > N$，使得 $f(x) = x^{2p} + ax^p - 1$ 是单生成的，且伽罗瓦群$(f) \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$ 对某个 a 成立（并且这样的 a 仅存在一个），当且仅当存在无穷多个形如 z^2+4 的素数。

2. Preliminaries

以下定理归功于 Kaur、Kumar 和 Remete [12]。

定理 2.1. 设 $g(x)$ 是一个具有整数系数的首一多项式。设 $k \geq 2$为一个整数，使得 $\mathfrak{f}(x) := g(x^k)$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。那么，当且仅当满足以下所有条件时，$\mathfrak{f}(x)$ 是单生成的：

(1) $g(0)$ 无平方因子，*(2)* q 不整除 $\mathfrak{f}(x)$ 的指标（对所有素数 $q \mid k$而言），*(3)* $g(x)$ 是单生成的。

下一个定理由 Jakhar、Khanduja 和 Sangwan [7], 给出，它提供了必要且充分的条件，用以确定 $\Delta(\mathfrak{F})$的素因子是否不整除 $\mathfrak{F}$的指标，其中 $\mathfrak{F}$是任意一个不可约首一三项式。

定理 2.2. 设 $n, m \in \mathbb{Z}$ 满足 $n > m \geq 1$。令 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 为一个代数数域，其整数环为 $\theta \in \mathbb{Z}_K$，且 $\theta \in \mathbb{Z}_K$ 是 K 的整数环，其最小多项式为$\mathfrak{F}(x) = x^n + Ax^m + B$，定义在 $\mathbb{Q}$ 上，其中 $\gcd(m, n) = d_0$, $m = m_1 d_0$ 且 $n = n_1 d_0$。$\Delta(\mathfrak{F})$ 的一个素因子 q 不整除 $[\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$，当且仅当 q 满足以下条件之一:

(i) 当 $q \mid A$ 且 $q \mid B$ 时，则 $q^2 \nmid B$;

(ii) 当 $q \mid A$ 且 $q \nmid B$ 时，则

$$either \quad q \mid a_2 \text{ and } q \nmid b_1 \quad or \quad q \nmid a_2 \left((-B)^{m_1} a_2^{n_1} + (-b_1)^{n_1}\right),$$

其中 $a_2 = A/q$ 且 $b_1 = \frac{B+(-B)^{q^j}}{q}$，使得 $q^j \mid\mid n$ 满足 $j \geq 1$;

(iii) 当 $q \nmid A$ 且 $q \mid B$时，

$$either \quad q \mid a_1 \text{ and } q \nmid b_2 \quad or \quad q \nmid a_1 b_2^{m-1} \left((-A)^{m_1} a_1^{n_1-m_1} - (-b_2)^{n_1-m_1}\right),$$

其中 $a_1 = \frac{A+(-A^{q^l})}{q}$，满足 $q^l \mid\mid (n-m)$，且 $l \geq 0$，并且 $b_2 = B/q$; (iv) 当 $q \nmid AB$且 $q \mid m$，其中 $n = s'q^r$、 $m = sq^r$、 $q \nmid \gcd(s'$、 $s)$时，则这些多项式

$$H_1(x) := x^{s'} + Ax^s + B \quad and \quad H_2(x) := \frac{Ax^{sq^r} + B + (-Ax^s - B)^{q^r}}{q}$$

模 q 互素;

(v) 当 $q \nmid ABm$时，

$$q^2 \nmid \left(B^{n_1-m_1} n_1^{n_1} - (-1)^{m_1} A^{n_1} m_1^{m_1} (m_1 - n_1)^{n_1-m_1}\right).$$

鉴于定理 2.1，我们利用定理 2.2 证明以下有用的引理。

引理 2.3. 设 $g(x) = x^2 + ax + b$，其中 a 是非零整数，且 $b \in \{\pm 1\}$。假设 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。令 $\mathcal{W} := \delta/\gcd(a, 2)^2$。则

$$g(x) \text{ is monogenic } \iff \mathcal{W} \text{ is squarefree, with } \begin{cases} 4 \mid a \text{ if } 2 \mid a, \text{ when } b = 1, \\ 4 \nmid a, \text{ when } b = -1. \end{cases}$$

证明。注意到 $\Delta(g) = \delta$。我们考察定理 2.2，其中 $A = a$、 $B = b$，且 q 是 δ 的一个素因子。

首先假设 $b = 1$。如果 $q \mid a$，则 $q = 2$，因此 $b_1 = 1$ 满足定理 2.2 的条件 (ii)。由此可得: $2 \nmid [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$ 当且仅当 $4 \mid a$。如果 $q \nmid a$，则根据定理 2.2 的条件 (v)，$q \nmid [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$ 当且仅当 $q^2 \nmid \mathcal{W}$ 无平方因子；当 $b = 1$ 时，证明即告完成。

接下来假设 $b = -1$。若 $q \mid a$，则 $q = 2$，因此 $b_1 = 0$ 满足定理 2.2 的条件 (ii)。于是， $2 \nmid [\mathbb{Z}_K :\ \mathbb{Z}[\theta]]$ 当且仅当 $4 \nmid a$。假设 $q \nmid a$。那么，根据定理 2.2 的条件 (v)，我们可知 $q \nmid [\mathbb{Z}_K :\ \mathbb{Z}[\theta]]$当且仅当 $\mathcal{W}$ 无平方因子。□

3. The Proof of Theorem 1.2

定理 *1.2* 的证明。我们首先考察定理 2.1 的三个条件，以确定 $f(x)$ 单生性的判据。在定理 2.1 的背景下，令 $\mathfrak{f}(x)$ 等于我们的三项式 $f(x)$，则有 $f(x) = g(x^p)$，其中 $g(x) = x^2 + ax + b^p$。注意，由于 $\Delta(f) = b^{p(p-1)}p^{2p}(a^2 - 4b^p)^p$，根据 Swan 的一个定理 [14]，$p \mid \Delta(f)$。

定理 2.1 的条件 (1) 要求 $g(0)$ 无平方因子，这意味着 $b = \pm 1$。对于素数 $p \geq 3$，其中 $j \in \{1, 2\}$ 和 $b = \pm 1$，令

$$\begin{aligned} &(\Gamma_j, b) \text{ denote the condition that } \delta = (-1)^{j-1}py^2 \text{ for some } y \in \mathbb{Z}, \text{ and} \\ &(\Omega, b) \text{ denote the condition that } \delta \neq \pm py^2 \text{ for any } y \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

定理 2.1 的条件 (2) 表明，为了确定在什么条件下 $f(x)$ 的指标不被 $\Delta(f)$ 的素因子 q 整除，我们只需在定理 2.2 中检验唯一的素数 $q = p$。由于 $p \mid \delta$，其中 p 为奇数，且 $b = \pm 1$，我们推知只需检验定理 2.2 的条件 (iv)。

定理 2.1 的条件 (3) 要求 $g(x)$ 是单生成的，以使 $f(x)$ 单生成。对于 (3.1) 中描述的四种情形 (Γ_j, b)，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \frac{a^2 - 4b}{\gcd(a, 2)^2} = \frac{(-1)^{j-1}py^2}{\gcd(a, 2)^2} \quad &\text{is squarefree, so that} \\ a^2 - 4b \in \{(-1)^{j-1}p, (-1)^{j-1}4p\}, & \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中，当 $4 \mid a$ 时，$2 \mid a$；当 $b = 1$时，$4 \nmid a$；当 $b = -1$时，Γ_j。显然，在四种情形 (Γ_j, b) 中，情形 $(\Gamma_2, -1)$ 是不可能的。因此，我们考察三种情形 $(\Gamma_j, b) \in \{(\Gamma_1, 1), (\Gamma_2, 1), (\Gamma_1, -1)\}$，以及两种情形 $(\Omega, \pm 1)$。

情形 $(\Gamma_1, 1)$。由 (3.1) 和 (3.2)，可得 $a^2 - 4 \in \{p, 4p\}$。

若 $a^2 - 4 = p$，则或者 $a - 2 = 1$ 且 $a + 2 = p$，或者 $a - 2 = -p$ 且 $a + 2 = -1$。由第一种可能性可得 $(p, a) = (5, 3)$，而第二种可能性则得到数对 $(p, a) = (5, -3)$。这些数对对应于三项式

$$f(x) = x^{10} \pm 3x^5 + 1. \tag{3.3}$$

结合 $q = 5$ 考察定理 2.2 的条件 (iv)，我们看到

$$H_1(x) \equiv (x \pm 4)^2 \pmod 5 \quad \text{and} \quad H_2(x) \equiv \pm 2x(x^4 \pm 2x^3 + 3x^2 \pm x + 1) \pmod 5,$$

因此，$H_1(x)$ 和 $H_2(x)$ 在 $\mathbb{F}_5[x]$ 中互素。由此，(3.3) 中的两个三项式都是单生成的，并且由于 $p \equiv 1 \pmod 4$，根据定理 1.1 可得，对于二者，伽罗瓦群 $(f) \simeq C_5 \rtimes C_4$。

若 $a^2 - 4 = 4p$，则 $4 \mid a$，因此 $(a/2)^2 - 1 = p$。如前所述，我们得到 $(p, a) \in \{(3, \pm 4)\}$。这些数对给出了单生成三项式 $f(x) = x^6 \pm 4x^3 + 1$；由于 $p \equiv 3 \pmod 4$，根据定理 1.1，伽罗瓦群 $(f) \simeq (C_3 \rtimes C_2) \times C_2$。

当然，以上所有结论都可以借助计算机代数系统轻松验证。

情形 $(\Gamma_2, 1)$。由 (3.1) 和 (3.2)，可得 $a^2 - 4 \in \{-p, -4p\}$。这里唯一可行的情形是 $a^2 - 4 = -p$，这意味着 $p = 3$ 和 $a = \pm 1$。因此，$f(x) = x^6 \pm x^3 + 1$。由定理 2.2 的条件 (iv) 以及 $q = p$，我们得到

$$H_1(x) \equiv (x \pm 2)^2 \pmod 3 \quad \text{and} \quad H_2(x) = -x(x \pm 1) \pmod 3,$$

这验证了 $H_1(x)$ 和 $H_2(x)$ 在 $\mathbb{F}_3[x]$中互素。因此，三项式$f(x)$ 是单生成的，并且根据定理 1.1，$\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_3 \rtimes C_1) \times C_2 \simeq C_6$，因为$p \equiv 3 \pmod 4$。

情形 $(\Gamma_1, -1)$。 由 (3.1) 和 (3.2)，可得 $a^2+4 \in \{p, 4p\}$。

注意，若 $a^2+4=4p$，则 $p=(a/2)^2+1$，这意味着 $p=2$，因为 $4 \nmid a$，与 $p \geq 3$ 这一事实矛盾。因此，$a^2+4=p$ 且 $p \equiv 1 \pmod 4$。关于单生性，我们在 $q=p$ 的条件下考察定理 2.2 的条件 (iv)。于是

$$H_1(x) = x^2 + ax - 1 \equiv (x + a/2)^2 \pmod p,$$

and

$$\begin{aligned}
H_2(-a/2) &= \frac{a(-a/2)^p - 1 + (-a(-a/2)+1)^p}{p} \\
&= \frac{-(a^2)^{(p+1)/2} - 2^p + \left(a^2+2\right)^p}{p2^p} \\
&= \frac{-(p-4)^{(p+1)/2} - 2^p + (p-2)^p}{p2^p} \\
&= \frac{-\sum_{j=0}^{(p+1)/2} \binom{(p+1)/2}{j} p^j (-4)^{(p+1)/2-j} - 2^p + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} p^j (-2)^{p-j}}{p2^p} \\
&\equiv \frac{-(-4)^{(p+1)/2} - \frac{p(p+1)}{2}(-4)^{(p-1)/2} - 2^p + (-2)^p}{p2^p} \pmod p \\
&= \frac{(-1)^{(p+3)/2} 2^{p+1} - \frac{p(p+1)}{2}(-1)^{(p-1)/2} 2^{p-1} - 2^{p+1}}{p2^p} \\
&= -\left(\frac{p+1}{4}\right) \not\equiv 0 \pmod p.
\end{aligned}$$

因此，$H_1(x)$ 和 $H_2(x)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中互素。于是，根据定理 1.1，$f(x)$ 是单生成的，且其伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(f)$ 为 $\simeq C_p \rtimes C_{p-1}$。

情形 $(\Omega, 1)$。 由引理 2.3，我们要求

$$\mathcal{W} = \delta / \gcd(a,2)^2 = \begin{cases} (a-2)(a+2) \text{ is squarefree} & \text{if } 2 \nmid a \\ (a/2-1)(a/2+1) \text{ is squarefree} & \text{if } 2 \mid a, \end{cases} \tag{3.4}$$

对于 $f(x)$ 的单生性。容易看出，(3.4) 中的无平方因子条件等价于 $\mathcal{W}$ 的每个因子都无平方因子，而与 a 的奇偶性无关。此外，由于 $p \geq 3$ 与 $p \mid \delta$，我们看到 $p \mid (a-2)$ 或 $p \mid (a+2)$，无论 $2 \mid a$ 是否如此。

我们仅详细证明 $p \mid (a-2)$，因为 $p \mid (a+2)$ 的证明类似。令 $a = pk+2$为某个 $k \in \mathbb{Z}$，考察定理 2.2 的条件 (iv)，可得

$$H_1(x) = x^2 + (pk+2)x + 1 \equiv (x+1)^2 \pmod p,$$

and

$$\begin{aligned} H_2(-1) &= \frac{-a+1+(a-1)^p}{p} \\ &= \frac{-pk-1+(pk+1)^p}{p} \\ &= \frac{-pk-1+\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(pk)^j}{p} \\ &= \frac{-pk+\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(pk)^j}{p} \\ &\equiv -k \pmod{p} \\ &\not\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

因为 $a-2=pk$ 无平方因子。因此， $H_1(x)$ 与 $H_2(x)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中互素，所以 $f(x)$ 是单生成的。由定理 1.1 可知，$\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_p \rtimes C_{p-1}) \times C_2$。由于存在无穷多个整数 a，使得当 $2 \nmid a$ 时，$(a-2)(a+2)$ 无平方因子；并且存在无穷多个整数 a，使得当 $2 \mid a$ [1] 时，$(a/2-1)(a/2+1)$ 无平方因子，因此存在无穷多个 $a \in \mathbb{Z}$，使得 $f(x)$ 是单生成的，且 $\mathrm{Gal}(f) \simeq (C_p \rtimes C_{p-1}) \times C_2$。

情形 $(\Omega = 1)$。由于 $p \mid \delta$ 且 $f(-x)$ 为单生成当且仅当 $f(x)$ 为单生成，故此情形由 [10, 定理 1.1] 得出。由于存在无穷多个整数 a 使得 $(a^2+4)/\gcd(a, 2)^2$ 是无平方因子的 [13]，因此存在无穷多个这样的三项式。□

4. The Proof of Corollary 1.3

证明。设 p 是满足 $p > N$ 的素数，使得对某个整数 $a > 0$，$f(x) = x^{2p} + ax^p - 1$ 为单生成，且伽罗瓦群 $(f) \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$。则由定理 1.2 得 $p = a^2+4$，并且显然 a 是唯一的。反之，设 z^2+4 为素数，并令 $f(x) = x^{2(z^2+4)} + zx^{z^2+4} - 1 = g(x^{z^2+4})$，其中 $g(x) = x^2 + zx - 1$。由于 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约当且仅当 $f(-x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，故由 [11, 引理 3.1] 可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。于是由定理 1.2 可知，$f(x)$ 为单生成，且伽罗瓦群 $(f) \simeq C_p \rtimes C_{p-1}$，因为 $z^2+4 \equiv 1$ （模 4）。□

Acknowledgments

References

[1] A. Booker 和 T. D. Browning, *Square-free values of reducible polynomials*, 《离散分析》2016 年，第 8 号论文，共 16 页。[2] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, 施普林格出版社，2000 年。[3] J. Harrington 和 L. Jones, *The irreducibility of power-compositional sextic polynomials and their Galois groups* **120** 2017 2, 181 194 ,《斯堪的纳维亚数学杂志》（），第 – 期。[4] J. Harrington 和 L. Jones, *A note on generalised Wall-Sun-Sun primes*, 《澳大利亚数学会公报》**108** （2023 年），第 3 期，373–378 页。[5] J. Harrington 和 L. Jones, *Monogenic trinomials of the form $x^n + ax^m + b$ and their Galois groups* , 《代数与应用杂志》（即将出版）。[6] J. Harrington 和 L. Jones, *Monogenic sextic trinomials $x^6 + Ax^3 + B$ and their Galois groups* , 《算术学报》（即将出版）。

[7] A. Jakhar、S. Khanduja 和 N. Sangwan, *Characterization of primes dividing the index of a trinomial* **13** 2017 2514 ,《国际数论杂志》（），第 10 期，2505– 页。

[8] A. Jim 和 T. Hagedorn, *The Galois Group of $x^{2p}+bx^{p}+c^{p}$ over $\mathbb{Q}$*, arXiv:2401.13925v1。[9] L. Jones, *Monogenic reciprocal trinomials and their Galois groups*, 《代数与应用杂志》**21**（2022 年），第 2 期，第 2250026 号论文，共 11 页。[10] L. Jones, *A new condition for k-Wall-Sun-Sun primes* **28** 2024 1, , 《台湾数学期刊》17 ( ) 28, 第 – 期。[11] L. Jones, *Generalized Wall-Sun-Sun primes and monogenic power-compositional trinomials*, 《阿尔巴尼亚数学杂志》**17**（2023 年），第 2 期，3–17 页。[12] S. Kaur、S. Kumar 和 L. Remete, *On the index of power compositional polynomials*, 《有限域及其应用》**107**（2025 年），第 102642 号论文，共 20 页。[13] T. Nagel, *Zur Arithmetik der Polynome*, 《汉堡大学数学讨论班论文集》**1**（1922 年），179–194 页。[14] R. Swan, *Factorization of polynomials over finite fields*, 《太平洋数学杂志》**12**（1962 年），1099–1106 页。

Department of Mathematics, Cedar Crest College, Allentown, Pennsylvania, USA
Email address, JOSHUA HARRINGTON: Joshua.Harrington@cedarcrest.edu
Professor Emeritus, Department of Mathematics, Shippensburg University, Shippensburg, Pennsylvania 17257, USA*Email address*, LENNY JONES: doctorlennyjones@gmail.com