arXiv:2603.06438v1 [math.NT] 6 Mar 2026

整数分拆的递归结构

BorisY. Rubinstein 斯托尔斯医学研究所
1000 50th St.，堪萨斯城，MO 64110，美国

2026年3月9日

摘要

Sylvester 证明，将一个整数分拆为一组正整数，可以表示为多项式项与称为 Sylvester波的准周期分量之和。波本身是多项式项与周期函数乘积的加权和。整数权重被发现可表示为分拆成更小整数集合的分拆之和，这表明了整数分拆的递归结构。

关键词：整数分拆，Sylvester波。**2010年数学主题分类**：
11P82。

将正整数分拆的研究历史悠久，始于欧拉的工作。他引入生成函数的思想，为分拆理论奠定了基础[1]。A. Cayley 和 J.J. Sylvester 提出了新的见解，并在这一领域取得了显著进展。Cayley 描述了分拆的对称性 [3]，而 Sylvester 则找到了计算它们的方法 [10, 11]。定义分拆函数 $W(s,\ \mathbf{d}^m)$，其值为将整数 s 分拆为正整数 $\mathbf{d}^m=\{d_1,d_2,\ldots,d_m\}$ 的分拆数。Sylvester 证明 [10]，$W(s,\ \mathbf{d}^m)$ 可分解为多项式部分和准周期部分，并将其表示为若干称为 *Sylvester* 波的分量之和

$$W(s,\mathbf{d}^m)=\sum_{j=1}W_j(s,\mathbf{d}^m), \tag{1}$$

其中，求和遍及集合$\mathbf{d}^m$中各元素的所有因子。波 $W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$ 是关于 s 的准多项式，与单位根 ρ_j 密切相关。具体而言，Sylvester 证明 [11]，波 $W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$ 是 t^{-1} 在 t 的升幂级数展开中的系数

$$F_j(s,t)=\sum_{\rho_j}\frac{\rho_j^{-s}e^{st}}{\prod_{k=1}^m\left(1-\rho_j^{d_k}e^{-d_kt}\right)}\ ,\quad \rho_j=\exp(2\pi in/j), \tag{2}$$

其中，对所有满足与 j 互素（包括单位根）且小于 j的单位根ρ_j 求和，条件为 n。根据西尔维斯特方法 (2)，我们在 [6] 中得到了西尔维斯特波 $W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$ 的一个公式，它是高阶伯努利多项式 [2, 5] 与周期为整数 j的周期函数乘积的有限和。分拆函数的多项式部分 $W_1(s,\ \mathbf{d}^m)$ 为

$$W_1(s,\mathbf{d}^m)=\frac{1}{(m-1)!\,\pi_m}B_{m-1}^{(m)}(s+s_m,\mathbf{d}^m)\ ,\quad s_m=\sum_{i=1}^m d_i,\quad \pi_m=\prod_{i=1}^m d_i\ , \tag{3}$$

其中高阶伯努利多项式由生成函数定义 [5]：

$$\frac{e^{st}t^m\pi_m}{\prod_{i=1}^m(e^{d_it}-1)}=\sum_{n=0}^\infty B_n^{(m)}(s,\mathbf{d}^m)\frac{t^n}{n!}\ . \tag{4}$$

对于 $j>1$，西尔维斯特波 $W_j(s,\mathbf{d}^m)$ 可写为

$$W_j(s,\mathbf{d}^m)=\frac{j^{k_j-m}}{(m-1)!\,\pi_m}\sum_{\mathbf{r}=0}^{j-1}B_{m-1}^{(m)}(s+s_m+\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}^{m-k_j},\mathbf{d}_j^m)\Psi_j(s+s_m+\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}^{m-k_j}),\tag{5}$$

其中我们引入修改后的集合 $\mathbf{d}_j^m=\mathbf{d}^{k_j}\cup j\mathbf{d}^{m-k_j}$，它由两个子集组成——$\mathbf{d}^{k_j}=\{d_1,d_2,\ldots,d_{k_j}\}$，其中包含可被 j 整除的生成元 d_i；以及 $j\mathbf{d}^{m-k_j}=\{jd_{k_j+1},jd_{k_j+2},\ldots,jd_m\}$，其中包含不可被 j 整除的 d_i。$(m-k_j)$ 维向量 $\mathbf{r}$ 具有形式 $\mathbf{r}=\{r_{k_j+1},r_{k_j+2},\ldots,r_m\}$，其中 $0\le r_i\le j-1$。式 (5) 中的素数循环函数 Ψ_j 是在 [3] 中引入的 j-周期函数，可以写成简单周期函数之和

$$\Psi_j(s)=\sum_{\rho_j}\rho_j^s=\sum_n\psi_j^n(s),\quad \psi_j(s)=\exp(2\pi is/j),\quad \sum_{k=0}^{j-1}\psi_j^n(k)=0,\tag{6}$$

对于所有与 j 互素的 $1\le n\le j-1$。将式 (5) 与式 (3) 比较可知，[6] 西尔维斯特波$W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$可以看作是各多项式部分（自变量经过平移）的加权和，权重由素数循环函数给出

$$\begin{aligned}W_j(s,\mathbf{d}^m) &= \sum_{\mathbf{r}=0}^{j-1}W_1(s-\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}^{m-k_j},\mathbf{d}_j^m)\Psi_j(s-\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}^{m-k_j}) &(7)\\ &= \sum_{l=0}^{l_{max}}A_lW_1(s-l,\mathbf{d}_j^m)\Psi_j(s-l),\quad l_{max}=(j-1)\sum_{i=k_j+1}^{m}d_i, &(8)\\ l &= \sum_{\mathbf{r}=0}^{j-1}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}^{m-k_j}=\sum_{i=k_j+1}^{m}r_id_i,\quad 0\le r_i\le j-1. &(9)\end{aligned}$$

与 (7) 等价的表示式 (8) 具有非负整数系数 A_l。

注意到，对于 (9) 中的和，相同的值 l 可以由多个整数向量$\mathbf{r}$ 得到，因此我们将 (8) 中的 A_l 定义为满足丢番图方程 (9) 以及 $m-k_j$ 个不等式 $0\le r_i\le j-1$的整数向量$\mathbf{r}$的数量。可以证明（例如参见 [7, 8]），此类问题等价于计算某个整数向量 分拆。具体而言，引入$m-k_j$ 个松弛整数变量 $\rho_i,\ k_j+1\le i\le m$，并在 (9) 中的线性方程后添加 $m-k_j$ 个方程 $r_i+\rho_i=j-1$，从而构成一个由 $(m-k_j+1)$ 个丢番图方程组成的方程组

$$\begin{aligned}l &= d_{k_j+1}r_{k_j+1}+d_{k_j+2}r_{k_j+2}+\ldots+d_mr_m,\\ j-1 &= r_{k_j+1}+\rho_{k_j+1},\\ j-1 &= r_{k_j+2}+\rho_{k_j+2},\\ &\ldots\\ j-1 &= r_m+\rho_m.\end{aligned}\tag{10}$$

方程（9）的解的数量与等价于矩阵方程的系统（10）相同

$$\mathbf{S}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}d_{k_j+1} & d_{k_j+2} & \ldots & d_m & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}l\\ j-1\\ j-1\\ \ldots\\ j-1\end{bmatrix},\tag{11}$$

其中$\mathbf{D}$ 是（$m - k_j + 1$） $\times$ 2（$m - k_j$）整数非负矩阵，而$\mathbf{S}$ 和$\mathbf{R} = \{r_{k_j+1}, r_{k_j+2}, \ldots, r_m, \rho_{k_j+1}, \rho_{k_j+2}, \ldots, \rho_m\}^T$是整数非负向量。

将向量分拆递归约化为标量分拆的思想属于Sylvester [12]，其在二重分拆情形下的首次实现由Cayley [4]完成。Sylvester在 [12] 中指出，这一基于反复变量消去（对应于消去矩阵$\mathbf{D}$的行与列）的算法，仅在矩阵元素满足某些附加条件时才有效。Cayley在 [4]中证实的这一观察使数学家们认为该方法用途极为有限，并最终被遗忘。最近，本稿作者通过解除所有限制推广了原始的Sylvester-Cayley方法，并证明任意向量分拆确实可以写成有限个标量分拆的叠加 [9]。

利用 [9]中给出的方法，我们将方程组(10)的非负整数解的个数 A_l 表示为标量分拆之和

$$A_l = \sum_{p=0}^{2^{m-k_j}-1} (-1)^{\lambda_p} W(s_p, \mathbf{d}^{m-k_j}), \quad \lambda_p = \sum_{i=k_j+1}^{m} v_{p,i}, \quad s_p = l - j\ \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{d}^{m-k_j}, \tag{12}$$

其中，$(m - k_j)$维向量$\mathbf{v}_p = \{v_{p,k_j+1}, v_{p,k_j+2}, \ldots, v_{p,m}\}$是由0和1组成的序列，它定义了整数 p的二进制表示。

该结果与（8）一起表明了分拆函数结构的递归性质。具体而言，对于由整数集合 $\mathbf{d}^m$ 构成的 m 维集合，其分拆函数 $W(s,\ \mathbf{d}^m)$ 是集合 $\mathbf{d}^m$ 的每个因子 j 所对应的西尔维斯特波 $W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$ 之和。波 $W_j(s,\ \mathbf{d}^m)$ 是 j-周期调制的多项式部分 $W_1(s-l,\ \mathbf{d}_j^m)\Psi_j(s-l)$（带有平移后的自变量）的加权和。权重 A_l 则完全由 s_p 在子集 $\mathbf{d}^{m-k_j}$ 中的分拆 $W(s_p,\ \mathbf{d}^{m-k_j})$ 所决定，其中该子集仅包含不能被 j 整除的生成元。因此，标量分拆的计算可以看作一个递归过程，其中生成元集合的长度不断缩短；而整数分拆问题似乎是一个自洽的问题。

参考文献

[1] G. E. Andrews, 《分拆理论》, 《数学及其应用百科全书》, 第2卷, Addison–Wesley, 1976年。[2] H. Bateman与A. Erdel´yi, 《高等超越函数》, 第1卷, 麦格劳-希尔图书公司, 纽约, 1953年。[3] A. Cayley, 《关于数的分拆的研究》, 《皇家学会哲学汇刊》**CXLV** （1855）, 127-140; 数学论文集, 剑桥大学出版社, **II**, 235-249, 1889年。[4] A. Cayley, 《论二重分拆问题》, 《哲学杂志》**XX** （1860）, 337-341; 数学论文集, 剑桥大学出版社, **IV**, 166-170, 1891年。.[5] N.E.N¨orlund, 《差分演算讲义》, 柏林尤利乌斯·施普林格出版社, 1924年。[6] B.Y. Rubinstein, 《通过伯努利多项式表示受限分拆函数》, 《Ramanujan杂志》**15** （2008）, 177-185。[7] B.Y. Rubinstein, 《*Sylvester-Cayley*向量分拆算法与高斯多项式》, arXiv（2023）, arXiv:2112.06983v3 [math.NT]。

[8] B.Y. Rubinstein, 《论二重分拆的凯莱算法》, arXiv（2023）, arXiv:2310.00538v1[math.NT]。[9] B.Y. Rubinstein, 《论向量分拆约化的西尔维斯特纲领与凯莱算法》, arXiv（2025）, arXiv:2503.18789v4 [math.NT][10] J.J. Sylvester, 《论数的分拆》, 《数学季刊》**I**（1857）, 141-152; 数学论文集, 剑桥大学出版社, **II**, 90-99, 1908年。[11] J. J. Sylvester, 《论次不变量, 即任意阶二元齐式的半不变量》, 《美国数学杂志》**V**（1882）, 79-136; 数学论文集, 剑桥大学出版社, **III**, 568-622, 1909年。[12] J.J. Sylvester, 《论处女问题与复合分拆的一般理论》, 《哲学杂志》**XVI**（1858）, 371-376; 数学论文集, 剑桥大学出版社, **II**, 113-117, 1908年。