arXiv:2603.06443v1 [math.AG] 6 Mar 2026

o-最小结构中的内 Lipschitz 逼近

NHAN NGUYEN、ANNA VALETTE 和 GUILLAUME VALETTE

摘要。给定一个 o-极小结构，我们证明，任何在该结构中可定义且关于内度量为 Lipschitz 的映射，都可以用关于内度量为 Lipschitz 的映射来逼近，并且其导数界可以任意接近。当 o-极小结构具有 $\mathscr{C}^\infty$ 细胞分解时，我们证明可以要求该逼近是 $\mathscr{C}^\infty$ 的，并将这一结果推广到外 Lipschitz 映射。证明涉及构造导数界精确的单位分解，这对其他逼近问题也可能有用。

谨以此文纪念 *David Trotman*

1. 引言

逼近定理在分析的许多领域都发挥着重要作用。近年来，o-极小几何的发展为我们提供了宝贵的工具，使我们能够在奇异空间上进行分析。

在 [F], A. Fisher 证明，Lipschitz 可定义映射可由连续可微的可定义映射逼近，并且 Lipschitz 常数也可同时得到逼近。我们在本文中对内 Lipschitz 可定义映射证明了一个类似结果（定理4.3）。这是一类几乎处处具有有界一阶导数的映射，在奇异簇上进行分析时自然出现。例如，为了定义权函数以研究奇异区域上偏微分方程的解，需要具有有界导数的可定义逼近（例如参见 [V2]）。该定理的证明依赖于构造具有一阶导数尖锐界的可定义 $\mathscr{C}^1$ 单位分解（定理 4.2），这一构造本身也有独立意义，并可用于证明其他稠密性结果。它可以看作是对 [K-CPV], 中结果的改进，其中构造了 Λ^0_p正则单位分解。从某种意义上说，我们给出了 Λ^0_1-正则单位分解，但其常数可以任意小。

我们还推导出 $\mathscr{C}^\infty$ 逼近结果。o-极小结构的所有有限性性质使其极具吸引力，同时也使其非常僵化。例如，众所周知，当结构为多项式有界时，不可能构造 $\mathscr{C}^\infty$ 可定义的单位分解。在这类结构中，任何在某点处泰勒级数为 0 的 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，在其定义域中包含该点的整个连通分支上都必须为 0，这使得在此框架下的 $\mathscr{C}^\infty$ 逼近问题更具挑战性。我们通过证明确实可以……，进一步加强了 Fisher 的结果

2020 数学主题分类。03C64,14P99,26A16, 41A44,57R12。关键词和短语。Lipschitz 映射，逼近，o-极小结构。该研究合作由雅盖隆大学（克拉科夫）的“卓越计划——研究型大学”项目资助；最后两位作者获波兰国家科学中心资助，项目编号为 2021/43/B/ST1/02359。

用 $\mathscr{C}^\infty$ 可定义 Lipschitz 映射来逼近可定义 Lipschitz 映射（定理 4.6），且该结果适用于任何允许进行 $\mathscr{C}^\infty$ 细胞分解的 o-极小结构。此外，我们还给出了关于内 Lipschitz 映射的类似结果（推论4.4）。

我们用 $|.|$ 表示欧几里得范数。给定集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们用 $d(x, A)$ 表示点 $x \in \mathbb{R}^n$ 到 A 的欧几里得距离，并用 ∂A 表示 A 的拓扑边界，即 $\partial A := A \setminus A$。$\mathbf{B}(x, r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球。

2. 框架

我们回顾一些关于 o-极小结构的基本事实和定义。更多内容请参阅[C, D] 。在下文中，尽管 [V1] 仅专注于次解析范畴，我们有时也会引用这篇综述中那些证明可推广到 o-极小结构框架的结果。

2.1. **o-极小结构**。A 结构（扩张 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$）是一个族 $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 n，以下性质均成立

(1) $\mathcal{D}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$的子集的布尔代数。(2) 若 $A \in \mathcal{D}_n$ 且 $B \in \mathcal{D}_k$，则 $A \times B$ 属于 $\mathcal{D}_{n+k}$。
(3) $\mathcal{D}_n$ 包含 $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}$，其中 $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$。(4) 若 $A \in \mathcal{D}_n$，则 $\pi(A)$属于 $\mathcal{D}_{n-1}$，其中 $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是到前$(n-1)$个坐标上的标准投影。

这样的族 $\mathcal{D}$ 称为*o*-极小，如果此外还满足：

(5) 任一集合 $A \in \mathcal{D}_1$ 是区间与点的有限并。

属于结构 $\mathcal{D}$ 的集合称为可定义集，且其图像属于结构 $\mathcal{D}$ 的映射称为可定义映射。

结构 $\mathcal{D}$ 称为多项式有界，如果对每个可定义函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，存在正数 a 与 $p \in \mathbb{N}$，使得对所有 $x > a$都有 $|f(x)| < x^p$。

多项式有界的 o-极小结构的例子包括半代数集和全局次解析集，也包括所谓的 x^λ-集，以及由便于使用的拟解析 Denjoy-Carleman 类函数定义的结构 [RSW]。

如果对于每个定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U 上的可定义函数 f，都存在 V 的可定义开稠密子集 U，使得 f 在其上是 $\mathscr{C}^\infty$，我们就说一个 o-极小结构具有 $\mathscr{C}^\infty$ 胞腔分解。上述所有多项式有界的 o-极小结构的例子都具有 $\mathscr{C}^\infty$ 胞腔分解。

本文中，$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示一个固定的多项式有界 o-极小结构（扩张 $(\mathbb{R}, +, .)$）。“可定义”一词均指相对于此结构而言。

给定 $A \in \mathcal{D}_n$ 和 $B \in \mathcal{D}_k$，我们用 $\mathcal{D}(A, B)$ 表示可定义映射 $\xi : A \to B$ 的集合，用 $\mathcal{D}(A)$ 表示可定义函数 $\xi : A \to \mathbb{R}$ 的集合，而 $\mathcal{D}^+(A)$ 表示定义在 A 上的正的可定义连续函数的集合。

给定 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们用 $\mathcal{D}^m(A)$（分别用 $\mathcal{D}^m(A, B)$）表示 $\mathcal{D}(A)$（分别为 $\mathcal{D}(A, B)$）中满足以下条件的元素：$\mathscr{C}^m$（如果一个函数可以延拓为 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中某个开邻域上的 $\mathscr{C}^m$ 函数，则称它在 A 上 $\mathscr{C}^m$）。

给定映射 $f\colon A \to B$，我们用 $|f|$ 表示将 $x \in A$ 映射到数值 $|f(x)|$ 的函数。当 f 可微时，我们将用 $|df|$ 表示由 $x \mapsto |d_x f|$ 定义的函数，其中 $|d_x f| := \sup_{|u|=1} |d_x f(u)|$。于是我们定义

$$|f|_1 := |f| + |df|.$$

最近 [VV，定理 4.8]已证明，若 $\mathcal{D}$ 具有 $\mathscr{C}^\infty$ 细胞分解，且M是 $\mathscr{C}^\infty$ 的可定义子流形 $\mathbb{R}^n$，那么对每个 $f \in \mathcal{D}^1(M)$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{D}^+(M)$，存在 $g \in \mathcal{D}^\infty(M)$ 使得在 M

$$|f - g|_1 < \varepsilon.$$

这一结果早先已在半代数结构中由 M. Shiota 证明 [S]。这一方向上的首个深刻发现确实归功于 G. Efroymson，他证明存在一个 $\mathscr{C}^\infty$ 半代数函数 g 使得 $|f - g| < \varepsilon$ [BCR，定理 8.8.4]。

若 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义 $\mathscr{C}^k$ 子流形（$k \geq 2$ 可能是无限的），则存在 S 的可定义开邻域 U_S 以及一个可定义 $\mathscr{C}^{k-1}$ 收缩 $\pi_S\colon U_S \to S$，使得对所有 $x \in U_S$，我们都有

$$d(x, S) = |x - \pi_S(x)|.$$

若维数 $S = n$ 则 $U_S = S$ 和 $\pi_S(x) = x$ 对所有 x成立。此外，对于 $x \in U_S \setminus S$，我们有

$$\nabla_x d(\cdot, S) = \frac{x - \pi_S(x)}{|x - \pi_S(x)|},$$

它总是与 $T_{\pi_S(x)}S$ (参见 [V1，命题 2.4。1])。

给定 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$，我们接着令

$$U_S^\delta := \{x \in U_S : d(x, S) < \delta(\pi_S(x))\}. \tag{2.1}$$

2.2. 分层。我们将给定的两个向量子空间之间的角度 E 和 F在 $\mathbb{R}^n$ 中定义为:

$$\angle(E, F) := \sup_{u \in E, |u| \leq 1} d(u, F).$$

定义 2.1。$\mathscr{C}^k$ 可定义集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的分层是将其有限划分为 $\mathbb{R}^n$中的可定义子流形 $\mathscr{C}^k$，这些子流形称为层。分层 $\mathcal{S}$ 的加细是指满足以下条件的分层 $\mathcal{S}'$：每个 $S \in \mathcal{S}$ 都是 $\mathcal{S}'$中若干层的并集。

设 S和 Y是（某个分层的）两个层，且设 $z \in S \cap Y$。如果存在常数C，使得对于 z的某个邻域中的 $y \in Y$和 $x \in S$，满足：则称 $(Y,\ S)$ 在 z 处满足（Kuo-Verdier 的）(w) 条件：

$$\angle(T_x S, T_y Y) \leq C|x - y|. \tag{2.2}$$

如果每一对层 (Y, S) 都在 $S \cap \overline{Y}$ 的每一点满足 (w) 条件，我们就称分层 $\mathcal{S}$ 为 (w)-正则。若集合 A 的分层 $\mathcal{S}$ 满足前沿条件，则称其满足前沿条件，即 A 中每个 $S \in \mathcal{S}$ 的闭包都是 $\mathcal{S}$ 中若干层的并。等价地，给定 $\mathcal{S}$ 中的 S 和 Y，则 $Y \cap S = \emptyset$ 或 $S \subset Y$。当各层连通（通过加细总能做到），且 A 局部闭时，(w) 条件蕴含前沿条件（参见 [Ve] 或 [V1，命题 2.6.3 和 2.6.17]）。

定义 2.2. 如果对于所有极限为 x 的序列 $x_i \in S$ 和 $y_i \in Y$，满足 $T_{y_i}Y$ 趋于 τ 且直线 x_iy_i 趋于 λ，都有 $\lambda \subset \tau$，则称流形对 $(Y,\ S)$ 在 $x \in S$ 满足 惠特尼 (b) 条件，或称其在 x 处为 (b)-正则。如果一个分层中的每对层都是 (b)-正则的（在每一点处），则称该分层为 (b)-正则。

Ta LeLoi [L] 证明了每个可定义集都容许一个(w)-正则分层，并且 Kuo-Verdier(w) 条件蕴含 Whitney 的(b) 条件。

注2.3. 若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义子流形且 $x_0 \in M \setminus M$，则 $(M,\ \{x_0\})$ 是 (b)-正则的。事实上，若 Whitney 的 (b) 条件不成立，则由曲线选择引理容易推出，它会沿 M 中趋于 x_0的一条可定义弧 γ 不成立。但因 γ 可定义，$(\gamma(t) - x_0)$ 与 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 之间的角度必趋于 0，矛盾。

我们现在回顾水平 $\mathscr{C}^1$ 分层映射这一概念，它归功于 C. Murolo 与 D. Trotman [MT]。

定义 2.4. 设 $f\colon A \to B$ 是一个可定义映射。若 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 A 和 B 的分层，且每个分层 $S \in \mathcal{S}$ 经 f 映射到 $\mathcal{T}$中的某个元素 T，并且限制映射$f_{|S}\colon S \to T$是一个 $\mathscr{C}^\infty$ 次浸没，则称 $f\colon (A,\mathcal{S}) \to (B,\mathcal{T})$ 为一个分层映射 。

给定一个可定义映射 $f\colon A \to B$，可以构造分层 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{T}$，分别对应于 A 和 B，使得 f 成为一个分层映射。这些分层可以满足(w) 条件，或者更一般地，满足任何可以对可定义集进行分层的条件（参见 [V1，命题 2.6。10]）。

若分层映射 $f\colon (A,\mathcal{S}) \to (B,\mathcal{T})$ 对任意序列 $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ 满足以下条件，则称其为水平的 $\mathscr{C}^1$：该序列位于 $\mathcal{S}$的一个分层 Y中，并趋于 $S \in \mathcal{S}$的一个分层中的某点 x；且对于任意趋于 T_xS中向量 u 的序列$u_l \in T_{x_l}Y$，有

$$\lim d_{x_l} f_{|Y}(u_l) = d_x f_{|S}(u).$$

注记 2.5。由于我们可以选取一个趋于 0 的序列 u_l，水平 $\mathscr{C}^1$ 映射必须具有局部有界导数。此外，当 (w) 条件成立时，上述定义中所要求的连续性条件意味着，每个分层 S 对于任意正数 μ，都存在一个可定义邻域 U，使得在 A 上

$$|d_{\pi_S(x)} f_{|S}| \le |d_x f_{|Y}| + \mu, \tag{2.3}$$

其中 Y 是包含 x的分层。反过来，给定一个具有局部有界导数的映射，不难看出，存在 f 的一个分层，使得 f 是水平 $\mathscr{C}^1$ 的。该分层实际上由典范投影在 (w)- 正则分层在 $A \times B \to B$ 到 f的图像上的限制所给出。可以要求 A 和 B 的相应分层满足 (w) 条件（关于构造正则水平 $\mathscr{C}^1$ 分层，参见 [V1，命题 2.6.13] ）。

2.3. 粗糙向量场。设 $\mathcal{S}$ 是可定义集 A 的 (w)-正则分层，并设 $S \in \mathcal{S}$ 以及 $x_0 \in S$。Verdier [Ve] 已证明，当满足 (w) 条件时，S 上靠近 x_0 的每个光滑切向量场的芽（例如 $v\colon U \cap S \to TS$）都存在一个延拓 $\tilde{v}\colon U \cap A \to \mathbb{R}^n$，且该延拓与各层相切（即对所有 $x \in U \cap Y$，$v(x) \in T_xY$，

$Y \in \mathcal{S}$)，并且存在一个常数 C （取决于 x_0），使得对 x_0 附近的所有 $x \in A$ 和 $y \in S$：

$$|\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)| \le C|x - y|. \tag{2.4}$$

满足此类不等式的向量场称为 粗糙 [Ve]。事实上，Brodersen 和 Trotman 已证明，这种延拓性质等价于 (w) 条件 [BT]。关于分层和粗糙向量场的更多详情，请参阅 David Trotman 的综述 T]及其中的参考文献。

3. 内 Lipschitz 映射

若 x 和 y 是可定义集 $A \subset \mathbb{R}^n$中同一连通分支上的两个点，我们定义

$$\mathring{d}_A(x, y) := \inf\{l(\gamma) : \gamma \in \mathcal{D}^0([0,1], A), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

其中 $l(\gamma)$表示弧 γ的长度（定义为 $\sup \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$，上确界取遍所有分割 $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$）。当 x和 y不°属于同一连通分支时，我们令 $d_A(x, y) := +\infty$。我们称 $d_A(\cdot, \cdot)$ 为上的内度量。

内度量的定义仅限于可定义弧，因为我们需要一定的正则性才能计算弧的长度（可定义弧是分段 $\mathscr{C}^1$），并且众所周知，连通的可定义弧是可定义道路连通的。由于集合 A 可能是奇异的，我们不确定是否总存在一条 $\mathscr{C}^1$ 弧连接各点。引理3.3 将证明， $\mathscr{C}^0$ 弧会给出相同的度量（见（3.9））。

定义 3.1。 我们称映射 $f : A \to \mathbb{R}^k$ 是内 *Lipschitz* 的，如果存在常数 C，使得对任意 x, $y \in A$，以下不等式成立

$$|f(x) - f(y)| \le C\mathring{d}_A(x, y).$$

这样的最小 C 称为 f的内 *Lipschitz* 常数。

给定映射 $f : A \to \mathbb{R}^k$ 和 $x_0 \in A$，我们定义

$$\mathring{L}_f(x_0) := \inf_{r>0}\{C : |f(x) - f(y)| \le C\mathring{d}_A(x, y), \text{ for all } x, y \in \mathbf{B}(x_0, r) \cap A\}.$$

°由定义可直接得出， f 是内 Lipschitz 的，当且仅当 L_f 是在 A上的有界函数；在这种情况下， f 的内 Lipschitz 常数等于° L_f的上确界。

我们强调，内距离不一定是可定义的。不过，下面的引理°证明了 L_f 是一个可定义函数。在此引理中，我们考虑 $d_x f$，尽管并未假设 f 可微。这是因为可定义映射在其定义域的一个可定义稠密子集上可微。

引理 3.2. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个可定义集，且 $f \in \mathcal{D}^0(A, \mathbb{R}^k)$。对所有 $x_0 \in A$，有

$$\mathring{L}_f(x_0) = \inf_{r>0} \sup\{|d_x f| : x \in \mathbf{B}(x_0, r) \cap A\}. \tag{3.5}$$

证明。 由于 $|d_x f|$ 不可能大于内 Lipschitz 常数，因此右侧不可能大于左侧。于是只需证明反向不等式。

分别取 A 和 $\mathbb{R}^k$ 的 (w)-正则分层 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$，使得 f 成为一个水平 $\mathscr{C}^1$ 映射，并假设对于某个 r，在 $\mathbf{B}(x_0,r)$ 上 $\cap A$。

我们来证明存在 $\tilde{r}\leq r$ 使得 f 是 L关于 $\mathbf{B}(x_0,\tilde{r})$ 上的内度量为 -Lipschitz $\cap A$。由（2.3）可知：

$$\sup_{x\in\mathbf{B}(x_0,r)\cap S}|d_x f_{|S}|\leq L, \tag{3.6}$$

对于与该集合相交的每个分层 $S\in\mathcal{S}$。由于 $d_A(a,x_0)$ 趋于 0 当 $|a-x_0|$ 趋于 0时（例如参见 [KP] 或 [V1，命题 3.2.5]；这也可由下一个引理直接推出），存在 $\tilde{r}\leq\frac{r}{4}$ 使得对于所有 a 属于 $\mathbf{B}(x_0,\tilde{r})\cap A$

$$\mathring{d}_A(a,x_0)<\frac{r}{4}. \tag{3.7}$$

根据内度量的定义，给定 a，$b\in A$ 对于每个 $\mu>0$，存在一条长度不超过 $d_A(a,b)+\mu$、连接 a 和 b 的 $\mathscr{C}^0$ 可定义弧 $\gamma\colon[0,1]\to A$。对于 $\mu<\frac{r}{4}$ 和 a，以及 $\mathbf{B}(x_0,\tilde{r})\cap A$ 中的 b，我们有

$$l(\gamma)\leq\mathring{d}_A(a,b)+\mu\leq\mathring{d}_A(a,x_0)+\mathring{d}_A(b,x_0)+\frac{r}{4}\overset{(3.7)}{<}\frac{3r}{4},$$

这意味着这样的弧 γ不会离开 $\mathbf{B}(x_0,r)\cap A$（因为 $\gamma(0)\in\mathbf{B}(x_0,\frac{r}{4})$）。于是，令 $t_0=0<t_1<\cdots<t_k=1$ 满足 γ对所有 (t_i,t_{i+1}) 上的 $i<k$都保持在同一个分层中。由（3.6）和中值定理，对每个 $i<k$，有：

$$|f(\gamma(t_i))-f(\gamma(t_{i+1}))|\leq Ll(\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}),$$

这表明 $|f(a)-f(b)|$不大于 $Ll(\gamma)$。因此，$|f(a)-f(b)|\leq Ld_A(a,b)$，如所声称。□

内距离是通过在所有可定义连续弧中取下确界来定义的。不过，引理3.5的证明将涉及对向量场的积分，而这可能产生不可定义的弧。因此，我们需要验证：在所有连续弧中取下确界不会得到更小的值。为此需要以下引理（见（3.10））。

引理 3.3. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个可定义集，且 $\mu>0$。每个 $x_0\in A$ 都有一个邻域U 包含于 A，使得每个 $x\in U$ 都可以通过一条 A 中的可定义弧 $\mathscr{C}^0$ 连接到 x_0，且弧长不超过 $(1+\mu)|x-x_0|$.

证明。我们假设 $x_0=0$，并对 n作归纳证明，$n=1$ 的情形显然。首先注意，若 $A_1,\ldots,A_k$ 是满足引理条件的可定义集，则它们的并也满足引理条件。特别地，由于 A 可以覆盖为有限个 Lipschitz 胞腔（经过适当的正交归一坐标变换后）的并，且该变换可视为恒等变换（例如参见 [KP]或 [V1，命题 3.2.5]），只需对 A 属于 $E\cup\{0\}$类型的情形证明结论，其中 E 是满足 $0\in E$的 Lipschitz 胞腔。

只需构造一个可定义映射 $h\colon U\times[0,1]\to U$，其中 U 是 A 中 0 的邻域，使得

(1) $h(x,0)=0$和 $h(x,1)=x$(2) $h(x,t)$ 关于 t 是 $\mathscr{C}^1$，且向量 $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\neq0$ 与$h(x,t)$ 之间的角度在 $x\to0$时趋于零（在 $t\in(0,1]$) 中一致）。

我们将 h 记为对 $\pi(A)$ 应用归纳假设所得的映射，其中$\pi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是省略最后一个坐标的投影。我们从 E 是 Lipschitz 函数 $\xi:\ \pi(E) \to \mathbb{R}$ 的图像这一情形开始。在这种情况下，我们声称

$$\tilde{h}(x,t) := (h(x,t), \xi(h(x,t)))$$

具有所需的性质。为说明这一点，为简便起见，分别用 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示向量 $\tilde{h}(x,t)$ 和 $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ 除以它们各自投影到$\mathbb{R}^{n-1}$ 上的范数。用 $w(x,t)$ 表示实现从 $u(x,t)$ 到 $T_{\tilde{h}(x,t)}E$,$t>0$ 的距离的向量。由于 $(E,0)$ 是 Whitney (b)-正则的（见注2.3），当$x \to 0$ 时，$(u-w)(x,t)$ 趋于零。

根据归纳法，$\pi(u)-\pi(v)$ 趋于零（当 $x \to 0$ 时），由此可推得$\pi(w)-\pi(v)$ 也趋于零。由于 ξ 是 Lipschitz 的，π 在 $T_{\tilde{h}(x,t)}E$ 上的限制是一个到其像上的双利普希茨映射，且常数有界并且不依赖于 x，t。因此，当 $x \to 0$ 时，$w-v$ 趋于零，进而 $u-v$ 也趋于零，正如所需。

现在我们需要处理这样的情形：E 是一个带状区域 $\{x=(x',\ x_n) \in \pi(E) \times \mathbb{R}:\ \xi_1(x') < x_n < \xi_2(x')\}$，其中 $\pi(E)$上定义了 $\xi_1 < \xi_2$ Lipschitz 函数 $\mathscr{C}^1$。在这种情况下，我们按如下方式提升路径$h(x,\ t)$：给定一个可写成

$$s\xi_1(\pi(x)) + (1-s)\xi_2(\pi(x)),\ \ s \in (0,1), \tag{3.8}$$

我们令

$$\tilde{h}(x,t) := (h(\pi(x),t), s\xi_1(h(\pi(x),t)) + (1-s)\xi_2(h(\pi(x),t))).$$

为检 查它是否具有所需性质，为简便起见，对 $x \in \pi(E)$和 $i=1,\ 2$作如下设定

$$u_i(x,t) := \frac{\tilde{h}(x,\xi_i(x),t)}{|h(x,t)|} \quad \text{and} \quad v_i(x,t) := \frac{\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x,\xi_i(x),t)}{|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)|}.$$

向量 u_i 和 v_i 投影后成为单位向量，并且根据上述结果，这两个向量之间的角度趋于0。由于 ξ_i是 Lipschitz 函数，而 v_i与图像相切，这意味着(u_i-v_i)趋于零，$i=1,\ 2$，也就是说，.....之间的差

$$w(x,t,s) := su_1(x,t) + (1-s)u_2(x,t) \quad \text{and} \quad w'(x,t,s) := sv_1(x,t) + (1-s)v_2(x,t)$$

当 $x \to 0$趋于.....时，在 $s \in (0,1)$和 t上均匀趋于零。向量 $w(\pi(x)\ t,s)$（分别为$w'(\pi(x)\ t,s)$）与 $\tilde{h}(x,t)$（分别与$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$）共线，若 x和~~s~~如(3.8)中所述，则可得所需结论。□

得益于这个引理，我们可以证明，内度量可以用不一定是可定义的弧来定义；也就是说，给定一个可定义集 A，以及 x 和 y，它们位于 A

$$\mathring{d}_A(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in \mathscr{C}^0([0,1],A) \text{ joining } x \text{ and } y\}. \tag{3.9}$$

˜如果我们用 $d_A(x,y)$ 表示上述等式右侧的下确界˜ ˚，那么显然 $d_A(x,y) \le d_A(x,y)$。为了证明反向不等式，我们将证明，对每个 $\mu>0$

$$\mathring{d}_A(x,y) \le (1+\mu)\tilde{d}_A(x,y). \tag{3.10}$$

为此，取一条弧 $\gamma \in \mathscr{C}^0([0,1],\ A)$，连接两点 x和 y以及 $\mu>0$。对每个 $t \in [0,1]$，将上面的引理应用于点 $\gamma(t)$，得到 $\gamma(t)$ 的一个邻域U_t。存在一个有限划分 $t_0=0<\cdots<t_k=1$，使得 $\gamma(t_i)$ 和 $\gamma(t_{i+1})$

要么都在 U_{t_i} 中，要么都在 $U_{t_{i+1}}$ 中，因此可以由一条 $\mathscr{C}^0$ 可定义弧 α_i 连接：$[t_i, t_{i+1}] \to A$ 满足

$$l(\alpha_i) \leq (1+\mu)|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|. \tag{3.11}$$

α_i 拼接成一条连续可定义路径 α，连接 x 和 y，于是我们有

$$\mathring{d}_A(x,y) \leq l(\alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} l(\alpha_i) \overset{(3.11)}{\leq} (1+\mu)\sum_{i=0}^{k-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \leq (1+\mu) l(\gamma),$$

从而得到（3.10），进而确立了（3.9）。

引理 3.4。对于满足 $T \cap F^\perp = \{0\}$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量子空间 E、F 和 T，我们有

$$\angle(E \cap T^\perp, F \cap T^\perp) \leq 2\, \frac{\angle(E,F)}{\inf_{v \in T, |v|=1} d(v, F^\perp)}. \tag{3.12}$$

证明。记 π_V 为到空间 V 上的正交投影。取一个单位向量 u 属于 $E \cap T^\perp$，并证明 $d(u, F \cap T^\perp)$ 不大于（3.12）右端的值。

若 $\pi_F(u) = \pi_{F\cap T^\perp}(u)$，则 $d(u, F \cap T^\perp) = d(u, F) \leq \angle(E, F)$，所需结论显然成立。否则，由于向量 $\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)$ 是 $\pi_F(u)$ 在 F 中 $F \cap T^\perp$ 的正交补上的投影，而这恰好就是 $\pi_F(T)$，我们有，

$$|\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)| = \langle \frac{\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)}{|\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)|}, \pi_F(u) \rangle, \tag{3.13}$$

并且存在一个单位向量 v，使得 T 中

$$\frac{\pi_F(v)}{|\pi_F(v)|} = \frac{\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)}{|\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)|}. \tag{3.14}$$

现在写作

$$\begin{aligned} |u - \pi_{F\cap T^\perp}(u)| &\leq |u - \pi_F(u)| + |\pi_F(u) - \pi_{F\cap T^\perp}(u)| \\ &\leq \angle(E,F) + |\langle \frac{\pi_F(v)}{|\pi_F(v)|}, \pi_F(u) \rangle|, \end{aligned} \tag{3.15}$$

根据 $\angle(E,F)$ 以及 (3.13) 和 (3.14) 的定义。现在注意到

$$|\langle \frac{\pi_F(v)}{|\pi_F(v)|}, \pi_F(u) \rangle| = |\langle \frac{v}{|\pi_F(v)|}, \pi_F(u) \rangle| = \frac{|\langle v, u - \pi_F(u) \rangle|}{|\pi_F(v)|} \leq \frac{\angle(E,F)}{d(v, F^\perp)},$$

因为 $|u - \pi_F(u)| \leq \angle(E,F)$ 并且 $|\pi_F(v)| = d(v, F^\perp)$。将上面的不等式代入 (3.15) 即得所需结论。□

引理 3.5。设 $\mathcal{S}$ 是局部闭可定义集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的一个(w)-正则分层。对于每个 $S \in \mathcal{S}$ 和每个 $\mu > 0$，存在 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$，使得对所有 $x \in U_S^\delta \cap A$

$$\mathring{d}_A(x, \pi_S(x)) \leq (1+\mu) d(x, S). \tag{3.16}$$

证明。设 $\mu > 0$ 和 $S \in \mathcal{S}$。我们首先构造一个函数 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$ 和一个 rugose 向量场 η：$U_S^\delta \cap A \setminus S \to \mathbb{R}^n$，它切向于各层（即对于所有 $x \in Y \cap U_S^\delta$，以及所有不同于 S 的 $Y \in \mathcal{S}$，均有 $\eta(x) \in T_x Y$），使得对所有 $x \in U_S^\delta \cap A \setminus S$，以下性质成立：

(1) $\langle \nabla_x d(\cdot, S)\ \eta(x) \rangle = 1$.(

2) $|\eta(x)| \leq 1 + \mu$。（3）$d_x \pi_S$

$(\eta(x)) = 0$。

令 $\mathcal{S}_k$ 表示维数小于或等于 k 的所有分层的集合。令 l 为满足以下条件的最小整数：对于任意小的 δ，$U_S^\delta \setminus S$ 都与一个 l 维层相交。我们将通过对 $k \geq l$ 归纳，在 $\mathcal{S}_k$ 的元素上定义 η。

对于 $k = l$，我们对 $x \in U_S^\delta \cap Y$， $Y \in \mathcal{S}_l$ 不同于 S，

$$\eta(x) := P_x(\nabla_x d(\cdot, S)),$$

其中 P_x 是到 $T_{\pi_S(x)}S^\perp \cap T_xY$ 上的正交投影。回想 $\nabla_x d(\cdot, S) = \frac{x-\pi_S(x)}{|x-\pi_S(x)|}$ 以及 $\ker d_x\pi_S = T_{\pi_S(x)}S^\perp$。由于 (w) 条件蕴含 Whitney 的 (b) 条件， $x - \pi_S(x)$ 与 T_xY 之间的角度在 x 靠近 S 时趋于零，由 (3.12)（应用于 $E = \nabla_x d(\cdot, S) \in T_{\pi_S(x)}S^\perp$， $F = T_xY$, $T = T_{\pi_S(x)}S$）可知，$|P_x(\nabla_x d(\cdot, S)) - \nabla_x d(\cdot, S)|$ 是一个可定义函数，当 x 趋于 S 时它趋于零。由可定义选择 [C，定理 3.1]，，我们由此看出存在 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$，使得在$U_S^\delta \cap Y$

$$|P_x(\nabla_x d(\cdot, S)) - \nabla_x d(\cdot, S)| < \mu. \tag{3.17}$$

由此得到（2）。条件（3）由构造成立。若将 η 除以 $\langle \nabla_x d(\cdot, S)\ \eta(x)\rangle$，则得到（1）。当然，（2）会因此除法而受到影响，但由于

$$|\langle \nabla_x d(\cdot, S), \eta(x)\rangle| \overset{(3.17)}{\geq} 1 - \mu,$$

我们看到（2）的右端仅被乘以一个接近 1 的常数，因而可以使其任意接近 1，只需选取 μ 足够小。这就完成了情形$k = l$。

取 $k > l$，并令 η 为归纳假设所给出的向量场。记 $\tilde{\eta}\colon U_S^\delta \cap A \setminus S \to \mathbb{R}^n$ 为其到切向于各层的 rugose 向量场的延拓，并令

$$\eta'(x) := \frac{P_x(\tilde{\eta}(x))}{\langle \nabla_x d(\cdot, S), P_x(\tilde{\eta}(x))\rangle},$$

其中 P_x 如上。我们首先验证 η' 在每个 $x_0 \in Y \in \mathcal{S}_{k-1}$ 处均为粗糙的，这归结为验证 $P_x(\tilde{\eta}(x))$ 亦然。固定 $Y \in \mathcal{S}_{k-1}$ 与 $x_0 \in Y$。首先注意到，由于 S 是光滑的，$\angle(T_xS^\perp, T_{x'}S^\perp)$ 是 S 上的局部利普希茨函数。因为当 y 趋于 S 时，$\inf_{|v|=1, v\in T_yY^\perp} d(v, T_{\pi_S(y)}S)$ 趋于 1（由于 (w) 条件），由（3.12）（应用于 $E = T_{\pi_S(y)}S^\perp$,$F = T_{\pi_S(x)}S^\perp$, $T = T_yY^\perp$）我们在 S 附近得到

$$\angle(T_yY \cap T_{\pi_S(y)}S^\perp, T_yY \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp) \leq 4\angle(T_{\pi_S(y)}S^\perp, T_{\pi_S(x)}S^\perp) \leq C|y - x|, \tag{3.18}$$

对某个常数 C。此外，(3.12) 还意味着，若 Y' 是一个 k维分层，满足 $x_0 \in Y' \setminus Y'$ 那么对于每个 $y \in \overline{Y}$以及 $x \in Y'$ 接近 x_0

$$\angle(T_yY \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp, T_xY' \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp) \leq 4\angle(T_yY, T_xY') \overset{(2.2)}{\leq} C|y - x|, \tag{3.19}$$

对于某个可能更大的常数 C。事实上，利用角度的三角不等式，我们可以写成：

$$\begin{aligned} |(P_x - Id)_{|T_yY\cap T_{\pi_S(y)}S^\perp}| &= \angle(T_yY \cap T_{\pi_S(y)}S^\perp, T_xY' \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp) \\ &\leq \angle(T_yY \cap T_{\pi_S(y)}S^\perp, T_yY \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp) + \angle(T_yY \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp, T_xY' \cap T_{\pi_S(x)}S^\perp) \\ &\leq 2C|y - x| \qquad \text{(by (3.18)) and (3.19)).} \end{aligned}$$

由 $\tilde{\eta}$ 的粗糙度以及 $\tilde{\eta}\ (y) \in T_yY \cap T_{\pi_S(y)}S^{\perp}$

$$|\tilde{\eta}(y) - P_x(\tilde{\eta}(x))| \leq |P_x(\tilde{\eta}(y)) - \tilde{\eta}(y)| + |P_x(\tilde{\eta}(y)) - P_x(\tilde{\eta}(x))| \leq C|y-x|,$$

对于某个常数 C，从而得到 η' 的粗糙度。

因此，在维数小于 k 的各层附近的一个小邻域 W 上，这个向量场具有所需性质（稍微改变 μ 后，(2) 对于 η 由归纳假设成立，利用连续性，在 $\mathcal{S}_{l-1}$ 中每个元素的一个小邻域上，对 η' 仍成立）。注意，若 Y_1、……、Y_ν 是 U_S^δ 遇到的维数为 k 的各层，那么在 $k=l$ 情形下所作的构造适用于每个 Y_i，从而得到满足 $(1-3)$ 的向量场 η''：$\cup_{i=1}^{\nu} Y_i \cap U_S^\delta \setminus S \to \mathbb{R}^n$。因此，只需借助一个在 $\mathcal{S}_{k-1}$ 的每个元素附近为常值的单位分解，将 $\eta'_{|W}$ 和 η'' 粘合起来，即可完成归纳步骤。

令 $\phi(x,t)$ 表示从 x 出发的 $-\eta$ 的积分曲线。根据条件 (3)，这条曲线不能离开 $\pi_S^{-1}(\pi_S(x))$。由 (1) 可知，$\phi(x,t)$ 存在直到 $t = d(x,S)$（借助格朗沃尔不等式，η 的粗糙度可防止 ϕ 更早落入另一个分层），并且当 t 趋近于该值时，它趋近于 $\pi_S(x)$。条件 (2) 保证这条曲线的长度不超过 $(1+\mu)d(x,S)$。于是由 (3.9) 推得 (3.16)。□

4. 逼近与单位分解

我们将同时证明本文的两个主要结果（定理 4.2和4.3）。构造单位分解需要用到隆起函数，为此我们需要以下引理。

引理 4.1。给定 $\mu > 0$，我们可以找到一个可定义的 $\mathscr{C}^1$ 函数 $\psi_\mu \colon [0,+\infty)\times(0,\ 1) \to [0,1]$使得

$$\begin{aligned}
&(1)\ \psi_\mu(y,z) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq y \leq b(z), \quad \text{where } b(z) \in (0,z), \\ 0 & \text{for } y \geq z, \end{cases} \\
&(2)\ \left|\frac{\partial \psi_\mu}{\partial y}(y,z)\right| \leq \frac{\mu}{y}, \text{ for } \ y > 0, \\
&(3)\ \left|\frac{\partial \psi_\mu}{\partial z}(y,z)\right| \leq 4 + \frac{\mu}{z}.
\end{aligned}$$

证明。令 μ 为正有理数（由于只需对任意小的 μ证明此引理，我们可以假设 μ 为有理数）。对于 $z \in (0,\ 1)$ 和 $y \in (0,\ z]$，我们定义

$$\phi_\mu(y,z) = (1+z)\left(1 - \left(\frac{y}{z}\right)^\mu\right).$$

We 先估计 ϕ_μ 的偏导数。对于每个 $0 < y \leq z$，显然有

$$\left|\frac{\partial \phi_\mu}{\partial y}(y,z)\right| = (1+z)\frac{\mu}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^\mu \leq \frac{2\mu}{y} \tag{4.20}$$

以及

$$\left|\frac{\partial \phi_\mu}{\partial z}(y,z)\right| = \left|1 - \left(\frac{y}{z}\right)^\mu + \frac{(1+z)\mu y^\mu}{z^{\mu+1}}\right| \leq 1 + \frac{(1+z)\mu}{z}. \tag{4.21}$$

注意， $\phi_\mu(z,\ z) = 0$ 且 $\phi_\mu(b(z)\ z) = 1$，其中 $b(z) := \frac{z^{\frac{1}{\mu}+1}}{(1-z)^{\frac{1}{\mu}}}$。事实上，函数

$$\psi_\mu(y,z) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le y < b(z) \\ 1-(1-\phi_\mu(y,z)^2)^2 & \text{if } b(z) \le y \le z \\ 0 & \text{if } y > z \end{cases}$$

is $\mathscr{C}^1$ 上 $[0,+\infty) \times (0,\ 1)$。由于 μ 是有理数， ψ_μ 是可定义的。对于 $y \in (b(z)\ z)$，

$$d_{(y,z)}\psi_\mu = 4\phi_\mu(y,z)(1-\phi_\mu(y,z)^2)d_{(y,z)}\phi_\mu(y,z),$$

（4.20）和（4.21）可推出

$$\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y}(y,z)\right| \le \frac{8\mu}{y} \quad \text{and} \quad \left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial z}(y,z)\right| \le 4+\frac{4(1+z)\mu}{z} \le 4+\frac{8\mu}{z},$$

这满足要求。 □

定理 4.2。 设 A 是一个局部闭可定义集， $\mathcal{S}$ 是 A的一个 $\mathscr{C}^2$ 分层。给定$\mu > 0$ ，且对每个 $S \in \mathcal{S}$ ，给定一个 S的可定义邻域 U_S ，我们可以找到一个可定义的 $\mathscr{C}^1$单位分解 $\varphi_S :\ A \to [0,1]$, $S \in \mathcal{S}$，从属于覆盖 $(U_S)_{S\in\mathcal{S}}$ ，并且对所有 $x \in U_S \setminus S$

$$|\nabla\varphi_S(x)| \le \frac{\mu}{d(x,S)}. \tag{4.22}$$

定理4.3。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个局部闭可定义集，且 $f :\ A \to \mathbb{R}^k$ 是一个内 *Lipschitz* 映射。给定 $\varepsilon \in \mathcal{D}^+(A)$ 和 $\mu > 0$，我们可以找到一个可定义的 $\mathscr{C}^1$ 内 *Lipschitz* 映射 $g :\ A \to \mathbb{R}^k$，使得

(i) $|f-g| < \varepsilon$,
(ii) $|d_x g| \le \mathring{L}_f(x) + \mu$.

证明。固定 $0 < \mu < 1$。我们通过对d 的= 维数 A进行归纳，同时证明这两个定理。当 $d = 0$时，两条陈述显然成立。取 $d \ge 1$ ，并记 $\mathbf{A}_{<d}$ 和$\mathbf{B}_{<d}$ 分别为定理 4.2和 4.3的归纳假设。

我们先指出$\mathbf{B}_{<d}$的一个有用推论：

观察。 设 S 是一个维数小于 d的流形，且 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$。根据$\mathbf{B}_{<d}$，存在一个 $\mathscr{C}^1$ 可定义函数 $\tilde{\delta}$，定义在 S 上，并满足对于所有 $x \in S$ 均有 $|d_x\tilde{\delta}| \le 2$，且

$$|\tilde{\delta} - d(\cdot, \partial U_S^\delta)| < \frac{d(\cdot,\partial U_S^\delta)}{2}.$$

注意，此时 $\hat{\delta} := \frac{\tilde{\delta}}{2} < \frac{3d(\cdot,\partial U_S^\delta)}{4} \le \frac{3\delta}{4}$，因此 $U_S^{\hat{\delta}} \subset U_S^\delta$，这意味着每个$U_S^\delta$都包含一个由满足 $|d_x\hat{\delta}| \le 1$的 $\mathscr{C}^1$可定义函数 $\hat{\delta}$所定义的邻域。

我们首先完成定理4.2的归纳步骤。设 $\mathcal{S}$ 和$(U_S)_{S\in\mathcal{S}}$ 如该定理中所述。由于只需证明定理对 $\mathcal{S}$的某个加细成立，因此可以假设 $\mathcal{S}$满足前沿条件。我们假设 U_S 足够小，使得最近点回缩 $\pi_S :\ U_S \to S$ 是一个满足 $\mathscr{C}^1$ 的映射 $|d_x\pi_S| < 2$。只需构造一个从属于族 $(U_S^{\delta_S})_{S\in\mathcal{S}}$ 的单位分解，其中函数 $\delta_S \in \mathcal{D}^+(S)$可以任意小。

在构造所需的单位分解之前，我们需要定义一些隆起函数ψ_S^δ，对于 $S \in \mathcal{S}$ 和 $\delta : S \to \mathbb{R}$ 足够小的正可定义函数 $\mathscr{C}^1$。首先假设 $\dim S < n$，并针对这样的 δ设定

$$\psi_S^\delta(x) := \psi_\mu\left(d(x,S), \delta(\pi_S(x))\right), \quad x \in U_S,$$

其中 ψ_μ 由引理 4.1 给出。函数 ψ_S^δ 在 $U_S^{b\circ\delta}$上等于 1，其中 b 与上述引理中的定义相同。当 δ足够小时，它在 $\partial U_S^\delta \setminus \partial S$附近为零，并且在 U_S^δ上 $\mathscr{C}^1$（函数 $d(\cdot, S)$在 S的点处并不光滑，但由于 ψ_S^δ 在 S附近为常数，因此它在这些点处显然是光滑的）。因此，我们可以将 ψ_S^δ延拓到 U_S^δ之外（取值为 0），使其成为 ∂S补集上的一个 $\mathscr{C}^1$ 函数。

现在我们希望证明 $d_x\psi_S^\delta$ 的一些估计，这些估计将用于建立（4.22）。计算导数可得

$$d_x\psi_S^\delta = \frac{\partial \psi_\mu}{\partial y}(d(x,S), \delta(\pi_S(x)))d_x d(\cdot, S) + \frac{\partial \psi_\mu}{\partial z}(d(x,S), \delta(\pi_S(x)))d_{\pi_S(x)}\delta\, d_x\pi_S. \tag{4.23}$$

由于 $d(\cdot, S)$ 是 1-Lipschitz，引理 4.1 的（2）表明，右侧第一项的范数不大于 $d\overset{\mu}{x}(\cdot, S)$。至于第二项，上述引理的（3）意味着，对于 $x \in U_S^\delta$

$$\left|\frac{\partial \psi_\mu}{\partial z}(d(x,S), \delta(\pi_S(x)))\right| \leq 4 + \frac{\mu}{\delta(\pi_S(x))},$$

不大于 $\delta\overset{5\mu}{x(\pi_S())}$ 若 $\delta < \mu$。因此，只要 δ 足够小，并且还满足 $|d_x\delta| < 1$，则综合（由（4.23），利用 $|d_x\pi_S| \leq 2$）可得$x \in \mathbb{R}^n \setminus S$

$$|d_x\psi_S^\delta| \leq \frac{11\mu}{d(x,S)}. \tag{4.24}$$

当 $\dim S = n$ 时，我们在 S 上令 $\psi_S^\delta(x) \equiv 1$，并在 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 上令 $\psi_S^\delta(x) \equiv 0$（回顾一下，在此情形下，对所有 δ，$U_S^\delta = S$ 都成立）。上述估计显然仍然成立。

现在我们来定义所需的单位分解。对于 $l \leq d$，我们用 $\mathcal{S}_l$表示 $\mathcal{S}$ 中维数为 $\leq l$的层的集合，并令 $X_l := \bigcup_{S\in\mathcal{S}_l} S$。我们将按照 $\dim S$ 对 φ_S进行归纳定义。具体而言，给定 $l \leq d$，我们将构造 $\mathscr{C}^1$ 个函数$\varphi_S : \mathbb{R}^n \setminus \partial A \to [0,1]$, $S \in \mathcal{S}_l$，使其满足

$$\sum_{S\in\mathcal{S}_l} \varphi_S(x) \leq 1 \text{ for all } x \quad \text{and} \quad \sum_{S\in\mathcal{S}_l} \varphi_S(x) = 1 \text{ on a neighborhood of } X_l, \tag{4.25}$$

对于每个 $S \in \mathcal{S}_l$，都有 $\operatorname{supp}\varphi_S \subset U_S$，且对于所有 $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\partial A \cup S)$ 也如此：

$$|d_x\varphi_S| \leq \frac{\mu}{d(x,S)}. \tag{4.26}$$

所需的单位分解由情形 $l = d$ 给出。

如果 S 是一个零维分层，只需令

$$\varphi_S(x) := \psi_S^\delta(x),$$

当 $\delta \in \mathcal{D}^+(S)$ 足够小时，它便具有所有所需的性质。因此，现在我们定义函数 φ_S、$S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$，并假设所有 φ_Y、$Y \in \mathcal{S}_{l-1}$ 均已定义。

对于 $S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$ 和 δ_S：令 $S \to \mathbb{R}$ 为足够小的正可定义函数 $\mathscr{C}^1$，设

$$\varphi_S := \psi_S^{\delta_S} \cdot (1 - \sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y).$$

由于满足前沿条件，我们可以假设 δ_S 足够小，使得 $U_S^{\delta_S}$、$S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$ 彼此不相交。事实上，对于每个 $S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$，在 $U_S^{b \circ \delta_S}$ 上我们有 $\psi_S^{\delta_S} = 1$，并且当 $S' \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$ 与 S 不同时，$\psi_{S'}^{\delta_{S'}} = 0$。因此，在 $U_S^{b \circ \delta_S}$ 上我们得到

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}_l} \varphi_Y = \sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y + \varphi_S = \sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y + (1 - \sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y) = 1.$$

此外，由于根据归纳法，X_{l-1} 附近有 $\sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y = 1$，对于每个 $S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$，该集合附近都有 $\varphi_S = 0$，因此在 X_{l-1} 附近我们有

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}_l} \varphi_Y = \sum_{Y \in \mathcal{S}_{l-1}} \varphi_Y = 1.$$

此外，由于 $0 \le \psi_S^{\delta_S} \le 1$，$\sum_{S \in \mathcal{S}_l} \varphi_S$ 不能超过1，从而得到（4.25）。

为验证（4.26），注意到若 δ_S 足够小，使得当 Y 是包含于分层 $S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$ 的边界中的一个分层时，在 $U_S^{\delta_S}$ 上有 $d(x,S) \le d(x,Y)$，则归纳假设对 $x \in U_S^{\delta_S} \setminus S$ 蕴含

$$|d_x \varphi_Y| \le \frac{\mu}{d(x,Y)} \le \frac{\mu}{d(x,S)}.$$

借助于上述观察，我们可以要求 $|d_x \delta_S| < 1$，从而（4.24）连同紧接其上的不等式以及 φ_S 的定义，对 $x \in U_S^{\delta_S} \setminus S$，$S \in \mathcal{S}_l \setminus \mathcal{S}_{l-1}$，蕴含

$$|d_x \varphi_S| \le \frac{\kappa \mu}{d(x,S)}.$$

对某个与 μ 无关的常数 κ 成立，从而得到（4.26）（由于 φ_S 的支集在 $U_S^{\delta_S}$ 中，该不等式在此集合之外仍然成立）。这就完成了我们对 $l \le d$ 的归纳，给出了所需的单位分解，并完成了定理4.2证明的归纳步骤。

我们现在进行定理4.3的归纳步骤。固定 $\varepsilon \in \mathcal{D}^+(A)$。设 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 为 A 与 $\mathbb{R}^k$ 的 $\mathscr{C}^2(w)$-正则分层，相对于它们 f 是水平 $\mathscr{C}^1$ 分层映射。对每个 $S \in \mathcal{S}$ 选取 S 的一个足够小的邻域 U_S，使得最近点回缩 π_S：$U_S \to S$ 有良好定义并且 $\mathscr{C}^1$。对 $S \in \mathcal{S}$ 令

$$g_S(x) := f(\pi_S(x)), \quad x \in U_S.$$

注意，由于 f 是连续的，根据可定义选择可知，当 $\delta_S \in \mathcal{D}^+(S)$ 足够小时，$|f - g_S| < \varepsilon$ 在 $U_S^{\delta_S}$ 上成立。事实上，若令 $g := \sum_{S \in \mathcal{S}} \varphi_S g_S$，其中 $(\varphi_S)_{S \in \mathcal{S}}$ 是从属于覆盖 $(U_S^{\delta_S})_{S \in \mathcal{S}}$ 的单位分解，如定理 4.2 所给出，那么 $|f - g| = |\sum_{S \in \mathcal{S}} \varphi_S (f - g_S)| < \varepsilon$.

因此，只需检查当函数 δ_S 足够小时，g 满足 (ii)。为此，固定 $\mu > 0$，并将到 $T_x S$ 的正交投影记为 P_x，其中 $x \in S \in \mathcal{S}$。

注意，由于对每个 $S \in \mathcal{S}$，对任意 $x \in S$ 都有 $d_x\pi_S = P_x$，根据可定义选择可知，当 δ_S 足够小时，对 $x \in U_S^{\delta_S}$ 有

$$|d_x\pi_S - P_{\pi_S(x)}| < \mu. \tag{4.27}$$

。 °为简洁起见，设 $L = \sup_A L_f$。另请注意，根据 g_S 和 L_f 的定义，对于每个 $S \in \mathcal{S}$（当 δ_S 足够小时），都有 $x \in U_S^{\delta_S}$

$$|f(x) - g_S(x)| \leq L \cdot \mathring{d}_A(x, \pi_S(x)) \overset{(3.16)}{\leq} L(1+\mu) \cdot d(x, S). \tag{4.28}$$

现在写作

$$|d_x \sum_{S\in\mathcal{S}} g_S\varphi_S| \leq |\sum_{S\in\mathcal{S}} g_S(x) d_x\varphi_S| + |\sum_{S\in\mathcal{S}} \varphi_S(x) d_x g_S|. \tag{4.29}$$

由于 A 上的 $\sum_{S\in\mathcal{S}} d_x\varphi_S = 0$，右端第一项可估计为 4.30

( )

$$|\sum_{S\in\mathcal{S}} g_S(x) d_x\varphi_S| = |\sum_{S\in\mathcal{S}} (g_S - f)(x) d_x\varphi_S| \overset{(4.28)}{\leq} L(1+\mu) \sum_{S\in\mathcal{S}} d(x,S)|d_x\varphi_S| \overset{(4.22)}{\leq} L(1+\mu)\kappa\mu,$$

其中，κ 表示 $\mathcal{S}$ 的层数。为估计第二项，取 $S \in \mathcal{S}$，并对 $x \in U_S^{\delta_S}$ 写为

$$|d_x g_S| = |d_{\pi_S(x)} f \, d_x\pi_S| \overset{(4.27)}{\leq} |d_{\pi_S(x)} f_{|S} \, P_{\pi_S(x)}| + |d_{\pi_S(x)} f_{|S}|\mu \leq |d_{\pi_S(x)} f_{|S}|(1+\mu).$$

因此，对于 $x \in U_S^{\delta_S}$（其中 δ_S 足够小），记 Y 为包含 x的分层，应用（2.3）并乘以 φ_S

$$|\varphi_S(x) d_x g_S| \leq \varphi_S(x)(|d_x f_{|Y}| + \mu)(1+\mu) \leq \varphi_S(x)(\mathring{L}_f(x) + \mu)(1+\mu). \tag{4.31}$$

如果 $x \notin U_S^{\delta_S}$则 $\varphi_S(x) = 0$ 并且该不等式仍然成立。因此，将（4.30）和（4.31）代入（4.29），我们得到

$$|d_x g| \leq L(1+\mu)\kappa\mu + (\mathring{L}_f(x) + \mu)(1+\mu) \leq \mathring{L}_f(x) + C\mu,$$

对某个与 μ无关的常数 C。 □

得益于在 [VV], 中证明的定理，我们还得到：

推论4.4. 如果*o*-极小结构允许 $\mathscr{C}^\infty$ 胞腔分解，则由定理 *4.3* 给出的逼近可以要求为 $\mathscr{C}^\infty$。

证明。 设 $\varepsilon \in \mathcal{D}^+(A)$ 且 $\mu > 0$，并用 g 表示定理 4.3给出的映射。根据 [VV，定理 4.8],，存在 $\tilde{g} \in \mathcal{D}^\infty(A, \mathbb{R}^k)$ 使得 $|\tilde{g} - g|_1 \leq \min(\varepsilon, \mu)$。显然，$|f - \tilde{g}| < 2\varepsilon$ 且

$$|d_x\tilde{g}| \leq |d_x g| + \mu \leq \mathring{L}_f(x) + 2\mu.$$

□

4.1. **Lipschitz 可定义映射的逼近**。 给定一个 Lipschitz 映射$f\colon A \to \mathbb{R}^k$，用 $Lip(f)$ 表示其 Lipschitz 常数，即

$$Lip(f) = \inf\{L \in \mathbb{R} : \forall\, x, x' \in A, \quad |f(x) - f(x')| \le L|x - x'|\}.$$

观察 4.5。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。若 $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ 是一个内Lipschitz映射， $\mathscr{C}^1$在 A 上且在 ∂A 上是 L-Lipschitz 的，则 f在 A上是 L'-Lipschitz 的，其中 $L' =$为 max(sup$_{x\in A}|d_x f|$, L)。

证明。 设 x, $y \in A$ 并定义

$$E := \{t \in [0,1] : (1-t)x + ty \notin A\}, \ \ t_0 := \inf E, \quad \text{and} \quad t_1 := \sup E.$$

若 E 为空，则所需结论由中值定理得到。否则，由于相应的点 $a := (1-t_0)x + t_0 y$ 和 $b := (1-t_1)x + t_1 y$ 位于 A的边界上，根据假设有 $|f(a) - f(b)| \le L|a-b|$。由中值定理，有 $|f(x) - f(a)| \le K|x-a|$，其中 K是 A上偏导数的界；对于 t_1 以及点 b和 y，同样的不等式也成立。最后，根据三角不等式，我们得到

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(a)| + |f(a)-f(b)| + |f(b)-f(y)| \le K|x-a| + L|a-b| + K|b-y|,$$

不大于

$$L'|x-a| + L'|a-b| + L'|b-y| = L'|x-y|,$$

其中 $L' = \max(L, K)$. □

我们首先给出定义域为可定义流形时的一个结果。

定理 4.6. 假设该 *o*-极小结构允许进行 $\mathscr{C}^\infty$ 细胞分解。设$M \subset \mathbb{R}^n$ 和 $N \subset \mathbb{R}^k$ 为可定义的 $\mathscr{C}^\infty$ 子流形。对于任意可定义的 ***Lipschitz*** 映射$f\colon M \to N$以及任意 $\varepsilon \in \mathcal{D}^+(M)$和 $\mu > 0$，存在一个 $(Lip(f)+\mu)$-***Lipschitz*** 映射$g \in \mathcal{D}^\infty(M, N)$，使得

(i) $|f - g| < \varepsilon$
(ii) $|d_x g| \le \mathring{L}_f(x) + \mu.$

证明。我们首先证明，对每个 $\mu < 1$，映射 f 可以延拓为一个可定义的$\tilde{}$$(L+\mu)$-Lipschitz 映射 f，定义在 M 的一个邻域上，这将把证明归结为 M 在 $\mathbb{R}^n$ 中为开集的情形。事实上，只需证明 M 与 N 分别具有邻域V 与 W，使得最近点回缩 π_M：$V \to M$ 与 π_N：$W \to N$是良定义的且为 $(1+\mu)$-Lipschitz 的，因为所求延拓随后由$\tilde{f} := \pi_N \circ f \circ \pi_M$给出。我们将着重讨论 M，对 N的论证类似。首先注意到，由于对每个 $x \in M$， $d_x\pi_M$都是到 T_xM 上的正交投影，因此对这样的 x 我们有 $|d_x\pi_M| = 1$。由可定义选择，从而必存在 $\delta \in \mathcal{D}^+(M)$，使得对每个 $x \in M$，映射 π_M在 B$(x, \delta(x))$ 上是 $(1+\mu)$-Lipschitz 的。我们断言 $V := U_M^{\mu\delta/4}$即为所求邻域。事实上，若 x与 y是 V 中满足 $|x-y| < \frac{\delta\circ\pi_M(x)}{2}$ 的两点，则它们都属于 B$(\pi_M(x), \frac{1+\mu}{2}\delta\circ\pi_M(x))$，而该集合对 $\mu < 1$ 包含于 B$(\pi_M(x), \delta\circ\pi_M(x))$ 中，在后者上 π_M是 $(1+\mu)$-Lipschitz 的。当然，当 $|x-y| < \frac{\delta\circ\pi_M(y)}{2}$ 时同样的论证适用。最后，为处理 $|x-y| \ge \max(\frac{\delta\circ\pi_M(x)}{2}, \frac{\delta\circ\pi_M(y)}{2})$ 的情形，注意到对 V 中的所有 x与 y，我们有

$$|\pi_M(x)-\pi_M(y)| \le |x-y| + |x-\pi_M(x)| + |y-\pi_M(y)| \le |x-y| + \frac{\mu}{4}\delta\circ\pi_M(x) + \frac{\mu}{4}\delta\circ\pi_M(y),$$

它不大于 $(1+\mu)|x-y|$，只要 $|x-y| \geq \max(\frac{\delta\circ\pi_M(x)}{2}, \frac{\delta\circ\pi_M(y)}{2})$，这表明 π_M 在 V 上是 $(1+\mu)$-Lipschitz 的。既然现在只需对满足 $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon \circ \pi_M$ 的 $f := \pi_N \circ f \circ \pi_M$ 证明该定理，此后我们将假定 M 为开集，且不改变记号。

固定 $\mu > 0$。必要时将 $\varepsilon(x)$ 替换为函数 $\frac{\varepsilon(x)d(x,\partial M)}{\sup\{d(a,\partial M) : |a|=|x|\}} \leq \varepsilon$，我们还可以假设，当 x 趋近于 ∂M 时，$\varepsilon(x)$ 趋近于 0；再将其替换为 $\min(\varepsilon, \mu)$，我们可以假设它小于 μ。根据推论4.4，存在一个可定义的 $\mathscr{C}^\infty$ 内 Lipschitz 映射 $g: M \to \mathbb{R}^k$，使得 $|f-g| < \varepsilon$，并且

$$|d_x g| \leq \mathring{L}_f(x) + \mu \leq Lip(f) + \mu. \tag{4.32}$$

由于 f 是 Lipschitz 的，它可以连续延拓为定义在 M 上的 Lipschitz 映射，且 Lipschitz 常数不变。由于 ε 在边界点处趋近于零，$g(x) := f(x)$ 在边界点处连续延拓，这意味着 g 可以连续延拓到 M，从而在 ∂M 上诱导出一个 $Lip(f)$-Lipschitz 映射。根据观察 4.5 和 (4.32)，g 在 M 上必定是 $(Lip(f)+\mu)$-Lipschitz 的。□

推论4.9 将讨论映射定义在可能并不光滑的可定义子集上的情形 A，其中 $\mathbb{R}^n$。其证明将利用可定义版本的基尔施布劳恩定理；这是一个非常精细的结果，已在 [AF]中确立：

定理 4.7。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为可定义集，且 $f: A \to \mathbb{R}^k$ 为可定义的 *L-Lipschitz* 映射。则存在可定义的 *L-Lipschitz* 映射 $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$，使得 $\tilde{f}_{|A} = f$。

注 4.8。在情形 $k=1$下，这样的延拓仍可通过令 $f(x) := \inf\{f(a) + L|x-a|: a \in A\}$而轻易得到。

推论 4.9。假设该 *o*-极小结构允许进行 $\mathscr{C}^\infty$ 胞分解。设$A \subset \mathbb{R}^n$ 为可定义集。对于任意可定义的 *Lipschitz* 映射 $f: A \to \mathbb{R}^k$ 以及任意$\varepsilon \in \mathcal{D}^+(A)$和 $\mu > 0$，存在一个 $(Lip(f)+\mu)$-*Lipschitz* 映射 $g \in \mathcal{D}^\infty(A, \mathbb{R}^k)$，使得在 A 上 $|f-g| < \varepsilon$。

证明。根据定理 4.7，我们可以将 f 延拓到 $\mathbb{R}^n$。此外，我们可以使用黎曼公式将 ε 连续地延拓到 A 的一个邻域上（不妨设 $\varepsilon \leq 1$）

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{a\in A} \frac{\varepsilon(a)d(x,A)}{|a-x|} & \text{for } x \notin A \\ \varepsilon(x) & \text{for } x \in A \end{cases}$$

所需的逼近由定理 4.6给出。□

注 4.10。在 f 有界的情况下，我们可以要求 $Lip(g) = Lip(f)$。详见[F中推论 4] 的证明。

定理 4.6 的另一个应用是下面这个 Mostowski 分离引理 [M]的变体。

推论 4.11。设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的可定义 $\mathscr{C}^\infty$ 子流形，并设 A、B 是 M 的不相交可定义子集。若 A 和 B 在 M 中是闭的，则存在一个 *Lipschitz* 函数$g \in \mathcal{D}^\infty(M)$，它在 A 上为正，在 B 上为负。

证明。定义 Lipschitz 函数如下：对 $x \in M$， $f(x) := d(x,B) - d(x,A)$。根据定理 4.6，存在 Lipschitz 函数 $g \in \mathcal{D}^\infty(M)$，使得 $|f(x) - g(x)| < \frac{d(x,A)+d(x,B)}{2}$。这意味着，在 A 上，~~$g(x) > \frac{d(x,B)}{2}$~~，并且 $g(x) < -\frac{d(x,A)}{2}$ ~~在 B 上~~。□

参考文献

[AF] M. Aschenbrenner与A. Fischer，Kirszbraun与Helly定理的可定义版本，《伦敦数学学会会刊》(3) 102 (3) (2011) 468–502。[BCR] J. Bochnak、M. Coste与M.-F. Roy，实代数几何，Springer，1987。[BT] H. Brodersen与D. Trotman，对于实代数分层，Whitney (b)-正则性严格弱于Kuo比值检验，Math. Scand.，45 (1979)，27-34。[C] M. Coste，o-极小几何导论，比萨大学数学系，数学研究博士项目，国际编辑与印刷研究所，比萨 (2000)。[D] L. van den Dries，驯性拓扑与o-极小结构，伦敦数学学会讲义丛书，248。剑桥大学出版社，剑桥，1998。[F] A. Fischer，满足Lipschitz条件的o-极小映射的逼近，《纯粹与应用逻辑年刊》165 (2014) 787–802。[L] T. L. Loi，o-极小结构中的Verdier分层与严格Thom分层，Illinois J. Math. 42 (1998)，347–356。[K-CPV] B. Kocel-Cynk、W. Pawłucki与A. Valette，关于距离函数正则化的半代数Calderón-Zygmund定理。Math. Ann. 390，(2024) 1863–1883。[KP] K. Kurdyka与A. Parusi nski，o-极小结构中的拟凸分解。对梯度猜想的应用，《纯粹数学高级研究·奇点理论及其应用》，S. Izumiya、G. Ishikawa、H. Tokunaga、I. Shimada与T. Sano编（东京：日本数学会，2006），137–177。[M] T. Mostowski，Nash函数环的若干性质。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3 (1976)，第2期，245–266。[MT] C. Murolo与D. Trotman，水平$\mathscr{C}^1$受控分层映射与Thom第一同胚定理。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330(8)，(2000) 707–712。[RSW] J.-P. Rolin、P. Speissegger与A. J. Wilkie，拟解析Denjoy-Carleman类与o-极小性。J. Amer. Math. Soc. 16 (2003)，第4期，751–777。[S] M. Shiota，Nash映射与Nash流形的逼近定理，Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986)，第1期，319–337。[T] D. Trotman，分层理论，载于：J.L. Cisneros Molina、D.T. Lê与J. Seade（编）《奇点几何与拓扑手册I》。Springer，Cham。(2020)。[VV] A. Valette与G. Valette，全局次解析类与Denjoy-Carleman类中的逼近，Adv. Math. 385 (2021)，论文编号107764。[V1] G. Valette，论次解析几何，arXiv:2507.23622。[V2] G. Valette，W^1，^{p}次解析域上线性椭圆型偏微分方程解的先验估计，arXiv:2506.22913。[Ve] J.-L. Verdier，Whitney分层与Bertini-Sard定理，Invent. Math. 36 (1976)，295–312。

(N. Nguyen) 越南岘港FPT大学
电子邮箱地址：nguyenxuanvietnhan@gmail.com

(A. Valette) 优化与控制理论系，数学与计算机科学学院-雅盖隆大学数学与计算机科学，S. Łojasiewicza街6号，30-348 克拉科夫，波兰
电子邮箱: anna.valette@im.uj.edu.pl

(G. Valette) 雅盖隆大学数学研究所，S. Łojasiewicza街6号，30-348 克拉科夫，波兰
电子邮箱地址：guillaume.valette@im.uj.edu.pl