arXiv:2603.06456v1 [math.AG] 6 Mar 2026

局部上同调不变量的刻画与有限下降

´BRADLEY DIRKS、SEBASTIAN OLANO 和 DEBADITYA RAYCHAUDHURY

Abstract. 我们给出等维簇的奇点不变量$c(Z)$、 $w(Z)$ 和 HRH(Z) 的简单“左逆刻画” Z ，这些不变量分别由 [CDO25、CDOR26、DOR25]引入。结合迹态射，我们为有限满射态射下这些不变量建立了下降结果。

1. Introduction

令 X 为一个复代数簇（即分离但不一定不可约）。长期以来，霍奇理论一直是研究 X 奇点的重要工具。近年来，人们利用 Saito 的混合霍奇模理论定义了许多奇点不变量，拓展了经典研究的杜布瓦奇点和有理奇点概念。

特别是，高阶杜布瓦奇点理论和高阶有理奇点理论已在 [MOPW23、JKSY22], 中提出，并通过 [SVV23], 中的一种“前”变体得到拓展；而霍奇理论的奇点不变量 $c(X)$ $w(X)$ 和 HRH(X) 则由 [CDO25、CDOR26、DOR25]引入。后面这三个不变量与高阶奇点密切相关；例如，具有前 k-杜布瓦奇点的正规簇是前 k-有理的，当且仅当其 HRH 级别为 $\geq k$。此外，这三个不变量之间满足以下关系：

$$\mathrm{HRH}(X) = \min\{c(X), w(X)\}.$$

在奇点理论中，通过适当映射存在左逆来简单刻画一个不变量，往往很有用。为说明这一点，回顾一下： X具有杜布瓦奇点，当且仅当映射 $\mathcal{O}_X \to \Omega^0_X$ 存在左逆（为完整起见，我们在下文给出这一点的证明，见推论 3.2 ）。这一判据最早见于 Kov´acs [Kov99，定理 2。3]此后，它在双有理几何中得到了广泛应用（例如，见 [KK10]），并启发了许多类似结果。

“左逆”判据通常通过证明一个单射定理来确立。一个值得注意的事实是，对于杜布瓦奇点，确实存在这样一个单射定理；该定理最早发表于颇具影响力的 [KS16，定理 3。3] (另见证明 [MP22，推论 B])。关于高阶奇点的类似单射陈述已见于 [MP22、PSV24、Kov25]。

我们的首个主要结果由一系列单射陈述构成，这些陈述给出了不变量的左逆刻画 $c(X)$、$w(X)$ 和 HRH(X)。回顾一下，对于一个簇 X ，可以将滤过杜布瓦复形 $(\Omega^\bullet_X, F)$ 与之关联，其（移位后的）分次分量记为 Ω^k_X。根据 Saito [Sai00], 的一个结果，这些复形可由对平凡霍奇模 $\mathbf{Q}^H_X[\dim X]$应用函子 $\mathrm{Gr}^F_{-k}\mathrm{DR}$ 得到（相差一个移位）。最近，交

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B15，14B05，14J17。B.D. 的部分研究经费由美国国家科学基金会 NSF-MSPRF 项目资助（资助编号 DMS- 2303070）。D.R. 的部分研究经费由 AMS-Simons 差旅资助提供。

杜布瓦复形 $I\Omega_X^k$ 由 [PSV24,PP25a]引入；它通过对交复形霍奇模 IC_X^H应用同一函子 $\mathrm{Gr}_{-k}^F\mathrm{DR}$ 来定义，并自带一个从 Ω_X^k 出发的自然态射。我们引入第三种复形，即围 pervers 杜布瓦复形 $P\Omega_X^k$，它使这一态射分解。它通过对$H^0\mathrm{Q}_X^H[\dim\ X]$应用同一函子来定义；该对象对应于余切层$^{-\mathfrak{p}}\mathcal{H}^0(\mathrm{Q}_X[\dim\ X])$。根据定义，态射 $\Omega_X^k \to \mathrm{I}\Omega_X^k$可经由 $P\Omega_X^k$分解。

定理 A. 设 X 是一个纯维数为 n的簇。

(1) 假设 $c(X) \geq k-1$。那么自然态射

$$\mathcal{E}xt^i(P\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet) \to \mathcal{E}xt^i(\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet)$$

对所有 i，在上同调上都是单射。

(2) 假设 $w(X) \geq k-1$。那么自然态射

$$\mathcal{E}xt^i(\mathrm{I}\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet) \to \mathcal{E}xt^i(P\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet)$$

当 $i < k-n$时是同构，当 $i = k-n$ 时是单射，而当 $i > k-n$时定义域和值域均为零。

特别地，若 $\mathrm{HRH}(X) \geq k-1$，则自然态射

$$\mathcal{E}xt^i(\mathrm{I}\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet) \to \mathcal{E}xt^i(\underline{\Omega}_X^k, \omega_X^\bullet)$$

当 $i < k-n$ 时是同构，当 $i = k-n$ 时是单射，而当 $i > k-n$ 时，定义域和值域均为零。

上述结果的最后一个断言由 S.G. Park 在 [PSV24，定理 10 中证明。5]我们的证明与同上文献中的证明类似；事实上，更恰当地说，该结果应称为 Park 证明的一个推论。

如前所述，由此可得以下结论：

推论 B。 设 X 是等维的。

(1) $c(X) \geq k$ 当且仅当对所有 $0 \leq p \leq k$，自然态射

$$\underline{\Omega}_X^p \to P\underline{\Omega}_X^p$$

有一个左逆。

(2) $w(X) \geq k$ 当且仅当对所有 $0 \leq p \leq k$，自然态射

$$P\underline{\Omega}_X^p \to \mathrm{I}\underline{\Omega}_X^p$$

有一个左逆。

(3) $\mathrm{HRH}(X) \geq k$ 当且仅当对所有 $0 \leq p \leq k$，自然态射

$$\underline{\Omega}_X^p \to \mathrm{I}\underline{\Omega}_X^p$$

有一个左逆。

关于高阶奇点的类似判据见 [Vo，KLV25]。

奇点理论中的另一种现象是，某些奇点类在有限满射态射下会下降。例如，若 Y 是一个$\mathbb{Q}$-同调流形（意即$\mathbf{Q}_Y[\dim Y]$ 是一个半单反常层），且 X 是正规的，那么 X 也是一个$\mathbb{Q}$-同调流形。在 Y 光滑且 f的情形下，这一点最为明显： $Y \to X$ 是有限群作用下的商，因此 X 是所谓的“V-流形”，并且已知它是一个$\mathbb{Q}$-同调流形。当然，这个例子也表明光滑性不会下降。

对于奇点的霍奇理论类，例如杜布瓦奇点或有理奇点，另有一些广为人知的下降结果。获得这些结果的既定策略是，先证明奇点类满足一个“左逆”判据，再在迹态射存在时利用适当的迹态射证明左逆能够下降。

我们采用相同的策略，得到三种奇点不变量的下降结果。主要困难在于，必须为比 [Kim25]中所考虑的对象更一般的对象构造迹态射。根据 Saito 的混合霍奇模理论的性质，以下结论是形式上的：

定理 C. 设 Y 为等维的，并设 $f\colon Y \to X$ 为一个态射，且

- 或者是有限群 G作用下的商，或者是
- 有限满射态射，且 X 正规。

那么，自然态射

$$\mathbf{Q}_X^H \to f_*\mathbf{Q}_Y^H$$

存在一个分裂 （此处“Tr”表示“迹”）

$$\mathrm{Tr}_f\colon f_*\mathbf{Q}_Y^H \to \mathbf{Q}_X^H$$

在 D^b(混合霍奇模(X))。

这通过应用 Gr [Kim25] 和 [dB81, (5.11.2)], DR($^F_{-k}$)–，得到了 [Sai91]，的迹态射。我们将看到，事实上，这一结论适用于任何混合层理论 [CMSS12,Lem. 5.3]，这凸显了论证的形式性。我们注意到，这个态射实际上已在

由此得到以下结论：

推论 D. 设 Y 为等维的，并设 $f\colon Y \to X$ 为一个态射，且

- 要么是有限群 G作用下的商，要么
- 是一个有限满射态射，且 X 正规。

那么我们有以下不等式：

(1) $c(Y) \leq c(X)$.*(2)* $w(Y) \leq w(X)$.*(3)* $\mathrm{HRH}(Y) \leq \mathrm{HRH}(X)$.

备注 1.1. 我们的迹映射还得到了不等式 lcdef(X) $\leq$ lcdef(Y)，该不等式由 [Kim25] 利用 lcdef(–) 与杜布瓦复形深度之间的刻画证明 [MP22，推论 12。6](参见 [PSV24，推论 4。3])。

推论 D 表明，pre-k-有理奇点会下降（这一结果已在[Kim25，KLV25]中证明），其依据是 pre-k-杜布瓦奇点会下降 [SVV23，命题 4。2]以及等价关系

$$\text{pre-}k \text{ rational} \iff \text{pre-}k \text{ Du Bois and } \mathrm{HRH}(X) \geq k.$$

上述下降结果还有另一种证明方法，现说明如下。

Garc´ıa L´opez 和 Sabbah [GLS25] 定义了 霍奇-柳贝兹尼克数 $\lambda^{p,\,r}_{s,\,}$ $(\mathcal{O}_{X,\,x})$ $x \in X$，并因此研究了它们的“交叉变体” I$\lambda^{p,\,q}_{\,r}$ $(\mathcal{O}_{X,\,x})$ 。相关研究见 [CDO25]。事实证明，这些数可以检测这三个不变量。我们证明：

推论 E. 设 Y 为纯维，并令 $f\colon\ Y \to X$ 为有限满射态射。对于任意 $x \in X$，记 $F_x = \{y_1, \dots, y_j\}$。则

(1) $\lambda^{p,q}_{r,s}(\mathcal{O}_{X,x}) \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda^{p,q}_{r,s}(\mathcal{O}_{Y,y_i})$,
(2) $\mathrm{I}\lambda^{p,q}_{r}(\mathcal{O}_{X,x}) \leq \sum_{i=1}^{j} \mathrm{I}\lambda^{p,q}_{r}(\mathcal{O}_{Y,y_i})$.

此外，我们有

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^F_p \mathrm{Gr}^W_{-p-q} \mathcal{H}^{-r} i_x^* W_{\dim X - 1} \mathcal{H}^0 \mathbf{Q}^H_X[\dim X] \leq \sum_{i=1}^{j} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}^F_p \mathrm{Gr}^W_{-p-q} \mathcal{H}^{-r} i_{y_i}^* W_{\dim X - 1} \mathcal{H}^0 \mathbf{Q}^H_Y[\dim Y].$$

还可以利用 推论 D 得到 推论 E。

我们的最后一个结果涉及（局部解析）$\mathbf{Q}$-阶乘性缺陷的下降。给定一个正规射影簇 X，定义其$\mathbf{Q}$-阶乘性缺陷

$$\sigma(X) := \dim_{\mathbf{Q}} \frac{\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(X)}{\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(X)}$$

其中 $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(X) := \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbf{Q}$，$\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(X) := \mathrm{CDiv}(X) \otimes \mathbf{Q}$（这里，$\mathrm{Div}(X)$ 是 X 上 Weil 除子的自由阿贝尔群，而 $\mathrm{CDiv}(X)$ 是由 Cartier 除子的类生成的子群）。还可以定义它们的局部解析对应物 $\sigma^{\mathrm{an}}(X; x)$，其定义为 $x \in X$ （见 [Kaw88, PP25b]）。我们证明如下结果

推论 F。 设 $f\colon\ Y \to X$ 是正规射影簇之间的有限满射态射。那么

(1) $\sigma(X) \leq \sigma(Y)$。 *(2)* 设 $x \in X$，并考虑解析胚 (X, x)。再考虑解析胚(Y, F_x)，其中 $F_x = \{y_1, \dots, y_j\}$ 是映到 x上的纤维，诱导映射为 $f\colon (Y, F_x) \to (X, x)$。若对所有 $1 \leq i \leq j$，$\sigma^{\mathrm{an}}(Y, y_i)$ 都是有限的，则 $\sigma^{\mathrm{an}}(X, x)$ 是有限的，并且我们有

$$\sigma^{\mathrm{an}}(X, x) \leq \sum_{i=1}^{j} \sigma^{\mathrm{an}}(Y, y_i).$$

概要。 在第 2 节中，我们回顾必要的预备知识。我们在第 定理 A 和 推论 B 节中证明3。接下来的第4 节概述迹态射的构造，并证明定理 C。下降结果 推论 D、推论 E 和推论 F在第 5 节中证明。

致谢。 我们感谢 Hyunsuk Kim、S´andor Kov´acs、Laurent¸iu Maxim 和 Sung Gi Park 的有益讨论。

2. Preliminaries

我们首先简要回顾混合层理论的定义和性质（该理论由 Saito 提出 [Sai91]）。这些理论本质上是对 Beilinson 关于混合动机层的猜想理论中诸多理想性质的公理化。

令 $A \subseteq \mathbf{R}$ 和 $k \subseteq \mathbf{C}$ 为子域。混合层理论是指，将一个 k-簇 X 对应到一个 A-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{M}(X)$，并配备一个“遗忘函子” For: $\mathcal{M}(X) \to \mathrm{Perv}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}, A)$，且满足以下基本性质（并满足六函子形式体系的一部分，这里不再展开）：

- For 是忠实且正合的。
- 对于任意 $M \in \mathcal{M}(X)$，余切层 For(M) 都是 k-可构造且拟幂单的。
- 每个 $M \in \mathcal{M}(X)$ 都带有一个有限递增的“权”滤过 $W_\bullet M$（其子对象属于 $\mathcal{M}(X)$），使得 $\mathcal{M}(X)$ 中的每个态射相对于 $W_\bullet$ 都是严格的。
- 对于任意 $w \in \mathbf{Z}$，对象 $\mathrm{Gr}_w^W M$ 是半单的。

我们称对象 M 是纯权 j，如果 $\mathrm{Gr}_w^W M \neq 0$ 蕴含 $w = j$。

例 2.1. 对于 $k = \mathbf{C}$，可以取 $\mathcal{M}(-) =$ 混合霍奇模$(-, A)$。

我们可以考虑导出范畴 $D^b(\mathcal{M}(X))$，以及其诱导的遗忘函子

$$\mathrm{For}\colon D^b(\mathcal{M}(X)) \to D^b_{\mathrm{constr}}(A_{X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}})$$

该函子不再是忠实的，但它是保守的，也就是说，一个对象为零，当且仅当它在 For 下的像为零。

导出范畴 $D^b(\mathcal{M}(X))$ 满足完整的六函子形式体系：我们可以沿着任意 k-簇之间的态射取对偶、张量积、正像和拉回。此外，经过解析化后，这些函子与对应的反常层函子一致。

例 2.2. 对于 $X =$Spec(k)，我们有遗忘函子

$$\mathcal{M}(X) \to \mathrm{Perv}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}) = \mathrm{Vect}_{\mathrm{f.d.}}(A)$$

（这类似于将混合霍奇结构映射到其底层向量空间）。一维向量空间有一个典范提升 $A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$(Spec($k$))，它是纯权 0 的。

令 $\kappa\colon X \to$ Spec(k) 为常值映射。则 $\kappa^* A^{\mathcal{M}} = A^{\mathcal{M}}_X$是 $D^b(\mathcal{M}(X))$ 中的“常对象”。它不属于 $\mathcal{M}(X)$，且不一定是纯的。

根据 [Sai91, (3.6), 定理 3。8]（另见 [Sai90, (4.4.2)] 若 $\mathcal{M}(-) = \mathrm{MHM}(-, A)$），常对象由以下事实唯一确定：For($A^{\mathcal{M}}_X$) $= A_{X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}}$，且存在一个态射$A^{\mathcal{M}} \to \mathcal{H}^0 \kappa_* A^{\mathcal{M}}_X$，它位于典范态射 $A \to H^0(X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}, A)$之上（经由 For）。

根据混合层理论中六函子的普遍性质，我们有

$$A^{\mathcal{M}}_X \in D^{\leq \dim X}(\mathcal{M}(X)),$$

此外，对于 X 等维的情形，我们定义

$$\mathrm{Gr}^W_{\dim X} \mathcal{H}^{\dim X} A^{\mathcal{M}}_X = \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X,$$

之所以如此记号，是因为它经由 For 映到戈雷斯基-麦克弗森交复形 $\mathrm{IC}^{X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}}$。

现在我们专门讨论 $k = \mathbf{C}$ $A = \mathbf{Q}$ 且 $\mathcal{M}(-) =$ MHM$(-,\mathbf{Q})$ 的情形，因此在上述记号中，我们将 $\mathcal{M}$上标替换为 H。

在光滑簇 X 上，一个对象 $M \in$MHM(X) 的数据由以下元组组成

$$((\mathcal{M}, F, W), (\mathcal{K}, W), \alpha)$$

其中 $(\mathcal{M}, F, W)$ 是双滤过右 $\mathcal{D}_X$-模，$(\mathcal{K}, W)$ 是 X^{an} 上有限滤过的 $\mathbf{Q}$-余切层，而 α 是滤过同构

$$\alpha\colon \mathrm{DR}_X(\mathcal{M}, W) \cong (\mathcal{K}, W) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C},$$

然而，并非每个这样的元组都给出一个混合霍奇模。利用将奇异簇局部嵌入光滑簇，可以在 X 为奇异时定义阿贝尔范畴 $\mathbf{MHM}(X)$。

回顾德拉姆函子由下式定义

$$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) = \left[\mathcal{M} \otimes \bigwedge^{\dim X} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\dim X-1} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} \ldots \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M}\right],$$

其中右边的项置于上同调次数 0，且其中 ∇ 是由 $\mathcal{D}_X$-模结构给出的联络。

若 $(\mathcal{M}, F)$ 是滤过 $\mathcal{D}_X$-模（即对所有 k，$F_k\mathcal{M}$ 是凝聚的子-$\mathcal{O}_X$-模，且对所有 $j, \ell \in \mathbf{Z}$ 有 $F_j\mathcal{M} \cdot F_\ell\mathcal{D}_X \subseteq F_{k+\ell}\mathcal{M}$），则我们通过下式在德拉姆复形上定义一个滤过

$$F_k\mathrm{DR}(\mathcal{M}) =$$
$$\left[F_{k-\dim X}\mathcal{M} \otimes \bigwedge^{\dim X} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} F_{k-\dim X+1}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{\dim X-1} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} \ldots \xrightarrow{\nabla} F_{k-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X \xrightarrow{\nabla} F_k\mathcal{M}\right],$$

其中微分不必是 $\mathcal{O}$-线性的。然而，若考虑 $\mathrm{Gr}_k^F\mathrm{DR}_X(\mathcal{M})$，则态射变为 $\mathcal{O}$-线性的，从而我们得到凝聚 $\mathcal{O}$-模的有界复形。这给出一个函子 $\mathrm{Gr}_k^F\mathrm{DR}_X\colon$ 混合霍奇模$(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$，随后可延拓至$D^b$(混合霍奇模$(X)$)。

事实上，即使 X 是奇异的，对任意 $p \in \mathbf{Z}$，也存在函子

$$\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_X(-)\colon D^b(\mathrm{MHM}(X)) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X).$$

例 2.3. 如同例 2.2，对任意复代数簇 X，都有一个常值混合霍奇模$\mathbf{Q}_X^H \in D^b(\mathbf{MHM}(X))$。若 X 光滑，则$\mathbf{Q}_X^H[\dim X] \in \mathbf{MHM}(X)$ 的底层滤过 $\mathcal{D}$-模为 $(\omega_X, F_\bullet)$，其 $\mathrm{Gr}^F_{-\dim X}(\omega_X) = \omega_X$。根据定义，我们几乎可以立即得到

$$\mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{DR}_X(\mathbf{Q}_X^H[\dim X]) \cong \Omega_X^p[\dim X - p].$$

若 X 是正则此等式不再成立。不过，根据 [Sai00]，我们有一个同构

$$\mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{DR}(\mathbf{Q}_X^H[\dim X]) \cong \underline{\Omega}_X^p[\dim X - p]$$

对所有 $0 \le p \le \dim X$ 均成立。

现在假设 X 是等维的。考虑正合三角

$$\mathcal{K}_X^\bullet \to \mathbf{Q}_X^H[\dim X] \to \mathrm{IC}_X^H \xrightarrow{+1}$$

以及短正合列

$$0 \to W_{\dim X-1}\mathcal{H}^{\dim X}\mathbf{Q}_X^H \to \mathcal{H}^{\dim X}\mathbf{Q}_X^H \to \mathrm{IC}_X^H \to 0.$$

这里 $\mathcal{K}_X^\bullet$ 是*RHM*-缺陷对象（在 [PP25a]中得到了细致研究），之所以如此命名，是因为它是阻碍该簇成为 X 有理同调流形（RHM）的因素。

例2。 **4.** 类比于例 2.3，我们定义交 *Du Bois* 复形

$$\mathrm{I}\underline{\Omega}_X^p = \mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X^H)[p - \dim X].$$

由 $\mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{DR}(-)$ 的函子性，对于所有 $0 \le p \le \dim X$，我们有一个典范态射：

$$\underline{\Omega}_X^p \to \mathrm{I}\underline{\Omega}_X^p. \tag{1}$$

注意，映射 (1) 是由映射 $\mathbf{Q}_X^H[\dim\ X] \to \mathrm{IC}_X^H$ 诱导的，该映射经过$H^0\mathbf{Q}_X^H[\dim\ X]$。再次利用 $\mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{DR}(-)$ 的函子性，态射 (1) 经过 $\mathrm{Gr}_{-p}^F\mathbf{DR}$ 的这个对象。

定义 2.5。 设 X 是一个复代数簇。我们定义余切德布瓦复形

$$P\underline{\Omega}_X^p = \mathrm{Gr}_{-p}^F\,\mathrm{DR}(H^0(\mathbf{Q}_X^H[\dim X]))[p-\dim X].$$

我们回顾以下最近定义的不变量 [DOR25，CDO25，CDOR26]:

定义 2.6。 对于 X 一个等维代数簇，定义

$$\mathrm{HRH}(X) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{DR}(\mathcal{K}_X^\bullet) = 0 \text{ for all } p \le k\},$$
$$c(X) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{DR}(\tau^{<0}\mathbf{Q}_X^H[\dim X]) = 0 \text{ for all } p \le k\},$$
$$w(X) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{DR}(\mathcal{H}^0\mathcal{K}_X^\bullet) = 0 \text{ for all } p \le k\},$$

因此（因为 $\tau^{<0}\mathbf{Q}_X^H[$维数 $X] = \tau^{<0}\mathcal{K}_X^\bullet$），我们有

$$\mathrm{HRH}(X) = \min\{c(X), w(x)\}. \tag{2}$$

注记 2.7。 簇 X 是 $\mathbf{Q}$-同调流形，当且仅当 $\mathbf{Q}_X[$维 $X] \to \mathrm{IC}_X$ 是同构，当且仅当 $\mathrm{HRH}(X) = +\infty$。有理同调流形条件与庞加莱′对偶有关，而不变量 $\mathrm{HRH}(X)$ 与庞加莱′对偶在某个霍奇滤过分量 [PP25a,DOR25]成立有关。

簇 X 是上同调完全交，当且仅当 $\mathbf{Q}_X[$维 $X]$ 是余切层，当且仅当 $c(X) = +\infty$ 当且仅当 $\mathrm{lcdef}(X) = 0$。

该条 件 $w(X) \ge 0$ 与弱有理性这一性质有关（见下文（2））。

最近，Garc´ıa L´opez 和 Sabbah [GLS25] 定义了霍奇-柳贝兹尼克数，将其作为通常 Lyubeznik 数的细化，并纳入混合霍奇理论的考量。我们在此回顾其定义。

定义 2.8。 设 $x \in X$。定义霍奇-柳贝兹尼克数

$$\lambda_{r,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{Gr}_{-p-q}^W\mathcal{H}^{-r}i_x^*(\mathcal{H}^{s-\dim X}\mathbf{Q}_X^H[\dim X])$$

以及相交Hodge-Lyubeznik数

$$\mathrm{I}\lambda_r^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{Gr}_{-p-q}^W\mathcal{H}^{-r}i_x^*\mathrm{IC}_X^H.$$

霍奇-柳贝兹尼克数对通常的Lyubeznik数作如下细化:

$$\lambda_{r,s}(\mathcal{O}_{X,x}) = \sum_{p,q}\lambda_{r,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

我们在此汇集上述奇点不变量的重新诠释 .

定理 2.9 （[CDO25，定理 A], [CDOR26，第 2 节。1]）。 以下陈述成立:

(1) 不变量 $c(X)$ 有以下等价刻画:

- $\sup\{k \mid \lambda_{r,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$ 对所有 $x \in X, s < \dim\ X, q \in \mathbf{Z}\ p \ge -k\}$.
- $\sup\{k \mid \mathrm{depth}(\underline{\Omega}_X^p) \ge \dim\ X - p$ 对所有 $p \le k\}$.
- 对于任意余维数为 c 的嵌入 $X \subseteq Y$ 到光滑簇 Y 中，上确界 $\{k \mid F_k\mathcal{H}_X^{j+c}(\mathcal{O}_Y) = 0$ 对所有 $j > 0\}$.

- $\sup\left\{k \,\middle|\, \underline{\Omega}^p_X \to P\underline{\Omega}^p_X \text{ is an isomorphism for all } p \le k\right\}$.

(2) 不变量 $w(X)$ 有以下等价刻画：

- $\sup\left\{k \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathrm{Gr}^F_p \mathrm{Gr}^W_{-p-q} \mathcal{H}^{-r} i_x^* W_{\dim X - 1} \mathcal{H}^{\dim X} \mathbf{Q}_X = 0 \\ \text{for all } x \in X, q, r \in \mathbf{Z}, p \ge -k \end{array}\right\}$.
- *For any codimension c embedding $X \subseteq Y$ into a smooth variety Y,*
$$\sup\{k \mid F_k W_{n+c} \mathcal{H}^c_X(\mathcal{O}_Y) = F_k \mathcal{H}^c_X(\mathcal{O}_Y)\}.$$
- $\sup\left\{k \,\middle|\, P\underline{\Omega}^p_X \to \mathrm{I}\underline{\Omega}^p_X \text{ is an isomorphism for all } p \le k\right\}$.

HRH(X) 的类似刻画可利用等式 (2) 得到。

$w(X)$ 的以下另一种刻画也将证明很有用。

注 2.10 ([CDOR26])。不难看出，如果 $w(X) \ge k$，那么我们有等式 ty
$$\lambda^{p,q}_{r,\dim X}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{I}\lambda^{p,q}_r(\mathcal{O}_{X,x}) \text{ for all } x \in X,\ q, r \in \mathbf{Z},\ p \ge -k.$$

3. Injectivity Theorems and Left-Inverse Characterizations

在本节中，我们在$\mathbf{C}$上工作。

Kov´ács-Schwede [KS16，定理 3.3] 得到了如下有用的单射性结果（另有一个证明 [MP22，推论 B]使用混合霍奇模理论）：

定理 3.1 ([KS16，定理 3.3])。 考虑自然态射 $\mathcal{O}_X \to \Omega^0_X$。对所有 $j \in \mathbf{Z}$，在对偶对象上诱导的态射
$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_X}(\underline{\Omega}^0_X, \omega^\bullet_X) \to \mathcal{H}^j \omega^\bullet_X$$
是单射的。

如上所述的单射定理引出了奇点不变量的“左逆刻画”。例如，作为上述结果的推论，我们得到杜布瓦奇点的（现已成为标准的）左逆刻画（最初源于 Kov´acs [Kov99，定理 2.3]）：

推论 3.2 ([Kov99，定理 2.3])。 簇 X 具有杜布瓦奇点，当且仅当自然态射
$$\mathcal{O}_X \to \underline{\Omega}^0_X.$$
存在一个左逆。

证明。 正向推论显然。反之，假设存在一个左逆。因此，对偶态射 $\mathbb{D}(\Omega^0_X) \to \omega^\bullet_X$ 存在右逆。特别地，对所有 $j \in \mathbf{Z}$，由应用 $\mathcal{H}^j(_)$诱导的态射
$$\mathcal{E}xt^j(\underline{\Omega}^0_X, \omega^\bullet_X) \to \mathcal{H}^j \omega^\bullet_X$$
是满射。根据前述定理，它也是单射，因此是一个同构。因此，对偶对象上的诱导映射是一个同构，原态射也如此。□

我们旨在证明 定义 2.6 中不变量的这类刻画。为此，回顾以下关于 HRH(X) 的单射性结果（[PSV24，定理 10，5], 由 Sung Gi Park 提出）：

定理 3.3 (Sung Gi Park)。 假设 X 是等维的，且满足$\mathrm{HRH}(X) \geq k-1$。那么自然态射

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{I}\underline{\Omega}^k_X, \omega^\bullet_X) \to \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\underline{\Omega}^k_X, \omega^\bullet_X)$$

对于 $i < k-n$ 是同构，对于 $i = k-n$ 是单射，并且当 $i > k-n$ 时定义域消失。

定理 A(2) 给出了上述结果的一个类似结论，其中 $P\Omega^k_X$ 取代 $\underline{\Omega}^k_X$，其证明与引理 3.3的证明类似:

定理 *A* 的证明定理 *A*(2)。 由于该条件是局部的，我们可以假设 X 嵌入到某个光滑簇 Y中。

条件 $w(Z) \geq k-1$ 等价于要求

$$\mathrm{IC}^H_X \subseteq \mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X$$

在 $F_{k-1-\dim X}$ 处成为同构，其中 $\mathbf{D}^H_X = \mathbf{D}(\mathbf{Q}^H_X[\dim\ X])(-\dim\ X)$ 是 $\mathbf{Q}^H_X[\dim\ X]$ 的（本质上的）对偶。

如果我们将 $\mathrm{Gr}^F_{k-\dim X}\mathrm{DR}(-)$ 应用于包含 $\mathrm{IC}^H_X \subseteq \mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X$，那么利用 IC^H_X 的自对偶性以及 $\mathrm{Gr}^F_{k-\dim X}\mathrm{DR}(-)$ 与对偶函子的交换性，我们看到得到的态射为

$$\mathbb{D}(\mathrm{I}\underline{\Omega}^k_X) \to \mathbb{D}(\mathrm{Gr}^F_{-k}\mathrm{DR}(\mathcal{H}^{\dim X}\mathbf{Q}^H_X)[k-\dim X]).$$

因此，我们只需理解这个态射。根据 $\mathrm{Gr}_{k-\dim X}\mathrm{DR}(-)$ 函子的定义，它对应于

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-2-\dim X}\mathrm{IC}^H_X \otimes \wedge^2\mathcal{T}_Y & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-1-\dim X}\mathrm{IC}^H_X \otimes \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-1-\dim X}\mathrm{IC}^H_X \\
& \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-2-\dim X}\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X \otimes \wedge^2\mathcal{T}_Y & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-1-\dim X}\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X \otimes \mathcal{T}_Y & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^F_{k-1-\dim X}\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X
\end{array}$$

因此这些断言是显然的。 □

我们继续证明定理 A(1)。陈述中所描述的态射是通过对自然态射进行对偶化得到的

$$\mathbf{Q}^H_X[\dim X] \to \mathcal{H}^0(\mathbf{Q}^H_X[\dim X])$$

得到

$$\mathbf{D}(\mathcal{H}^0(\mathbf{Q}^H_X[\dim X])) \to \mathbf{D}(\mathbf{Q}^H_X[\dim X]),$$

然后应用 $\mathrm{Gr}^F_p\mathrm{DR}(-)$，并将 $\mathbf{D}$ 与该函子交换，我们得到一个自然态射

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{DR}(\mathcal{H}^0(\mathbf{Q}^H_X[\dim X]), \omega^\bullet_X) \to R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\underline{\Omega}^p_X[\dim X - p], \omega^\bullet_X).$$

定理 *A* 的证明 定理 *A*(1). 该问题是局部的，因此我们可以将 X 嵌入一个光滑簇 Y中。假设 $\mathbf{D}(\mathbf{Q}^H_X[$维数 $X])$ 可由一个有界复形 $M^\bullet$表示，其对象是 Y上的混合霍奇模。根据引理陈述中态射的构造，只需证明自然态射

$$\mathrm{Gr}^F_k\mathrm{DR}(\mathcal{H}^0M^\bullet) \to \mathrm{Gr}^F_k\mathrm{DR}(M^\bullet)$$

在上同调上是单射。

假设 $c(X) \geq k-1$ 等价于要求自然态射 $F_{k-1}\mathcal{H}^0(M^\bullet) \to F_{k-1}M^\bullet$ 是拟同构（回忆一下，$F_{k-1}(-)$ 是正合函子）。换言之，对于所有 $p < k$ 和 $j > 0$，我们有 $\mathrm{Gr}_p^F\mathcal{H}^j M^\bullet = 0$。因此，我们看到，对于所有 $j > 0$，复形

$$\mathrm{Gr}_k^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^j M^\bullet) \text{ is equal to } \mathrm{Gr}_k^F\mathcal{H}^j M^\bullet \text{ placed in degree } 0.$$

我们有如下谱序列

$$E_2^{i,j} = \mathcal{H}^i \mathrm{Gr}_k^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^j M^\bullet) \implies \mathcal{H}^{i+j}\mathrm{Gr}_k^F \mathrm{DR}(M^\bullet),$$

因此我们看到，$E^i{}_2{}^j \neq 0$ 意味着以下两种情况之一：$j > 0$ 且 $i = 0$，或 $j = 0$ 且 $i \leq 0$。特别地，对于任意 $r \geq 2$，考察

$$E_r^{i-r,j+(r-1)} \xrightarrow{d_r} E_r^{i,j} \xrightarrow{d_r} E_r^{i+r,j-(r-1)}$$

对于 $j = 0$ 和 $i \leq 0$，左侧和右侧对象都为零。

因此我们得出

$$E_2^{i,0} = E_\infty^{i,0} \hookrightarrow \mathcal{H}^i \mathrm{Gr}_k^F \mathrm{DR}(M^\bullet),$$

从而证明了所需的单射性。 □

注记 3.4. 定理 A 中的单射性结果 定理 A结合起来，可以为 Park 的定理 3.3提供另一种证明。

现在我们可以用左逆来刻画 $c(-)$、$w(-)$ 和 $\mathrm{HRH}(-)$：

推论 *B* 的证明推论 *B*。 证明与上文推论 3.2 相同（不过这里对 k使用归纳法）。我们只给出 (1) 的证明概要。

证明采用对 k的归纳法。对于基例 $k = 0$，注意到定理 A(1) 的单射性成立，因此结论显然。

对于 $k > 0$，根据归纳法，我们知道 $c(X) \geq k-1$。因此，我们可以应用定理 A(1) 的结果得出结论。 □

4. Trace Morphism for Mixed Sheaves

设 $\mathcal{M}(-)$ 是定义在 k-簇上的 A-混合层的任意理论，其中 $k \subseteq \mathbf{C}$ 和 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是子域。

我们旨在证明引言中的 定理 C 。最重要的情形是有限群商，因此我们从这里开始。

我们回顾混合霍奇模的群不变量的构造（不过我们会在混合层语境中重述这些论证），遵循 [MSS11]，其讨论的是 $\mathfrak{S}_n$作用于 $M^{\boxtimes n}$ （对于 $M \in D^b(\mathrm{MHM}(X))$）。

在我们的语境中，设 Y 是一个簇，设 G 是一个作用于 Y 上的有限群，其商为 $f\colon Y \to X$。对于任意 $g \in G$，我们有作用映射 $g\colon Y \to Y$，满足 $f \circ g = f$。我们考虑对象 $f_* A_Y^{\mathcal{M}} \in D^b(\mathcal{M}(X))$。

引理 4.1. 我们有一个自然环同态

$$\gamma\colon \mathbf{Q}[G] \to \mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(X))}(f_* A_Y^{\mathcal{M}}).$$

证明. 由于 $f \circ g = f$ 对所有 $g \in G$，该作用来自 g 的伴随： $Y \to Y$：我们有一个自然态射

$$A_Y^{\mathcal{M}} \to g_* g^* A_Y^{\mathcal{M}},$$

因此，通过应用 f_* ，我们得到一个自然自同态

$$\gamma(g) \colon f_* A_Y^{\mathcal{M}} \to (f \circ g)_* A_Y^{\mathcal{M}} = f_* A_Y^{\mathcal{M}}.$$

□

在$\mathbf{Q}[G]$ 中，我们有不变投影算子 $\sigma_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_{\circ}$ 这是一个幂等元（很容易验证）。因此，我们得到一个幂等算子

$$\gamma(\sigma_G) \in \mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(X))}(f_* A_Y^{\mathcal{M}}).$$

范畴 $D^b(\mathcal{M}(X))$ 是幂等完备（或$Karoubian$），这意味着每个幂等元都可分裂（且在唯一同构意义下唯一）。这是由有界 t-结构的存在形式地推出的：参见 [BS01，LC07]。

回忆一下，幂等自同态 e： $M \to M$ 可分裂，是指存在某个 N 及一些态射

$$M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{i} M$$

使得 $i \circ p = e$ 和 $p \circ i = \mathrm{id}_N$。关于对象 N 和 e的分解在唯一同构意义下唯一。

定义 4.2。 我们将 $(f_* A_Y^{\mathcal{M}})^G$定义为 G-不变量部分，即分裂幂等元 $\gamma(\sigma_G)$的对象。它在 $D^b(\mathcal{M}(X))$ 中在同构意义下良定义，并且我们有态射

$$f_* A_Y^{\mathcal{M}} \to (f_* A_Y^{\mathcal{M}})^G \to f_* A_Y^{\mathcal{M}}.$$

事实上，这个分裂给出了此情形下的迹态射：

命题 4.3。 我们有一个典范同构

$$(f_* A_Y^{\mathcal{M}})^G \cong A_X^{\mathcal{M}}$$

此外，我们还可以选取一个投影 $f_* A_Y^{\mathcal{M}} \to (f_* A_Y^{\mathcal{M}})^G = A_X^{\mathcal{M}}$，它分裂自然态射 $A_X^{\mathcal{M}} \to f_* A_Y^{\mathcal{M}}$，从而在此情形下给出 $\mathrm{Tr} f$ 。

证明。 对于第一个断言，回顾 [Sai91，定理 3。8]（或 [Sai90，（4.4.2）] 若 $\mathcal{M}$（–） =混合霍奇模(–)） A_X^H，其由以下性质作典范刻画：$\mathrm{rat}(A_X^{\mathcal{M}}) = A_X$ 以及 $\mathcal{H}^0 \kappa_* (A_X^{\mathcal{M}}) \cong H^0_{\mathcal{M}}(X)$ 在范畴 $\mathcal{M}$（Spec(k) 中。

对于最后一个结论，由伴随性可得

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(X))}(A_X^{\mathcal{M}}, f_* A_Y^{\mathcal{M}}) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(\mathrm{Spec}(k))}(A^{\mathcal{M}}, \kappa_* A_Y^{\mathcal{M}}),$$

其中 κ: $Y \to \mathrm{pt}$ 是常值映射。但根据一般的 t-结构考虑，右侧等于

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(\mathrm{Spec}(k))}(A^{\mathcal{M}}, H^0_{\mathcal{M}}(Y)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, H^0(Y, A)) = A,$$

因此，态射 $A_X^{\mathcal{M}} =(f_* A_Y^{\mathcal{M}})^G \to f_* A_Y^{\mathcal{M}}$在相差一个常数倍的意义下是唯一的。因此，经过一个非零常数的重新缩放（两个态射都非零），最后一项断言成立。□

定理 C 的证明定理 C。 我们已经论证了有限群商的情形。现在，假设 X 是正规的。我们有

$$Z \to Y^n \to Y \to X$$

从而 $Z \to X$ 是一个伽罗瓦群商（对此我们有一个迹态射），且 Y^n 是 Y的正规化。于是所需的分裂来自该复合

$$A_X^{\mathcal{M}} \to f_* A_Y^{\mathcal{M}} \to f_* A_{Y^n}^{\mathcal{M}} \to f_* A_Z^{\mathcal{M}} \to A_X^{\mathcal{M}}.$$

至此证明完成。 □

5. Finite Descent of Singularity Invariants

在本节中， $k = \mathbf{C}$ $A = \mathbf{Q}$ 且 $\mathcal{M}(-) =$混合霍奇模$(-, \mathbf{Q})$。

我们给出主要下降结果的两种方法 推论 D：第一种使用单射引理，第二种使用霍奇-柳贝兹尼克数。除了 w-不变量（在第一种方法中）之外，无需在混合霍奇模的层面上诉诸迹态射。

推论 D 的第一个证明。(1) 假设 $c(Y) \geq k$ 并设 $f\colon Y \to X$ 是一个有限满射态射，且 X 正规。

我们使用条件 $c(X) \geq k$ 当且仅当 $\mathbb{D}(\Omega_X^p) \in D^{[-\text{维数}\, X,\ -\text{维数}^{X+p}]}$上同调$(\mathcal{O}_X)$ 对所有 $p \leq k$都成立。令 $f\colon Y \to X$ 如定理陈述所述。

由 [Kim25], , 自然态射 $\Omega_X^p \to Rf_*\Omega_Y^p$ 有一个左逆，因此我们得到恒等态射的一个分解

$$\underline{\Omega}_X^p \to Rf_*\underline{\Omega}_Y^p \to \underline{\Omega}_X^p.$$

对偶化后，我们得到恒等态射的一个分解

$$\mathbb{D}(\underline{\Omega}_X^p) \to Rf_*\mathbb{D}(\underline{\Omega}_Y^p) \to \mathbb{D}(\underline{\Omega}_X^p).$$

若 f 是有限的，则 $Rf_* = f_*$ 是正合的。令 $p \leq k$ 并令 $j > p$。我们要证明$\mathcal{H}^{-\text{维数}\, X+j}\mathbb{D}(\Omega_X^p) = 0$。

将 $\mathcal{H}^{-\text{维数}\, X+j} = \mathcal{H}^{-\text{维数}^{Y+j}}$应用于该分裂，得到

$$\mathcal{H}^{-\dim X+j}\mathbf{D}(\underline{\Omega}_X^p) \to Rf_*\mathcal{H}^{-\dim Y+j}\mathbf{D}(\underline{\Omega}_Y^p) \to \mathcal{H}^{-\dim X+j}\mathbf{D}(\underline{\Omega}_X^p)$$

这表明外项上的恒等态射可经由 0 分解，从而得到消失。

(2) 证明通过对 k进行归纳法，以应用单射性结果 定理 2(2)。注意，对于 $k = 0$，单射陈述的结论无条件成立。

根据迹映射构造，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\dim X] & \longrightarrow & f_*\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_Y^H[\dim Y] & \longrightarrow & \mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\dim X] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{IC}_X^H & \longrightarrow & f_*\mathrm{IC}_Y^H & \longrightarrow & \mathrm{IC}_X^H \end{array},$$

因为我们可以将 $\mathrm{Gr}_w^W\mathcal{H}^{\dim X}(-)$ 应用于 $\mathbf{Q}_X^H$ 的迹映射。

应用 $\mathrm{Gr}_{-p}^{F}\mathrm{DR}(-)$，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Gr}_{-p}^{F}\mathrm{DR}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维 } X] & \longrightarrow & f_{*}\mathrm{Gr}_{-p}^{F}\mathrm{DR}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{Y}^{H}[\text{维 } Y] & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{-p}^{F}\mathrm{DR}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维数 } X] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{I}\underline{\Omega}_{X}^{p} & \longrightarrow & f_{*}\mathrm{I}\underline{\Omega}_{Y}^{p} & \longrightarrow & \mathrm{I}\underline{\Omega}_{X}^{p}
\end{array}$$

其中水平复合为恒等映射。根据假设，中间的竖直箭头有一个左逆，因此左侧的竖直箭头当然也有左逆，正如所需。

(3) 根据前两种情形和 (2)，我们看到 $\mathrm{HRH}(X)$ 可以下降。我们也可以按照前一个结果的思路直接证明这一点。

证明对 k 进行归纳，以应用 定理 3.3。注意，单射引理的结论对 $k=0$ 无条件成立。

我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\Omega}_{X}^{p} & \longrightarrow & f_{*}\underline{\Omega}_{Y}^{p} & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{X}^{p} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{I}\underline{\Omega}_{X}^{p} & \longrightarrow & f_{*}\mathrm{I}\underline{\Omega}_{Y}^{p} & \longrightarrow & \mathrm{I}\underline{\Omega}_{X}^{p}
\end{array}$$

并且根据假设，若 $p \le k$，中间的箭头有一个左逆，因此左侧的竖直箭头也有左逆。□

上文中，我们使用了 Kim 的迹态射的混合霍奇模版本 [Kim25] 对于不变量 $w(X)$。这一工具还立即给出了关于霍奇-柳贝兹尼克数的下降陈述推论 E。

利用 $W_{\bullet}f_{*}(-) = f_{*}W_{\bullet}(-)$（因为 f 是有限的），迹态射

$$\mathrm{Tr}_{f}\colon f_{*}\mathbf{Q}_{Y}^{H}[\dim Y] \to \mathbf{Q}_{X}^{H}[\dim X]$$

通过取 $\mathcal{H}^{0}(-)$、$W_{\dim X-1}\mathcal{H}^{0}(-)$ 和 $\mathrm{Gr}_{\dim X}^{W}\mathcal{H}^{0}(-)$，诱导出一个分裂的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
W_{\dim X-1}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维 } X] & \longrightarrow & f_{*}W_{\dim X-1}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{Y}^{H}[\text{维 } Y] & \longrightarrow & W_{\dim X-1}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维数 } X] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维数 } X] & \longrightarrow & f_{*}\mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{Y}^{H}[\text{维 } Y] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{0}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\text{维数 } X] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{IC}_{X}^{H} & \longrightarrow & f_{*}\mathrm{IC}_{Y}^{H} & \longrightarrow & \mathrm{IC}_{X}^{H}
\end{array},$$

并且对任意 j 也有分裂：

$$\mathcal{H}^{j}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\dim X] \to f_{*}\mathcal{H}^{j}\mathbf{Q}_{Y}^{H}[\dim Y] \to \mathcal{H}^{j}\mathbf{Q}_{X}^{H}[\dim X].$$

现在，令 $x \in X$，并考虑笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} F_x & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f\,. \\ \{x\} & \longrightarrow & X \end{array}$$

由于 f 是适当的，在对我们的分裂应用 $i_x^*\mathcal{H}^{s-\dim X}(-)$ 后，我们可以使用基变换，得到

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*W_{\dim X-1}\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\text{维数 } X] & \longrightarrow & f_*\mathcal{H}^{s-\dim X}i_{F_x}^*W_{\dim X-1}\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_Y^H[\text{维数 } Y] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*W_{\dim X-1}\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\text{维数 } X] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\text{维数 } X] & \longrightarrow & f_*\mathcal{H}^{s-\dim X}i_{F_x}^*\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_Y^H[\text{维数 } Y] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*\mathcal{H}^0\mathbf{Q}_X^H[\text{维数 } X] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*\mathrm{IC}_X^H & \longrightarrow & f_*\mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*\mathrm{IC}_Y^H & \longrightarrow & \mathcal{H}^{s-\dim X}i_x^*\mathrm{IC}_X^H \end{array},$$

其中各列是短正合列，各行是恒等映射的分解。应用 $\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{Gr}_{-p-q}^W$ 并计算维数，我们便可进行证明。

推论 *E* 的证明。由于 F_x 不连通， $i_{F_x}^*$ 作用于任意对象时的取值等于 $\bigoplus_{i=1}^j i_{y_i}^*$ 作用于同一对象时的取值。

上述讨论表明，与 $x \in X$ 对应的混合霍奇结构是与 $\{y_1, \ldots, y_j\}$对应的混合霍奇结构的直和项，这就证明了所需的不等式。□

这推出了其他不变量的下降陈述：

推论 *D* 的第二个证明。关于 $c(-)$ 的断言可由推论 E 中的第一个不等式轻易推出（若所有消失在 Y上均成立，则它们在 X上也成立）。关于 HRH(–) 的断言可由关于 $w(-)$ 的断言推出。

对于 $w(-)$，该断言可由推论 E中的最后一个不等式推出。 □

现在我们来证明推论 F。首先注意以下事实：

推论 5.1。 假设 X, Y是正规射影簇，并且令 $f\colon\ Y \to X$ 为有限满射。

如果 σ（Y）是有限的，那么 σ（X）也是有限的。

证明。 我们有相容分解

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Q}_X^H & \longrightarrow & f_*\mathbf{Q}_Y^H & \longrightarrow & \mathbf{Q}_X^H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{IC}_X^H[-\dim X] & \longrightarrow & f_*\mathrm{IC}_Y^H[-\dim Y] & \longrightarrow & \mathrm{IC}_X^H[-\dim X] \end{array},$$

这给出了一个交换图（应用 $\mathcal{H}^1\kappa_*(-)$后）：

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X) & \longrightarrow & H^1(Y) & \longrightarrow & H^1(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{IH}^1(X) & \longrightarrow & \mathrm{IH}^1(Y) & \longrightarrow & \mathrm{IH}^1(X) \end{array}.$$

根据 [PP25b, 定理 A], ，我们知道 $\sigma(Y)$ 有限当且仅当 $H^1(Y) = \mathrm{IH}^1(Y)$。因此，$H^1(X) \to \mathrm{IH}^1(X)$（左侧竖直映射）是单射。但由此，以上图表的交换性蕴含 $H^1(X) \to \mathrm{IH}^1(X)$（右侧竖直映射）也是满射，从而证明二者相等，进而得到所述结论。□

证明推论 *F(1)*。若 $\sigma(Y) = \infty$，则无需证明； $\sigma(Y) < \infty$。因此，根据前一个推论，我们得到 $\sigma(X) < \infty$。根据 [PP25b，定理 A 的证明]，在假设 $\sigma(X)$ 有限的情况下，我们得到一个同构

$$\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(X)/\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(X) \cong \mathrm{coker}(\gamma_X \colon V_X \to \mathrm{IH}^2(X, \mathbf{Q}) \cap \mathrm{IH}^{1,1}(X)),$$

其中 $V_X = \ker(H^2(X, \mathbf{Q}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X))$，且态射 γ_X 由以下方式诱导

$$H^2(X, \mathbf{Q}) \to \mathrm{IH}^2(X, \mathbf{Q}).$$

再次，我们有相容分解

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Q}_X^H & \longrightarrow & f_*\mathbf{Q}_Y^H & \longrightarrow & \mathbf{Q}_X^H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{IC}_X^H[-\dim X] & \longrightarrow & f_*\mathrm{IC}_Y^H[-\dim Y] & \longrightarrow & \mathrm{IC}_X^H[-\dim X] \end{array},$$

诱导出

$$\begin{array}{ccccc} H^2(X) & \longrightarrow & H^2(Y) & \longrightarrow & H^2(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{IH}^2(X) & \longrightarrow & \mathrm{IH}^2(Y) & \longrightarrow & \mathrm{IH}^2(X) \end{array}.$$

推论由以下观察得出： $V_X = H^2(X, \mathbf{Q}) \cap V_Y$ 作为$H^2(Y)$的子空间。事实上，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, \mathbf{Q}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{Q}) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

其中两个竖直态射都是分裂单射。因此，若左上角的 v 映射到 $H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$中的 0，则它在上方竖直态射下的像也必为零。

由此可见，$\mathrm{coker}(\gamma_X)$是$\mathrm{coker}(\gamma_Y)$的一个直和项，从而证明了所需的不等式。□

我们的最终结果涉及解析$\mathbf{Q}$-因子性缺陷。此论证仅使用分解定理，而不使用我们的迹映射，但为求完整，仍将其列出。

推论 5.2. 设 $f\colon Y \to X$ 是正规射影簇之间的有限满射态射。设 $x \in X$，并考虑解析胚(X,x)。再考虑解析胚(Y, F_x)，其中 $F_x = \{y_1, \dots, y_j\}$ 是 x上方的纤维，诱导态射为 $f\colon (Y, F_x) \to (X, x)$。

If $\sigma^{\mathrm{an}}(Y, y_i)$ is finite for all $1 \le i \le j$, then $\sigma^{\mathrm{an}}(X, x)$ is finite.

证明。 根据 [PP25b，定理 B], 解析缺陷有限，当且仅当 $R^1\mu_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = 0$ 对于某个 $\widetilde{\ }$解消 $\mu\colon \widetilde{X} \to X$。我们还令 $\mu\colon \widetilde{Y} \to Y$表示 Y的一个解消。

根据 [KS21，命题 8。2],我们知道

$$\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{DR}_Y(\mathrm{IC}_Y^H) = R\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}[\dim Y]$$

$$\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X^H) = R\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}[\dim X]$$

因此，由于 IC_X^H 是 $f_*\mathrm{IC}_Y^H$ 的直和项，我们得到

$$R\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \text{ is a direct summand of } f_*R\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}.$$

因此，我们很容易看出（由 f_* 的正合性可知），若 $\sigma^{\mathrm{an}}(Y, y)$ 有限，则 $\sigma^{\mathrm{an}}(X, x)$ 也有限。□

推论 *F* 的证明 推论 *F(2)*。和之前一样，我们可以安全地假设 $\sigma^{\mathrm{an}}(Y, y_i)$ 对所有 $1 \le i \le j$ 都有限，因此 $\sigma^{\mathrm{an}}(X, x) < \infty$。

根据 [PP25b，定理 B], 我们想要研究态射

$$\mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X) \to \mathrm{Gr}_0^F \mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X^H).$$

由于我们的分裂在霍奇模层面成立，因此我们有一个交换图（其垂直态射是分裂单射）：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^F \mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X^H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*\mathrm{DR}_Y(\mathrm{IC}_Y) & \longrightarrow & f_*\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{DR}_Y(\mathrm{IC}_Y^H) \end{array}.$$

由于垂直映射是分裂单射，在应用 $\mathcal{H}^{-\dim X+2}(-)_x$（取上同调，然后在 $x \in X$ 处取茎）后，它们仍然是分裂单射。因此，由于 f 的正合性，我们得出一个交换图，其垂直态射是分裂单射

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}^{-\dim X+2}\mathrm{DR}_X(\mathrm{IC}_X))_x & \longrightarrow & (R^2\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^j (\mathcal{H}^{-\dim Y+2}\mathrm{DR}_Y(\mathrm{IC}_Y))_{y_i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^j (R^2\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}})_{y_i} \end{array},$$

这立即推出了所需的不等式。 □

References

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting, *Idempotent completion of triangulated categories*, 《J. Algebra》 **236** (2001)，第2期，819–834。 ↑11[CDO25] Qianyu Chen, Bradley Dirks, and Sebastian Olano, *Partial Cohomologically Complete Intersections via Hodge Theory* 2025 2511 03042, ，arXiv电子预印本（11月），arXiv: 。可见于2511.03042。 ↑1, 3, 7

[CDOR26] Qianyu Chen、Bradley Dirks、Sebastian Olano 和 Debaditya Raychaudhury, *Hodge theory of secant varieties* 2026 2602 04038, 2602 04038 ↑1 , arXiv电子预印本（2月）, 7, 8 arXiv: 。可见于。。, [12] CMSS Sylvain E. Cappell、Laurentiu G. Maxim、J .. .. *Equivariant* org Schurmann 和 Julius L. *characteristic classes of singular complex algebraic varieties* **65** 2012 Shaneson, , 《Comm. Pure Appl. Math.》 (), 第 12, 1722 1769 ↑3 –。dB Philippe du Bois, [81] *Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière*, 《Bull. Soc. Math. France》109（1981）, 41–81。 ↑3[DOR25] Bradley Dirks、Sebastian Olano 和 Debaditya Raychaudhury, *A Hodge Theoretic generalization of $\mathbb{Q}$-Homology Manifolds* 2025 2501 14065, 2501 , arXiv电子预印本（1月）, arXiv: 。可见于。 14065 ↑1 7 。, GLS Ricardo Garc´ıa L´opez 和 Claude Sabbah, *Hodge-Lyubeznik numbers*, 《 [25] C. R. Math. Acad. Sci. Paris》363（2025）, 213–221。MR4884743 ↑3, 7[JKSY22] Seung-Jo Jung, In-Kyun Kim, Morihiko Saito 和 Youngho Yoon, *Higher Du Bois singularities of hypersurfaces* **125** 2022 3, 543 567 ↑1 , 《Proc. Lond. Math. Soc.》(), 第–期。[Kaw88] Yujiro Kawamata, *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces* 2 **127** 1988 1, 93 163 , 《Ann. of Math.》 () (), 924674 ↑4 第–期。MR[25] *Trace for the Du Bois complex* 2025 2507Kim Hyunsuk Kim, , arXiv电子预印本（7月）, arXiv: .07350, 可见于 2507 07350 ↑3 12 13 。。, , KK Janos [10] ´ ´ ´ ´ ´ Kollar 和 Sandor J. Kovacs, *Log canonical singularities are Du Bois*, 《J. Amer. Math. Soc.》23（2010）, 第3期, 791–813。MR2629988 ↑1[KLV25] S´andor Kov´acs、Pat Lank 和 Sridhar Venkatesh, *Simple criteria for higher rational singularities*, arXiv电子预印本（2025年7月）, arXiv:2507.07351, 可见于2507.07351。 ↑2, 3[Kov25] S´andor Kov´acs, *Complexes of differential forms and singularities: The injectivity theorem*, arXiv电子预印本（2025年5月）, arXiv:2505.09912, 可见于2505.09912。 ↑1[Kov99] S ´ ´ *Rational log canonical Du Bois singularities: on the conjectures of Kollár and* andor Kovacs, , , , 《 *Steenbrink* **118** 1999 2, 123 133 ↑1 Compos. Math.》 (), 第–期。, KS Sandor J. Kovacs 和 Karl Schwede, , 《极小模型与极端射线》（京都, 2011）, 2016年, 第49–65页。MR3617778 ↑1, 8[KS21] Stefan Kebekus 和 Christian Schnell, *Extending holomorphic forms from the regular locus of a complex space to a resolution of singularities* **34** 2021 2, 315 368 , 《J. Amer. Math. Soc.》 (), ↑16 第–期。[07] *Karoubianness of a triangulated category* **310** 2007 LC Jue Le 和 Xiao-Wu Chen, 《J. Algebra》 (), 第1期, 452–457。 ↑11[MOPW23] Mircea Mustat ˘ ´ *The Du Bois complex of* a、Sebastian Olano、 *a hypersurface and the minimal exponent* **173** 2023 2, 1411 1436 ↑1 Mihnea Popa 和 Jakub Witaszek, , 《Duke Math. J.》 (), 第—期。[MP22] Mircea Mustat ˘ *Hodge filtration on local cohomology Du Bois complex and* a 和 Mihnea Popa, , 《 *local cohomological dimension* **10** 2022 22, 58 4491455 ↑1 3 Forum Math. Pi》 (), 论文编号e。MR, , 8[MSS11] Laurent .. .. *Symmetric products of mixed Hodge* iu Maxim、Morihiko Saito 和 *modules* **96** 2011 5, 462 483 ↑10 Jorg Schurmann, 《J. Math. Pures Appl.》 (), 第–期。[PP25a] Sung Gi Park 和 Mihnea Popa, *Hodge symmetry and Lefschetz theorems for singular varieties*, arXiv电子预印本（8月 2025 2410 15638, 2410 15638 ↑2 6 7）, arXiv: 。可见于。。, , PP b, , [25] *Q-factoriality and Hodge-Du Bois theory* 2025 arXiv电子预印本（8月）, arXiv:2508.17748, 可见于2508.17748。 ↑4, 15, 16[PSV24] Mihnea Popa, Wanchun Shen 和 *Injectivity and Vanishing for the Du Bois Com-* Anh Duc Vo, *plexes of Isolated Singularities* 2024 2409 18019, , arXiv电子预印本（9月）, arXiv: 。可见于 2409 18019 ↑1 2 3 8 。。, , , Sai Morihiko Saito, [00] *Mixed Hodge complexes on algebraic varieties* **316** 2000 2, , 《Math. Ann.》 (), 第–期。, 283 331 ↑1 Sai, *Mixed Hodge modules*, 《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》26（1990）, 第2期, 221–333。MR1047415 ↑5 11 , Sai, [91] *On the formalisme of mixed sheaves*, RIMS预印本784（1991）。 ↑3, 4, 5, 11[SVV23] Wanchun Shen、Sridhar Venkatesh 和 Anh Duc Vo, *On k-Du Bois and k-rational singularities*, arXiv电子预印本（2023年6月）, arXiv:2306.03977, 可见于2306.03977。即将在《Ann. Inst. Fourier》发表。 ↑1, 3

[Vo] Anh Duc Vo, *Du Bois complexes and singularity theory*, 博士学位论文, 哈佛大学, 马萨诸塞州剑桥, 2025 年。

↑2Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794-3651, USA*Email address*: bradley.dirks@stonybrook.eduDepartment of Mathematics, University of Toronto, 40 St. George St., Toronto, OntarioCanada, M5S 2E4 *Email address*: seolano@math.toronto.eduDepartment of Mathematics, University of Arizona, 617 N. Santa Rita Ave., Tucson, AZ85721, USA*Email address*: draychaudhury@math.arizona.edu