arXiv:2603.06457v1 [math.AG] 6 Mar 2026

皮卡秩 1 的 10 次 $\mathbb{Q}$ K3 曲面

VICTOR DE VRIES

Abstract. 我们给出了几何Picard群秩为 1 的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 10 次 K3 曲面的例子。这些 K3 曲面是 $\mathbb{P}^9$ 中三个超平面、一个二次超曲面与 Grasmannian Gr(2，5) 的 Pl¨ucker 嵌入像的交。我们还给出了一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 6 次 K3 曲面的例子，其皮卡秩为 1。

设 S 是定义在数域 k上的 K3 曲面。准确地说， S 是一个曲面， $S \to \mathrm{Sp}(k)$ 光滑、真且几何连通，其典范层 ω_S 平凡，并且满足 $\mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$。就算术研究而言，它最有用的不变量之一是其几何Picard群的秩 $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(S)$，我们称之为 S的皮卡秩。例如，Bogomolov 和 Tschinkel [2] 证明，当皮卡秩至少为 5 时，K3 曲面上的有理点潜在稠密。皮卡秩 ρ满足$1 \leq \rho \leq h^{1,1}(S_{\mathbb{C}}) = 20$，作为一种启发式说法，可以认为其值越低 ρ，理解 S的算术性质就越困难。尤其是，如果 S 的皮卡秩等于 1，那么它的算术性质应当复杂而有趣。

设 (S, D) 是一对，其中 S 是一个 K3 曲面， D 是 S 上的一个丰富除子，且其在 $\mathrm{Pic}(S)$ 中的类是本原的。若 D 的自交数为 $2d$，则称这对对象的次数为 $2d$。如果 K3 曲面 S 存在如上所述的 D，我们也称其次数为 $2d$。次数为 $2d \leq 8$ 的一般 K3 曲面是 $\mathbb{P}^{d+1}$ 中的完全交，因此 Terasoma [14] 的结果表明，对于 $2d \leq 8$，存在一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上、次数为 $2d$ 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面。此外，这一结果可以推广到包括 $d \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 的情形，因为在这些情形下，一般 K3 曲面是格拉斯曼流形（其取决于 d）中线丛截面的完全交；正如 [8] 中命题 3.14 的证明所示，Terasoma 的论证仍然成立。然而，这些证明都不是构造性的。

van Luijk [9]给出了最早的复数域 $\mathbb{Q}$ 上皮卡秩为 1 的 K3 曲面实例。这些实例是复数域 $\mathbb{P}^3$上的四次曲面，即次数为 4 的 K3 曲面。后来，Elsenhans 和 Jahnel [3] 给出了一个有理数域 $\mathbb{Q}$ 上次数为 2 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面实例。通过与一个次数为 2 的 K3 曲面使用 Fourier-Mukai对偶， [11] 的作者得以展示一个有理数域 $\mathbb{Q}$ 上次数为 8 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面，见 [11, 第 5 节。4]

本文旨在展示有理数域 $\mathbb{Q}$上次数为 10 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面。此外，顺带“填补这一空白”，展示有理数域 $\mathbb{Q}$ 上次数为 6 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面。值得注意的是，最近的一篇出版物 [1] 也给出了有理数域 $\mathbb{Q}$ 上次数为 6 且皮卡秩为 1 的 K3 曲面实例。本文主要关注次数为 10 的情形。

我们考虑格拉斯曼流形 Gr(2,5)，它通过 Pl¨ück 嵌入嵌入到 $\mathbb{P}^9$ 中。 $\mathbb{C}$ 上一个一般的 10 次 K3 曲面是 Gr(2,5)、三个超平面和一个二次超曲面在 $\mathbb{P}^9$ 中的交。因此，它是 $\mathrm{Gr}(2, 5)$ 中类型为 $(1, 1, 1, 2)$ 的完全交，见定义 1.4。我们将给出一个定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的此类型 K3 曲面，以及一个定义在 $\mathbb{F}_3$ 上的此类型 K3 曲面。定义在 $\mathbb{F}_3$ 上的曲面将具有皮卡秩 2，而定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的曲面则选取为满足某个技术条件，见引理 2.2。曲面 S_2 是 Gr(2,5) 中三个线性形式 l_1, l_2, l_3 和一个二次形式 q 的零点集；类似地， S_3 是 Gr(2,5) 中由线性形式 l_1', l_2', l_3' 和一个二次形式 q' 切出的子概形。这些形式见引理 2.1 和 2.3。格拉斯曼流形 Gr(2,5) 在 $\mathbb{Z}$ 上有一个典范模型，它由 $\mathbb{P}^9_{\mathbb{Z}}$ 中的“Pl¨ück 关系”切出。因此，我们可以将 $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ 上的这些形式提升为整数环上的形式，从而得到 $\mathrm{Gr}(2, 5)_{\mathbb{Q}}$ 的一个子概形。我们的主定理如下。

定理 0.1。令 S 为 $\mathrm{Gr}(2, 5)_{\mathbb{Q}}$ 的一个子概形，它是形式 L_1、L_2、L_3、Q 的零点集，其中 L_i 是将 l_i、l_i' 提升为 $\mathbb{Z}$ 上的形式所得的提升，而 Q 是将 q、q' 提升为 $\mathbb{Z}$ 上的形式所得的提升。概形 S 是 $\mathbb{Q}$ 上次数为 10 的 *K3* 曲面，其皮卡秩为 1。

Date：2025年8月。

这一方法受到 van Luijk [9]，所采用方法的启发；他的方法也包括构造模素数曲面，再将其提升。此外，我们利用了 Elsenhans 和 Jahnel [4], 的一个结果，该结果在我们的情形下意味着格 皮卡群(S) 是 皮卡群(S_3) 的本原子格。通过使用 Magma 随机选取 K3 曲面，直至找到两个满足引理 2.2 和 2.7 的曲面，我们得到了 K3 曲面 S_2 和 S_3 。因此我们推测，若 Magma 中的模 p 计算仍然可行，采用类似方法可以找到定义在 $\mathbb{Q}$ 上、皮卡秩为 1 且次数为$2d \in \{12, 14, 16, 18\}$ 的 K3 曲面实例。

当一般的 K3 曲面不是完全交时（这在 $d \gg 0$ 的情形下会发生），如何进行“提升”并不清楚。Shafarevich 的猜想 [12] 预言，对于每个正整数 e，只有有限多个格会作为数域 K 上满足 $[K : \mathbb{Q}] = e$ 的 K3 曲面 X 的皮卡群 Pic(X) 出现。该猜想将意味着，只有有限多个次数 $2d$ 能使得存在一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上、次数为 $2d$ 且满足 $\rho = 1$ 的 K3 曲面。

1. Preliminaries

对于任意曲面 X，都可以考虑其 N´eron-Severi 群 NS(X)。将 NS(X) 的挠元商去后，它在交配对下具有格的结构。对于 K3 曲面 S ，我们有 $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$，这意味着 Pic($S$) = NS($S$)，并且该群是无挠的。下面给出一个引理，它将簇的 N´eron-Severi 群与其约化的 N´eron-Severi 群联系起来。

引理 1.1. 设 R 是一个离散赋值环，且有 $\mathrm{Sp}(R) = \{\eta, x\}$，其中点 x 是闭点。设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Sp}(R)$ 是一个光滑真相对曲面。存在一个特化映射 $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_\eta)/\{\mathit{tors}\} \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_x)/\{\mathit{tors}\}$，它是格的包含。此外，对于 l 中可逆的素数，$\mathrm{Gal}(\eta/\eta)$的惯性子群在 $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_\eta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ 上的作用平凡，且特化映射是 $\mathrm{Gal}(x/x)$-等变的。

证明。 关于格的包含的陈述，参见 [10, 命题 6.2]。Kummer 序列给出一个交换图，其中每一行都相对于相关的伽罗瓦作用保持等变

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(\overline{\mathcal{X}_\eta}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l & \longhookrightarrow & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{\mathcal{X}_\eta}, \mathbb{Z}_l(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathrm{NS}(\overline{\mathcal{X}_x}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l & \longhookrightarrow & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{\mathcal{X}_x}, \mathbb{Z}_l(1)) \end{array} . \tag{1}$$

对于第二个陈述，只需证明对于所有 $n > 0$，Gal(η/η) 的惯性群在 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mu_{l^n})$ 上的作用平凡。由光滑真基变换，层 $R^2\pi_*\mu_{l^n}$ 是局部常值的，因此我们可以选取一个伽罗瓦 ´étale 代数 R'/R，使得 $R^2\pi_*\mu_{l^n}|_{R'}$ 是与常值阿贝尔群 M相关联的层。记 $j'\colon \eta' \to \mathrm{Sp}(R')$ 为一般点的包含，并记 $\pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathrm{Sp}(R')$ 和 $\pi_{\eta'}\colon \mathcal{X}'_{\eta'} \to \{\eta'\}$为 π 的基变换。由光滑基变换，我们得到同一化 $R^2\pi_{\eta',*}\mu_{l_n} = j'^*R^2\pi'_*\mu_{l_n} = j'^*M$，因此 $R^2\pi_{\eta',*}\mu_{l^n}$ 是常值的。

由真基变换可知，层 $R^2\pi_*\mu_{l^n}$ 在 $\overline{\eta}$ 处的茎对应于伽罗瓦模 Gal(η/η)-模 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{X_\eta}, \mu_{l^n})$。根据上一段的最后一句，域扩张 $\kappa(\eta')/\kappa(\eta)$ 平凡化了这个伽罗瓦模；又由于 $\kappa(\eta')/\kappa(\eta)$ 是非分歧的，我们得出 Gal(η/η) 的惯性群在每个 n 上都平凡作用于 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mu_{l^n})$，因此 NS($\mathcal{X}_\eta$) $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$。

特化映射 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}}, \mu_{l^n}) \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{x}}, \mu_{l^n})$ 可作如下理解：在经过有限 ´étale 覆盖 R'/R后，层 $R^2\pi_*\mu_{l^n}|_{R'}$ 是常值层，因此 $R^2\pi_*\mu_{l^n}$ 的茎可以通过一种典范方式加以识别。这个识别与 $\pi_1(\mathrm{Sp}(R), \eta)$ 在 $R^2\pi_*\mu_{l^n}$ 上的作用相容，而 Gal(x/x) 通过 $\pi_1(\mathrm{Sp}(R), \eta)$ 以相同方式作用于这些茎。结合图 (1)，即可推出引理的最后一个结论。□

通常提到 Gr(2，5) 时，默认它是定义在某个域上的簇。Gr(2，5) 在 $\mathbb{Z}$ 上有一个自然模型，其点函子如下。

定义 1.2。 令 $\mathbb{G}$ 为函子

$$(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}\ S \mapsto \{\text{秩 2 的局部自由层, } \mathcal{E} \subset \mathcal{O}_S^{\oplus 5} \mid \mathcal{O}_S^{\oplus 5}/\mathcal{E} \text{ 是局部自由的} \quad \}.$$

注记 1.3. 函子 $\mathbb{G}$ 由一个在 $\mathbb{Z}$ 上光滑且真的概形 Gr(2,5) 表示。为简化记号，我们记 $\mathbb{G} = \mathrm{Gr}(2,5)$。存在一个闭嵌入 Plu: $\mathbb{G} \to \mathbb{P}^9$，它可以描述

关于 L 点，其中 L 是一个域，满足 $[W \subset L^{\oplus 5}] \mapsto [\det(W) \overset{2}{\subset} \bigwedge L^{\oplus 5} \cong L^{\oplus 10}]$。在此嵌入下，$\mathbb{G}$ 的像由 Pl¨ucker 关系 $\{G_i = 0\}_{1 \le i \le 5}$ 切出，它们是

$$
\begin{aligned}
G_1 &:= x_{12}x_{34} + x_{23}x_{14} - x_{13}x_{24} \\
G_2 &:= x_{12}x_{35} + x_{23}x_{15} - x_{13}x_{25} \\
G_3 &:= x_{12}x_{45} + x_{24}x_{15} - x_{14}x_{25} \\
G_4 &:= x_{13}x_{45} + x_{34}x_{15} - x_{14}x_{35} \\
G_5 &:= x_{23}x_{45} + x_{34}x_{25} - x_{24}x_{35}.
\end{aligned}
$$

有时我们也将 $\mathbb{G}$ 的基变换 $\mathbb{G}_k$ 记作 $\mathbb{G}$，其中 k 是一个域。$\mathbb{G}$ 的含义应可根据上下文明确。

定义 1.4。用 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(n)$ 表示 $\mathbb{G}$ 上的可逆层 $\mathrm{Plu}^*\mathcal{O}(n)$。如果一个维数为 $6-t$ 的簇 $X \subset \mathbb{G}_k$ 满足：对于某个 $s_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(n_i)(\mathbb{G})$，有 $X = V_{\mathbb{G}}(s_1, \ldots\ldots, s_t)$，则称它是一个类型为 $(n_1, \ldots\ldots, n_t)$ 的完全交。

我们需要如下 引理，以便能够证明引理 1.10，该引理对我们的构造至关重要 .

引理 1.5. $\mathbb{G}$ 的典范层同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-5)$。

这条引理应当是众所周知的（例如，它可由 [5, 附录 B.5.8]推出），然而我们在文献中未能找到一个适用于正特征的简单证明。

我们对 $\mathbb{G}$上某些泛层的存在性作一注记。

注记 1.6. 恒等映射 $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 对应于一个秩 2 局部自由层 $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5}$。该层在如下意义下是泛的：对任意对应于 $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}_Y^{\oplus 5}$ 的态射 $f\colon\ Y \to \mathbb{G}$，我们有 $\mathcal{E} = f^*\mathcal{R}$。我们用 $\mathcal{Q}$ 表示泛商层 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5}/\mathcal{R}$，它是一个秩为 3 的局部自由层。

我们可以用 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{Q}$ 来描述 $\mathbb{G}$的切层。专家们熟知这个公式（参见 [5,附录 B.5.8]），但为了使论述自成一体，我们仍将其列出。

引理 1.7。的切层 $\mathbb{G}$ 同构于 $\mathscr{H}\mathbf{om}(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$.

证明。设 $\mathbb{T} \to \mathbb{G}$ 为 $\mathbb{G}$的切丛。它具有如下泛性质：对于任意 $\mathbb{G}$-概形$Y \to \mathbb{G}$，有 $\mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(Y,\ \mathbb{T}) = \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(Y[\epsilon],\ \mathbb{G})$。一个态射 $f\colon\ S \to \mathbb{G}$ 对应于一个秩 2 局部自由层 $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}_Y^{\oplus 5}$，其余核为局部自由层，并且有 $\mathcal{E} = f^*\mathcal{R}$和 $\mathcal{O}_Y^{\oplus 5}/\mathcal{E} = f^*\mathcal{Q}$。

设有一个 $\mathcal{O}_Y$-模同态 $\phi\colon\ f^*\mathcal{R} \to f^*\mathcal{Q}$。那么我们可以与之关联局部自由层 $\mathcal{E}_\phi \subset \mathcal{O}_{Y[\epsilon]}^{\oplus 5}$；其在局部截面上的形式为张成空间 $\langle r + \epsilon\tilde{\phi}(r)\ \epsilon r\rangle$，其中波浪号表示提升到 $\mathcal{O}_Y^{\oplus 5}$ 截面的任意提升（该模与这些提升的选取无关）。模 $\mathcal{E}_\phi$对应于 $\mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(Y[\epsilon],\ \mathbb{G})$ 中的一个元素，而赋值 $\phi \mapsto \mathcal{E}_\phi$ 诱导函子间的态射$\Psi\colon\ \mathscr{H}om(\mathcal{R},\ \mathcal{Q}) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}((-)[\epsilon],\ \mathbb{G}) = \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(-,\ \mathbb{T})$。

将函子的定义域从 $(\mathrm{Sch}/\mathbb{G})^{\mathrm{op}}$ 限制到 $(\mathrm{Open}(\mathbb{G}))^{\mathrm{op}}$后，函子态射的定义域和值域都给出 $\mathbb{G}$ 上的局部自由层。为了证明这两个局部自由层之间的映射是同构，只需证明它在 $\mathbb{G}$的每个闭点 x上的纤维上都是同构。设 $[W]\colon \mathrm{Sp}(L) \to \mathbb{G}$是这样一个点。函子在此点 $[W]$ 处取值后得到的态射为：

$$
\Psi_{[W]}\colon \mathrm{Hom}(W, L^5/W) \to \{\text{rank 2 free } M \subset L[\epsilon]^{\oplus 5} \mid \text{cokernel is free and } M[\epsilon] \overset{\epsilon \to 0}{\to} W\} \quad \phi \mapsto W_\phi.
$$

我们首先证明 $\Phi_{[W]}$是单射。设 $\phi_1, \phi_2\colon\ W \to L^5/W$是满足 $\phi_1(w) \neq \phi_2(w)$ 的线性映射，其中某个 $w \in W$。对于 $\phi_1(w)$ 到 L^5 的任意提升 $\tilde{\phi_1}(w)$，都有 $r + \epsilon\tilde{\phi_1}(w)$ 属于 W_{ϕ_1}，但不属于 W_{ϕ_2}。关于满射性，设 M 是 $\Psi_{[W]}$ 的陪域中的一个模，并选取 $m = m_1 + \epsilon m_2$ 和$n = n_1 + \epsilon n_2$，使得 $m_i, n_i \in L^{\oplus 5}$，且 $\{m, n\}$是 M的一个 $L[\epsilon]$基。2×5 矩阵 (m_2, n_2) 定义了一个线性映射 $g\colon\ W \to L^{\oplus 5}$。将 g 与到 $L^{\oplus 5}/W$ 的商映射复合，得到映射 g，使得$M = W_g$ 成立，因此 $\Psi_{[W]}$ 是满射。

我们得出结论：对于 $\mathbb{G}$的任意闭点 $[W]$，映射 $\Psi_{[W]}$是同构，因此 Ψ诱导出局部自由层 $\mathscr{H}om(\mathcal{R},\mathcal{Q}) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(-,\mathbb{T})$ 的同构。□

现在我们给出关于 Pl¨ucker 嵌入的以下引理。

引理 1.8. 可逆层 $\det(\mathcal{Q})$ 与 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ 同构。

证明。 层的正合列 $0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5} \to \mathcal{Q} \to 0$ 诱导出一个满射 $\bigwedge \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5} \xrightarrow{\pi} \det(\mathcal{Q})$，从而得到一个态射 $\iota\colon \mathbb{G} \to \mathbb{P}^9$。我们将证明该态射等于 Pl¨ucker 嵌入。在 ι a3闭点 $[W]$: $\mathrm{Sp}(L) \to \mathbb{G}$ 下，其映射到 $(\bigwedge L^{\oplus 5})^{\vee}$的以下一维子空间:

$$[W] \mapsto \{f \in (\bigwedge^3 L^{\oplus 5})^{\vee} \mid f \text{ vanishes on all } s \in \bigwedge^3 L^{\oplus 5} \text{ for which } \pi(s)_{[W]} = 0 \text{ holds}\} \in \mathbb{P}^9(L) \tag{2}$$

3赋值 $s \mapsto \pi(s)_{[W]}$ 正是由自然映射 $\bigwedge L^{\oplus 5} \to \det(L^{\oplus 5}/W)$ 给出的，这可由3 2层 $\mathcal{Q}$的定义推出。楔积配对 $\bigwedge L^{\oplus 5} \otimes \bigwedge L^{\oplus 5} \to \det(L^{\oplus 5})$将定义域中的两个因子分别与彼此的对偶相识别。因此，我们可以将方程（2）改写为

$$[W] \mapsto \{f \in \bigwedge^2 L^{\oplus 5} \mid f \wedge s = 0 \text{ for all } s \in \bigwedge^3 L^{\oplus 5} \text{ that vanish in } \det(L^{\oplus 5}/W)\}. \tag{3}$$

上述楔积配对诱导出一个完美配对 $\det(W) \otimes \det(L^{\oplus 5}/W) \to \det(L^{\oplus 5})$。因此我们看到$_2\det(W) \subset \bigwedge L^{\oplus 5}$ 包含于方程（3）中 $[W]$所映射到的子空间内。由于该子空间$_3$是一维的，所以它等于 $\det(W)$，从而满射 $\bigwedge \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5} \to \det(\mathcal{Q})$诱导出 Pl¨ucker 嵌入。我们得出可逆层 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ 与 $\det(\mathcal{Q})$ 同构。□

现在我们可以给出 $\mathbb{G}$ 的典范层的表达式。

引理 1.9。 $\mathbb{G}$ 的典范层同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-5)$。

证明。 根据引理 1.7， $\mathbb{G}$的切层同构于 $\mathscr{H}om(\mathcal{R},\mathcal{Q})$，因此微分层 $\Omega^{\mathbb{G}/k}$ 同构于 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{Q}^{\vee}$。所以典范层$\omega_{\mathbb{G}/k}$同构于 $\det(\mathcal{R}\otimes\mathcal{Q}^{\vee})$，而后者同构于 $\det(\mathcal{R})^{\otimes 3} \otimes(\det(\mathcal{Q})^{\vee})^{\otimes 2}$。正合列 $0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{\oplus 5} \to \mathcal{Q} \to 0$ 将 $\det(\mathcal{R})$与 $\det(\mathcal{Q})^{\vee}$对应起来（同样是在楔积配对下），因此 $\omega_{\mathbb{G}/k}$ 同构于 $(\det(\mathcal{Q})^{\vee})^{\otimes 5}$。根据引理 1.8，这同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-5)$。□

我们用这个引理证明以下结论。

引理 1.10. 设 X 是域 k 上的光滑簇，且 X 是 $\mathbb{G}$中类型为$(1、1、1、2)$ 的完全交。那么 X 是一个 *K3* 曲面。

证明。 Enriques-Severi-Zariski 引理 [13, Tag 0FD8] 表明，真概形上的丰富除子若维数为 ≥ 2，则是连通的。将此引理应用四次，可得 S 是几何连通的。为了证明 S 是单连通的，我们应用 Lefschetz 基本群定理 [13, Tag 0ELE]。该定理表明，若 X 是正则、连通且维数为 ≥ 3，则对于 X 上的任意丰富除子 D，都有 $\pi_1(D) \cong \pi_1(X)$。将该定理应用四次，可得 $\pi_1(S)\cong \pi_1(\mathbb{G})$。由于 $\mathbb{G}$ 是有理簇，它是单连通的，因此我们推得 $\pi_1(S)$是平凡的。

尚需证明 S 的典范丛是平凡的。对 ι应用伴随公式： $S \hookrightarrow \mathbb{G}$，可得 $\omega_S = \iota^*\omega_{\mathbb{G}} \otimes\det(\mathcal{N}_{S/\mathbb{G}})$。根据引理 1.9，我们有 $\omega_{\mathbb{G}} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-5)$。对于 S的理想层 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$，我们有 $\mathcal{N}_{S/\mathbb{G}} = (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*$。由于 S 是向量丛 $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ 的一个截面 s 的零点集，且该向量丛的秩为 4（$= \dim(\mathbb{G}) - \dim(S)$），理想 $\mathcal{I}$由其 Koszul 复形给出一个解消:

$$\ldots \to \bigwedge^2 \mathcal{E}^* \xrightarrow{i(s)} \mathcal{E}^* \xrightarrow{s^*} \mathcal{I} \to 0 \tag{4}$$

这里， s^* 是 s的对偶： $\mathcal{O}_S \to \mathcal{E}$，而 $i(s)$ 在截面上的作用定义为 $v_1 \wedge v_2 \mapsto s^*(v_1)\cdot v_2 - s^*(v_2)\cdot v_1$。将 ι^*应用于正合列后， $i(s)$变为零映射，而 $\mathcal{I}$ 变为 $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$。因此，我们得到一个 $\mathcal{O}_S$-模的同构 $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong \iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2))$，从而得到 $\det(\mathcal{N}_{S/\mathbb{G}}) \cong \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(5)$。最后，利用伴随公式可得 $\omega_S \cong \mathcal{O}_S$。 □

2. The surfaces S_2 and S_3

在本小节中，我们给出具有某些性质的 K3 曲面 $S_2/\mathbb{F}_2$ 与 $S_3/\mathbb{F}_3$。这些性质将使我们能够证明，适当选取的到 $\mathbb{Q}$ 的 S_2 与 S_3 的同时提升具有皮卡秩 1。

我们首先给出我们的 S_2。

引理 2.1. 设 S_2 为 $\mathbb{G}_{\mathbb{F}_2}$ 中由 $V(l_1, l_2, l_3, q)$ 定义的概形，其中 l_i 与 q 为：

$$
\begin{aligned}
l_1 &= x_{12} + x_{15} + x_{24} + x_{34}\\
l_2 &= x_{13} + x_{24} + x_{25} + x_{34}\\
l_3 &= x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{35}\\
q &= x_{12}^2 + x_{14}^2 + x_{13}x_{15} + x_{13}x_{23} + x_{15}x_{23} + x_{12}x_{24} + x_{13}x_{24} + x_{15}x_{24} + x_{24}^2 + x_{12}x_{25} + x_{15}x_{25}\\
&\quad + x_{23}x_{25} + x_{24}x_{25} + x_{25}^2 + x_{13}x_{34} + x_{14}x_{34} + x_{15}x_{34} + x_{23}x_{34} + x_{24}x_{34} + x_{25}x_{34} + x_{34}^2 + x_{13}x_{35}\\
&\quad + x_{14}x_{35} + x_{15}x_{35} + x_{23}x_{35} + x_{25}x_{35} + x_{34}x_{35} + x_{35}^2 + x_{12}x_{45} + x_{14}x_{45} + x_{34}x_{45} + x_{45}^2.
\end{aligned}
$$

概形 S_2 是一个 *K3* 曲面。

证明。 我们用 Magma 验证了 S_2 是光滑的，且维数为 2。现在由引理 1.10 可得该引理。□

对于 $X = V(F_1, \ldots\ldots, F_r) \subset \mathbb{P}^m$ 这一射影簇，我们用 X_{sing} 表示 X的奇异子概形，即 X 中由 $(r) \times (m+1)$ 矩阵 $(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j})$ 的所有极大子式的零点轨迹定义的子概形。 S_2 满足以下关键性质。

引理 2.2。 每个超平面截面 H *of* S_2 都是几何约化的。对于每个这样的 H，使得 H_{sing}将 H 基变换到 $\mathbb{F}_4$ 后有一个次数为 ≥ 6的不可约分支。

证明。 用 Magma 直接验证。遍历 H的所有可能选项即可。 □

现在我们给出我们的 S_3。

引理 2.3。 设 S_3 为 $\mathbb{G}_{\mathbb{F}_3}$的子概形 $V_{\mathbb{G}}(l_1'、\ l_2'、\ l_3'、\ q')$，其中 $l_1'、\ l_2'、\ l_3'、\ q'$ 分别为：

$$
\begin{aligned}
l_1' &= x_{12} + 2x_{24} + 2x_{25} + 2x_{35}\\
l_2' &= x_{13} + x_{15} + 2x_{24} + 2x_{25} + x_{34} + 2x_{35}\\
l_3' &= x_{14} + x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 2x_{34}\\
q' &= x_{15}(x_{23} + x_{24} + x_{15} + x_{34} + x_{35} + 2x_{45}) + x_{24}(2x_{25} + 2x_{34} + x_{45}).
\end{aligned}
$$

该概形 S_3 是一个 *K3* 曲面。

证明。我们用 Magma 验证 S_3 是光滑的，且维数为 2。由引理 1.10 即得该引理。□

注记 2.4。 S_3 的方程经过特意选取，使得映射 $\pi\colon S_3 \to \mathbb{P}^1$（其坐标定义为 $[x_{15} : x_{24}]$）是一个椭圆纤维化。

我们利用映射 $\pi\colon S_3 \to \mathbb{P}^1$，高效地统计 $n \leq 10$下 S_3 上的 $\mathbb{F}_{3^n}$ 个点。

引理 2.5. 对于 $n \leq 10$， S_3 上的 $\mathbb{F}_{3^n}$ 点的个数为：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\#S_3(\mathbb{F}_{3^n})$	16	94	730	6850	58591	533332	4777705	43057090	387492661	3486840049

证明。 这可以用 Magma 计算。 □

我们有如下关于向量空间自同态的迹的引理。

引理 2.6. 设 V 是维数为 d 的向量空间，并设 $\varphi\colon V \to V$ 是一个自同态。设 t_n 表示 φ^n 的迹。设 $P(t) = t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_{d-1}t + a_d$ 是 φ 的特征多项式。系数 $P(t)$ 的 $n-1$ 满足递推公式 $a_1 = -t_1$ 和 $-nc_n = \sum_{i=1} a_i t_{k-i}$ （对 $n > 1$）。

证明。 这称为牛顿恒等式，是众所周知的。 □

引理 2.5 的点数可用于计算 S_3 的几何皮卡数。 S_3 的关键性质是其皮卡数为 2。

引理 2.7. *K3* 曲面 S_3 的皮卡秩为 2。

证明. 由勒夫谢茨不动点公式可得等式

$$\#S_3(\mathbb{F}_{3^n}) = 1 + 3^{2n} + \operatorname{tr}((\varphi^*)^n \mid \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{S_3}, \mathbb{Q}_l)), \tag{5}$$

其中 l 是一个不同于 3 的素数，且 $\varphi\colon S_3 \to S_3$ 是相对弗罗贝尼乌斯自同态。因此，由引理 2.5 可计算 $n \leq 10$ 上的 $\operatorname{tr}((\varphi^*)^n \mid \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(S_3, \mathbb{Q}_l))$。令 ψ 为由相对弗罗贝尼乌斯诱导的 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(S_3, \mathbb{Q}_l(1))$ 的自同态。 ψ^n 的特征值恰为 $\frac{\lambda_1}{3^n}$, ..., $\frac{\lambda_{22}}{3^n}$，其中 λ_1, ..., λ_{22} 是 $(\varphi^*)^n$ 的特征值。因此，可计算 $n \leq 10$ 上的 $\operatorname{tr}(\psi^n \mid \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(S_3, \mathbb{Q}_l(1)))$。

令 $P(t)$ 为 ψ 的特征多项式。向量空间 $\mathrm{NS}(S_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l$ 等变地嵌入 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{S_3}, \mathbb{Q}_l(1))$。超平面截面的循环类和 $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ 的一个纤维的循环类在 $\mathrm{NS}(S_3)$ 中线性无关。此外，这些类被 ψ 固定，因此 $P(t)$ 将有一个因子 $(t-1)^2$。于是我们可以写作 $P(t) = (t-1)^2 \cdot Q(t)$，并记 $Q(t) = t^{20} + c_1 t^{19} + \ldots + c_{19}t + c_{20}$ 和 $P(t) = t^{22} + a_1 t^{21} + \ldots + a_{21}t + a_{22}$。已知 $n \leq 10$ 的 $\operatorname{tr}(\psi^n)$ 后，我们可以由引理 2.6 计算 $n \leq 10$ 的 a_n。由此可以计算 $n \leq 10$ 的系数 c_n，它们为：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

根据庞加莱对偶性，多项式 $P(t)$ 要么是对称的，要么是反对称的。若它是反对称的，那么 $Q(t)$ 也会是反对称的，但事实并非如此，因为我们有 $c_{10} \neq 0$。因此， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 都是对称的，这意味着我们有

$$P(t) = (t-1)^2(t^{20} + \tfrac{1}{3}t^{18} + \tfrac{2}{3}t^{17} - \tfrac{1}{3}t^{16} + t^{15} + \tfrac{2}{3}t^{13} + \tfrac{2}{3}t^{12} - \tfrac{1}{3}t^{11} + t^{10} - \tfrac{1}{3}t^9 + \tfrac{2}{3}t^8 + \tfrac{2}{3}t^7 + t^5 - \tfrac{1}{3}t^4 + \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{1}{3}t^2 + 1).$$

Magma 计算表明，第二个因子的根中没有单位根。因此， ψ 只有两个作为单位根的特征值。$\mathrm{NS}(S_3)$ 中任一元素在 ψ 作用下的轨道都是周期性的，所以 $\mathrm{NS}(S_3)$ 的秩不超过 ϕ 的单位根特征值个数，即 2。由于 $\pi\colon S_3 \to \mathbb{P}^1$ 的纤维类与超平面截面类线性无关，因此秩也至少为 2，由此可知 $\mathrm{NS}(S_3)$ 的秩为 2。□

—

由 S_3 的超平面截面类 H 和 π 的纤维类 M 张成的秩 2 格 $\Lambda\colon S_3 \to \mathbb{P}^1$ 嵌入到 $\mathrm{Pic}(S_3)$ 中。相对于基 H, M，该格 Λ 由 Gramm 矩阵 $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ 表示。

—

引理 2.8。 格 Λ 等于 皮卡群(S_3)。

证明。由于 Λ 的判别式为 -25， Λ在 Pic(S_3) 中的指数只能是 1 或 5。若为 5, 则存在一个类 $N \in$ Pic(S_3)，使得 $5N = mH + nM$，其中 $0 \leq m,\ n \leq 4$ 且 $m,\ n$ 均不为零。对等式两边取自交数，得到 $5N^2 = 2m(m+n)$，因此有 $m = 0$ 或 $5|m+n$。

在 $m = 0$ 的情形下，我们得到 $5N = nM$，其中 $1 \leq n \leq 4$，因此 M 可被 5 整除，故不妨设我们有 $5N = M$。由曲面的黎曼-罗赫定理可知， N 或 $-N$ 是有效的；又由于 $N \cdot H = 1$ 成立，我们得出 N 是有效的。但随后 $H \cdot N = 1$ 意味着 N 可由一条直线 L 表示，且该直线满足 $L^2 = 0$，这就产生了矛盾，因为 K3 曲面上的光滑有理曲线的自交数为 -2。在 $5|m+n$ 的情形下，我们得到 $5N = mH + (5-m)M$，其中 $1 \leq m \leq 4$。因此， $H - M$ 可被 5 整除，故不妨设我们有 $5N = H - M$。完全重复前一种情形中的步骤，我们得出 N 可由一条直线 L 表示，且该直线满足 $L^2 = 0$，这再次产生了矛盾。由此我们得出 Λ 等于 Pic(S_3)。□

3. The degree 10 example

在本小节中，我们证明某类将 S_2 和 S_3 同时提升到 $\mathbb{Q}$ 的情形具有皮卡秩 1。

记号 3.1. 回顾引理 2.1 中关于 $1 \leq i \leq 3$ 和 q 的 l_i 记号，以及引理 2.3 中关于 $1 \leq i \leq 3$ 和 q' 的 l_i' 记号。对于 $1 \leq i \leq 3$，令 L_i 为 $\mathbb{Z}[x_{12}, ..., x_{45}]$ 中同时提升 l_i 和 l_i' 的线性形式。令 Q 为 $\mathbb{Z}[x_{12}, ..., x_{45}]$ 中同时提升 q 和 q' 的二次型。我们将 $\mathbb{G}_{\mathbb{Z}}$ 的子概形 $\mathcal{S}(L_1, L_2, L_3, Q)$ 记为 V，并将 $\mathcal{S}$ 在 Sp($\mathbb{Z}$) 上的泛纤维记为 S。

我们首先证明 S 是一个 K3 曲面。

引理 3.2. 概形 S 是一个 *K3* 曲面。

证明. 结构态射 $\pi\colon\ \mathcal{S} \to$ Sp($\mathbb{Z}$) 以 S 为其泛纤维。由于 π 是真的，映射 Sp($\mathbb{Z}$) $\to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $x \mapsto \dim \pi^{-1}(x)$ 是上半连续的。因此， S_2 作为 (2) 上的纤维，具有 $\dim(S_2) = 2$，这意味着 S 的维数至多为 2；又由于 S 在 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ 中由 4 个方程截出，而 $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ 具有 $\dim(\mathbb{G}_{\mathbb{Q}}) = 6$，故我们有 $\dim(S) = 2$。由于光滑性是开性质，又因 S_2 是光滑的，我们得到 S 是光滑的。我们援引引理 1.10 来完成证明。□

现在我们证明主定理。

定理 3.3. *K3* 曲面 S 的皮卡秩为 1。

证明. 概形 $\mathcal{S}$ 是 S 在 Sp($\mathbb{Z}$) 上的一个模型，它在 2,3 处光滑，因为这些点处的纤维是 S_2, S_3。由引理 1.1，我们得到格的包含 皮卡群(S) $\hookrightarrow$ 皮卡群(S_3)。因此 $\rho(S)$ 以 $\rho(S_3)$ 为上界，而由引理 2.7 该上界为 2。假设 $\rho(S)$ 等于 2，以导出矛盾。

根据 Elsenhans 与 Jahnel 的结果 [4, 定理 1.4], 该包含的余核是无挠的， 因此我们作等同皮卡群(S) = 皮卡群(S_3)。由引理 2.8， 皮卡群(S_3) 由 S_3 的一个超平面截面的类 H_3 以及 $\pi : S_3 \to \mathbb{P}^1$ 的一条纤维的类 M_3 张成。这意味着皮卡群(S) 相对于基 H, M 由 Gramm 矩阵 $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ 表示，这些类对应于H_3, M_3。

对任意域 k，记 Γ_k 为其绝对伽罗瓦群。由引理 1.1，包含皮卡群(S) $\hookrightarrow$皮卡群(S_2) 是 $\Gamma_{\mathbb{F}_2}$-等变的。由于只有两个类 $N \in$ 皮卡群(S) 满足 $N^2 = 0$ 与 $N \cdot H = 5$， M 的$\Gamma_{\mathbb{F}_2}$-轨道的大小至多为 2。下文中我们也记 H, M 为 H, M 在皮卡群(S_2) 中的像。

我们首先考察轨道大小为 1 的情形。Hochschild-Serre 谱序列给出一个正合列

$$0 \to \mathrm{Pic}(S_2) \to \mathrm{Pic}(\overline{S_2}) \to \mathrm{Br}(\mathbb{F}_2) \to ....$$

由于有限域的布劳尔群是平凡的，我们有 Pic(S_2)$^{\Gamma_{\mathbb{F}_2}}$ =Pic(S_2)。因此我们可以找到 S_2的一个除子 D，使得 $[D] = M$成立。由于 $M^2 = 0$成立，对 S_2应用黎曼-罗赫定理可知，我们要么有$h^0(M) > 0$，要么有 $h^0(-M) = h^2(M) > 0$。显然 $-M$不是有效的（与 H相交）。因此我们可以在 S_2上选取一个有效除子 D_1，其类为 M。由于$(H-M)^2 = 0$成立，由同样的论证可知$H - M$或 $M - H$ 是有效的，并且与 H 相交意味着 $H - M$ 是有效的。选取一个有效

除子 D_2 于 S_2 上，使得 $[D_2] = H - M$。则 $D_1 + D_2$ 是有效的，且其类为 H，即 $D_1 + D_2$ 是 S_2的一个$\mathbb{F}_2$-超平面截面。

假设 M 的 $\Gamma_{\mathbb{F}_2}$-轨道等于 $\{M, H - M\}$。则 M 被 $\Gamma_{\mathbb{F}_4}$ 固定，因此借助与上一段相同的谱序列论证，我们可以找到 S_4 的一个有效除子 $D := \mathcal{S}_{\mathbb{F}_4}$，使得 $[D] = M$。设 σ 为 $\Gamma_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}$的生成元。有效除子 $\sigma(D)$ 的类为 $H - M$，因此 $D + \sigma(D)$ 是 S_2 的一个超平面截面。于是在两种情形下，我们都看到 M 由 $\mathbb{F}_4$ 上的一个有效 D 表示，且它落在一个定义于 $\mathbb{F}_2$ 上的超平面截面中。

我们将这个超平面截面称为 E，对此我们有 $E_{\mathbb{F}_4} = D + N$。由引理 2.7，超平面截面 E 是几何约化的，因此 D 与 N 没有公共分支。此外，约化性蕴含 E_{sing} 的维数为 0。存在概形论交 $D \cap N$ 到 E_{sing} 的一个闭浸入。概形论交 $D \cap N$ 的次数为 $D \cdot N = M \cdot (H - M) = 5$，因此我们有 $5 \leq \deg(E_{\mathrm{sing}})$。另一方面，等式 $E_{\mathbb{F}_4} = D + M$ 表明 $E_{\mathbb{F}_4}$的不可约分支的次数至多为 $\deg(D) = \deg(N) = 5$。由引理 2.2，最后两句的组合是不可能的。

既然我们得出了矛盾，就可以断定不存在 $\rho(S) = 2$。通过模 3 考察，我们已经知道有 $\rho(S) \leq 2$，由此得出 S 的皮卡秩为 1。□

4. The degree 6 example

如引言中所承诺的，我们还给出一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上、皮卡秩为 1 的 6次 K3 曲面实例。一般的 6次 K3 曲面是 $\mathbb{P}^4$ 中一个二次超曲面与一条三次曲线的完全交，我们在其中取坐标 x，y，z，v，w。我们采用的方法与 10 次情形类似，首先考察模 2 的 K3 曲面。

注4.1。光滑的二次超曲面与三次曲线的完全交是一个 K3 曲面。事实上，引理 1.10 证明的第一段中的论证表明，这样的完全交是单连通的，而伴随公式表明典范丛是平凡的。

引理 4.2。令 X_2 为由方程 $f = vq_1 + wq_2 = 0$ 切出的 $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}_2}$ 的子概形，其中我们有

$$\begin{aligned} f &= x^2 + xz + yz + z^2 + xv + yv + zv + v^2 + yw + zw + w^2 \\ q_1 &= x^2 + y^2 + yz + z^2 + xv \\ q_2 &= y^2 + yz + z^2 + xv + v^2 + xw + zw + vw + w^2. \end{aligned}$$

概形 X_2 是一个 *K3* 曲面，其皮卡格 $\mathrm{Pic}(X_2)$ 同构于 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$。

证明。超平面截面的类 H 和曲线 $C : f = v = q_2 = 0$ 的类 F 生成了 Pic(X_2) 的一个子格 Λ，其交矩阵为 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$。我们使用 Magma 检查得到，$X_2$ 在满足 $i \leq 10$ 的域 $\mathbb{F}_{2^i}$ 上的点数如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\#S_3(\mathbb{F}_{2^n})$	7	29	97	273	1057	3905	16065	64513	264193	1049089

通过与引理 2.7 相同的论证，我们验证了 X_2 的皮卡秩为 2。还需证明 Λ 是 Pic(X_2) 的本原子格。

反设 Λ 不是 Pic(X_2) 的本原子格。那么存在一个类 E 属于 Pic(X_2)，使得 $2E = mH + nF$，其中 m，$n \in \{0, 1\}$ 且二者均非零。对等式两边取自交数，可得 m 能被 2 整除。因此我们得到 F 能被 2 整除，并且可以假设 $F = 2E$。如果 $-E$ 是有效的，那么 $-F$ 也有效，因此 F 是平凡的，但事实并非如此，所以 $-E$ 不可能

是有效的。根据曲面的黎曼-罗赫定理，我们得到 $h^0(E) \geq 2$，因此存在一个有效除子 D，其类为 E。

令 $\mathcal{I}_C$ 为本证明第一行中曲线 C 的理想层。由于 C 是整的，上同调的长正合列

$$0 \to k \to \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{H}^1(\overline{X}_2, \mathcal{I}_C) \to \mathrm{H}^1(\overline{X_2}, \mathcal{O}) = 0$$

表明我们有 $h^1(X_2, \mathcal{I}_C) = \overline{0}$，因此由塞尔对偶可得 $h^1(X_2, F) = 0$。曲面的黎曼-罗赫定理表明我们有 $h^0(X_2, F) = 2$。由于我们有 $2E = F$ 且两个类都有效，便得到$2 = h^0(F) \geq h^0(E) \geq 2$，因此 $h^0(E) = 2$ 成立，故有 $H^0(X_2, \mathcal{O}(D)) = H^0(X_2, \mathcal{O}(2D))$。由于 F的自交数为 0，除子 D 和 $2D$ 无基点，见 [7, 命题 3.3]10。但它们诱导到 $\mathbb{P}^1$ 的映射的 PGL_2类相同，因此可得 D 与 $2D$ 线性等价，从而 E是平凡的。这与 $2E = F$ 非平凡矛盾。

我们得出结论： Λ 是皮卡群(X_2)的一个本原子格，从而完成证明。 □

现在我们给出一个定义在 $\mathbb{F}_3$ 上的6次 K3 曲面，它具有不同的皮卡格，但皮卡秩相同。

引理 4.3. 设 X_3 是 $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}_3}$ 中由 $V(vl_1 + wl_2, g)$给出的概形，其中 l_1、l_2、g 如下：

$$\begin{aligned} l_1 &= x + 2y + z \\ l_2 &= 2y + z \\ g &= x^3 + 2xy^2 + y^3 + 2xyz + 2yz^2 + 2z^3 + 2x^2v + xyv + xzv + 2yzv + z^2v + 2xv^2 + 2yv^2 + v^3 \\ &\quad + 2x^2w + y^2w + xzw + z^2w + 2xvw + 2yvw + 2v^2w + 2vw^2 + vw^2 + 2w^3 \end{aligned}$$

概形 X_3 是一个次数为6的 *K3* 曲面，其皮卡格皮卡群(X_3) 同构于 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$。

证明. 超平面截面的类与曲线 $C : l_1 = l_2 = g = 0$ 的类生成皮卡群(X_3)的一个子格Λ，该子格同构于 $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$。

利用 Magma，我们得到 X_3 在满足 $1 \leq i \leq 10$ 的域 $\mathbb{F}_{3^i}$ 上的点数如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\#S_3(\mathbb{F}_{3^n})$	15	95	765	6767	59190	531911	4799838	43054727	387489285	3486956120

通过与引理 2.7 中相同的论证，我们验证了 X_3 的皮卡秩为 2，因此 Λ 在 Pic(X_3) 中具有有限指数。还需证明 Λ 是 Pic(X_3) 的本原子格。

反设情况并非如此。通过模 3 计算，我们得到 Pic(X_3) 中存在一个类 $E \in$，使得 $3E = H + F$，或者使得 $3E = F$。如果有 $3E = H + F$，那么 Pic(X_3) 同构于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，但根据 [6, (5.4)]，这是不可能的。

由于具有类 F的曲线 C 是不可约的，因此仿照引理 4.2 的证明中最后一段的方式，我们得到 F 和E 定义了同一个态射 $X_3 \to \mathbb{P}^1$。于是有 $E = F$，这意味着 $2F$ 是平凡的，产生矛盾，因为 Pic(X_3) 是无挠的。

我们得出 Λ 是一个本原子格，从而完成证明。 □

有了这些模 p 的例子，我们可以将它们提升，从而得到该定理。

记号 4.4。用 h 表示引理 4.2 中的三次曲线，用 q 表示引理 4.3 中的二次超曲面。

定理 4.5。设 $F, G \in \mathbb{Z}[x, y, z, v, w]$ 为齐次多项式，使得 F 化为 f, q，且 G 化为 h, g。令 X 表示 $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ 中的子概形 $V(F, G)$，它是 X_2 和 X_3 的一个提升。概形X 是一个次数为6 、皮卡秩为1的 *K3* 曲面。

证明。引理 3.2 中的相同论证表明，X 是一个 K3 曲面。由引理 1.1，X 的皮卡秩至多为 rk Pic$(X_2) = 2$。假设 X 的皮卡秩为 2，从而导出矛盾。由引理 1.1 可知，disc(Pic(X_2)) $= -16$ 整除 disc(Pic(X))。另一方面，结合 Elsenhans 和 Jahnel 的结果，引理 1.1 与

定理 1.4] 可推出，$\overline{\mathrm{Pic}}(X_3) \cong \mathrm{Pic}(X)$ 等距，因此有 $\mathrm{disc}(\mathrm{Pic}(X)) = -9$。这与矛盾相悖，故我们得出 $\overline{\mathrm{rk}}\,\mathrm{Pic}(X) = 1$。□

致谢。作者感谢 van Luijk 教授分享有益的想法、进行有趣的讨论并给予鼓励。作者感谢 Wim Nijgh 提供 Magma 编程方面的建议。作者感谢 Shinder 教授和 V´arilly-Alvarado 教授分享有用的意见。

References

[1] Asher Auel 和 Henry Scheible。《有理数域上诺特-莱夫谢茨一般完全交 *K3* 曲面》。2026。arXiv: 2603.03253 [math.AG]。URL: https://arxiv.org/abs/2603.03253.[2] Fedor A. Bogomolov 和 Yuri Tschinkel。“椭圆 K3 曲面上有理点的稠密性”。《亚洲数学杂志》4 (1999)，第 351–368 页。[3] Andreas-Stephan Elsenhans 和 J¨org Jahnel。“皮卡秩为一、次数为二的曲面。”载于：算法数论：第八届国际研讨会 *ANTS-VIII*，班夫（加拿大），*2008*年*5*月*17–22*日，会议论文集。柏林：施普林格，2008，第 212–225 页。[4] Andreas-Stephan Elsenhans 和 J¨org Jahnel。“K3 $K3$ 曲面的皮卡群及其模 p约化。”代数与数论5.8 (2011)，第 1027–1040 页。[5] William Fulton。《相交理论》。第2版。施普林格纽约，2012。[6] Bert van Geemen。“关于 K3 曲面布劳尔群的一些评论”。《数学进展》197.1 (2005)，第 222–247 页。[7] Daniel Huybrechts。《*K3*曲面讲义》。2015。URL: https://www.math.uni-bonn.de/people/ huybrech/K3Global.pdf.[8] Hsueh-Yung Lin 和 Evgeny Shinder。“双有理映射的动机不变量”。《数学年刊》199.1 (2024)，第 445–478 页。[9] Ronald van Luijk。“皮卡数为一且有无穷多个有理点的 K3 曲面”。《代数与数论》1 (2007)，第 1–15 页。[10] Ronald van Luijk。“与海伦三角形相关联的椭圆 K3 曲面”。《数论杂志》123.1 (2007)，第 92–119 页。[11] Kelly McKinnie 等。“K3 曲面上的布劳尔群及其算术应用”。载于：布劳尔群与阻碍问题：模空间与算术。Asher Auel 等编。施普林格国际出版，2017，第 177–218 页。[12] I. R. Shafarevich。“关于奇异 K3 曲面的算术。”载于：*1994*年*6*月*5–11*日在俄罗斯喀山举行的切博塔廖夫国际百年纪念会议论文集。柏林、波士顿：De Gruyter，1996，第 103–108 页。[13] Stacks 项目作者。《*Stacks*项目》。https://stacks.math.columbia.edu。2026。[14] Tomohide Terasoma。“定义在 Q 上、具有中间皮卡数 1 的完全交。”《数学杂志》189 (1985)，第 289–296 页。