arXiv:2603.06458v1 [math.MG] 6 Mar 2026

类时方向空间与曲率界

Joe Barton* Jona Röhrig†

2026年3月9日

摘要

我们研究洛伦兹长度空间中的类时截面曲率界对点处方向空间的存在性与结构所产生的影响。我们证明，在类时截面曲率上界条件下，方向空间存在，且自身是一个曲率上界为 -1的度量空间。此外，我们还证明，方向空间上的度量锥（它以典范方式刻画给定点处的切空间）构成一个类时截面曲率上界为0的洛伦兹长度空间。为此，我们引入 ϵ-μ 类时截面曲率界的概念，该概念与已有的合成曲率条件 [3]相容。这些结果将比较几何框架拓展至洛伦兹情形，并在因果约束下对测地线、切锥和曲率给出合成刻画。

目录

1 引言 2

2 截面曲率界 **3**

2.1 曲率界的既有概念.3 2.2 ϵ–μ 截面曲率界.7

3 方向空间 10

3.1 定义.10 3.2 上曲率界下的方向空间是一个长度空间.13

4 方向空间的曲率上界 14

4.1 切锥的曲率界.14 4.2 方向空间的曲率界.16

*joe.barton@univie.ac.at
†jona.roehrig@univie.ac.at

1 引言

在黎曼几何中，点处的切平面在通过二阶近似定义曲率时起着重要作用。在度量几何中，切平面这一概念并不存在；然而，采用一种经过调整的切平面概念，应当可以得到类似的结构。度量空间中的综合类比是方向空间，它由从某一点出发的测地线的等价类构成；另一个是切锥，即方向空间上的锥，它通过围绕某一点进行放大来刻画局部几何。

2018 年，Kunzinger 和 Sämann [8] 提出了 洛伦兹预长度空间(LpLS)，即度量空间的洛伦兹版本。这种合成洛伦兹几何为研究非光滑洛伦兹空间提供了工具，无需依赖可微结构；在光滑方法可能失效的情形下，它能够基于比较来刻画测地线、切锥和曲率 [8]。近期的合成方法将比较几何从度量背景推广到洛伦兹背景，旨在纯粹的洛伦兹度量框架中获得曲率与奇点方面的结果。 [2] [1]

本文旨在研究洛伦兹预长度空间中切锥的结构及其曲率，并了解曲率界在这一放大过程中的表现。在度量背景下，已有结果将曲率上有界的度量空间与其方向空间和切锥联系起来。例如：若 X 是一个曲率上有界的完备局部紧长度空间，那么在每个点 $p \in X$处，切锥 T_p都是非正曲率长度空间，而 p 处的方向空间是一个曲率为 ≤ 1 [7, 的空间（定理 9.1）44]。我们给出一系列结果，将洛伦兹预长度空间中上类时曲率界的表现与其切锥和方向空间联系起来。

在第 2 节中，我们引入 ϵ–μ 中点，这是一种针对非测地洛伦兹长度空间的曲率界概念。在温和的假设下，当测地线存在时，它与四点条件和基于三角形的曲率界相容。

在第 3 节中，我们引入类时方向空间，并在定理 3.8 中证明：如果 X 是一个类时截面曲率上有界的洛伦兹长度空间，那么方向空间是一个长度空间，且切锥是一个洛伦兹预长度空间。

在第 4 节中，我们证明，在类时截面曲率上界的条件下，未来切锥 T_p^+满足四点曲率界 ≤ 0 （因此，它是一个在比较意义下具有非正类时曲率的洛伦兹长度空间）。通过锥底对应，这意味着在我们的主要结果定理 4.5 中，方向空间 Σ_p^+ 的曲率上有界于 -1 ；事实上，只要洛伦兹预长度空间具有任意的类时截面曲率上界，它就是测地的。

这些结果将关于方向空间和切锥的经典比较定理推广到了洛伦兹情形 [7]。

致谢：我们感谢 Clemens Sämann 和 Tobias Beran 在本项目初期提供的有益讨论。

作者获得奥地利科学基金（FWF）的资助 [资助项目 DOI:

10.55776/EFP6]。

出于开放获取的目的，作者已对本投稿所产生的任何作者接受稿版本适用知识共享署名许可协议公共版权许可。

2 截面曲率界

在本节中，我们回顾洛伦兹预长度空间的若干种类时截面曲率界概念，这些概念将在后续讨论中用到。此外，我们引入一种新的曲率界概念，即 ϵ-μ 曲率界，它不要求测地线的局部存在。关于各种类时截面曲率界概念的良好综述可见于 [3]。

综合类时截面曲率界理论建立在洛伦兹度量空间的概念之上，例如洛伦兹长度空间和洛伦兹预长度空间。我们在此不重复所有必要的定义，而是请读者参阅 [8]，并仅回顾最基本的对象，即洛伦兹预长度空间：

定义 2.1. 一个洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 由集合 X、度量d（正定、对称且满足三角不等式）、两个关系 $\ll$、 $\leq \subset X \times X$ 以及函数 $\tau : X \times X \to [0, \infty]$组成，使得：

- $\leq$ 具有自反性和传递性（即预序）• $\ll$ 具有传递性，且包含于 $\leq$ $\Big\}$ $(X, \ll, \leq)$ 是因果空间
- τ 关于 d 下半连续
- $\tau(x, z) \geq \tau(x, y) + \tau(y, z) \; \forall \; x \leq y \leq z \in X$
- $x \not\leq y \Rightarrow \tau(x, \; y) = 0$和 $\tau(x, \; y) > 0 \Leftrightarrow x \ll y$

2.1 曲率界的前置概念

截面曲率的所有定义都基于一个基本思想：将洛伦兹长度空间中的时间间隔与常截面曲率为 K, $\mathbb{L}^2_K$ 的二维空间中的时间间隔进行比较，这些二维空间称为 K -比较空间。对于 $K < 0$，比较空间是经过缩放的反德西特空间；对于 $K = 0$, 是闵可夫斯基空间；对于 $K > 0$，则是经过缩放的德西特空间。这些空间的直径界分别为 $D_K = \frac{\pi}{\sqrt{-K}}$（对应 $K < 0$）和 $D_K = \infty$（对应 $K \geq 0$）。

定义 2.2。 设$(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 是一个洛伦兹预长度空间，且 $K \in \mathbb{R}$。
对于任意三个因果相关点 $x \leq y \leq z \in X$，使得 $\tau(x, z) < D_K$，我们可以在二维洛伦兹比较三角形 $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z} \subset \mathbb{L}^2_K$ 中构造其常曲率为 K 的空间，使得所有边长均相等：

$$\tau(x, y) = \tau^{\mathbb{L}^2_K}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \tau(x, z) = \tau^{\mathbb{L}^2_K}(\bar{x}, \bar{z}), \quad \tau(y, z) = \tau^{\mathbb{L}^2_K}(\bar{y}, \bar{z}).$$

如果 X 中存在连接 x 和 y 的测地线 γ_{xy}（或点的其他任意组合），则点 $m \in \gamma_{xy}$ 的比较点是 $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}$ 上的一个点 $\bar{m} \in \mathbb{L}^2_K$，使得

$$\tau(x, m) = \tau^{\mathbb{L}^2_K}(\bar{x}, \bar{m}) \quad and \quad \tau(m, y) = \tau^{\mathbb{L}^2_K}(\bar{m}, \bar{y}).$$

单侧三角形比较通过比较类时三角形中的距离来定义曲率界。

定义 2.3。 单侧三角形比较 *[3,定义 3。2]*
若洛伦兹预长度空间 $(X, d, \ll, \lesssim, \tau)$ 可以被满足以下条件的比较邻域 $U \subset X$ 覆盖，则称其具有上（或下）曲率界 $K \in \mathbb{R}$：

1. τ在 $(U \times U) \cap \tau^{-1}\big([0, D_K)\big)$上连续，
2. 任意两点 $x \le y \in U$ 都可以由一条包含在 U中的距离实现曲线连接。
3. 对于任意因果三角形 $\triangle xyz \subset U$、三角形某条距离实现曲线上的任意一点（例如 $m \in \gamma_{yz}$），以及满足 $\bar{m} \in \gamma_{\bar{y}\bar{z}}$的任意比较三角形 $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z} \subset \mathbb{L}^2_K$，都有：

$$\tau(x,m) \ge \tau_{\mathbb{L}^2_K}(\bar{x},\bar{m}) \quad \big(respectively,\ \tau(x,m) \le \tau_{\mathbb{L}^2_K}(\bar{x},\bar{m})\big).$$

在洛伦兹长度空间中，另一种定义曲率界的方法是使用角和比较角。比较角的思路是将三角形的边长转移到比较空间中，并计算该空间内连接各顶点的测地线之间的双曲角：

定义 2.4. ***K*-比较角** *[6,定义 2.1]*
设$(X, d, \ll, \lesssim, \tau)$ 为一个洛伦兹预长度空间，且 $K \in \mathbb{R}$。对于任意三个因果相关点 $x \le y \le z \in X$，满足 $\tau(x,z) < D_K$，其中 $K > 0$，***K*-比较角** 定义为

$$\tilde{\measuredangle}{}^K_x yz \coloneqq \measuredangle{}^{\mathbb{L}^2_K}_{\bar{x}} \bar{y}\bar{z}.$$

这里，$\measuredangle{}^{\mathbb{L}^2_K}_{\bar{x}} \bar{y}\bar{z}$ 表示比较三角形中在 $\bar{x}$ 处，两条连接 $\bar{x}\bar{y}$ 和 $\bar{x}\bar{z}$的测地线之间的角。$\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 处的角类似定义。对于x、y、z的任意因果序，量 $\tilde{\measuredangle}{}^K_x yz$ 均视为有定义。

带符号的 ***K*-比较角**定义为

$$\tilde{\measuredangle}{}^{K,S}_x yz \coloneqq \sigma\, \tilde{\measuredangle}{}^K_x yz,$$

若 x 是最未来或最过去的点，则符号为 $\sigma = -1$；否则为 $\sigma = 1$。

注 1。 比较角是一个仅取决于 K 和三个边长 $a \coloneqq \tau(x,y)$、$b \coloneqq \tau(y,z)$以及 $c \coloneqq \tau(x,z)$的函数。令 $s \coloneqq \frac{1}{\sqrt{|K|}}$，则$K$-比较角为：

$$\tilde{\measuredangle}{}^K_x yz = arccosh\left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2ab}\right) \qquad for\ K = 0,$$

$$\tilde{\measuredangle}{}^K_x yz = arccosh\left(\frac{-\cos(sa)\cos(sb) + \cos(sc)}{\sin(sa)\sin(sb)}\right) \qquad 对于\ K < 0,$$

$$\tilde{\measuredangle}{}^K_x yz = arccosh\left(\frac{\cosh(sa)\cosh(sb) - \cosh(sc)}{\sinh(sa)\sinh(sb)}\right) \qquad 对于\ K > 0.$$

我们可以用三个点的比较角来定义从同一点出发的两条因果曲线（尤其是测地线）之间的夹角：

定义 2.5. 曲线之间的角 *[6,定义 2.9]*

设 $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 是一个洛伦兹预长度空间，且 $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \epsilon) \to X$是两条从 $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ 出发的因果曲线（每条曲线的方向可以是未来或过去）。 γ_1 与 γ_2 之间的角，或有符号角（若两条曲线的时间方向一致，则取负号），定义为

$$\measuredangle_p\big(\gamma_1, \gamma_2\big) \coloneqq \limsup_{(t,s)\in A_K, t,s\to 0} \tilde{\measuredangle}_p^K \gamma_1(t)\gamma_2(s) \qquad for\ K \in \mathbb{R},$$

其中， A_K 是所有满足以下条件的 t 和 s 的集合：$\triangle p\gamma_1(t)\gamma_2(s)$ 是一个满足 $\mathbb{L}_K^2$ 大小界的类时三角形。

注 2. 角的定义中的上极限不一定是极限，即使是同一条曲线与自身之间的角也不一定如此。如果上述定义中的极限存在，则它与 $K \in \mathbb{R}$的选择无关。利用注 *1* 中比较角的显式公式即可验证这一点。

现在我们给出两个相似的截面曲率界定义，即**单调性条件** 和**角比较条件**。这些定义见 [3]中的 3.8、3.10 和 3.11。

定义 2.6. 单调性比较

若洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 被满足下列条件的比较邻域 $U \subset X$ 覆盖，则它具有上（或下）曲率界 $K \in \mathbb{R}$：

1. τ *is continuous on* $(U \times U) \cap \tau^{-1}\big([0, D_K)\big)$.
2. 所有点 $x \leq y \in U$ 都可以由一条包含于 U中的距离实现曲线连接。
3. 对于任意两条从同一点p出发的类时距离实现曲线 γ_1、 $\gamma_2 \in U$，函数 $\theta(s,t) \coloneqq \tilde{\measuredangle}^{K}{}_{,p}{}^{S}\gamma_1(t)\gamma_2(s)$ 对所有 $(t,s) \in A_K$ 均单调递减（分别地，递增）。

注 3. 请注意，该定义针对的是有向角。在我们将要考虑的情形中，两条曲线都指向未来，因此有向角为负。这意味着无向角的变化恰好相反。

注释 4. 这些定义表明，如果空间具有曲率上界或曲率下界，那么测地线之间的角总是存在的。由于两条曲线之间的角是通过 θ 的上极限定义的，曲率上界意味着

$$\measuredangle_p^S\big(\gamma_1, \gamma_2\big) \geq \tilde{\measuredangle}_p^{K,S}\gamma_1(t)\gamma_2(s),$$

而曲率下界意味着

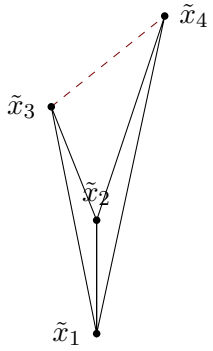
$$\measuredangle_p^S\big(\gamma_1, \gamma_2\big) \leq \tilde{\measuredangle}_p^{K,S}\gamma_1(t)\gamma_2(s).$$

现在我们介绍四点条件，这是一种对空间正则性要求最低的截面曲率界概念，因为它不依赖测地线在局部的存在性，而仅依赖于将四个点之间的距离与比较空间中对应的距离进行比较。

定义 2.7. 四点条件 *[3,*定义 *4.6], [5,* 定义 *4.1]*洛伦兹预长度空间 $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 具有曲率下界为$K \in \mathbb{R}$，如果它能被邻域 $U \subset X$ 覆盖，使得：

1. *τ is continuous on $(U \times U) \cap \tau^{-1}([0, D_K))$ and this set is open.*

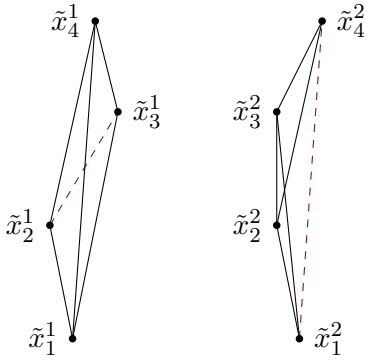
2. 对任意四个点 $x_1 \ll x_2 \ll x_3 \leq x_4 \subset U$，在 $\mathbb{L}_K^2$中构造下方的比较四点图之后，我们发现 $\tau(x_2, x_3) \geq \tau(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$。



洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 具有曲率上有界为 $K \in \mathbb{R}$，如果它能被邻域 $U \subset X$ 覆盖，使得：

1. *τ is continuous on $(U \times U) \cap \tau^{-1}([0, D_K))$ and this set is open.*

2. 对于任意四个点 $x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x_4 \subset U$，在 $\mathbb{L}_K^2$ 中构造出下面的两个比较四点图后，我们发现 $\tau(x_2, x_3) \geq \tau(\tilde{x}_2^1, \tilde{x}_3^1)$ 以及 $\tau(x_1, x_4) \leq \tau(\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_4^2)$。



2.2 ϵ–μ截面曲率界

接下来，我们引入一种介于三角形比较与四点条件之间的新曲率概念。该空间必须是长度空间，但不必是局部测地的。我们不再比较到测地线中点的距离（因为测地线中点不一定存在），而是比较到几乎位于另外两点之间的点的距离。这种曲率概念（针对非测地空间）与（黎曼）长度空间框架的结合更为自然，其灵感来源于 [7, 定义 9.1。2] 和 [4, 定义 2。2]。首先，我们定义 ϵ-μ-中点。

定义 2.8. 设 $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 是一个洛伦兹预长度空间。两点 $a \ll b \in X$ 的**μ-**中点（其中 $\mu \in (0,1)$ ）是满足以下条件的点 $m \in X$

$$\tau(a,m) = \mu\tau(a,b) \qquad and \qquad \tau(m,b) = (1-\mu)\tau(a,b).$$

两点 $a \ll b \in X$ 的 **ϵ-μ-**中点 （其中 $\mu \in (0,1)$ ，且 $\epsilon > 0$ ）是满足以下条件的点 $m \in X$

$$|\tau(a,m) - \mu\tau(a,b)| < \epsilon \qquad and \qquad |\tau(m,b) - (1-\mu)\tau(a,b)| < \epsilon.$$

两点 $a \ll b \in X$ 的 **ϵ-**中点 是满足以下条件的点 $m \in X$

$$|\tau(a,m) - \frac{1}{2}\tau(a,b)| < \epsilon \qquad and \qquad |\tau(m,b) - \frac{1}{2}\tau(a,b)| < \epsilon.$$

注意， ϵ-中点就是 ϵ-1/2-中点；对于度量空间，将 τ 替换为 d，即可类似地定义以上所有概念。

定义 2.9. 单侧 ϵ-μ 三角形曲率条件
洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 的曲率下界（分别地，曲率上界）为 $K \in \mathbb{R}$ ，当且仅当 X 可以被开邻域$U \subset X$ 覆盖，使得：

1. 时间分离函数 τ在$(U \times U) \cap \tau^{-1}([0, D_K))$上连续，且该集合是开集。*2.* 对任意类时三角形（不一定是测地线三角形）$\triangle abc \subset U$ 以及任意$\mu \in (0,1)$，存在一个函数 $f_\mu : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足$\lim_{\epsilon \to 0} f_\mu(\epsilon) = 0$，使得以下条件成立。设 a 和 b 是$\triangle abc$的任意两个顶点；那么对于 ϵ-μ 的所有中点$m_{\epsilon\mu}$ ，若它们位于 a 和 b 之间，且也与剩余顶点 c类时相关，则不等式

$$\begin{aligned} &\tau(c, m_{\epsilon\mu}) \geq \tau(\bar{c}, \bar{m}_\mu) - f_\mu(\epsilon) \quad and \quad \tau(m_{\epsilon\mu}, c) \geq \tau(\bar{m}_\mu, \bar{c}) - f_\mu(\epsilon), \\ &\left(\tau(c, m_{\epsilon\mu}) \leq \tau(\bar{c}, \bar{m}_\mu) + f_\mu(\epsilon) \quad and \quad \tau(m_{\epsilon\mu}, c) \leq \tau(\bar{m}_\mu, \bar{c}) + f_\mu(\epsilon)\right), \end{aligned}$$

成立，其中 $\bar{m}_\mu$ 是相应比较空间中的 μ-中点。

引理 2.10. 对于强因果且正则的洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$，下列条件等价：

1. $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 满足三角形条件意义下的类时上曲率界 K （定义 *2.3*）。

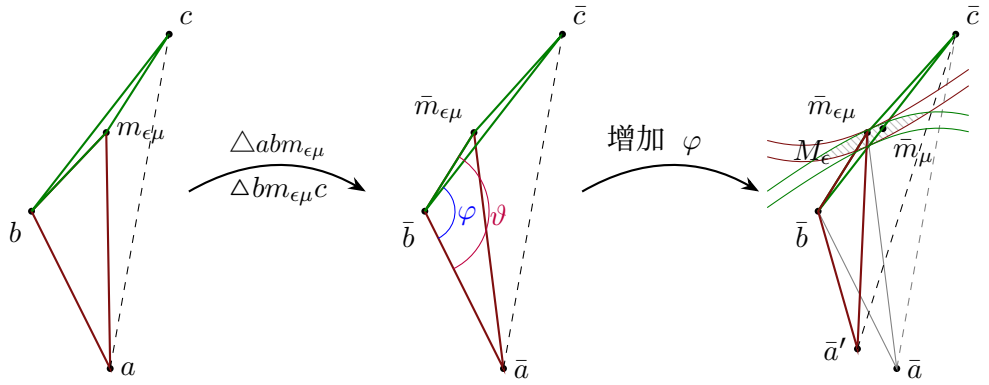
2. $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 满足四点条件意义下的类时上曲率界 K（定义 *2.7*），并且局部而言，任意一对类时相关的点都可以由一条距离实现曲线连接。

3. $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 在单侧 ϵ-μ 三角形条件（定义 *2.9*）的意义下具有类时上曲率界 K，并且在局部，每一对类时相关点都可由一条距离实现曲线连接。

证明。 **1 ⇒ 2：** 这一蕴含关系已在命题 4.4 中得到证明，见 [5]。

2 ⇒ 3： 我们区分两种情形。在第一种情形中，我们假设 ϵ-μ 中点几乎落在两条较短边之一上。然而，通过反转时间定向，这两种情形是等价的，因此不失一般性，我们假设它几乎落在两条最短边中较长的那一条上。

给定某个四点曲率邻域 $U \subset X$ 中的 $a \ll b \ll c \in U$，固定$\mu \in (0, 1)$，并考虑 b 与 c 之间的 ϵ-μ 中点 $m_{\epsilon\mu}$。考虑两个三角形 $\triangle abm_{\epsilon\mu}$ 与 $\triangle bm_{\epsilon\mu}c$，并构造它们的比较三角形 $\triangle \bar{a}b\bar{m}_{\epsilon\mu}$ 与 $\triangle \bar{b}\bar{m}_{\epsilon\mu}\bar{c} \subset \mathbb{L}^2_K$，使得它们沿公共边 $\bar{b}\bar{m}_{\epsilon\mu}$ 以相同方向粘合。



四点条件指出，在这种情况下 $\tau(a, c) \leq \tau(\bar{a}, \bar{c})$。接下来，我们将点 $\bar{a}$ 移动到 $\bar{a}'$ 中的 $\mathbb{L}^2_K$，同时固定其到 $\bar{b}$ 的距离，使得 $\tau(a, c) = \tau(\bar{a}', \bar{c}) \leq \tau(\bar{a}, \bar{c})$。为了证明 $\tau(\bar{a}', \bar{m}_{\epsilon\mu}) \geq \tau(\bar{a}, \bar{m}_{\epsilon\mu})$，我们两次使用铰链单调性：

考虑铰链 $\bar{a}$ 在 $\bar{b}\bar{c}$，其角度 φ 由洛伦兹余弦定律的单调性告诉我们，边长 $\tau(\bar{a}, \bar{c})$ 关于φ单调递减。由于我们希望减小距离 $\tau(\bar{a}, \bar{c})$，因此必须增大 φ 才能得到 $\bar{a}'$

由于 φ 和 ϑ 位于同一平面，且三角形 $\triangle b\bar{m}_{\epsilon\mu}\bar{c}$ 保持不变，因此差值 $\vartheta - \varphi$ 保持恒定。于是，ϑ 减小；根据洛伦兹余弦定律，这表明 $\tau(\bar{a}, \bar{m}_{\epsilon\mu})$ 减小。

总之，我们为 a，b，c，$m_{\epsilon\mu}$ 找到了四个比较点 $\bar{a}'$，b，$\bar{c}$，$\bar{m}_{\epsilon\mu}$，它们的所有边长都相等，但 $\tau(a, m_{\epsilon\mu}) \geq \tau(\bar{a}', \bar{m}_{\epsilon\mu})$ 除外。因此，$\triangle \bar{a}'b\bar{c}$ 是 $\mathbb{L}^2_K$ 中的一个比较三角形，而 $\bar{m}_{\epsilon\mu}$ 是 $\bar{b}\bar{c}$的一个 ϵ-μ 中点。

令 $\bar{m}_\mu$ 为 $\bar{b}\bar{c}$的实际 μ-中点。对于固定的三角形 $\triangle \bar{a}'\bar{b}\bar{c} \in \mathbb{L}^2_K$，给定 $\mu \in (0, 1)$，$b\bar{c}$ 所有可能的 ϵ-μ 中点的位置构成一个依赖于 ϵ的邻域 M_ϵ（由四个双曲面围成），它围绕 $\bar{m}_\mu$ 并收敛

到 $\{\bar{m}_\mu\}$，当 $\epsilon \to 0$时。
因此，每个点 $m_{\epsilon\mu} \in M_\epsilon$ 都满足

$$|\tau(\bar{a}', m_{\epsilon\mu}) - \tau(\bar{a}', \bar{m}_\mu)| \leq f(\epsilon)$$

对于某个 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，有 $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0$。这意味着

$$\tau(a, m_{\epsilon\mu}) \geq \tau(\bar{a}, \bar{m}_\mu) - f(\epsilon).$$

对于第二种情形，考虑同一个类时三角形 $\triangle abc \in U$，以及位于 a 和 c之间的一个ϵ-μ 中点 $m_{\epsilon\mu}$。将这四个点视为两个三角形 $\triangle abm_{\epsilon\mu}$ 和 $\triangle bm_{\epsilon\mu}c$，在 $\mathbb{L}^2_K$中构造两个比较三角形，并沿它们的公共边 $\gamma_{\bar{b}\bar{m}_{\epsilon\mu}}$ 以相反方向粘合。四点条件¯指出，$\tau(b, m_{\epsilon\mu}) \geq \tau(b, \bar{m}_{\epsilon\mu})$。令 $\bar{m}_\mu$为 $\bar{a}\bar{c}$的实际 μ-中点。那么，根据与上文相同的论证，我们可以得出结论：存在 $f(\epsilon)$，满足 $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0$，使得

$$\tau(b, m_{\epsilon\mu}) \geq \tau(\bar{b}, \bar{m}_\mu) - f(\epsilon).$$

3 ⇒ 1： 给定一个类时三角形 $\triangle abc \in U$ 以及位于某条距离实现曲线上的一个 μ-中点 m_μ（在此论证中，假设m_μ 是b 和 c的 μ-中点），我们可以取一列 $\frac{1}{n}$-μ 中点，使其收敛到m_μ（当$n \to \bar{\infty}$ 时）（这样的序列总是存在，例如沿着距离实现曲线 γ_{bc} 本身取点）。不等式

$$\tau(a, m_{\frac{1}{n}\mu}) \geq \tau(\bar{a}, \bar{m}_\mu) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(\bar{a}, \bar{m}_\mu),$$

结合 τ的连续性，可推出

$$\tau(a, m_\mu) \geq \tau(\bar{a}, \bar{m}_\mu).$$

□

注 5. 注意，对于 *2 ⇒ 3*，局部存在测地线并非必要。对于任意洛伦兹预长度空间，这一推论都成立。

在曲率下界的情形下，也可以证明同样的曲率条件等价关系。

引理 2.11. 对于强因果且正则的洛伦兹预长度空间$(X, d, \ll, \leq, \tau)$，以下条件等价：

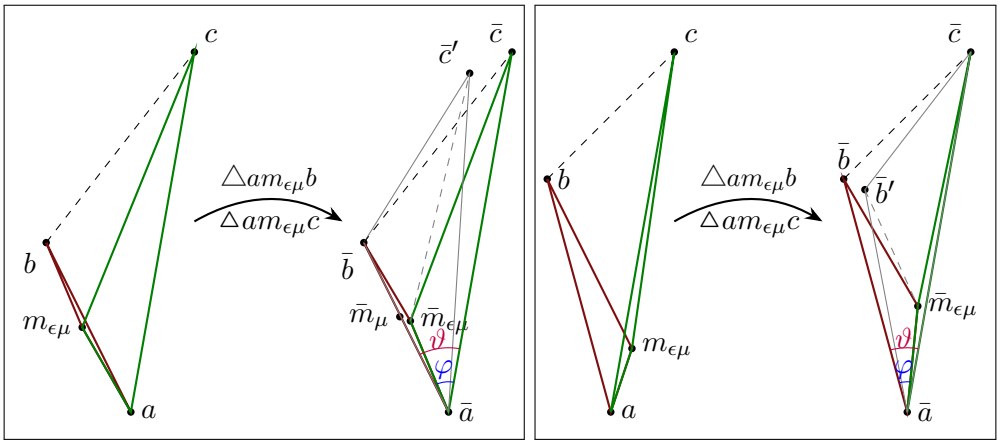
1. $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 满足曲率下界 K，其意义是三角形条件（定义 *2.3*）。*2.* $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 满足曲率下界 K，其意义是四点条件（定义 *2.7*）；并且局部而言，每对类时相关点都可以由距离实现曲线连接。*3.* $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 满足曲率下界 K，其意义是单侧ϵ-μ 三角形条件（定义 *2.9*）；并且局部而言，每对类时相关点都可以由距离实现曲线连接。

证明。 **1 ⇒ 2:** 见 [3]。

2 ⇒ 3: 证明思路与引理 2.10 的 **2 ⇒ 3** 相同。我们区分两种情况。第一种情况下，我们证明较短边之一上的 ϵ-μ 中点满足 ϵ-μ 三角形条件。此外，由于对称性，我们可以将讨论限制在过去边上（见左图）；第二种情况下， ϵ-μ 中点位于最长边上（见右图）。

给定 $a \ll b \ll c \in U$ 位于四点邻域 $U \subset X$ 中，且 $\mu \in$ 属于 $(0, 1)$，并令$m_{\epsilon\mu}$ 为 a 与 b之间的一个 ϵ-μ 中点。现在考虑两个三角形 $\triangle am_{\epsilon\mu}b$和 $\triangle am_{\epsilon\mu}c$ ，并在 $\mathbb{L}^2_K$ 中构造它们的比较三角形，沿边 $\bar{a}\bar{m}_{\epsilon\mu}$ 以相反方向粘合。由于这是一个满足曲率下界的有效四点比较构型，我们知道 $\tau(b,c) \geq \tau(b,\bar{c})$。与引理 2.10 的证明类似，我们也可以将这四个点看作两个铰链，其角分别为 $\varphi = \tilde{\measuredangle}^K_{\bar{a}} \bar{m}_{\epsilon\mu}\bar{c}$ 和 $\vartheta = \tilde{\measuredangle}^K_{\bar{a}} \bar{v}\bar{c}$。闭合这些角，并两次使用余弦定理，可得到一个新点 $\bar{c}'$，使得 $\tau(b,c) = \tau(b,\bar{c}')$ 且$\tau(m_{\epsilon\mu},c) \leq \tau(\bar{m}_{\epsilon\mu},\bar{c}')$。由于 $m_{\epsilon\mu}$是 a与 b之间的一个 ϵ-μ中点， $\bar{m}_{\epsilon\mu}$将处于一个依赖于 ϵ的 $\bar{m}_\mu$ 邻域中；当 $\epsilon \to 0$时，该邻域收敛到一个点。因此， $|\tau(\bar{m}_{\epsilon\mu},\bar{c}') - \tau(\bar{m}_\mu,\bar{c}')| < f(\epsilon)$，且当 $\epsilon\to 0$ f时，$\lim\epsilon(=0)$。综上，我们得到

$$\tau(m_{\epsilon\mu},c) \leq \tau(\bar{m}_\mu,\bar{c}') + f(\epsilon).$$



在第二种情况下，我们假设 ϵ-μ 的中点位于边 ac上，且在 b的过去方向。我们为$\triangle am_{\epsilon\mu}b$ 和$\triangle am_{\epsilon\mu}c$ 构造比较三角形，并沿相反方向将它们拼接起来。四点条件指出，$\tau(b, c) \geq \tau(b, \bar{c})$。保持除 $\tau(\bar{m}_{\epsilon\mu}, b)$和 $\tau(b, \bar{c})$之外的所有边长不变，我们可以将 b移动到 b'，使得

$$\tau(b,c) = \tau(\bar{b}',\bar{c}) \quad \text{and} \quad \tau(m_{\epsilon\mu},b) \leq \tau(\bar{m}_{\epsilon\mu},\bar{b}') \leq \tau(\bar{m}_\mu,\bar{b}') + f(\epsilon).$$

3 ⇒ 1: 与引理 2.10 的 **3 ⇒ 1:** 类似。 □

3 方向空间

3.1 定义

接下来，我们将注意力限定在从同一点 $p \in X$ 出发的未来指向类时曲线上，并使用角的非符号版本（即

所有角都视为非负）。关于以下定义和引理的更详细介绍，可参见第 3.2 节及 [6],后续章节，以及 [1]。

我们首先定义方向空间。

定义 3.1. 设 $(X, d, \ll, \leq, \tau)$ 为一个洛伦兹预长度空间，且 τ局部有限，并设 $p \in X$。我们定义集合

$$D_p^+ := \left\{ \gamma : [0, \epsilon) \to X \,\middle|\, \gamma \textit{ future-directed, timelike, geodesic, and } \gamma(0) = p \right\}$$

为从 p 出发的未来指向类时测地线的方向集合。我们在此集合上赋予等价关系 $\sim$，规定若 $\gamma_1 \sim \gamma_2$，则 $\measuredangle_p(\gamma_1, \gamma_2) = 0$。我们将其商集记为

$$\mathcal{D}_p^+ := D_p^+ / \sim .$$

事实上，该空间是一个度量空间，其度量为 $d_D(\gamma_1, \gamma_2) = \measuredangle_p(\gamma_1, \gamma_2)$。此外，我们将$\left(\mathcal{D}_p^+, \measuredangle_p\right)$的度量完备化称为

$$\left(\Sigma_p^+, d_\Sigma = \measuredangle_p\right),$$

位于 p 的未来方向空间。

例 3.2. 若有一个光滑的 n维黎曼流形，则方向空间与球面 S^{n-1} 等距同构，该球面具有1的常截面曲率。

对于闵可夫斯基空间（或任意光滑的洛伦兹流形），类时且指向未来的方向所构成的空间是双曲空间 $\mathbb{H}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{1,\,n-1}$，其截面曲率为 -1 *[9, Prop. 29]*。因此，我们自然会期待洛伦兹长度空间中的方向空间具有截面曲率界 -1 。

为了考虑测地线的速度，我们在方向空间上构造一个锥，从而得到类似的切空间概念。在洛伦兹情形中，我们需要先定义闵可夫斯基锥：

定义 3.3。 设 (Y, d_Y) 是一个度量空间。我们将其上的闵可夫斯基锥$(X, d_X, \ll, \leq, \tau)$定义为以下集合：

$$X := Con(Y) = ([0, \infty) \times Y)/(\{0\} \times Y) \textit{ with } x_i = (r_i, y_i) \in X \,,$$

赋予标准锥度量，

$$d_X(x_1, x_2) := \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\min\{\pi, d_Y(y_1, y_2)\})} \,.$$

此外，因果关系定义为

$$x_1 \leq x_2 \iff r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cosh(d_Y(y_1, y_2)) \geq 0 \,,$$

其时间分离函数为，

$$\tau(x_1, x_2) := \begin{cases} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cosh(d_Y(y_1, y_2))} & \textit{if} \quad x_1 \leq x_2, \\ 0 & \textit{otherwise,} \end{cases}$$

诱导类时关系

$$x_1 \ll x_2 \iff \tau(x_1, x_2) > 0 \,.$$

引理 3.4。 设(Y, d_Y) 为一个度量空间，并设 $X = \mathrm{Con}(Y)$ 配备锥度量 d_c。那么$(X, d_c, \ll, \leqslant, \tau)$ 是一个洛伦兹预长度空间，其时间分离函数 τ 定义如上。

证明。参见 [1]中的命题 2.2。 □

定义 3.5。设$(X, d, \ll, \leqslant, \tau)$ 是一个洛伦兹预长度空间，其中 τ局部有限，且设 $p \in X$。点 p 处的未来切锥是以 p 处的未来方向空间为底的洛伦兹锥，定义如下：

$$T_p^+ \coloneqq \mathrm{Con}(\Sigma_p^+).$$

类似地，

$$\mathcal{T}_p \coloneqq \mathrm{Con}(\mathcal{D}_p^+)$$

是以完备化前的方向集合为底的锥，并且在 T_p^+ 中稠密。

切锥的定义自然引出了对数映射和指数映射的定义，即将洛伦兹预长度空间中的点与切锥中的点对应起来。

定义 3.6 （对数映射）。设$(X, d, \ll, \leqslant, \tau)$ 是一个在邻域 $U \subset X$ 内局部为唯一类时测地线的洛伦兹长度空间，且设 $p \in U$。对于任意满足 $p \ll x$ 的 $x \in U$ （分别地，满足 $x \ll p$），存在一条从 p 到 x 的唯一未来指向（分别地，过去指向）类时测地线 γ 。未来和过去对数映射定义如下：

$$\log_p^+(x) \coloneqq \big(\tau(p, x), [\gamma]\big) \in T_p^+ .$$

因此，

$$\log_p^+ : U \cap I^+(p) \to T_p^+$$

将点映射到未来或过去切锥中的元素。

定义 3.7 (指数映射**)**。 设 $(X, d, \ll, \leqslant, \tau)$ 是一个局部唯一类时测地线洛伦兹长度空间，设 $p \in X$。未来指数映射

$$\exp_p^+ : \log_p^+\big(U \cap I^+(p)\big) \subset T_p^+ \to U$$

定义为

$$\exp_p^+\big(r, [\gamma]\big) \coloneqq \tilde{\gamma}(r),$$

其中 $\tilde{\gamma} \in [\gamma]$ 表示由 τ-弧长参数化的唯一代表。

备注 6. 只有在测地线不分叉时，指数映射才有良好定义。否则，可能存在多条具有相同初始方向的弧长参数化曲线。因此，我们将指数函数视为集合值映射。

3.2 上界曲率下方向空间是一个长度空间

定理 3.8. 设$(X, d, \ll, \leq, \tau)$是一个类时截面曲率上界为 $K \in \mathbb{R}$ 的洛伦兹长度空间。那么，任意一点 $p \in X$ 处的方向空间 Σ_p^+ 是一个长度空间，且切锥是一个洛伦兹预长度空间。

证明。 根据 [7] （定理 2.4.16），只需证明 Σ_p^+中的任意两点都存在一个 ϵ-中点，对所有 $\epsilon > 0$均成立。
由于 Σ_p^+ 是所有未来指向类时距离实现曲线的空间（按 $\measuredangle_p = 0$取商）的完备化，因此只需对 Σ_p^+中的两个点验证该条件；这两个点的距离由距离实现曲线 α, $\gamma : [0,1] \to M$实现，其中 $\measuredangle_p(\alpha, \gamma) < \infty$。

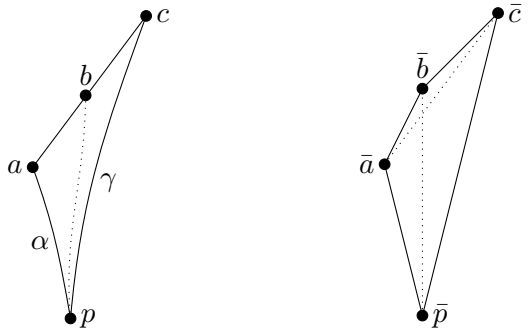
由于 $\lim_{t,\ s\to 0} \tilde{\measuredangle}_p^K \alpha(t)\gamma(s) = \measuredangle_p(\alpha, \gamma)$，我们可以选取 $t, s > 0$ 使得 $p \ll a = \alpha(t) \ll c = \gamma(s)$，并且

$$|\tilde{\measuredangle}_p^K \alpha(t)\gamma(s) - \measuredangle_p(\alpha, \gamma)| < \epsilon \tag{1}$$

对于任意给定的 $\epsilon > 0$。不失一般性，我们还可以假设 a 和 c位于 p的曲率比较邻域中。
比较角 $\tilde{\measuredangle}_p^K$ 是一个连续函数，依赖于给定三角形的三个时间间隔。由于我们处于曲率比较邻域中， τ 是连续的。根据介值定理，我们可以在 a 与 c之间的距离实现曲线上找到一点 $b \in \gamma_{ac}$，使得

$$\tilde{\measuredangle}_p^K ab = \tilde{\measuredangle}_p^K bc. \tag{2}$$

现在我们在 $\mathbb{L}^2(K)$中构造两个比较三角形$\triangle \bar{p}\bar{a}\bar{b}$ 和$\triangle \bar{p}\bar{b}\bar{c}$ ，它们以 $\bar{}$公共边 $\bar{p}b$（这两个三角形位于该边的两侧）。



根据反三角不等式，我们有

$$\tau(a,c) = \tau(a,b) + \tau(b,c) = \bar{\tau}(\bar{a},\bar{b}) + \bar{\tau}(\bar{b},\bar{c}) \leq \bar{\tau}(\bar{a},\bar{c}).$$

利用比较角（无符号版本）随其对边边长的时间间隔单调递减这一事实，可得

$$\tilde{\measuredangle}^K_{\bar{p}}\,\bar{a}\bar{c} \le \tilde{\measuredangle}^K_p\, ac. \tag{3}$$

由这一构造，我们得到如下不等式：

$$2\measuredangle_p(\alpha,\beta) \le 2\tilde{\measuredangle}^K_{\bar{p}}\,\bar{a}\bar{b} = \tilde{\measuredangle}^K_{\bar{p}}\,\bar{a}\bar{b} + \tilde{\measuredangle}^K_{\bar{p}}\,\bar{b}\bar{c} = \tilde{\measuredangle}^K_{\bar{p}}\,\bar{a}\bar{c} \le \tilde{\measuredangle}^K_p\, ac \le \measuredangle_p(\alpha,\gamma) + \epsilon.$$

这里，我们首先应用注释 4，然后应用公式 (2)，接着利用比较邻域中的角之和，再应用公式 (3)，最后应用公式 (1)。类似地，对于 $\measuredangle_p(\beta,\gamma)$，

$$\measuredangle_p(\alpha,\beta) \le \frac{1}{2}\measuredangle_p(\alpha,\gamma) + \frac{1}{2}\epsilon, \qquad \measuredangle_p(\beta,\gamma) \le \frac{1}{2}\measuredangle_p(\alpha,\gamma) + \frac{1}{2}\epsilon. \tag{4}$$

将此与 $\measuredangle_p(\alpha,\gamma) \le \measuredangle(\alpha,\beta) + \measuredangle_p(\beta,\gamma)$ 结合可得到 $\varepsilon-$ 个中点，

$$|\measuredangle_p(\alpha,\beta) - \frac{\measuredangle_p(\alpha,\gamma)}{2}| \le \epsilon, \qquad |\measuredangle_p(\beta,\gamma) - \frac{\measuredangle_p(\alpha,\gamma)}{2}| \le \epsilon.$$

为了说明切锥是一个洛伦兹预长度空间，我们应用了 [1] 的命题 2.2。

□

4 方向空间的曲率上界

4.1 切锥的曲率界

引理 4.1。 设 $(X,d,\ll,\leqslant,\tau)$ 是一个满足定义 *3.6* 条件且类时截面曲率下界为 $K \in \mathbb{R}$ 的洛伦兹预长度空间。设 T_p^+ 是点 $p \in X$ 处的切锥。对于充分接近 T_p^+ 的原点 O 且满足 $\bar{a}_0 \ll \bar{a}_1$ 的点 $\bar{a}_0, \bar{a}_1 \in \log_p^+(U \cap I^+(p)) \subset T_p^+$，有 $\exp_p(\bar{a}_0) \ll \exp_p(\bar{a}_1)$。

证明。我们将证明，对于 T_p^+ 中所有足够接近原点的类时相关点，它们在指数映射下的像也彼此类时相关。设 $T > 0$ and $\alpha,\beta : [0,T] \to X$ be 是两条以 τ-弧长参数化的类时测地线，满足 $\alpha(0) = \beta(0) = x$。令 $\omega = \measuredangle_p(\alpha,\beta)$。对于所有 $0 < t < T$，定义 $\alpha_t : [0,t] \to X$ 为将曲线 α 限制在较小的定义域上所得的曲线，并类似地定义 β_t 。将这些测地线映射到对数映射下，得到点 $\log_p(\alpha_t) = (t,[\alpha])$，$\log_p(\beta_t) = (t,[\beta]) \in T_p^+$。令 $0 < \mu < 1$，并假设 $(\mu t,[\alpha]) \ll (t,[\beta])$。根据 T_p^+ 上 $\ll$ 的定义，这等价于要求：

$$\bar{\tau}\big((\mu t,[\alpha]),(t,[\beta])\big) = \sqrt{\mu t^2 + t^2 - 2\mu t^2\cosh(\omega)} > 0,$$

且 $0 < \mu < 1$。因此，对于任意正的 t, $\alpha_{\mu t} \ll \beta_t$ 当且仅当 $\mu < e^{-\omega}$。由于 $\exp_p((\mu t,[\alpha])) = \alpha(\mu t)$ 且 $\exp_p((t,[\beta])) = \beta(t)$，我们可以应用 [6] 中的命题 3.2，并得出对于所有 $0 < \mu < e^{-\omega}$ 以及充分小的 t，$\alpha(\mu t) \ll \beta(t)$。

□

引理 4.2。 对于原点附近的点，指数映射是一个近似等距映射。

更精确地说，在定义 *3.6* 的条件下，对于任意两个类时相关点 $\bar{a}_i = (r_i, [\gamma_i]) \ll \bar{a}_j = (r_j, [\gamma_j]) \in T_p^+$，点 $a_i^\lambda := \exp_p(\lambda r_i, [\gamma_i]) \in U \subset X$ 满足

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda) = \bar{\tau}(\bar{a}_i, \bar{a}_j).$$

证明。 我们首先验证极限存在。对于点 $\bar{a}_i \ll \bar{a}_j$，缩小后的点同样是类时相关的 $\bar{a}_i^\lambda = (\lambda r_i, [\gamma_i]) \ll \bar{a}_j^\lambda = (\lambda r_j, [\gamma_j])$，因此由引理 **4.1**，对所有充分小的 λ、$a_i^\lambda \ll a_j^\lambda$ 成立。于是，$\tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda) > 0$ 对充分小的 λ 成立。此外，由注 **1**，我们有

$$\lim_{\lambda \to 0} \tilde{\measuredangle}_p^0(\gamma_i(\lambda r_i), \gamma_j(\lambda r_j)) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\tau(p, a_i^\lambda)^2 + \tau(p, a_j^\lambda)^2 - \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda)^2}{2\tau(p, a_i^\lambda)\tau(p, a_j^\lambda)} \right).$$

证明只需简单应用定义 3.3、前一个等式以及 $K = 0$ 比较角公式（由于角存在，我们可以使用任意K，因为它们都相等。因此，为了便于计算，我们将使用 $K = 0$）。

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}(\bar{a}_i, \bar{a}_j) &= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cosh\left(\measuredangle_p(\gamma_i, \gamma_j)\right)} \\
&= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cosh\left(\lim_{t,s \to 0} \tilde{\measuredangle}_p(\gamma_i(t), \gamma_j(s))\right)} \\
&= \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cosh\left(\lim_{\lambda \to 0} \tilde{\measuredangle}_p^0(\gamma_i(\lambda r_i), \gamma_j(\lambda r_j))\right)} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cosh\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{\tau(p, a_i^\lambda)^2 + \tau(p, a_j^\lambda)^2 - \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda)^2}{2\tau(p, a_i^\lambda)\tau(p, a_j^\lambda)} \right)\right)} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \frac{\lambda^2 r_i^2 + \lambda^2 r_j^2 - \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda)^2}{2\lambda^2 r_i r_j}} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda)^2} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} \tau(a_i^\lambda, a_j^\lambda).
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

引理 4.3。 在定义 *3.6* 的条件下，若类时截面曲率上界为 $K \in \mathbb{R}$，则对于任意 $p \in X$，切锥 T_p^+ 的曲率在定义 *2.7* 的意义下以零为上界。

证明。 由于 $\mathbf{T}_p$ 在 T_p^+ 中稠密，只需在 $\mathbf{T}_p$ 上验证四点条件。设 $\bar{a}_1 \ll \bar{a}_2 \ll \bar{a}_3 \ll \bar{a}_4$ 是 T_p^+ 中的一个类时四点构形，其中 $\bar{a}_i = (r_i, [\gamma_i])$。设 $U \subset X$ 为一个曲率比较邻域，并假设 $\exp_p(\bar{a}_i) = \gamma_i(r_i) = a_i \in U$。我们将 $a_i^\lambda = \exp_p(\lambda r_i, [\gamma_i])$ 定义为 X 中经过缩放的点。由于 X 根据 K具有曲率上界，对每个 λ，我们都可以

构造两个必要比较构型中的第一个 $\tilde{a}^{\lambda}_{\cdot,\ i}{}^{1} \in \mathbb{L}^2(K)$，使得除 $\tau(a_2^\lambda,\ a_3^\lambda)$ 之外的所有距离都保持不变。事实上，根据定义 2.7，我们有 $\tau_X(a_2^\lambda,\ a_3^\lambda) \geq \tilde{\tau}_K(\tilde{a}^{\lambda}_{\cdot,\ 12},\ \tilde{a}^{\lambda}_{\cdot,\ 13})$。

现在可以将比较空间（以及比较构造 $\tilde{a}^{\lambda}_{\cdot,i}{}^{1}$）按 $\frac{1}{\lambda}$ 的倍数放大，这会依据 $\frac{1}{\lambda}\mathbb{L}^2(K) = \mathbb{L}^2(\lambda^2 K)$ 降低曲率。

对于所有满足 $(i,j) \neq (2,3)$ 的配对，由引理 4.2 可得

$$\tilde{\tau}_0(\tilde{a}_i^1,\tilde{a}_j^1) \xleftarrow{\lambda\to 0} \tilde{\tau}_{\lambda^2 K}(\frac{1}{\lambda}\tilde{a}_i^{\lambda,1},\frac{1}{\lambda}\tilde{a}_j^{\lambda,1}) = \frac{1}{\lambda}\tilde{\tau}_K(\tilde{a}_i^{\lambda,1},\tilde{a}_j^{\lambda,1}) = \frac{1}{\lambda}\tau_X(a_i^\lambda,a_j^\lambda) \xrightarrow{\lambda\to 0} \bar{\tau}(\bar{a}_i,\bar{a}_j).$$

这意味着，对于原四点构造 $\bar{a}_i$，我们得到了一个平坦比较邻域（在 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中）。对于满足 $(i,j) = (2,3)$ 的配对，根据四点不等式可得：

$$\tilde{\tau}_0(\tilde{a}_2^1,\tilde{a}_3^1) \xleftarrow{\lambda\to 0} \tilde{\tau}_{\lambda^2 K}(\frac{1}{\lambda}\tilde{a}_2^{\lambda,1},\frac{1}{\lambda}\tilde{a}_3^{\lambda,1}) = \frac{1}{\lambda}\tilde{\tau}_K(\tilde{a}_2^{\lambda,1},\tilde{a}_3^{\lambda,1}) \leq \frac{1}{\lambda}\tau_X(a_2^\lambda,a_3^\lambda) \xrightarrow{\lambda\to 0} \bar{\tau}(\bar{a}_2,\bar{a}_3).$$

因此，我们可以得出结论：该不等式在极限下成立，并且得到 $\tilde{\tau}_0(\tilde{a}_2^1,\tilde{a}_3^1) \leq \bar{\tau}(\bar{a}_2,\bar{a}_3)$，这使得 T_p^+ 成为一个曲率上界为 0 的空间。对于其他比较 $\tilde{\tau}_K(\tilde{a}^{\lambda}_{,21},\tilde{a}^{\lambda}_{,24})$ 的四点比较构型，证明过程类似。

□

4.2 方向空间的曲率界

引理 4.4. 设 (Y, d_Y) 是一个长度空间，配备完备度量，且 $X = Con(Y)$ 是 Y 上的闵可夫斯基锥。若 X 的 μ-ϵ 曲率上有界，且上界为 0，则 Y 是一个曲率上界为 -1 的测地空间。

证明。我们先证明 Y 的曲率上界为 -1。为此，取三个点 $y_1,\ y_2,\ y_3 \in Y$，以及 y_2 和 y_3 之间的某个 ϵ 中点 $y_{m\epsilon}$。

设 $\bar{y}_i$ 是 $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{1,\ 2}$ 中的一个比较三角形，$\bar{y}_m$ 是 $\bar{y}_2$ 和 $\bar{y}_3$ 的（实数）中点。

现在我们选取三个半径 $r_i > 0$，使得 $\bar{x}_i := r_i \cdot \bar{y}_i$ 满足 $\bar{x}_1 \ll \bar{x}_2 \ll \bar{x}_3$，并令

$$r_m := \frac{2r_2 r_3 \cosh\frac{\mathrm{d}(y_2,y_3)}{2}}{r_2+r_3}.$$

在此设定下，$\bar{x}_m = r_m \cdot \bar{y}_m$ 成为 $\bar{x}_2$ 与 $\bar{x}_3$ 的 $\mu = \frac{r_2}{r_2+r_3}$-中点。

同样的半径也可用来定义点 $x_i := (r_i, y_i) \in X$。由于距离 $\mathrm{d}(y_i,y_j)$ 与 $\mathrm{d}(\bar{y}_i,\bar{y}_j)$ 以及这些半径相一致，我们得到 $\tau(x_i,x_j) = \tau(\bar{x}_i,\bar{x}_j)$，这意味着 $\triangle\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \in \mathbb{R}^{1,1} \subset \mathbb{R}^{1,2}$ 是 $\triangle x_1x_2x_3 \in X$ 的比较三角形。

经过计算可得，$x_{m\epsilon}$ 是 x_2 和 x_3 的 μ-ϵ' 中点，使用以下记号：

$$\epsilon' := \epsilon \cdot \frac{r_2 r_3 \sinh(\mathrm{d}_{23})}{\sqrt{r_2^2+r_3^2-2r_2r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}} + O\left(\epsilon^2\right),$$

$$\mu := \frac{r_2}{r_2+r_3} \quad , \quad \mathrm{d}_{ij} = \mathrm{d}(y_i,y_j) \quad , \quad \mathrm{d}_{im} = \mathrm{d}(y_i,y_{m\epsilon}).$$

于是,

$$
\begin{aligned}
&\tau(x_2, x_{m\epsilon}) - \mu\tau(x_2, x_3) \\
&= \sqrt{r_2^2 + 4\frac{r_2^2 r_3^2 \cosh^2(\frac{\mathrm{d}_{23}}{2})}{(r_2^2 + r_3^2)^2} - 4\frac{r_2^2 r_3 \cosh(\frac{\mathrm{d}_{23}}{2})}{r_2 + r_3}\cosh(\mathrm{d}_{2m}) -} \\
&\qquad \mu\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cosh(\mathrm{d}_{23})} \\
&\geq \mu\Big(\sqrt{(r_2 + r_3)^2 + 4r_3^2\cosh^2(\frac{\mathrm{d}_{23}}{2}) - 4(r_2 + r_3)r_3\cosh(\frac{\mathrm{d}_{23}}{2})\cosh(\frac{1}{2}\mathrm{d}_{23} + \epsilon)} \\
&\qquad - \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}\Big) \\
&\geq \mu\Bigg(\Big(r_2^2 + 3r_3^2 + 2r_3^2\cosh(\mathrm{d}_{23}) - 4(r_2 + r_3)r_3\big(\frac{\cosh(\mathrm{d}_{23}) + 1}{2}\cosh(\epsilon) \\
&\qquad + \frac{\sinh(\mathrm{d}_{23})}{2}\sinh(\epsilon)\big)\Big)^{1/2} - \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}\Bigg) \\
&\geq \mu\Big(\sqrt{r_2^2 + 3r_3^2 + 2r_3^2\cosh(\mathrm{d}_{23}) - 2(r_2 + r_3)r_3\big(\cosh(\mathrm{d}_{23} + \epsilon) + \cosh(\epsilon)\big)} \\
&\qquad - \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}\Big)
\end{aligned}
\Bigg\} = (*)
$$

对于 $\epsilon = 0$，我们注意到:

$$
\begin{aligned}
(*)|_{\epsilon=0} &= \mu\Big(\sqrt{r_2^2 + 3r_3^2 + 2r_3^2\cosh(\mathrm{d}_{23}) - 2(r_2 + r_3)r_3\big(\cosh(\mathrm{d}_{23}) + 1\big)} \\
&\qquad - \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}\Big) \\
&= \mu\Big(\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})} - \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}\Big) \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

在 $\epsilon = 0$ 处，关于 ϵ 的一阶导数为:

$$
\partial\epsilon(*)|_{\epsilon=0} = \mu\frac{-r_3(r_2 + r_3)\,\sinh(\mathrm{d}_{23})}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}}\,.
$$

因此，将 $(*)$ 在 $\epsilon = 0$ 处关于 ϵ 展开至一阶，可得

$$
\tau(x_2, x_{m\epsilon}) - \mu\tau(x_2, x_3) \geq -\epsilon\cdot\frac{r_2 r_3\sinh(\mathrm{d}_{23})}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}} + O\left(\epsilon^2\right)\,.
$$

如果我们在第一步中用 $\mathrm{d}_{2m} \geq \frac{1}{2}\mathrm{d}_{23} - \epsilon$ 近似 $\mathrm{d}_{2m} \leq \frac{1}{2}\mathrm{d}_{23} + \epsilon$，则得到:

$$
|\tau(x_2, x_{m\epsilon}) - \mu\tau(x_2, x_3)| \leq \epsilon\cdot\frac{r_2 r_3\sinh(\mathrm{d}_{23})}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3\cosh(\mathrm{d}_{23})}} + O\left(\epsilon^2\right)\,.
$$

通过几乎完全相同的计算，我们还得到

$$|\tau(x_{m\epsilon}, x_3) - (1-\mu)\tau(x_2, x_3)| \le \epsilon \cdot \frac{r_2 r_3 \sinh(\mathrm{d}_{23})}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cosh(\mathrm{d}_{23})}} + O\left(\epsilon^2\right).$$

这表明 $x_{m\epsilon}$ 是 x_2 与 x_3的一个 $\mu - \epsilon'$ 中点。
利用 X上的 ϵ'-μ 曲率上界，我们可以得出：对某个满足$\lim_{\epsilon'\to 0} f(\epsilon') = 0$的 $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，我们有

$$\sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_1 r_m \cosh(\mathrm{d}(y_1, y_{m\epsilon}))} \ge \sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_1 r_m \cosh(\mathrm{d}(\bar{y}_1, \bar{y}_m))} - f(\epsilon'). \tag{5}$$

因此，

$$\mathrm{d}(y_1, y_{m\epsilon}) \le \mathrm{d}(\bar{y}_1, \bar{y}_m) + \tilde{f}(\epsilon)$$

˜ ˜对某个满足$\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0$的 f成立。

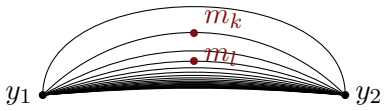
在证明的第二部分，我们将证明 Y是一个测地空间。这一论证并不新颖，例如可在9.13中找到，见 [7]。

由于 Y是长度空间，对任意两点 y_1， $y_2 \in Y$存在一个由 $\frac{1}{k}$-中点构成的序列 (m_k)。对¯$k < l \in \mathbb{N}$，考虑三角形$\triangle y_1 y_2 m_k$，并将¯三角形比较应用于三角形$\triangle y_1 y_2 m_l$。设 d_k 为比较三角形$\triangle \bar{y}_1 \bar{m}_k \bar{y}_2$中的中点。于是我们有

$$\mathrm{d}(m_k, m_l) \le \mathrm{d}(m_k, \bar{d}_k) + f\left(\tfrac{1}{l}\right),$$

其中 $f(\frac{1}{l}) \to 0$如 $l \to \infty$。接下来需要估计 $\mathrm{d}(m_k, \bar{d}_k)$。注意到 m_k位于以 y_1 和 y_2为中心、半径为 $\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\mathrm{d}(y_1, y_2)$ 的两个球的交集中。由于 $\mathrm{d}(y_1, y_2)$ 固定且 $\frac{1}{k} \to 0$，该交集的直径趋于¯零，因此 $\mathrm{d}(m_k, d_k) \to 0$ 如 $k \to \infty$。

因此，序列 (m_k) 是柯西序列。由于 Y完备，存在一个极限点 $\lim_{k\to\infty} m_k = m \in Y$；根据构造，该点到 y_1和 y_2的距离相等，因此它是真正的中点。这证明 Y是一个测地空间。



□

定理 4.5。 设 $(X, d, \ll, \le, \tau)$ 是一个满足定义 *3.6* 条件且类时截面曲率下界为 $K \in \mathbb{R}$ 的洛伦兹预长度空间，则每个点 $p \in X$, Σ_p^+ 处的方向空间的截面曲率上界为 -1。

证明。 该证明是对本文主要结果的简单应用。根据定理 3.8，未来方向空间 Σ_p^+ 是一个长度空间，而未来切锥 T_p^+是一个洛伦兹预长度空间。现在，由引理 4.3， T_p^+在洛伦兹四点条件（定义 2.7）的意义下曲率上有界，且上界为 0。这等价于 T_p^+ 的曲率上界为

0，满足单侧 $\epsilon - \mu$ 三角形条件，这是引理 2.10 的结论。最后，将引理 4.4 应用于 $T_p^+ = Con(\Sigma_p^+)$，可知 Σ_p^+是曲率上界为 -1的测地空间。

□

参考文献

[1] Stephanie B. Alexander 等. “广义锥作为洛伦兹长度空间：因果性、曲率与奇异性定理”. 载于：Commun. Anal. Geom. 31.6 (2023), pp. 1469–1528. doi: 10.4310/CAG.2023.v31.n6.a5.[2] Joe Barton 等. 非正曲率洛伦兹空间的分裂定理. 2026. url: https://arxiv.org/abs/2601.14058.[3] Tobias Beran、Michael Kunzinger 与 Felix Rott. “论洛伦兹长度空间中的曲率界”. 载于：伦敦数学会杂志 110.2 (2024), e12971. doi: https://doi.org/10.1112/jlms.12971.[4] Tobias Beran 与 Felix Rott. 通过 τ-中点刻画内禀洛伦兹长度空间. 2023. url: https://arxiv.org/abs/2309.12962.[5] Tobias Beran 与 Felix Rott. 洛伦兹长度空间的 Reshetnyak 主化与离散上曲率界. 2025. url: https://arxiv.org/abs/2509.05224.[6] Tobias Beran 与 Clemens Sämann. “洛伦兹长度空间中的双曲角与类时曲率界”. 载于：伦敦数学会杂志 107.5 (2023年2月), pp. 1823–1880. issn: 1469-7750. url:http://dx.doi.org/10.1112/jlms.12726.[7] Dmitri Burago、Yuri Burago 与 Sergei Ivanov. 度量几何教程. 第33卷. 数学研究生教程. 普罗维登斯 (R.I.): 美国数学会, 2001, pp. xiv+415. isbn: 978-0821821299.[8] M. Kunzinger 与 C. Sämann. “洛伦兹长度空间”. 载于：Ann. Glob. Anal. Geom. 54.3 (2018), pp. 399–447.[9] Barrett O’Neill. 半黎曼几何及其在相对论中的应用. 第103卷. 纯粹与应用数学. 纽约: 学术出版社, 1983. isbn: 0125194500.