arXiv:2603.06475v1 [math.DS] 6 Mar 2026

$\mathbf{C}^2$中斜积体积维数的 Ruelle-McMullen公式 $\mathbb{C}^2$

Fabrizio Bianchi 和 Yan Mary He

摘要。Ruelle 给出了二次族 $f_c(z) = z^2 + c$ 的 Julia集豪斯多夫维数在 $c = 0$ 处的显式二阶展开。McMullen 随后将这一结果推广到任意次数 $d \geq 2$ 的 z^d 多项式扰动。本文研究这一问题在 $\mathbb{C}^2$ 中斜积情形下的类似问题。由于高维全纯动力系统是非共形的，我们以体积维数取代豪斯多夫维数体积维数。体积维数是我们在早期工作中引入的一种动力学定义的概念，并将其刻画为自然压强函数的零点。我们考虑如下形式的全纯斜积族

$$f_t(z, w) = (z^d, w^d + t(c_1(z)w^{d-1} + c_2(z)w^{d-2} + \cdots + c_d(z))).$$

我们的主要结果给出了 Julia集$J(f_t)$ 的体积维数在 $t \to 0$ 处关于系数 $c_k(z)$ 的显式二阶展开。

1. 引言

20世纪80年代初，Ruelle [Rue82] 开始研究全纯族中 Julia 集豪斯多夫维数的变化。对于二次族 $f_c(z) = z^2 + c$，他证明 Julia 集的豪斯多夫维数具有如下展开式

$$\mathrm{H.dim}(J_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} + O(|c|^3), \qquad |c| \to 0.$$

特别地，豪斯多夫维数函数在单项式映射$z \mapsto z^2$处有一个严格局部极小值。McMullen [McM08] 将 Ruelle 的结果推广到任意次数多项式，得到了单项式 $z \mapsto z^d$处豪斯多夫维数二阶导数的显式公式。具体而言，他证明映射 $f_t(z) = z^d + t(c_2 z^{d-2} + c_3 z^{d-3} + \cdots + c_d)$ 的 Julia 集的豪斯多夫维数满足

$$\mathrm{H.dim}(J_t) = 1 + \frac{|t|^2}{4d^2 \log d} \sum_{k=2}^{d} k^2 |c_k|^2 + O(|t|^3), \qquad |t| \to 0.$$

本文旨在研究这一问题在 $\mathbb{C}^2$ 中的类多项式斜积情形下的类似问题。更确切地说，对于接近 0 的 t，我们考虑如下形式的族

$$f_t(z, w) = (z^d,\ w^d + t(c_1(z)w^{d-1} + c_2(z)w^{d-2} + \cdots + c_d(z))), \tag{1}$$

其中 c_j 是关于 z 的全纯函数，我们研究其 Julia集维数的变化。这些映射的例子包括正则多项式斜积，即具有形式 (1) 的 $\mathbb{C}^2$ 上的多项式自同态，它们可全纯延拓为 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的自同态，参见 [BJ00；Jon99]。

与一维情形不同，在高维全纯动力系统中，豪斯多夫维数不再适用于描述动力学。维数大于一的全纯映射是非共形的，Koebe畸变定理等基本工具也不再适用。

日期：2026年3月9日。

因此，豪斯多夫维数可能不再具有动力学意义，其在参数空间中的变化也鲜为人知。

为了解决这一问题，我们在先前的工作 [BH24]中引入了高维全纯动力系统中不变集与测度的体积维数概念。在复一维情形下，体积维数与豪斯多夫维数相差一个因子 2；而在高维情形下，它则体现了系统的非共形几何。具体而言，体积维数满足一种 Mañé–Manning 型公式，该公式将体积维数、熵和李雅普诺夫指数联系起来；对于扩张不变测度，它还可刻画为自然压强函数的零点。对于双曲映射，这个零点与 Julia集的体积维数相差同一个因子 2。

本文研究实解析函数

$$t \longmapsto \mathrm{VD}_{f_t}(J(f_t)),$$

其中， $J(f_t)$表示 f_t的 Julia集。我们的主要结果给出了 $J(f_t)$的体积维数在 $t=0$处的显式二阶展开。

定理 1.1。 令 f_t 为(1)中所述的族。则

$$\mathrm{VD}_{f_t}(J(f_t)) = \frac{1}{2} + \frac{|t|^2}{16d^2 \log d} \int_{S^1} \sum_{k=1}^{d} k^2 |c_k(z)|^2 \, d\,\mathrm{Leb}_1(z) + O(|t|^3), \qquad |t| \to 0$$

其中，Leb_1 表示 S^1上的归一化*Lebesgue*概率测度。

证明的主要要素与结构。证明遵循McMullen的一般策略，并将其适用于多项式斜积的非共形情形。

出发点是将体积维数刻画为压力函数的零点。记 δ_t 为该零点，问题便归结为计算 δ_t 在$t=0$处的二阶导数。一个一般的二阶导数公式可以将 δ_0 表示为无穷小变形 ϕ_0 对几何位势 $\phi_t = -\log |\mathrm{Jac} f_t|$的方差，见命题3.3。

受McMullen的工作 [McM08], 启发，一个关键观察是：该无穷小变形ϕ_0 并非任意的Hölder函数，而是一个虚拟上边缘：它是无穷远吸引域上一个由动力系统定义的Hölder函数 h 在Julia集上的迹，并且可以写成某个函数 g 与其在动力系统作用下的拉回之差。这一结构使我们能够将所需的方差表示为函数 g 在无穷远吸引域边界附近的渐近增长，见命题3.5。随后，对该行为的直接计算（见命题 3.7）完成了定理 1.1的证明。

致谢。 本项目获得未来投资计划（ANR QuaSiDy /ANR-21-CE40-0016、ANR PADAWAN / ANR-21-CE40-0012-01、ANR TIGerS /ANR-24-CE40-3604）以及授予比萨大学数学系的MIUR卓越院系项目（CUP I57G22000700001）的资助。第一作者隶属于INdAM的GNSAGA小组。

2. 预备知识

2.1. 全纯斜积。 本文始终研究形如 $F\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 的全纯斜积

$$F(z,w) = (z^d, q(z,w)) = \Big(z^d, w^d + \sum_{k=1}^{d} c_k(z) w^{d-k}\Big), \tag{2}$$

其中 $d \geq 2$，且每个 $c_k(z)$在闭单位圆盘 $\mathbb{D}$[1]的某个邻域内都是全纯的。我们将上述全纯斜积的集合记为 $\mathcal{S}(d)$。将任意 $F \in \mathcal{S}(d)$限制在 $S^1 \times \mathbb{C}$上，我们得到一个关于映射 $z \mapsto z^d$的纤维化多项式映射，即一个连续映射

$$f\colon S^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{C}, \qquad f(z,w) = \big(z^d, q_z(w)\big),$$

其中 $q_z(\cdot) := q(z, \cdot)$。对于每个这样的 f，纤维格林函数 定义为

$$G(z,w) = G_z(w) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |q_z^n(w)|, \qquad \text{where } \log^+|w| := \max\{\log|w|, 0\}.$$

函数 G在 $S^1 \times \mathbb{C}$上连续。对于每个 $z \in S^1$，函数 G_z是次调和的，并且在有界轨道的点集上等于 0。$K_z := \{G_z > 0\}$ 为 $q_z(\cdot)$ 的填充朱利亚集，而 f 的 Julia 集为 $J_z(f) = \partial K_z = \partial W_z$。它在开集 $W_z := \mathbb{C} \setminus K_z$ 上是调和的。纤维

$$J(f) := \overline{\bigcup_{z\in S^1} \{z\} \times J_z(f)} \subset S^1 \times \mathbb{C}.$$

我们还令 $J(F) = J(f)$。

我们只考虑满足以下条件的纤维化多项式映射：对于每个 $z \in S^1$，K_z 都是连通的。等价地，对于每个 $z \in S^1$，q_z 的所有临界点都有有界轨道。我们称具有此性质的任意 f 为纤维连通。此时，每个 $W_z \cup \{\infty\}$ 都是单连通的，且与单位圆盘双全纯。我们用 Δ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆盘，用 $1/\Delta$表示 $\mathbb{C}$中闭单位圆盘的补集。以下结果归功于 Sester [Ses99]。

命题 2.1 ([Ses99, 命题 2。7])。对于上述任意纤维连通的 f 以及 $z \in S^1$，存在唯一的全纯同构 $\varphi_z\colon W_z \longrightarrow 1/\Delta$，满足：

(1) 图表

$$\begin{array}{ccc} W_z & \xrightarrow{q_z} & W_{z^d} \\ {\scriptstyle\varphi_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{z^d}} \\ 1/\Delta & \xrightarrow{w^d} & 1/\Delta \end{array}$$

可交换；

(2) 映射 $\varphi\colon W \to \mathbb{C}$ 由 $\varphi(z,w) = \varphi_z(w)$ 定义，且连续；*(3)* 对所有 $(z,w) \in W$，$G(z,w) = \log|\varphi_z(w)|$；*(4)* φ_z 在无穷远处与恒等映射相切。

注 2.2。设 $F(z,w) = (z^d, q(z,w))$ 是 (2) 中的全纯斜积。则存在区域 $U \Subset V \subset \mathbb{C}^2$，使得限制映射 $F\colon U \to V$ 是本原全纯映射。特别地，F 存在一个 Dinh–Sibony [DS03]，意义下的类多项式限制，其拓扑度等于 d^2，因此 [BH24] 的结果适用于此情形，具体见 [BH24, 注 1.4]。

全纯斜积（如式 (2)）的一个特别相关的特例，是每个系数 $c_j(z)$ 都是次数至多为 $d-j$ 的多项式的映射。在这种情况下，F 可延拓为 $\mathbb{P}^2$ 的全纯自同态（即，按 [BJ00；Jon99] 的定义，它是一个正则多项式斜积）。我们将用 $\mathcal{P}(d)$ 表示这类多项式斜积构成的空间，该空间赋予如下拓扑：系数在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。

[1]本节的全部结果在将 z^d 替换为一个双曲多项式 p时仍然成立，该多项式的次数不必为 d。为简便起见，并且由于后文只需用到这一情形，我们仅描述情形 $p(z) = z^d$。

2.2. **一致双曲性与垂直扩张**。遵循 Jonsson [Jon99], , 我们称全纯斜积 $F(z,w) = (z^d, q(z,w))$ 为垂直扩张的，若存在 Julia 集 $J(F)$ 的一个邻域 U，以及常数 $c > 0$ 和 $\lambda > 1$，使得

$$\|D_w F^n(z,w)\| \geq c\,\lambda^n \quad \text{for all } (z,w) \in U \text{ and all } n \geq 1.$$

在这种情况下，Julia集附近的动力学在垂直方向上一致扩张。以下结果可由双曲动力系统中的标准论证推出。关于垂直扩张的若干其他等价刻画，参见 [Jon99] 。

命题 2.3。 如(2) 所示的斜积 F 垂直扩张，当且仅当其*Julia*集$J(F)$是一致双曲排斥子。

垂直扩张是 $\mathcal{S}(d)$（以及 $\mathcal{P}(d)$）中的一个开条件，并定义了若干连通分支，称为双曲分支。根据 [AB23], , 只要其中有一个参数是双曲的，这些分支就与 [BBD18; Bia19] 意义下的稳定性分支重合。

属于双曲分支的映射，其Julia集随映射连续变化，且动力学是结构稳定的：同一分支中的所有映射在各自的Julia集上拓扑共轭。此外，共轭保持斜积结构，并随参数连续变化。

特别地，该斜积

$$F_0(z,w) = (z^d, w^d)$$

属于 $\mathcal{S}(d)$（以及 $\mathcal{P}(d)$）的一个特殊双曲分支。该分支所起的作用类似于二次多项式的曼德布罗集的主心形区域。

2.3. **双曲分支内的共轭与正则性**。 设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}(d)$是由纤维连通映射构成的一个双曲分支，并固定一个参考映射 $F_0 \in \mathcal{H}$。对任意 $F \in \mathcal{H}$，我们用 $J(F)$表示 F的Julia集，并由第2.2节回顾： $\mathcal{H}$中的所有映射在其Julia集上通过尊重斜积结构的共轭而拓扑共轭。在本小节中，我们利用 Böttcher坐标来研究 $J(F_0)$与 $J(F)$之间这一典范共轭的正则性。

固定 $F \in \mathcal{H}$。由于 F是纤维连通的，对每个 $z \in S^1$，无穷远吸引域$W_{F,z} = \mathbb{C} \setminus K_{F,z}$都存在一个Böttcher坐标

$$\varphi_{F,z} \colon W_{F,z} \longrightarrow 1/\Delta$$

将 $q_{F,z}$ 共轭到 $w \mapsto w^d$ ，并且在无穷远处与恒等映射相切，见命题 2.1。我们定义一个纤维映射

$$H_F \colon W_{F_0} \longrightarrow W_F, \qquad H_F(z,w) = \big(z, H_{F,z}(w)\big),$$

定义为

$$H_{F,z} := \varphi_{F,z}^{-1} \circ \varphi_{F_0,z} \quad \text{on } W_{F_0,z}.$$

下面的引理是 Böttcher 坐标定义性质的直接推论。

引理 2.4。 映射 H_F 定义良好，并满足：

(1) $H_{F_0} = \mathrm{id}$；*(2)* 对每个 $z \in S^1$，映射 $H_{F,z}$ 在 $W_{F_0,z}$上是共形的；*(3)* H_F 在无穷远吸引域上共轭 F_0 和 F：

$$F \circ H_F = H_F \circ F_0 \quad on\ W_{F_0}.$$

现在我们来考虑 H_F 向 Julia 集的延拓。无穷远点的吸引域 $\{W_{F,z}\}_{z \in S^1}$ 构成一族约翰域 [DH85；在 $z \in S^1$ 中一致地 92], Pom（例如参见 [Sum06]），并且在 $F \in \mathcal{H}$ 中局部一致地（因为最大膨胀 $\sup_{J(F)} \|DF\|$ 和最小膨胀

$\inf_{J(F)}\|DF^{-1}\|^{-1}$连续依赖于 F）。因此，Böttcher坐标存在赫尔德连续边界延拓，且赫尔德指数和常数一致 [CJY94]。

引理 2.5. 存在 $\alpha \in (0,\ 1)$ 和 $C > 0$，使得对每个 $F \in \mathcal{H}$，共轭 H_F都能唯一延拓为一个映射

$$\hat{H}_F \colon W_{F_0} \cup J(F_0) \longrightarrow W_F \cup J(F)$$

$\hat{}$该映射是 α-赫尔德连续的，且赫尔德常数不超过 C。此外， H_F 将 ***Julia*** 集上的动力学共轭起来，并保持斜积结构。

由于引理 2.5 给出的延拓和结构稳定性都在$J(F_0)$上提供了共轭映射，因此这些映射在 $J(F_0)$ 上重合（由双曲分支内部共轭的唯一性可知）。特别地，Julia 集之间的共轭是赫尔德连续的，并且关于 z 一致、关于 F局部一致。

$\hat{}$ 由于对每个 $(z,\ w) \in J(F_0)$，共轭映射 $F \mapsto H_F(z,\ w)$ 关于F实际上是全纯的，我们现在进一步加强映射 $\{H_F\}_F$ 在赫尔德范数下的（局部）紧性。设 $G_t,\ t \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 是 $\mathcal{H}$ 中一条 C^2路径的参数化，且满足 $G_0 = F_0$。回忆一下，给定 $C^\alpha\big(J(F_0)\big)$中的一条路径 $(\psi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$，我们可以定义

$$\dot{\psi}_t := \frac{d}{ds}\bigg|_{s=t}\psi_s \qquad \text{and} \qquad \ddot{\psi}_t := \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=t}\psi_s. \tag{3}$$

我们称 $(\psi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 是 C^1（分别为 C^2），如果 $\dot{\psi}_t$（分别为 $\ddot{\psi}_t$）在 $C^\alpha\big(J(F_0)\big)$中定义了一条连续路径。

命题 2.6. </style}映射 $\hat{}H_{G_t}$ 作为从 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 到赫尔德空间 $C^\alpha\big(W_{F_0}\cup J(F_0)\big)$的映射是 C^2。

证明。 对于任意给定的 (z,w)，映射 $F \mapsto H_F(z,w)$ 是全纯函数的一致极限。因此，它关于 F 全纯。众所周知，引理 2.5 给出的一致控制使我们能够应用柯西估计来获得导数的一致界，从而得到赫尔德范数下的光滑性；类似论证可参见 [SU10] 。□

3. 定理 1.1 的证明

3.1. 从 $\ddot{\delta}_0$ 到 $\dot{\phi}_0$ 的方差。 我们用 F_0 表示映射 $(z,w) \mapsto (z^d, w^d)$，并用 $m_0 := \mathrm{Leb}_1 \times \mathrm{Leb}_1$ 表示其唯一的最大熵测度。设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}(d)$ 为包含 F_0 的$\mathcal{S}(d)$ 的双曲分支。考虑一条满足 $F_{t=0} = F_0$ 的 C^2 曲线 $(\varepsilon,\varepsilon) \ni t \mapsto F_t \in \mathcal{H}$。由第2.3节，对每个 t存在一个共轭

$$\hat{H}_t \colon J(F_0) \longrightarrow J(F_t)$$

它关于 (z,w) 是赫尔德连续的，并且对某个 $\alpha \in (0,1)$，关于$C^\alpha(J(F_0))$ 的赫尔德拓扑 C^2 依赖于 t。

考虑 $J(F_0) = S^1 \times S^1$ 上由下式给出的几何势函数族

$$\phi_t := -\log\big|\mathrm{Jac}\, F_t \circ \hat{H}_t\big|.$$

由命题 2.6 以及 $(z,w) \mapsto \log|\mathrm{Jac}\ F_t(z,w)|$ 对 t的光滑依赖性，路径 $\{\phi_t\}_t$对某个 $\alpha \in (0,1)$ 在 $C^\alpha(J(F_0))$ 中是 C^2 的。特别地， $\dot{\phi}_0$ 与 $\ddot{\phi}_0$ 由 (3) 良定义，并且在 $J(F_0) = S^1 \times S^1$上赫尔德连续。

引理 3.1. 我们有 $\int \dot{\phi}_0\, dm_0 = 0$ 和 $\int \ddot{\phi}_0\, dm_0 = 0$

证明。 注意，函数 $t \mapsto L(t) := -\int \phi_t dm_0$ 是F_t的李雅普诺夫指数之和。该断言由以下事实得出：此函数在 F_0的某个邻域内为常数（且等于 $2\log\ d$），参见 [Jon99, 定理 5.3]. □

令 δ_t 表示唯一的正实数，使得

$$P(\delta_t \phi_t) = 0,$$

其中， $P(\cdot)$表示拓扑压力。根据Hölder势的压力的实解析性和隐函数定理，映射 $t \mapsto \delta_t$ 在 0 的某个邻域上是实解析的（参见[Rue82]）。

引理 3.2。 我们有 $\dot{\delta}_0 = 1$ 和 $\ddot{\delta}_0 = 0$。

证明。 我们在 $J(F_0) = S^1 \times S^1$上有 $\phi_0 \equiv -2\log d$。因此，对于任意 $s \in \mathbb{R}$，我们有 $P(s\phi_0) = \log(d^2) - s\log(d^2)$。于是， $P(s\phi_0) = 0$ 的唯一解为 $s = 1$，这就证明了第一个断言。

为证明第二个断言，对恒等式 $P(\delta_t \phi_t) = 0$ 在 $t = 0$处求导。根据热力学形式主义中的标准论证（例如参见 [PU10]），我们有

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P(\delta_t \phi_t) = \int (\dot{\delta}_0 \, \phi_0 + \delta_0 \dot{\phi}_0) \, dm_0,$$

因为 m_0是 $\delta_0 \phi_0 = \phi_0 \equiv -2\log d$的平衡态。由于 ϕ_0为常数且 $\delta_0 = 1$，由此可得

$$0 = \dot{\delta}_0 \int \phi_0 \, dm_0 + \int \dot{\phi}_0 \, dm_0.$$

由于 $\int \dot{\phi}_0 \, dm_0 = 0$ 由引理 3.1可得，该断言成立。 □

回顾一下，给定连续函数 $\psi\colon\ J(F_0) \to \mathbb{R}$，且满足 $\int \psi dm_0 = 0$，则 ψ 关于 m_0 的（渐近）方差定义为

$$\mathrm{Var}(\psi, m_0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{J(F_0)} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ F_0^j \right)^2 dm_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|S_n \psi\|^2_{L^2(m_0)} \in [0, +\infty].$$

命题3.3。我们有

$$\ddot{\delta}_0 = \frac{\mathrm{Var}\big(\dot{\phi}_0, m_0\big)}{2 \log d}.$$

证明。令$\psi_t := \delta_t \phi_t$。由上文所建立的正则性， $\{\psi_t\}$ 是 $C^\alpha(J(F_0))$中的一条 C^2 路径。当$P(\psi_t) \equiv 0$时，由 [McM08，定理2.2] （另见 [PP90]）可得

$$0 = \mathrm{Var}(\dot{\psi}_t, m_0) + \int \ddot{\psi}_0 \, dm_0.$$

利用 $\psi_0 = \delta_0\phi_0 + \delta_0\phi_0$ 和 $\psi_0 = \delta_0\phi_0 + 2\delta_0\phi_0 + \delta_0\phi_0$ 直接展开可得

A

$$\ddot{\delta}_0 = \frac{\mathrm{Var}\big(\delta_0\dot{\phi}_0 + \phi_0\dot{\delta}_0, m_0\big) + \delta_0 \int \ddot{\phi}_0 \, dm_0 + 2\int \dot{\delta}_0\dot{\phi}_0 \, dm_0}{-\int \phi_0 \, dm_0}.$$

借助引理 3.1 和 3.2，以及 $S^1 \times S^1$ 上的 $\phi_0 \equiv -2\log d$ 这一事实，该恒等式可化简为定理陈述中的形式。□

3.2. 方差 ϕ_0 作为.....的渐近能量 $\partial_w v$。为了更好地描述 ϕ_0，我们考虑无穷远吸引域上共轭的无穷小变形。令

$$\widetilde{v} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \hat{H}_t$$

表示由 Böttcher 坐标给出的共轭的导数，参见第2.3节。由于共轭是纤维化的， $\widetilde{v}$ 是垂直的，可以写成

$$\widetilde{v}(z,w) = v(z,w)\,\frac{\partial}{\partial w} \tag{4}$$

对每个 $z \in S^1$，其中 $v(z,\cdot)$ 在无穷远吸引域 $W_{F_0,z} = 1/\Delta$ 上全纯。此外， $\widetilde{v}$ 在 w 上关于 W_{F_0} 是光滑的。

引理3.4。我们有

$$\dot{\phi}_0(z,w) = -\Re\left(\frac{\partial v}{\partial w}(z,w)\right) + \Re\left(\frac{\partial v}{\partial w}\big(F_0(z,w)\big)\right).$$

证明。由 $F_t \circ H_t = H_t \circ F_0$ 我们得到

$$\operatorname{Jac} F_t(H_t) = (\operatorname{Jac} H_t)^{-1}\,(\operatorname{Jac} H_t \circ F_0)\,\operatorname{Jac} F_0.$$

取对数 并在 $t = 0$ 处求导，利用 $\operatorname{Jac} H_0 \equiv 1$ ，得到所述恒等式 . □

命题3.5。采用上述记号，我们有

$$\operatorname{Var}(\dot{\phi}_0, m_0) = \frac{\log d}{2} \cdot I\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)$$

其中

$$I\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right) := \lim_{r\to 1^+} \frac{1}{|\log(r-1)|} \int_{S^1}\int_{|w|=r} \left|\frac{\partial v}{\partial w}(z,w)\right|^2 d\operatorname{Leb}_r(w) d\operatorname{Leb}_1(z)$$

且Leb_r 是圆 $|w| = r$上的归一化*Lebesgue*概率测度。

证明。 为简便起见，我们将 $g := \Re\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right) = \Re(\partial_w v)$记作，并注意到在$W_{F_0} = S^1 \times (1/\Delta)$上有 $\dot{\phi}_0 = -g + g \circ F_0$ 。 由于 $\partial_w v(z,\cdot)$在 $\{|w| > 1\}$ 上全纯，且在无穷远处为零，我们有

$$\int_{|w|=r} \left|\Re\left(\frac{\partial v}{\partial w}(z,w)\right)\right|^2 d\operatorname{Leb}_r(w) = \frac{1}{2}\int_{|w|=r} \left|\left(\frac{\partial v}{\partial w}(z,w)\right)\right|^2 d\operatorname{Leb}_r(w)$$

对每一个 $r > 1$ 和 $z \in S^1$成立。因此，只需证明该恒等式

$$\operatorname{Var}(\dot{\phi}_0, m_0) = (\log d) \cdot \lim_{r\to 1^+} \frac{1}{|\log(r-1)|} \int_{S^1}\int_{|w|=r} |g|^2 d\operatorname{Leb}_r(w) d\operatorname{Leb}_1(z).$$

我们将针对 $r_n \to 1$的一个特定选取来证明该断言，此论证可容易地加以改写，以处理一般极限。回想我们有

$$\operatorname{Var}(\dot{\phi}_0, m_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{J(F_0)} \left|\sum_{j=0}^{n-1} \dot{\phi}_0 \circ F_0^j\right|^2 dm_0.$$

令 $r_n := e^{d^{-n}} \sim 1 + d^{-n}$， 且 $Z_n(z,w) := (z, r_n w) \in W_{F_0}$。 利用 $Z_n(z,w) \to (z,w)$以指数速度这一事实，以及 $\dot{\phi}_0$ 在 $S^1 \times S^1$的某个邻域内是赫尔德连续的，对每一个$(z,w) \in S^1 \times S^1$ ，我们得到

$$\sum_{j=0}^{n-1} \dot{\phi}_0 \circ F_0^j(z,w) = \sum_{j=0}^{n-1} \dot{\phi}_0 \circ F_0^j(Z_n(z,w)) + O(1), \qquad n \to \infty.$$

由引理3.4可得

$$\sum_{j=0}^{n-1} \dot{\phi}_0 \circ F_0^j(Z_n(z,w)) = -g(Z_n(z,w)) + g \circ F_0^n(Z_n(z,w)) = -g(Z_n(z,w)) + O(1), \qquad n \to \infty,$$

其中，当所有点 $F_0^n(Z_n(z,\ w))$ 属于半径为 $(e^{d^{-n}})^{d^n}=e$ 的圆时，$g\circ F_0^n(Z_n(z,\ w))$ 一致有界。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\dot{\phi}_0, m_0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{J(F_0)}|g(Z_n(z,w))|^2 dm_0\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{S^1}\int_{|w|=r_n}|g(z,w)|^2 d\,\mathrm{Leb}_{r_n}(w) d\,\mathrm{Leb}_1(z).\end{aligned}$$

该断言由渐近的 $|\log(r_n-1)|\sim n\log\ d$ 得出 . □

注记3.6。沿用 [McM08], 的术语，我们可以说 ϕ_0 是 $\Re(\partial_w v)$ 在 $W_{F_0}=S^1\times(1/\Delta)$ 上的虚拟上边缘。上述论证更一般地表明，如果 h 是 W_{F_0} 上连续函数 g 的虚拟上边缘，且 $\int h\,dm_0=0$，那么

$$\mathrm{Var}(h, m_0)=(\log d)\cdot I(g),$$

其中

$$I(g)=\lim_{r\to1^+}\frac{1}{|\log(r-1)|}\int_{S^1}\int_{|w|=r}|g(z,w)|^2\,d\,\mathrm{Leb}_r(w)\,d\,\mathrm{Leb}_1(z).$$

3.3. 对 $I(\partial_w v)$的计算。现在我们考虑显式路径

$$F_t(z,w)=(z^d,\ w^d+t(c_1(z)w^{d-1}+\cdots+c_d(z))),\qquad t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

根据命题3.5，命题3.3中出现的项 $\mathrm{Var}(\delta_0\phi_0,\ m_0)$ 可以用无穷小共轭的渐近能量 $I(\partial_w v)$ 表示。下一个命题给出了用函数 c_k 表示 $I(\partial_w v)$ 的显式表达式。

命题 3.7。有

$$I\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)=\frac{1}{d^2\log d}\int_{S^1}\sum_{k=1}^{d}k^2\,|c_k(z)|^2\,d\,\mathrm{Leb}_1(z).$$

为简便起见，记 $v_z(\cdot)=v(z,\ \cdot)$，其中 $v(z,\ \cdot)$ 如(4)所示。

引理3.8。对于每个 $z\in S^1$，都有

$$v_z(w)=-\frac{w}{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_k(z^{d^n})}{d^n}\,w^{-kd^n}. \tag{5}$$

注意，上述级数对每个 $\eta>0$ 都在 $\{|w|>1+\eta\}$ 上正规收敛。

证明。对共轭关系 $F_t\circ H_t=H_t\circ F_0$ 在 $t=0$ 处求导可得，对于每个$z\in S^1$，v_z 是函数方程的解

$$v_{z^d}(w^d)=d\,w^{d-1}v_z(w)+\sum_{k=1}^{d}c_k(z)w^{d-k}$$

满足 $v_z(w)\ \to 0$ 当 $w\to\infty$ 时成立。直接计算表明，级数(5)满足这些条件。□

命题 *3.7* 的证明。对 (5) 逐项求导可得

$$\frac{\partial v}{\partial w}(z,w)=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_k(z^{d^n})}{d^n}\,w^{-kd^n}+k\,c_k(z^{d^n})\,w^{-kd^n-1}\right).$$

涉及分母 d^n 的项一致可求和，在定义 $I(\partial_w v)$ 的对数极限中可忽略。因此只有第二个求和项有贡献，由此得到

$$I\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right) = \lim_{r\to 1^+} \frac{1}{|\log(r-1)|} \int_{S^1} \int_{|w|=r} \left| \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=0}^{\infty} k\, c_k(z^{d^n})\, w^{-kd^n-1} \right|^2 d\,\mathrm{Leb}_r(w)\, d\,\mathrm{Leb}_1(z).$$

由于所有指数 $-kd^n-1$ 互不相同，函数 $w \mapsto w^{-kd^n-1}$ 在 $L^2(\mathrm{Leb}_r)$中正交。因此，对每一个 $z \in S^1$，我们有

$$\int_{|w|=r} \left| \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=0}^{\infty} k\, c_k(z^{d^n})\, w^{-kd^n-1} \right|^2 d\,\mathrm{Leb}_r(w) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=0}^{\infty} k^2 |c_k(z^{d^n})|^2\, |r|^{-2kd^n-2}.$$

对任意固定的 $r > 1$，因子 $|r|^{-2kd^n-2}$ 在 $n \le N(r)$时接近于1，而在$n > N(r)$时呈指数级地小，其中

$$N(r) \sim \frac{|\log(r-1)|}{\log d}.$$

因此，

$$\int_{|w|=r} \left| \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=0}^{\infty} k\, c_k(z^{d^n})\, w^{-kd^n-1} \right|^2 d\,\mathrm{Leb}_r(w) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=0}^{N(r)} k^2 |c_k(z^{d^n})|^2 + o(|\log(r-1)|).$$

两边除以 $|\log(r-1)|$ 并令 $r \to 1$，我们可以对序列 $\{z^{d^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$应用伯克霍夫遍历定理。对$\mathrm{Leb}_1$-几乎每一个 $z \in S^1$，我们得到

$$\lim_{r\to 1^+} \frac{1}{|\log(r-1)|} \int_{|w|=r} \left| \frac{\partial v}{\partial w}(z,w) \right|^2 d\,\mathrm{Leb}_r(w) = \frac{1}{d^2 \log d} \sum_{k=1}^{d} k^2 \int_{S^1} |c_k(z')|^2\, d\,\mathrm{Leb}_1(z')$$

关于 z 积分（注意右端为常数）即得该断言。 □

3.4. 定理 1.1 证明的结尾。 我们现在可以完成定理 1.1 的证明。由[BH24，定理1.3]，，对每一个 $t \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$，我们有$2\,\mathrm{VD}^{f_t}(J_t) = \delta_{t_0}$。于是该断言由引理 3.2 以及命题 3.3、3.5 和 3.7 得出。

注记 3.9. 我们注意到，当 F_t 的第一个分量为 $z^{d'}$时，同样的证明仍然适用。在这种情况下，定理 1.1 中系数分母里出现的因子 $2 \log\ d$被替换为 $\log\ d + \log d'$。这一变化来自命题3.3的二阶导数公式中的分母，其中 $\phi_0 = -\log\ |\mathrm{Jac}\, F_0| = -(\log\ d + \log\ d')$。

参考文献

[AB23] Matthieu Astorg 和 Fabrizio Bianchi。“多项式斜积全纯族中的双曲性与分岔”。载于：《美国数学杂志》145.3 (2023)，第 861–898 页。[BBD18] François Berteloot、Fabrizio Bianchi 和 Christophe Dupont。“$\mathbb{P}^k$的全纯自同态的动力学稳定性与李雅普诺夫指数”。载于：《高等师范学校科学年刊》*(4)* 51.1 (2018)，第 215–262 页。[BH24] Fabrizio Bianchi 和 Yan Mary He。“$\mathbb{P}^k$自同态扩张测度的 M-añé-Manning公式”。载于：《美国数学会汇刊》377.11 (2024)，第 8179–8219 页。[Bia19] Fabrizio Bianchi。“大拓扑度类多项式映射的 Misiurewicz参数与动力学稳定性”。载于：《数学年刊》373.3-4 (2019)，第 901–928 页。[BJ00] Eric Bedford 和 Mattias Jonsson。“$\mathbf{C}^k$上的正则多项式自同态的动力学”。载于：《美国数学杂志》122.1 (2000)，第 153–212 页。[CJY94] Lennart Carleson、Peter W. Jones 和 Jean-Christophe Yoccoz。“Julia 和 John”。载于：《巴西数学会公报》*(N.S.)* 25.1 (1994)，第 1–30 页。

[DH85] Adrien Douady 和 John H. Hubbard。《复多项式动力学研究》。奥赛数学出版物。巴黎南大学，1984–1985。[DS03] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。“多项式型映射的动力学”。载于：《纯粹与应用数学杂志》 *(9)* 82.4 (2003)，第 367–423 页。[Jon99] Mattias Jonsson。“$\mathbf{C}^2$上的多项式斜积动力学”。载于：《数学年刊》314.3 (1999)，第 403–447 页。[McM08] Curtis McMullen。“热力学、维数与 Weil-Petersson 度量”。载于：《数学发明》173.2 (2008)，第 365–425 页。[Pom92] Christian Pommerenke。《保角映射的边界行为》。数学科学基础丛书。施普林格，1992。[PP90] William Parry 和 Mark Pollicott。“双曲动力系统的ζ函数与周期轨道结构”。载于：《数学星丛》187-188 (1990)，第 268 页。[PU10] Feliks Przytycki 和 Mariusz Urbański。《共形分形：遍历理论方法》。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2010。[Rue82] David Ruelle。“实解析映射的排斥子”。载于：《遍历理论与动力系统》2.1 (1982)，第 99–107 页。[Ses99] Olivier Sester。“纤维化多项式的双曲性”。载于：《法国数学会通报》127.3 (1999)，第 393–428 页。[SU10] Hiroki Sumi 和 Mariusz Urbański。“扩张有理半群的豪斯多夫维数的实解析性”。载于：《遍历理论与动力系统》30.2 (2010)，第 601–633 页。[Sum06] Hiroki Sumi。“半双曲纤维化有理映射与有理半群”。载于：《遍历理论与动力系统》26.3 (2006)，第 893–922 页。

数学系，比萨大学，布鲁诺·庞特科尔沃广场 5 号，56127 比萨，意大利电子邮件地址：fabrizio.bianchi@unipi.it

数学系，俄克拉何马大学，诺曼，OK 73019电子邮件地址：he@ou.edu