伯格曼空间、共形平坦二维圆盘歌剧与仿射海森堡顶点代数

Yuto Moriwaki *

跨学科理论与数学科学计划（iTHEMS），日本埼玉县和光市
351-0198

arXiv:2603.06491v1 [math.QA] 6 Mar 2026

摘要

本文研究单位圆盘$\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$的全纯圆盘嵌入的幺半群。我们引入由平方可积条件定义的子 operad $\mathbb{CE}_2^{HS}$，并证明伯格曼空间的对称代数 Sym$A^2(\mathbb{D})$ 带有自然的 $\mathbb{CE}_2^{HS}$ -代数结构。以 Sym$A^2(\mathbb{D})$ 为系数的共形平坦因子化同调，进而给出二维黎曼流形的依赖度量的不变量。此外，Sym$A^2(\mathbb{D})$ 可识别为仿射海森堡顶点算子代数的归纳希尔伯特空间完备化。

目录

1. 预备知识 **8**

1.1. 共形平坦二维圆盘运算子及其复共轭 8 1.2. 伯格曼空间及其张量积.10 1.3. 调和上闭链与希尔伯特-施密特条件.11

2. 伯格曼空间上的共形平坦2-圆盘代数 1 **4**

2.1. 经典与量子幺半群作用.14 2.2. 几何维克收缩的构造.17 2.3. 共形平坦圆盘 2-代数的构造.18

3. 与仿射海森堡顶点代数的关系 2 **1**

3.1. 仿射海森堡顶点代数回顾.22 3.2. $\mathbb{CE}_2$-代数与仿射海森堡顶点代数之间的关系 . 25

参考文献 **28**

*邮箱：moriwaki.yuto（at）gmail.com

引言

二维手征共形场论的局部结构由一个顶点算子代数（VOA）及其全纯乘积编码 [BPZ, Bo1, FLM]

$$Y(\bullet,z):V\otimes V\to V((z)),\qquad Y(a,z)b=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a(n)b\,z^{-n-1}. \tag{0.1}$$

借助共形块，运用代数分析和代数几何的方法，可以将这些局部数据推广到任意亏格的黎曼曲面上 [TUY, Zh, DGT]。怪兽月光现象正是共形场论中局部到整体原理的一种体现 [CN, Bo2]。

另一方面，二维非手征共形场论通常具有一种“实解析乘积” [MS,FRS,HK,Mo1]

$$Y(-,z,\bar z):F\otimes F\to F((z,\bar z,|z|^{\mathbb{R}})),\qquad Y(a,z,\bar z)b=\sum_{r,s\in\mathbb{R}}a(r,s)b\,z^{-r-1}\bar z^{-s-1},$$

而顶点算子代数则作为两个典范子代数出现，分别对应 F 的全纯部分和反全纯部分，这是通过二维中的例外同构得到的，

$$\mathrm{so}(3,1)_{\mathbb{C}}\cong \mathrm{sl}_2\mathbb{C}\oplus\mathrm{sl}_2\mathbb{C} \tag{0.2}$$

（见 [Mo1，命题 3.12]）。在维数 $d\ \geq\ 3$ 下，李代数 $\mathrm{so}(d\ +\ 1,1)$ 不像式 (0.2) 那样分解。因此，高维共形场论以及 $d\ =\ 2$ 维的非手征完整共形场论，通常用希尔伯特空间、分布、概率测度或冯·诺依曼代数来描述 [LM, AGT, AMT, DKRV, BKLR]。在这些情形下，不能指望仅凭代数几何方法来描述局部到整体原理。因此，我们需要一种不依赖全纯性的框架来捕捉这一原理。

为此，我们在[Mo2]中引入了共形平坦因子化同调。共形平坦因子化同调是因子化同调的一种共形黎曼几何变体 [Lu1, AF1], ，其输入数据由共形平坦 d-圆盘代数给出。这些代数构成了 Costello-Gwilliam因子化代数 [CG1, CG2]的一种 ind-希尔伯特空间精化。

本文的首要目标是证明，将仿射海森堡顶点算子代数完备化为 ind-希尔伯特空间后，它具有共形平坦2-圆盘代数的结构。我们利用与共形拉普拉斯算子 [Mo3] 相关联的因子化代数，在伯格曼空间$A^2(\mathbb{D})$的对称代数上实现这一结构。

	顶点代数	$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ **-代数**
向量空间	$M(0)\ =\mathrm{Ind}_{\hat h_+}^{\hat h}\mathbb{C}\mathbf{1}$	$\bigoplus_{p=0}^{\infty}$ 辛$^pA^2(\mathbb{D})$
平移	$Y(h(-n\ -1)\mathbf{1},\zeta)\mathbf{1}$	$\frac{(n+1)\ z^n}{(1-\zeta z)_{n+2}}\in A^2(\mathbb{D})$
p-粒子态	$h(-k_1-1)\ \cdots h(-k_p-1)\mathbf{1}$	$\sqrt{p!}\ \hat{}\ S_p((k_1+1)z^{k_1}\otimes\cdots\otimes(k_p+1)z^{k_p}).$
顶点算子	$Y(r^{L(0)}a,\ \zeta)s^{L(0)}b$	$\rho_{B_{\zeta,\ r,\ s,0}}(a,\ b)$

以 Sym$A^2(\mathbb{D})$ 为系数的共形平坦因子化同调定义了二维黎曼流形的一个依赖度量的不变量。从启发式角度看，酉（完整）顶点算子代数的完备化应当能提供这样的系数，从而为共形场论建立一种不依赖全纯性的局部到整体原理。

本文的另一个目标是引入一种精细化的上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$，扩展 $\mathbb{CE}_2$ 中引入的共形平坦 2-圆盘上运算 [Mo2], ，并说明 Sym$A^2(\mathbb{D})$ 继承了一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数结构。正如稍后将要讨论的， $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 与 Takhtajan-Teo [TT] 对作为希尔伯特流形的普遍 Teichm¨uller 空间所作的精细化密切相关。在共形块理论中，一个顶点算子代数在黎曼曲面的代数几何模空间上给出一个层 [DGT]。相比之下，在我们的框架中，我们预期酉的完整顶点算子代数的完备化会在 Teichm¨uller 空间上给出共形块的希尔伯特解析类比物。

下文中，我们首先从顶点算子代数的视角解释（非）有界性问题是如何产生的，然后以伯格曼空间为例说明上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 及其作用。

0.1. 顶点算子代数的希尔伯特空间完备化与（非）有界性

Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner 构建了顶点算子代数与代数QFT（以冯·诺依曼代数表述QFT）之间的桥梁。他们考察了酉顶点算子代数的希尔伯特空间完备化 H_V [CKLW]。之后，这一研究方向在与 Adamo 和 Tanimoto 的合作中得到进一步发展，从而建立了非手征酉全顶点算子代数与公理化QFT之间的联系 [AMT]。设 V 为一个酉（完全）顶点算子代数，且 $a_i \in V$ 为准初级向量。若 $1 > |\zeta_1| > |\zeta_2| > \cdots > |\zeta_n| > 0$，则顶点算子的乘积绝对收敛，并定义希尔伯特空间 H_V 中的一个向量：

$$Y(a_1, \zeta_1, \bar{\zeta}_1) \cdots Y(a_n, \zeta_n, \bar{\zeta}_n)\mathbf{1} \in H_V \tag{0.3}$$

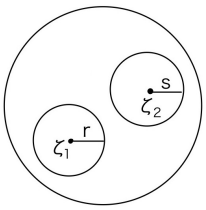
（见 [AMT，第 3 节.3]）。从物理角度看，表达式（0.3）对应于在点 $\zeta_i \in \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 插入 $a_i \in V$ 后得到的一个态，因此希尔伯特空间 H_V 可视为单位圆盘上的态空间 $\mathbb{D}$。然而，正如下文将看到的，$Y(\bullet, z, \bar{z})$ 相对于希尔伯特空间 H_V 上的范数通常是无界的，而这种在量子场论中无处不在的无界性会造成显著的分析困难 [GW]。

本文考虑由 $h \in M(0)_1$ 生成的仿射海森堡顶点算子代数 $M(0)$。其（解析延拓后的）二点函数为

$$(\mathbf{1}, Y(L(-1)^n h, \zeta_1) Y(L(-1)^m h, \zeta_2)\mathbf{1}) = (-1)^n \frac{(n+m+1)!}{(\zeta_1 - \zeta_2)^{n+m+2}},$$

即使经过 $\|L(-1)^n h\| = \sqrt{n+1}n!$ 归一化后，仍会因二项式系数 $\binom{n+m}{n} \frac{1}{(\zeta_1-\zeta_2)^{n+m+2}}$ 而出现发散。

令 $B_r(\zeta)$ 表示以 ζ 为中心、半径为 r 的开圆盘。我们的关键观察如下。取 $1 > r > 0$ 和 $1 > s > 0$，使得



$$\overline{B_r(\zeta_1)} \cap \overline{B_s(\zeta_2)} = \emptyset, \quad \text{and} \quad B_r(\zeta_1), B_s(\zeta_2) \subset \mathbb{D}. \tag{0.4}$$

考虑半径归一化二点函数

$$\left\langle \mathbf{1}, Y\left(r^{L(0)} \frac{L(-1)^n h}{\|L(-1)^n h\|}, \zeta_1\right) Y\left(s^{L(0)} \frac{L(-1)^m h}{\|L(-1)^m h\|}, \zeta_2\right) \mathbf{1} \right\rangle \sim \binom{n+m}{n} \frac{r^n s^m}{(\zeta_1 - \zeta_2)^{n+m}}.$$

由 (0.4)，我们得到

$$\sigma = \frac{r}{|\zeta_1 - \zeta_2|} + \frac{s}{|\zeta_1 - \zeta_2|} < 1,$$

由此可得$\binom{n+m}{n} \frac{r^n s^m}{(\zeta_1-\zeta_2)_{n+m}} \leq \sigma^{n+m}$。因此，半径归一化二点函数呈指数衰减。相比之下，当两个圆盘相切（$\sigma = 1$）时，二点函数变为无界。推广几何构型 (0.4)，我们考虑全纯圆盘嵌入的幺半群

$$\mathbb{CE}_2^{\text{emb}}(n) = \{\sqcup_{i=1}^n \phi_i : \sqcup_n \mathbb{D} \to \mathbb{D} \mid \text{injective holomorphic maps}\}. \tag{0.5}$$

对于 $B_r(\zeta) \subset \mathbb{D}$，全纯映射

$$B_{\zeta,r} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \qquad B_{\zeta,r}(z) = rz + \zeta \tag{0.6}$$

定义了对应于构型 (0.4) 的元素 $(B_{\zeta_1,r}, B_{\zeta_2,s}) \in \mathbb{CE}_2^{\text{emb}}(2)$。注意，朴素定义 $\mathbb{CE}_2^{\text{emb}}$ 也包括具有 $\sigma = 1$ 的构型，其中（归一化的）二点函数是无界的。

在维数$d \geq 3$中，与圆盘的共形开嵌入相关联的二点函数有界性的充要条件已被确立[Mo2，定理 2.31], 从而得到一个精细化的上运算 $\mathbb{CE}_d$。在维数$d = 2$中，有界性条件更为微妙，我们将在下文加以说明。

0.2. 伯格曼空间、希尔伯特–施密特条件与泰希米勒空间

伯格曼空间 $A^2(\mathbb{D})$ 是单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上平方可积全纯函数构成的希尔伯特空间，

$$A^2(\mathbb{D}) = L^2\left(\mathbb{D}, \pi^{-1} d^2 x\right) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{D}),$$

它是 $L^2\left(\mathbb{D}, \pi^{-1} d^2 x\right)$ 的闭子空间，且标准正交基为 $\{\sqrt{n+1} z^n\}_{n \geq 0}$。令 $\underline{\mathrm{Sym}} A^2(\mathbb{D}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D})$ 为代数直和。对每个有限的 N，空间$\bigoplus_{p=0}^{N} \mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D})$ 是一个希尔伯特空间，而 $\mathrm{Sym} A^2(\mathbb{D})$ 并不完备；因此它定义了希尔伯特空间的归纳范畴 IndHilb 中的一个对象（见 [Mo2，附录 B]）。

由于 $\|h(-n-1)\mathbf{1}\| = \sqrt{n+1}$ 且 $\|h(-1)^p \mathbf{1}\| = \sqrt{p!}$，线性映射

$$\Psi : h(-k_1 - 1) \cdots h(-k_p - 1)\mathbf{1} \mapsto \sqrt{p!}\hat{S}^p((k_1+1)z^{k_1} \otimes \cdots \otimes (k_p+1)z^{k_p}) \tag{0.7}$$

定义了从仿射海森堡顶点算子代数 $M(0)$ 到 $\mathrm{Sym} A^2(\mathbb{D})$ 的一个等距映射（见引理 3.5）。ˆ这里，S^p 表示对称化算子。

在 [Mo3], 中，利用与（共形）拉普拉斯算子相关联的因子化代数，我们在 $\mathbb{C}$-向量空间范畴中构造了一个基于朴素 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的代数。如上所述， $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 中的构型通常不能定义有界算子。因此，我们引入一个子 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}} \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ ，使相应的作用有界。首先，子幺半群 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$ 定义为

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) = \{\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) \mid F_\phi(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\}. \tag{0.8}$$

这里，$F\phi(z,w)$ 是定义在 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ 上的全纯函数

$$F_\phi(z,w) = \frac{\phi'(z)\phi'(w)}{(\phi(z)-\phi(w))^2} - \frac{1}{(z-w)^2}. \tag{0.9}$$

函数 $F\phi(z,w)$ 是与中心荷相对应的上闭链：它描述了二维格林函数 $-(2\pi)^{-1}\log|z-w|$ 在局部共形变换 ϕ 下如何变化，并且源自与 [Mo3] 中的共形拉普拉斯算子相关联的因子化代数。对于 $n \geq 2$，我们设

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n) = \left\{(\phi_1,\dots,\phi_n) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)^n \mid \phi_i(\mathbb{D}) \cap \phi_j(\mathbb{D}) = \emptyset \text{ and } G_{\phi_i,\phi_j}(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\right\}.$$

这里，$G_{\phi_1,\phi_2}(z,w)$ 也是定义在 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ 上的全纯函数，

$$G_{\phi_1,\phi_2}(z,w) = \frac{\phi_1'(z)\phi_2'(w)}{(\phi_1(z)-\phi_2(w))^2}, \tag{0.10}$$

在 [Mo3] 中通过因子化代数引入。于是， $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的子 operad（命题 1.9）。利用对上闭链 (0.9) 积分所定义的收缩，以及沿 ϕ 的前推，我们构造出一个幺半群同态（定理 2.6）

$$\rho_1 : \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \to \mathrm{End}\left(\mathrm{Sym}\, A^2(\mathbb{D})\right), \tag{0.11}$$

这里，对于有界性而言，$F\phi(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ 这一点至关重要。高阶运算

$$\rho_n : \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n) \to \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Sym}\, A^2(\mathbb{D})^{\otimes n}, \mathrm{Sym}\, A^2(\mathbb{D})\right)$$

由 $F\phi_i(z,w)$ 和 $G_{\phi_i,\phi_j}(z,w)$ 在 $L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ 中类似地定义。

定理 A（定理 2.11、定理 2.12 和推论 3.9）。 ind-希尔伯特空间 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 继承 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数的结构。在子 operad$\mathbb{CE}_2 \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 上的限制给出一个对称幺半函子 $\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}} \to \mathrm{IndHilb}$，满足 [Mo2，定义1.32],，及其沿 $\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}} \to \mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}$ 的左 Kan 延拓，

$$\mathrm{Lan}_{\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})} : \mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}} \to \mathrm{IndHilb}, \tag{0.12}$$

是对称幺半的。此外，$\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 作为 $\mathbb{CE}_2$-代数没有真闭理想。

范畴 $\mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}$ 是维数 2 的紧黎曼流形（可能带边界）之芽连同共形开嵌入所构成的范畴 [Mo2]。定理中的左 Kan 延拓，

$$\mathrm{H}_{\mathrm{CF}}((M,g),\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})) = \mathrm{Lan}_{\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})}(M,g),$$

定义了一个以 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 为系数的流形的依赖度量的不变量。

令 $F_\phi(z,w)=\sum_{n,m\geq 0} d_{n,m}z^n w^m$ 为 F_ϕ 的泰勒展开。于是，$l^2(\mathbb{N})$ 上由 $\left(\frac{d_{n,m}}{\sqrt{(n+1)(m+1)}}\right)_{n,m\geq 0}$ 给出的无穷矩阵称为格伦斯基算子。在 (0.8) 中，条件 $F_\phi(z,w)\in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ 等价于格伦斯基算子为希尔伯特–施密特算子，

$$\sum_{n,m\geq 0}\frac{1}{(n+1)(m+1)}|d_{n,m}|^2<\infty.$$

格伦斯基算子的希尔伯特–施密特性质刻画了魏尔–彼得松类，并在 Takhtajan 与 Teo [TT] 所引入的万有 Teichm¨uller 空间的希尔伯特流形精细化中起着核心作用。它在 [RSS] 中对黎曼曲面配边范畴的精细化同样至关重要。由此，希尔伯特–施密特条件为 Teichm¨uller 理论的魏尔–彼得松几何提供了关键的解析要素（见 [SS]）。

因子化同调与拓扑场论密切相关 [Lu2, Sc, CS, AF2]。我们期望，通过适当地定义一个包含上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 作为满幺半子范畴的二维黎曼流形“希尔伯特”范畴 $\mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO},\mathrm{HS}}$，并取左 Kan 延拓，便可构造 Segal 的函子性共形场论 [Se]。

0.3. 酉顶点算子代数与解析共形块

最后，我们解释 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 与仿射海森堡顶点算子代数之间的关系。设 $\zeta\in\mathbb{D}$ 与 $1>r,s>0$ 满足

$$B_r(\zeta),\ B_s(0)\subset\mathbb{D}\quad\text{and}\quad\overline{B_r(\zeta)}\cap\overline{B_s(0)}=\emptyset. \tag{0.13}$$

则 $(B_{\zeta,r},B_{0,s})\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(2)$（见 (0.6)）。在等距映射 $\Psi: M(0)\to\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 下，对任意 $a,b\in M(0)$，我们证明恒等式

$$\rho_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\Psi(a),\Psi(b))=\Psi\Big(Y(r^{L(0)}a,z)s^{L(0)}b\big|_{z=\zeta}\Big) \tag{0.14}$$

在 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 中（定理 3.7）。这可以视为全纯因子化代数与顶点算子代数之间的关系在希尔伯特空间层面上的一种精细化 [CG1]（另见 [Br, Vi, Ni]）。此外，借助 [AMT], 中建立的酉完全顶点算子代数与公理化QFT之间的关系，它为因子化代数与量子场论的泛函分析表述之间架起了一座桥梁。已知有许多酉（完全）顶点算子代数的例子，我们预期，通过如 (0.14) 那样考虑顶点算子的完备化，可以产生大量 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数以及二维黎曼流形的依赖度量的不变量的例子。

本文显式构造的幺半群作用(0.11)，应通过共形焊接与Henriques-Tener幺半群作用 [HT1, HT2], 密切相关，后者是通过对Virasoro作用取指数来定义的。我们将这一联系留待今后的工作。

最后，我们讨论它与非手征共形场论的关系。对于一个全纯映射ϕ： $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, 这一赋值

$$\mathcal{J}(\phi)(z)=\overline{\phi(\bar{z})}$$

定义了上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$（定义 1.1）的一个外自同构 $\mathcal{J}$，因此可以定义通过 $\mathcal{J}$ 扭曲 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 所得到的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ - 代数。这对应于反全纯仿射海森堡顶点算子代数 $M(0)$ [Mo1]。此外，

$$\mathrm{Sym}\,A^2(\mathbb{D}) \otimes \mathrm{Sym}\,A^2(\mathbb{D})^{\mathcal{J}}$$

自然地具有 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数结构（这是由与二维拉普拉斯算子相关的因子化代数自然产生的完整共形场论；参见 [Mo3]）。

如此一来，a $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数的概念便不依赖于由例外同构 (0.2) 得到的全纯分裂，而左 Kan 延拓 (0.12) 可视为由共形块所描述的局部到整体原理的实解析类比。

本文的组织结构如下。在第 1.1 节中，我们回顾 [Mo2] 中上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的定义，并定义外自同构 $\mathcal{J}$。在第 1.2 节中，我们回顾伯格曼空间的定义及其基本性质。在第 1.3 节中，我们定义子 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}} \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$。在第 2.1 节中，我们构造幺半群同态 (0.11)，并在第 2.2 节中定义几何维克收缩。基于这些内容，我们在第 2.3 节中赋予 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数结构。在第 3.1 节中，我们回顾仿射海森堡顶点算子代数 $M(0)$ 及其酉结构，并在第 3.2 节中证明 $M(0)$ 与 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 之间的对应关系 (0.14)。

致谢

我谨向 Yoh Tanimoto 和 Maria Stella Adamo 致谢，感谢他们就酉满顶点算子代数所进行的宝贵讨论。本研究得到早期职业科学家科研资助（24K16911）的支持。

记号

我们将使用以下记号：

$\mathbb{D}$：$= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$，$\mathbb{C}$中的单位圆盘。$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$：全纯圆盘嵌入的幺半群，§1.1。$\mathbb{G}$：$= \{e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\}_{\theta\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{D}}$ $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ (1) 的极大子群，§1.1。$\mathbb{CE}_2$：可延拓至邻域的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 子~~op~~erad，§1.3。$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$：满足平方可积条件的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 子 operad，§1.3。$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$：$\mathbb{C}$-向量空间范畴。Hilb：带有有界线性算子的希尔伯特空间范畴。IndHilb：Hilb 中 ind 对象的范畴。$\otimes$：向量空间的代数张量积。$\hat{\otimes}$：希尔~~伯~~特空间的张量积。$A^2(\mathbb{D})$：伯格曼空间，§1.2。$d\mu = \frac{1}{\pi} dx_1 dx_2$：归一化勒贝格测度，§1.2。$E_a(z)$：$= \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}$，其中 $a \in \mathbb{D}$，§1.2。

1. 预备知识

在第 1.1 节中，我们回顾文献 [Mo2] 中引入的上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的定义。在第 1.2 节中，我们介绍伯格曼空间——平方可积全纯函数构成的希尔伯特空间——并回顾其作为再生核希尔伯特空间的结构。在第 1.3 节中，我们定义子 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}} \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$，并考察它与文献 [Mo2] 中引入的另一个子 operad $\mathbb{CE}_2 \subset \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 之间的关系。

1.1. 共形平坦二维圆盘上运算子及其复共轭。 本节遵循 [Mo2 第 1], 节，回顾共形平坦二维圆盘上运算子的$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 定义，并证明复共轭定义了该上运算子的一个自同构。

令 $\mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{Emb}}$ 为一个范畴，其对象是无边界的二维定向黎曼流形，态射是保定向共形开嵌入。令 $g_{\mathrm{std}} = dx_1^2 + dx_2^2$ 为 $\mathbb{R}^2$上的黎曼度量。于是单位圆盘

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

配备 g_{std} 后是 $\mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{Emb}}$的一个对象。我们简记 $\mathbb{D}$ 为这对对象 $(\mathbb{D}, g_{\mathrm{std}})$。令 $\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{emb}}$ 为由 $\mathbb{D}$生成的 $\mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{Emb}}$ 的满幺半子范畴。$\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{emb}}$ 的对象由有限个圆盘的不交并组成，$\sqcup_n \mathbb{D}$ $(n \geq 0)$。我们定义

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mfld}_{2,\mathrm{Emb}}^{\mathrm{CO}}}(\sqcup_n \mathbb{D}, \mathbb{D}) \qquad (n \geq 0)$$

是圆盘共形嵌入运算子。对于一个对称幺半范畴C，该运算子上的代数，即 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$-代数在 C中，与对称幺半函子 $\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}}{}_{,\mathrm{emb}} \to C$ 之间存在一一对应关系（参见 [Mo2，命题 1.11]）。由于在二维中，保定向共形映射等价于具有非零导数的全纯映射，因此我们有

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \mid f \text{ is an injective holomorphic map}\},$$

并且 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$在复合运算下成为一个（无限维）幺半群。此外，$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n)$由像两两不相交的共形开嵌入给出，

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n) = \{(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)^n \mid f_i(\mathbb{D}) \cap f_j(\mathbb{D}) = \emptyset, \text{ for } i \neq j\}.$$

这里 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(0)$对应于从空集出发的唯一映射，即 $* = (\emptyset \to \mathbb{D})$。根据施瓦茨引理，$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)^{\times} = \{f$中可逆元素构成的极大子群与 M¨obius 变换子群 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)\}$重合

$$\mathrm{PSU}(1,1) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z} \right\}_{\theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1},$$

参见 [Mo2，命题 1.22], ，我们将其记为 $\mathbb{G}$。

$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$、$\circ_i$上的上运算子结构：$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n) \times \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(m) \to \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n + m - 1)$，由在第$i$个圆盘（$i \in \{1, \ldots, n\}$）中复合圆盘嵌入的运算给出，

$$(f_1, \ldots, f_n) \circ_i (g_1, \ldots, g_m) = (f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i g_1, \ldots, f_i g_m, f_{i+1}, \ldots, f_n).$$

这里，恒等映射（$\mathrm{id}_{\mathbb{D}}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$）$\in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$ 充当单位元，而与 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 0( )的复合，

$$(f_1,\dots,f_n)\circ_i *=(f_1,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,f_n),$$

是通过遗忘第i个圆盘嵌入而得到的运算，将其视为$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n-1)$中的一个元素。令 $\phi\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$。设

$$\mathcal{J}(\phi)(z)=\overline{\phi(\bar{z})}$$

对于任意 $z\in\mathbb{D}$。那么，$\mathcal{J}:\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)\to\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$ 是一个幺半群同态。定义一列映射

$$\mathcal{J}:\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n)\to\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n),\quad (\phi_1,\dots,\phi_n)\mapsto\mathcal{J}(\phi_1,\dots,\phi_n)=(\mathcal{J}(\phi_1),\dots,\mathcal{J}(\phi_n)).$$

那么，$\mathcal{J}$ 是上运算 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的一个自同构。

定义 1.1。对于任意 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$-代数 A，由下式给出

$$\rho_n:\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n)\to\mathrm{Hom}(A^{\otimes n},A),\qquad (n\geq 0)$$

A 的复共轭是定义在同一对象 A 上的一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$-代数，其乘法为$(\rho_n\circ\mathcal{J})_{n\geq 0}$。我们将其记为 $A^{\mathcal{J}}$。

注 1.2。对于保定向与否均可的共形微分同胚 gff，赋值 $\phi\mapsto\mathcal{J}(\phi)$ 可以作更一般的定义。如果 $g\in\mathrm{PSU}(1,1)$，相应的扭曲由一个内自同构给出，而且容易看出 A^g 与 A 同构。因此，根据施瓦茨引理，上述扭曲实质上给出了唯一的非平凡扭曲。

圆盘的双全纯自同构群，$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)^{\times}\cong\mathrm{PSU}(1,1)$，满足以下重要恒等式：

命题 1.3。对任意 $\phi(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\in\mathrm{PSU}(1,1)\ (\theta\in\mathbb{R},\ |\alpha|<1)$，

$$\frac{\phi'(z)\overline{\phi'(w)}}{(1-\phi(z)\overline{\phi(w)})^2}=\frac{1}{(1-z\bar{w})^2}$$

对任意 $z,w\in\mathbb{D}$ 均成立。此外，$\mathcal{J}(\phi)(z)=e^{-i\theta}\frac{z-\bar{\alpha}}{1-\alpha z}\in\mathrm{PSU}(1,1)$。

证明。由于 $\phi'(z)=e^{i\theta}\frac{(1-|\alpha|^2)}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$，我们有

$$\frac{\phi'(z)\overline{\phi'(w)}}{(1-\phi(z)\overline{\phi(w)})^2}=\frac{(1-|\alpha|^2)^2}{((1-\bar{\alpha}z)(1-\alpha\bar{w})-(z-\alpha)(\bar{w}-\bar{\alpha}))^2}=\frac{1}{(1-z\bar{w})^2}.$$

□

1.2. 伯格曼空间及其张量积。 本节回顾伯格曼空间的一些基本结果。本节内容是标准的；关于伯格曼空间的更详细介绍，可参见例如 [HKZ]。

对于 $p \geq 1$，令 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^p)$ 表示定义在 $\mathbb{D}^p \subset \mathbb{C}^p$ 上的全纯函数空间，并且 $d\mu = \frac{1}{\pi^p} d^2z_1 \dots d^2z_p = \frac{1}{\pi^p} dx_1 \cdots dx_{2p}$ 为 $\mathbb{D}^p$ 上的归一化勒贝格测度。令

$$\begin{aligned} A^2(\mathbb{D}^p) &= L^2(\mathbb{D}^p, d\mu) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^p), \\ &= \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^p) \mid \int_{\mathbb{D}^p} |f(z_1, \dots, z_p)|^2 d\mu < \infty \right\}, \end{aligned}$$

称为**伯格曼空间**，由 $\mathbb{D}^p$ 上的平方可积全纯函数构成。众所周知，伯格曼空间是 $L^2(\mathbb{D}^p, d\mu)$ 的闭子空间，因此是一个希尔伯特空间。记 $(-,-)_B$ 为 $A^2(\mathbb{D}^p)$ 上的内积。假设 $p = 1$。由于

$$(z^n, z^m)_B = \int_{\mathbb{D}} \overline{z^n} z^m d\mu = \int_{\mathbb{D}} r^{n+m} e^{(-n+m)i\theta} r \frac{d\theta}{\pi} dr = \frac{1}{n+1} \delta_{n,m},$$

$\{e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n\}_{n \geq 0}$ 是 $A^2(\mathbb{D})$ 的一组标准正交基。对于任意 $a \in \mathbb{D}$，

$$E_a(z) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\bar{a})} e_n(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a^n z^n = \frac{1}{(1-az)^2} \in H(\mathbb{D})$$

是平方可积的，且 $E_a(z) \in A^2(\mathbb{D})$。此外，对于任意 $f = \sum_{n \geq 0} c_n e_n(z) \in A^2(\mathbb{D})$，

$$(E_a(z), f)_B = \int_{\mathbb{D}} \overline{\frac{1}{(1-az)^2}} f(z) d\mu = \sum_{n \geq 0} c_n e_n(\bar{a}) = f(\bar{a}). \tag{1.1}$$

因此，与 E_a 取内积对应于在 $\bar{a}$ 处求值。由 (1.1)，我们有：

命题 1.4. 由 $\{E_a\}_{a \in \mathbb{D}} \subset A^2(\mathbb{D})$ 张成的子空间在 $A^2(\mathbb{D})$ 中稠密，并且

$$(E_a(z), E_b(z))_B = \frac{1}{(1-\bar{a}b)^2},$$

对任意 $a, b \in \mathbb{D}$ 成立。

引理 1.5. 对任意 $n \geq 0$ 和 $a \in \mathbb{D}$，$\partial_a^n E_a(z) \in A^2(\mathbb{D})$。此外，对任意 $f \in A^2(\mathbb{D})$，

$$(\partial_a^n E_a(z), f)_B = (\partial_z^n f)(\bar{a}).$$

证明。 由于 $E_a(z)$ 的极点位于 $z = a^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$，$\partial_a^n E_a(z) \in A^2(\mathbb{D})$。由于

$$\partial_a^n E_a(z) = \frac{(n+1)! z^n}{(1-az)^{2+n}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(n+k+1)!}{k!} a^k z^{n+k},$$

对于任意 $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$，我们有：

$$(\partial_a^n E_a(z), f) = \sum_{k \geq 0} \frac{(n+k)!}{k!} c_{n+k} \bar{a}^k = (\partial_z^n f)(\bar{a}).$$

□

对于任意 $p \geq 1$，令 $A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes} p}$ 为希尔伯特空间的张量积，它是代数张量积的希尔伯特空间完备化。令 $\mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D})$ 为 $A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes} p}$ 的闭子空间，由（完备化的）正交投影的像定义

$$\hat{S}^p : A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes} p} \to A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes} p}, \quad (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(p)}. \tag{1.2}$$

Set

$$H^k = \bigoplus_{p=0}^{k} \mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D}),$$
$$\mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D})) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D}),$$

代数直和。这里，$\mathrm{Sym}^0 A^2(\mathbb{D})$ 是一维希尔伯特空间，本文中我们将其规范化基向量记为 $\mathbf{1}$。注意，对任意 $k \geq 0$，H^k 是希尔伯特空间，而 $\mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D}))$ 并不完备。设 $f_1, \ldots\ldots, f_p \in A^2(\mathbb{D})$。那么，

$$f_1(z_1) f_2(z_2) \cdots f_p(z_p) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^p) \cap L^2(\mathbb{D}^p), \tag{1.3}$$

我们有一个线性映射 $A^2(\mathbb{D})^{\otimes p} \to A^2(\mathbb{D}^p)$，它是等距的。因此，我们有：

引理 1.6. 对任意 $p \geq 1$，由 (1.3) 定义的 $A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes} p} \to A^2(\mathbb{D}^p)$ 是希尔伯特空间之间的等距同构。此外，$\mathrm{Sym}^p(A^2(\mathbb{D}))$的像由下式给出

$$\{F(z_1, \ldots, z_n) \in A^2(\mathbb{D}^p) \mid F(z_1, \ldots, z_n) = F(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) \textit{ for any } \sigma \in S_n\}.$$

1.3. **调和上闭链与希尔伯特–施密特条件**。 受关于共形拉普拉斯算子 [Mo3 相关因子化代数的研究启发，第 2 节中，3], 我们考虑，对于 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$,

$$F_\phi(z, w) = \frac{\phi'(z)\phi'(w)}{(\phi(z) - \phi(w))^2} - \frac{1}{(z - w)^2} \tag{1.4}$$

并且，对于 $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(2)$,

$$G_{\phi_1, \phi_2}(z, w) = \frac{\phi_1'(z)\phi_2'(w)}{(\phi_1(z) - \phi_2(w))^2}.$$

那么，$F\phi(z,w)$）可全纯延拓穿过对角线 $z = w$，并在 $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ [Mo3 上定义一个全纯函数，命题 2.10]。此外，由于 $\phi_1(\mathbb{D}) \cap \phi_2(\mathbb{D}) = \emptyset$，函数 $G_{\phi_1, \phi_2}(z,w)$ 也在 $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 上定义一个全纯函数。直接计算可得：

命题 1.7. 对任意 $f_1, f_2 \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$ 以及 $(g_1,g_2) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(2)$,

$$F_{f_1 \circ f_2}(z, w) = F_{f_1}(f_2(z), f_2(w)) f_2'(z) f_2'(w) + F_{f_2}(z, w) \tag{1.5}$$

$$G_{f \circ g_1, f \circ g_2}(z, w) = F_f(g_1(z), g_2(w)) g_1'(z) g_2'(w) + G_{g_1, g_2}(z, w) \tag{1.6}$$

$$G_{g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2}(z, w) = G_{g_1, g_2}(f_1(z), f_2(w)) f_1'(z) f_2'(w). \tag{1.7}$$

正如在 [Mo2] 中对 $d \geq 3$ 所观察到的，对于朴素 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的元素，相应的上运算乘法在 $\mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D}))$ 上并非良定义。正如我们稍后将看到的，为了在 $\mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D}))$ 上定义代数结构，这些函数必须是平方可积的，更确切地说，

$$F_\phi(z,w), G_{\phi_1,\phi_2}(z,w) \in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}). \tag{1.8}$$

本节中，我们引入一个满足 (1.8) 的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 子 operad $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$。我们还考察它与 [Mo2] 中引入的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 子 operad $\mathbb{CE}_2$ 之间的关系。

设 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$。那么，$F_\phi(z,w)$ 是 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ 上的全纯函数，但不一定能延拓为 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ 上的连续函数，且 $F_\phi(z,w)\overline{\ } \notin A^{\overline{2}}(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$。事实上，令

$$F_\phi(z,w) = \sum_{n,m\geq 0} f_{n,m} e_n(z) e_m(w).$$

那么，条件 $F_\phi(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ 等价于 $\sum_{n,m\geq 0} |f_{n,m}|^2 < \infty$。令

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) = \{\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) \mid F_\phi(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\}.$$

下面的命题众所周知（例如参见 [Mo3，命题 2.10]）。

命题 1.8. 设 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$。那么，$F_\phi(z,w) = 0$ 当且仅当 ϕ 是一个线性分式变换，也就是说，存在 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$，使得 $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$。

根据命题 1.8，集合 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$ 包含 $\mathbb{G}$；特别地，$\mathrm{id}_{\mathbb{D}} \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。

命题 1.9. 对于任意 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$，$\|F_{\phi_1\circ\phi_2}(z,w)\|_{L^2} \leq \|F_{\phi_1}(z,w)\|_{L^2} + \|F_{\phi_2}(z,w)\|_{L^2}$。特别地，$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$的子幺半群。

证明. 设 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。那么，根据命题 1.7 (1.5)，我们有

$$\|F_{\phi_1\circ\phi_2}(z,w)\|_{L^2} \leq \|F_{\phi_1}(\phi_2(z),\phi_2(w))\phi_2'(z)\phi_2'(w)\|_{L^2} + \|F_{\phi_2}(z,w)\|_{L^2}.$$

因此，该断言由此得出

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} |F_{\phi_1}(\phi_2(z),\phi_2(w))\phi_2'(z)\phi_2'(w)|^2 d\mu(z)d\mu(w) \\ &= \int_{\phi_2(\mathbb{D})\times\phi_2(\mathbb{D})} |F_{\phi_1}(z',w')|^2 d\mu(z')d\mu(w') \leq \int_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} |F_{\phi_1}(z',w')|^2 d\mu(z')d\mu(w') = \|F_{\phi_1}(z,w)\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{1.9}$$

□

一般而言，对于$n \geq 0$，我们定义

$$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n) = \{(\phi_1,\ldots,\phi_n) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)^n \cap \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n) \mid G_{\phi_i,\phi_j}(z,w) \in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}) \text{ for any } i \neq j\}.$$

命题 1.10。 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的子 *operad*。

证明。令 $(f_1,\dots,f_n)\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n)$ 和 $(g_1,\dots,g_m)\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(m)$。则 $(f_1,\dots,f_n)\circ_i(g_1,\dots,g_m)=(f_1,\dots,f_ig_1,\dots,f_ig_m,\dots,f_n)$ 属于 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(n+m-1)$。根据命题 1.9，我们有 $f_ig_j\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。因此，只需证明 $Gf_ig_k, f_ig_l(z,w)$ 和 $Gf_l, f_ig_k(z,w)$ 属于 $L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$，这由命题 1.7 以及与 (1.9) 中类似的计算即可得到。□

最后，我们考察 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 与[Mo2 第 1.1] 节中引入的上运算 $\mathbb{CE}_2$ 之间的关系。首先，我们简要回顾 $\mathbb{CE}_2$的定义。回想一下，$\mathbb{CE}_2(1)$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$ 的一个子集，其中包含满足以下条件的$f\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$:

- 存在$\mathbb{D}$ 的一个开邻域U 以及单射全纯映射$f: U\to\mathbb{C}$，使得$f|_{\mathbb{D}}=\tilde{f}$。

Th以下引理已在 [Mo2 命题 1.6], 中证明，但我们给出一个明确的证明。 f:

引理 1.11. 设$f,g\in\mathbb{CE}_2(1)$。那么，$f\circ g\in\mathbb{CE}_2(1)$。特别地，$\mathbb{CE}_2(1)$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的一个子幺半群。

证明。只需证明存在$f\circ g$的一个延拓。设$f: U\to\mathbb{C}$，且$g: V\to\mathbb{C}$是相应的延拓。由于$g(\mathbb{D})=\overline{g(\mathbb{D})}\subset\mathbb{D}$且$\overline{\mathbb{D}}\subset U$，$g^{-1}(U)\cap V$是$\mathbb{D}$的一个开邻域。于是，$f|_{U\cap\tilde{g}(V)}\circ g: g^{-1}(U)\cap V\to\mathbb{C}$是一个单射全纯映射。因此，断言成立。□

对于任意$n\geq 0$，令

$$\mathbb{CE}_2(n)=\{(f_1,\dots,f_n)\in\mathbb{CE}_2(1)^n\mid\overline{f_i(\mathbb{D})}\cap\overline{f_j(\mathbb{D})}=\emptyset\text{ for }i\neq j\}.$$

这里，$\overline{f_i(\mathbb{D})}$ 是$f_i(\mathbb{D})\subset\mathbb{C}$的闭包。于是，$\mathbb{CE}_2$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的子 operad（见 [Mo2, 命题 1.6]）。

命题 1.12. 作为 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的子 *operad*，$\mathbb{CE}_2\subset\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$。特别地，对于任意$f\in\mathbb{CE}_2(1)$和$(g_1,\dots,g_n)\in\mathbb{CE}_2(n)$,

$$F_f(z,w),\ G_{g_i,g_j}(z,w)\in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\qquad\text{for any } i\neq j.$$

此外，$\mathbb{CE}_2$ 和 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 在 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 的自同构 $\mathcal{J}$ 下均保持不变。

证明. 设$f: U\to\mathbb{C}$为该延拓。于是，

$$\tilde{F}_{\tilde{f}}(z,w)=\frac{\tilde{f}'(z)\tilde{f}'(w)}{(\tilde{f}(z)-\tilde{f}(w))^2}-\frac{1}{(z-w)^2}$$

是$U\times U$上的全纯函数。特别地，$F_f(z,w)$ 延拓为 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$上的连续函数。因此$F_f(z,w)\in L^2(\mathbb{D}\times\overline{\mathbb{D}})$。此外，由于$f_i(\mathbb{D})\cap f_j(\mathbb{D})=\emptyset$,

$$\delta_{ij}=\inf_{z\in\overline{f_i(\mathbb{D})},w\in\overline{f_j(\mathbb{D})}}|z-w|$$

满足 $\delta_{ij}>0$。因此,

$$\int_{\mathbb{D}^2}|G_{g_i,g_j}(z,w)|^2d\mu\leq\frac{1}{\delta_{ij}^2}\int_{\mathbb{D}^2}|g_i'(z)g_j'(w)|^2d\mu=\frac{1}{\delta_{ij}^2}\mathrm{vol}(g_i(\mathbb{D})\times g_j(\mathbb{D}))$$

由此可得 $G_{g_i,g_j}(z,w)\in L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$。最后一个断言显而易见。□

2. 伯格曼空间上的共形平坦 2-圆盘代数

在本节中，我们证明 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 具有 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$-代数结构。这在 ind-希尔伯特空间的框架下，给出了对文献 [Mo3] 中研究的与共形拉普拉斯算子相关的因子化代数的完备化。

2.1. 经典与量子幺半群作用。本节中，我们构造一个幺半群同态 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}))$。

设 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$ 和 $f \in A^2(\mathbb{D})$。由于

$$\int_{\mathbb{D}} |\phi'(z) f(\phi(z))|^2 dz^2 = \int_{\phi(\mathbb{D})} |f(z)|^2 dz^2 \le \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dz^2, \tag{2.1}$$

$$T_\phi : A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D}), \quad f(z) \mapsto \phi'(z)\,(f \circ \phi)(z) \tag{2.2}$$

是一个算子范数至多为 1 的有界线性映射。对于 ϕ_1、$\phi_2 \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}$，有 $T_{\phi_1} T_{\phi_2}(f)(z) = (\phi_2' \circ \phi_1)(z)\,\phi_1'(z)\,(f \circ \phi_2 \circ \phi_1)(z) = T_{\phi_2 \circ \phi_1}(f)(z)$。因此，$T\colon \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}} \to B(A^2(\mathbb{D}))$ 定义了一个幺半群的反同态。我们用 $T_\phi^* : A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D})$ 表示 T_ϕ 的伴随算子。

Fo对任意 $a \in \mathbb{D}$，由于 $(T_\phi^* E_a, f)_B = (E_a, T_\phi f)_B = (E_a, \phi' f \circ \phi)_B = \phi'(\bar{}a)\, f(\phi(\bar{}a))$，我们有 ve

$$T_\phi^*(E_a) = \overline{\phi'(\bar{a})} E_{\overline{\phi(\bar{a})}}. \tag{2.3}$$

定义 ρ_{cl}： $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}} \to \mathbb{B}(A^2(\mathbb{D}))$为

$$\rho_{\mathrm{cl}}(\phi) = T^*_{\mathcal{J}(\phi)}.$$

由于 $T^*_{\phi_1\phi_2} = (T_{\phi_2} T_{\phi_1})^* = T^*_{\phi_1} T^*_{\phi_2}$，且 $\mathcal{J}$ 是 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$的一个自同构，我们有：

命题 2.1. 映射 ρ_{cl}： $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) \to \mathbb{B}(A^2(\mathbb{D}))$ 是一个幺半群同态，满足

$$\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)(E_a(z)) = \phi'(a) E_{\phi(a)}$$

对任意 $a \in \mathbb{D}$ 和 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1)$。此外，限制映射 $\rho_{\mathrm{cl}}|_{\mathbb{G}}$： $\mathbb{G} \to \mathbb{B}(A^2(\mathbb{D}))$ 是一个强连续酉表示。

证明。 只需证明最后一个断言。令 $\phi \in \mathbb{G}$。由于对任意a、$b \in \mathbb{D}$，由命题1.4和命题 1.3,

$$(T^*_{\mathcal{J}(\phi)} E_a, T^*_{\mathcal{J}(\phi)} E_b) = \frac{\overline{\phi'(a)}\phi'(b)}{(1 - \overline{\phi(a)}\phi(b))^2} = \frac{1}{(1 - \bar{a}b)^2} = (E_a, E_b),$$

又由于 $\{E_a\}_{a\in\mathbb{D}} \subset A^2(\mathbb{D})$ 张成稠密子空间，因此T_ϕ^* 是酉的。故$\rho_{\mathrm{cl}}|_{\mathbb{G}}$ 是一个酉表示。对于$E_a \in A^2(\mathbb{D})$，容易看出，当$g \to 1$时， $\rho_{\mathrm{cl}}(g)E_a \to E_a$ 。由于$E_a\}_{a\in\mathbb{D}}$ 张成的子空间是稠密的，强连续性由此得证。□

设$a \in \mathbb{D}$和 $1 > r > 0$ 满足$B_r(a) \subset \mathbb{D}$。那么，

$$B_{a,r}(z) = rz + a \tag{2.4}$$

是 $\mathbb{CE}_2(1)$的一个元素。

引理 2.2. 对于任意的 $n \geq 0$,

$$\rho_{\mathrm{cl}}(B_{a,r})(\sqrt{n+1}e_n(z)) = \frac{r^{n+1}}{n!}\partial_a^n E_a(z).$$

证明。 对任意 $f \in A^2(\mathbb{D})$, 由 $f(rz+a) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(rz)^k$,

$$\begin{aligned}(\rho_{\mathrm{cl}}(B_{a,r})(\sqrt{n+1}e_n(z)), f) &= (T^*_{\mathcal{J}(B_{a,r})}(\sqrt{n+1}e_n(z)), f)\\ &= (\sqrt{n+1}e_n(z), T_{B_{\bar{a},r}} f)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\sqrt{n+1}e_n(z)} r f(rz+\bar{a}) d\mu = \frac{r^{n+1}}{n!} f^{(n)}(\bar{a}).\end{aligned}$$

因此, 该命题由引理 1.5 得出。 □

我们考察 $r \in (0,1]$ 的膨胀。由引理 2.2,

$$\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r})(z^n) = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\partial_a^n e_a(z)\big|_{a=0} = r^{n+1}z^n.$$

因此, $\{z^n \in A^2(\mathbb{D})\}_{n\geq 0}$ 构成由这些膨胀的共同特征向量组成的标准正交基。因此, 我们有（见 [Mo2, 定义 1.32]）：

引理 2.3。 膨胀 $\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r})$ 定义了一个强连续、自伴的压缩幺半群同态

$$(0,1] \to \mathbb{B}(A^2(\mathbb{D})),$$

并且 z^n 是满足 $\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r})z^n = r^{n+1}z^n$ 的共同特征向量。此外, $\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r})$ 对 $r < 1$ 是希尔伯特–施密特算子。

用终 endomorphism($\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$) 表示 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 的全体线性自同态所成的空间。我们将 ρ_{cl}： $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) \to \mathbb{B}(A^2(\mathbb{D}))$ 延拓为一个幺半群同态

$$\rho_{\mathrm{cl}} : \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(1) \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}))$$

如下。对于 $p \geq 1$ 与 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in A^2(\mathbb{D})^{\otimes p}$, 令

$$\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = (\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)v_1) \otimes \cdots \otimes (\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)v_p),$$

它可唯一延拓为 $\mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D})$ 上的有界线性映射。对于 $p = 0$ 定义$\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)\mathbf{1} = \mathbf{1}$。

下文中，我们对幺半群同态 ρ_{cl}引入量子修正，并构造一个幺半群同态

$$\rho : \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})).$$

设 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。则由定义,

$$F_\phi(z,w) \in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}) \cong A^2(\mathbb{D})\hat{\otimes}A^2(\mathbb{D}). \tag{2.5}$$

如下定义有界线性映射 ∂_ϕ： $A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$

$$\partial_\phi(P(z,w)) = (F_{\mathcal{J}\phi}, P)_B = \int_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} F_\phi(\bar{z},\bar{w})P(z,w)d\mu$$

对于 $P(z,w) \in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$（见命题 1.12）。

Pro位置 2.4。 对于任意 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$，双线性映射 $\partial_\phi : A^2(\mathbb{D})\hat{\otimes}A^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ 满足 s

$$|\partial_\phi(P)| \le \left\|F_{\mathcal{J}\phi}\right\|_B \|P\|_B$$

对于任意 $P \in A^2$（$\mathbb{D}$）$\hat{\otimes}A^2$（$\mathbb{D}$）。此外，对于任意 a，$b \in \mathbb{D}$，

$$\partial_\phi(E_a \otimes E_b) = F_\phi(a, b).$$

¯证明。由于 $\partial_\phi(\mathrm{E}_a, \mathrm{E}_b) = (\mathrm{F}_{\mathcal{J}\phi}(\mathrm{z}, \mathrm{w}), \mathrm{E}_a(\mathrm{z})\mathrm{E}_b(\mathrm{w})) = (\mathrm{E}_a(\mathrm{z})\mathrm{E}_b(\mathrm{w}), \mathrm{F}_{\mathcal{J}\phi}(\mathrm{z}, \mathrm{w})) = \mathrm{F}_{\mathcal{J}\phi}(\bar{\mathrm{a}}, \mathrm{b}) = \mathrm{F}_\phi(\mathrm{a},\mathrm{b})$。□

令 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。定义 $\partial_\phi : (A^2(\mathbb{D}))^{\hat{\otimes}n} \to (A^2(\mathbb{D}))^{\hat{\otimes}n-2}$ 为

$$\partial_\phi(a_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} a_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_\phi(a_i \otimes a_j)\left(a_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{\otimes} a_n\right) \tag{2.6}$$

对于$n \ge 2$且当 $\partial_\phi = 0$若$n = 0$时，1。这里$a_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{\otimes} a_n$表示$A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes}(n-2)}$中的向量，它由省去$a_i(z)$和$a_j(z)$得到。由于 ∂_ϕ 是一个次数为 -2 且局部幂零的算子，指数映射

$$\exp(\partial_\phi) : \bigoplus_{p \ge 0} A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes}p} \to \bigoplus_{p \ge 0} A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes}p} \tag{2.7}$$

是一个定义良好的线性映射。

引理 2.5. 对于任意 $p \ge 2$ 和 $a_1, \ldots, a_p \in A^2(\mathbb{D})$,

$$\partial_\phi(\hat{S}^p(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)) = \hat{S}^{p-2}(\partial_\phi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)).$$

证明。 由于 $F_{\mathcal{J}(\phi)}(z, w) = F_{\mathcal{J}(\phi)}(w, z)$, $\partial_\phi(a \otimes b) = \partial_\phi(b \otimes a)$ 对任意 $a,b \in A^2(\mathbb{D})$ 均成立。因此,

$$\begin{aligned}
\partial_\phi(\hat{S}^p(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \partial_\phi(a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{i<j} \partial_\phi(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(j)})\left(a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \hat{a}_{\sigma(i)} \cdots \hat{a}_{\sigma(j)} \cdots \otimes a_p\right) \\
&= \hat{S}^{p-2}(\partial_\phi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)).
\end{aligned}$$

□

因此，(2.7) 在 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}) \subset \bigoplus_{p \ge 0} A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes}p}$ 上的限制定义了一个线性映射 $\exp(\partial_\phi) : \mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}) \to \mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$。令

$$\rho(\phi) = \rho_{\mathrm{cl}}(\phi) \circ \exp(\partial_\phi) : \mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}) \to \mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D}).$$

定理 *2.6.* 对任意 $\phi, \psi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$, $\rho(\phi \circ \psi) = \rho(\phi) \circ \rho(\psi)$ 且 $\rho(1_{\mathbb{D}}) = id$，即， ρ 是幺半群 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ 在 $SymA^2(\mathbb{D})$ 上的一个表示。此外，对于任意 $k \ge 0$, ρ 保持 $\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p=0}^{k} Sym^p A^2(\mathbb{D}) \subset SymA^2(\mathbb{D})$，且对于任意 $\phi \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$,

$$\rho(\phi)|_{\mathcal{H}^k} : \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}^k$$

是一个有界线性算子。此外，限制 $\rho|_{\mathrm{PSU}(1,1)} : \mathrm{PSU}(1,1) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}^k)$是一个强连续酉表示。

引理 2.7。令 $\phi,\psi\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1)$。那么，

$$\partial_\psi+\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi))=\partial_{\phi\circ\psi}$$

作为线性映射 $A^2(\mathbb{D})\hat{\otimes}A^2(\mathbb{D})\to\mathbb{C}$。

证明。 由于两边都是有界线性算子，只需在子集 $\{E_a\}_{a\in\mathbb{D}}\subset A^2(\mathbb{D})$ 上证明该恒等式。由引理 2.4，对任意 $a,b\in\mathbb{D}$

$$\Big(\partial_\psi+\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi))\Big)(E_a,E_b)=F_\psi(a,b)+\psi'(a)\psi'(b)F_\phi(\psi(a),\psi(b)).$$

因此，命题由命题 1.7 得证。 □

定理 *2.6* 的证明）。由于

$$\exp(\partial_\phi)\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)=\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\exp(\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)))$$

作为 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 上的线性映射，由引理 2.7，我们有

$$\begin{aligned}\rho(\phi)\rho(\psi)&=\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)e^{\partial_\phi}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)e^{\partial_\psi}=\rho_{\mathrm{cl}}(\phi)\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)e^{\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi))}e^{\partial_\psi}\\&=\rho_{\mathrm{cl}}(\phi\circ\psi)e^{\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi))+\partial_\psi}=\rho_{\mathrm{cl}}(\phi\circ\psi)e^{\partial_{\phi\circ\psi}}=\rho(\phi\circ\psi).\end{aligned}$$

这里，我们使用 $[\partial_\phi\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)\hat{\otimes}\rho_{\mathrm{cl}}(\psi)),\ \partial_\psi]=0$ 作为 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 上的线性映射。强连续性和幺正性由命题 1.8 和命题 2.1 立即得出。□

2.2. **几何维克收缩的构造**。设 $(\phi,\psi)\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(2)$。那么，

$$G_{\phi,\psi}(z,w)\in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}).$$

定义一个有界线性映射 $C_{\phi,\psi}:A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\to\mathbb{C}$，定义如下：

$$C_{\phi,\psi}(P(z,w))=(G_{\mathcal{J}\phi,\mathcal{J}\psi},P)_B=\int_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}G_{\phi,\psi}(\bar{z},\bar{w})P(z,w)d\mu$$

对于$P(z,w)\in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$。定义 $\{g_{n,m}\}_{n,m\geq0}$ 如下：

$$G_{\phi,\psi}(z,w)=\sum_{n,m\geq0}g_{n,m}z^nw^m. \tag{2.8}$$

于是，我们有：

命题 2.8。 设$(\phi,\psi)\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(2)$。那么，存在唯一的有界线性映射 $C_{\phi,\psi}:A^2(\mathbb{D})\hat{\otimes}A^2(\mathbb{D})\to\mathbb{C}$，使得

$$C_{\phi,\psi}(E_a\otimes E_b)=G_{\phi,\psi}(a,b).$$

对于任意 $a,b\in\mathbb{D}$。此外，$C_{\phi,\psi}$ 满足 $C_{\phi,\psi}(\sqrt{n+1}e_n(z)\otimes\sqrt{m+1}e_m(w))=g_{n,m}$ 对于任意 $n,m\geq0$。

命题 2.9。 令 $(\phi_1,\ \phi_2)\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(2)$。那么，作为有界线性映射，以下性质成立：$A^2(\mathbb{D})\hat{\otimes}A^2(\mathbb{D})\to\mathbb{C}$:

（*1*）对于任意 $\psi_1,\ \psi_2\in\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$（1），

$$C_{\phi_1\circ\psi_1,\phi_2\circ\psi_2}=C_{\phi_1,\phi_2}\circ(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi_1)\otimes\rho_{\mathrm{cl}}(\psi_2)).$$

(2) 对于任意 $h \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ (1)，

$$C_{h\circ\phi_1,h\circ\phi_2} = C_{\phi_1,\phi_2} + \partial_h \circ (\rho_{\mathrm{cl}}(\phi_1) \otimes \rho_{\mathrm{cl}}(\phi_2)).$$

证明。 只需证明这些等式在子集 $\{E_a\}_{a\in\mathbb{D}} \subset A^2(\mathbb{D})$ 上成立。(1) 由命题 1.7 和

$$\begin{aligned} C_{\phi_1,\phi_2}(\rho_{\mathrm{cl}}(\psi_1)E_a \otimes \rho_{\mathrm{cl}}(\psi_2)E_b) &= \psi_1'(a)\psi_2'(b)C_{\phi_1,\phi_2}(E_{\psi_1(a)} \otimes E_{\psi_2(b)}) \\ &= \frac{\psi_1'(a)\phi_1'(\psi_1(a))\psi_2'(b)\phi_2'(\psi_2(b))}{(\phi_1(\psi_1(a)) - \phi_2(\psi_2(b)))^2} = C_{\phi_1\psi_1,\phi_2\psi_2}(E_a \otimes E_b). \end{aligned}$$

类似地，(2) 由

$$\begin{aligned} \partial_h \circ (\rho_{\mathrm{cl}}(\phi_1) \otimes \rho_{\mathrm{cl}}(\phi_2))(E_a \otimes E_b) &= \phi_1'(a)\phi_2'(b)\partial_h(E_{\phi_1(a)} \otimes E_{\phi_2(b)}) \\ &= \phi_1'(a)\phi_2'(b)\left(\frac{h'(\phi_1(a))h'(\phi_2(b))}{(h\circ\phi_1(a) - h\circ\phi_2(b))^2} - \frac{1}{(\phi_1(a) - \phi_2(b))^2}\right) \\ &= C_{h\circ\phi_1,h\circ\phi_2}(E_a \otimes E_b) - C_{\phi_1,\phi_2}(E_a \otimes E_b) \end{aligned}$$

□

设 a、$b \in \mathbb{D}$ 以及 $1 > r$、$s > 0$ 满足

$$B_r(a), B_s(b) \subset \mathbb{D} \qquad B_r(a) \cap B_s(b) = \emptyset.$$

那么，$(B_{a,r}(z),B_{b,s}(z)) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{emb}}(2)$（见 (2.4)），并且

$$G_{(B_{a,r}(z),B_{b,s}(z))}(z,w) = \frac{rs}{(rz + a - sw - b)^2}. \tag{2.9}$$

命题 2.10。 $G_{(B_{a,r}(z),B_{b,s}(z))}(z,w) \in A^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ 当且仅当

$$\overline{B_r(a)} \cap \overline{B_s(b)} = \emptyset.$$

此外，在此情形下 $(B_{a,r}(z), B_{b,s}(z)) \in \mathbb{CE}_2(2)$，并且对任意 $n,m \geq 0$,

$$C_{(B_{a,r}(z),B_{b,s}(z))}(\sqrt{n+1}e_n(z), \sqrt{m+1}e_m(z)) = \frac{r^{n+1}}{n!}\frac{s^{m+1}}{m!}\partial_z^n\partial_w^m\frac{1}{(z-w)^2}\Big|_{z-w=a-b}.$$

证明。 关于平方可积性的等价性，可以完全按照 [Mo2 命题 2.26] 的证明中的论证来证明。最后的结论由命题 2.8 得出。□

2.3. **共形平坦圆盘 2-代数的构造**。 本节中，我们使用命题 2.9 构造一个$\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数。论证的许多部分与 [Mo2 第 2.5] 节中的内容平行。简记 $A^2(\mathbb{D}) = \mathcal{H}$ 和 $A = \mathrm{Sym}(\mathcal{H})$。

令 $(g_1,g_2) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(2)$。与 (2.6) 类似，对于 $p,q \geq 0$，我们定义

$$\hat{C}_{g_1,g_2} : \mathcal{H}^{\hat{\otimes}p}\hat{\otimes}\mathcal{H}^{\hat{\otimes}q} \to \mathcal{H}^{\hat{\otimes}p-1}\hat{\otimes}\mathcal{H}^{\hat{\otimes}q-1} \tag{2.10}$$

如下。若 $p, q \geq 1$，则在代数张量积 $\mathcal{H}^{\otimes p} \otimes \mathcal{H}^{\otimes_q}$上定义

$$\hat{C}_{g_1,g_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p,\, w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) = \sum_{\substack{p \geq i \geq 1 \\ q \geq j \geq 1}} C_{g_1,g_2}(v_i, w_j)(v_1 \otimes \ldots \hat{v}_i \cdots \otimes v_p) \otimes (w_1 \otimes \ldots \hat{w}_j \cdots \otimes w_q),$$

对任意 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in \mathcal{H}^{\otimes p}$ 和 $w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \in \mathcal{H}^{\otimes_q}$。

该算子是有界的，并如式（2.10）所示，在完备化上诱导出一个有界线性映射。若 $p = 0$ 或 $q = 0$，则令 $\hat{C}_{g_1,g_2} = 0$。与引理 2.5 类似，$\hat{C}_{g_1,g_2}$ 的限制诱导出一个有界线性映射 $\mathrm{Sym}^p\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathrm{Sym}^q(\mathcal{H}) \to \mathrm{Sym}^{p-1}\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathrm{Sym}^{q-1}\mathcal{H}$（见 [Mo2, 引理 2.32]）。由于 $\hat{C}_{g_1,g_2}$ 是一个降次算子，对每个 $p,q \geq 0$，其作用

$$\exp(\hat{C}_{g_1,g_2}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \hat{C}^k_{g_1,g_2}$$

在 $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}^q$ 上都是有限和。因此，$\exp(\hat{C}_{g_1,g_2}) : A \otimes A \to A$ 定义良好，且其在 $\mathcal{H}_p \hat{\otimes} \mathcal{H}^q$ 上的限制是一个有界线性算子。

令 $\rho_1 = \rho :\ \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \to$ 终 endomorphismA。设 $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n)$，其中 $n \geq 2$。对于 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$，记 $\exp(\hat{C}^{i\,j}_{g_i}, , g_j)$ 为 $A^{\otimes n}$ 上的算子，它由 $\exp(\hat{C}_{g_i} g_j)$ 作用于第 i 个和第 j 个张量因子得到。于是，算子 $\exp(\hat{C}^{i\,j}_{g_i}, , g_j)$ 和 $\exp(\hat{C}^{k\,l}_{g_k}, , g_j)$ 彼此交换。算子 $\exp(\sum n \geq i > j \geq 1 \hat{C}^{i}, j g_i, g_j)$ 是所有这些两两交换算子的复合。我们还定义 $\hat{S} : A^{\otimes n} \to A$，使得它在 $\mathrm{Sym}^{p_1}\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{p_n}\mathcal{H}$ 上的限制与 $\hat{S}\ p_1 + \cdots + p^n :\ \mathcal{H}\hat{\otimes} p_1 + \cdots + p^n \to \mathrm{Sym}_{p_1 + \cdots + p^n}(\mathcal{H})$ 的限制一致。

我们定义一个线性映射 $\rho_{g_1,\ldots,g_n} : A^{\otimes n} \to A$，由以下复合给出：

$$A^{\otimes n} \xrightarrow{\exp(\sum_{n \geq i > j \geq 1} \hat{C}^{i,j}_{g_i,g_j})} A^{\otimes n} \xrightarrow{\rho_1(g_1) \otimes \cdots \otimes \rho_1(g_n)} A^{\otimes n} \xrightarrow{\hat{S}} A.$$

最后，对于 $* = (\emptyset \to \mathbb{D}) \in \mathbb{CE}_2(0)$，我们定义

$$\rho_0(*) : \mathbb{C} \to A, \quad 1 \mapsto \mathbf{1}.$$

定理 2.11. $(A, \rho, \mathbf{1})$ 是 $Vect_{\mathbb{C}}$ 中的一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数，带有希尔伯特空间滤过 $\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p=0}^{k} \mathrm{Sym}^p\mathcal{H}$ [Mo2，定义 1。27]。此外，对于任意 $k \geq 0$，幺半群表示 $\rho_1 :\ \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(1) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}^k)$ 满足 [Mo2，定义 1。32]中的条件 *(U)* 和 *(D)*。

证明。我们首先验证 A 是一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数（参见 [Mo2，定义 1.10]）。S_n-不变性显然。等式 $\rho_1(\mathrm{id}_{\mathbb{D}}) = \mathrm{id}_A$ 也由定义得出。设 $(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(n+1)$ 和 $(h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}(m)$。我们将证明

$$\rho_{g_1,\ldots,g_n,g_{n+1}h_1,\ldots,g_{n+1}h_m} = \rho_{(g_1,\ldots,g_n,g_{n+1})} \circ_{n+1} \rho_{(h_1,\ldots,h_m)}. \tag{2.11}$$

为简便起见，我们将 $\hat{C}^{i\,j}_{g_i,,g_j}$ 记作 $\hat{C}_{g_i,g_j}$，并将 $\rho_1(g_i)$（分别地，$\rho_{\mathrm{cl}}(g_i)$）简记为 g_i（分别地，g_i^{cl}）。当 $m = 0$ 时，(2.11)成立的情形显然，因为 $\hat{C}$ 和 ρ_1 在.....上平凡作用

1. 若 $m \geq 1$，则由命题 2.9 可得

$$
\begin{aligned}
&\rho_{g_1,\ldots,g_n,g_{n+1}h_1,\ldots,g_{n+1}h_m} \\
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1}h_1 \otimes \ldots g_{n+1}h_m) e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}h_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_{n+1}h_i,g_{n+1}h_j}}\right) \\
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1}h_1 \otimes \ldots g_{n+1}h_m) e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}}(\mathrm{id}\otimes h_j^{\mathrm{cl}})} e^{\sum \hat{C}_{h_i,h_j}+\partial_{g_{n+1}}(h_i^{\mathrm{cl}}\otimes h_j^{\mathrm{cl}})}\right) \\
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1} \otimes \cdots \otimes g_{n+1})(\mathrm{id} \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_m) e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}}(\mathrm{id}\otimes h_j^{\mathrm{cl}})} e^{\sum \hat{C}_{h_i,h_j}+\partial_{g_{n+1}}(h_i^{\mathrm{cl}}\otimes h_j^{\mathrm{cl}})}\right) \\
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1} \otimes \cdots \otimes g_{n+1}) e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}}} e^{\sum \partial_{g_{n+1}}^{ij}} (\mathrm{id} \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_m) e^{\sum \hat{C}_{h_i,h_j}}\right) \\
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1} \otimes \cdots \otimes g_{n+1}) e^{\sum \partial_{g_{n+1}}^{ij}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}}} \hat{S}(\mathrm{id} \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_m) e^{\sum \hat{C}_{h_i,h_j}}\right)
\end{aligned}
$$

这里，$\partial^i{}_{jg_{n+1}}$表示作用于A分量上的收缩，而h_i和h_j作用于这些分量。在最后一行中，我们用到了这样一个事实：对于一个输入变量对称的线性算子，可以插入对称化算子 $\hat{S}$。

算子 $g_{n+1}\otimes\cdots\otimes g_{n+1}$ 作用于 A^m，不会在不同的张量因子之间产生任何收缩 $\partial_{g_{n+1}}$。上式可简化为

$$
\begin{aligned}
&= \hat{S}\left((g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_{n+1}) e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_j}} e^{\sum \hat{C}_{g_i,g_{n+1}}} \hat{S}(\mathrm{id} \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_m) e^{\sum \hat{C}_{h_i,h_j}}\right) \\
&= \rho_{g_1,\ldots,g_n,g_{n+1}} \circ_{n+1} \rho_{h_1,\ldots,h_m}.
\end{aligned}
$$

由命题 2.1 和命题 1.8,

$$\rho_1|_{\mathbb{G}} = \rho_{\mathrm{cl}}|_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{B}(\mathcal{H}^k)$$

是一个强连续酉表示。此外，由引理 2.3 和命题 1.8,

$$(0,1] \to \mathbb{B}(\mathcal{H}^k), \quad r \mapsto \rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r})$$

是一个强连续、自伴且压缩的表示。直接计算可得其迹为

$$\mathrm{tr}|_A \rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,r}) = \prod_{n>0} \frac{1}{(1-r^n)},$$

该式在 $0 < r < 1$ 时绝对收敛。因此，Mo2 的定义 1.32] 中的条件 **(D)** 得证。

□

定义线性同构 $\mathcal{N}: A \to A$如下

$$\mathcal{N}|_{\mathrm{Sym}^p\mathcal{H}} = \sqrt{p!}\,\mathrm{id}_{\mathrm{Sym}^p\mathcal{H}}.$$

则对于每个$k \geq 0$，$\mathcal{N}|_{H^k}$ 都是有界线性映射，而 $\mathcal{N}$ 本身并不有界。利用这个线性同构，我们可以通过令以下关系成立，为A赋予 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数结构

$$\rho^{\mathcal{N}}_{g_1,\ldots,g_n} = \mathcal{N} \circ \rho_{g_1,\ldots,g_n} \circ (\mathcal{N}^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}^{-1}). \tag{2.12}$$

将归一化的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$-代数 $(A, \rho^{\mathcal{N}}, \mathbf{1})$ 与仿射海森堡顶点代数进行比较时，考虑它的重要性便显而易见（另见 [Mo2，注

2.35])。根据引理 1.11，通过限制，一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数决定了一个 $\mathbb{CE}_2$-代数。根据定理 2.11 和 [Mo2，定理 3.5],我们有：

定理 2.12. $\mathbb{CE}_2$-代数 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 定义了一个对称幺半函子 $A:\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}} \to \mathrm{IndHilb}$。此外，它沿 $\mathrm{Disk}_2^{\mathrm{CO}} \hookrightarrow \mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}}$ 的左 *Kan* 延拓定义了一个对称幺半函子

$$\mathrm{Lan}_{\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})} : \mathrm{Mfld}_2^{\mathrm{CO}} \to \mathrm{Ind}\,\mathrm{Hilb}.$$

由此，我们得到以 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 为系数的二维黎曼流形的不变量。

最后，我们通过考察 $\mathbb{CE}_2$-代数 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 的复共轭来结束本节。以下结论成立：

命题 2.13. 对于 $\mathbb{CE}_2$-代数 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 及其复共轭，

$$(\mathbf{1}, \rho_{B_{a,r},B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z))) = \frac{rs}{(a-b)^2}, \tag{2.13}$$

$$(\mathbf{1}, \rho^{\mathcal{J}}_{B_{a,r},B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z))) = \frac{rs}{(\bar{a}-\bar{b})^2} \tag{2.14}$$

对于命题 *2.10* 中的任意 $(B_{a,r},B_{b,s}) \in \mathbb{CE}_2(2)$ 。

证明. 由命题 2.10，我们有

$$(\mathbf{1}, \rho_{B_{a,r},B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z))) = C_{B_{a,r},B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z)) = \frac{rs}{(a-b)^2},$$

并根据复共轭的定义（定义 1.1），

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}, \rho^{\mathcal{J}}_{B_{a,r},B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z))) &= (\mathbf{1}, \rho_{\mathcal{J}B_{a,r},\mathcal{J}B_{b,s}}(e_0(z), e_0(z))) \\ &= (\mathbf{1}, \rho_{B_{\bar{a},r},B_{\bar{b},s}}(e_0(z), e_0(z))) = \frac{rs}{(\bar{a}-\bar{b})^2}.\end{aligned}$$

□

熟悉顶点算子代数的读者会发现，(2.13) 与仿射海森堡顶点代数的二点关联函数一致，而 (2.14) 则与反全纯仿射海森堡顶点代数 [Mo1] 的二点关联函数一致。我们将在下一节更详细地考察这种对应关系。

3. 与仿射海森堡顶点代数的关系

本节将建立仿射海森堡顶点算子代数 $M(0)$ 与 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 之间的对应关系。基于这一结果，我们预期，对于任意酉全顶点算子代数，都可以将其构造为一个 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数，作为其归纳希尔伯特空间完备化。

在第 3.1 节中，我们回顾仿射海森堡顶点算子代数酉结构的基本事实。在第 3.2 节中，我们给出酉仿射海森堡顶点代数的完备化与 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 之间的一个希尔伯特空间等距同构，并比较它们的代数结构。

3.1. **关于仿射海森堡顶点代数的回顾**。 我们先简要回顾仿射海森堡顶点代数的定义。关于顶点算子代数的定义及其基本性质，参见 [FLM, FB, FHL, LL, Ka]。设

$$\hat{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}h \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c$$

是一个满足以下对易关系的李代数:

$$[h \otimes t^n, h \otimes t^m] = n\,\delta_{n+m,0}c$$

$\hat{}$ 和 c 是中心。令$M(0)$为 h 的诱导表示，定义如下

$$h \otimes t^n \cdot \mathbf{1} = 0, \qquad \text{for any } n \geq 0,$$
$$c \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

将$h(n) \in \mathrm{End}M(0)$记为$h \otimes t^n$ 在$M(0)$上的作用。作为一个向量空间，$M(0)$由基 $\{h(-k_1)h(-k_2)\ldots h(-k_n)\mathbf{1}\}_{n\geq 0, k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n\geq 1}$ 张成。于是，可以在$M(0)$上定义唯一的顶点代数结构，使得 $\mathbf{1} \in M(0)$为真空向量，且线性映射

$$Y(-,z) : M(0) \to \mathrm{End}M(0)[[z^{\pm}]],$$
$$a \mapsto Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n-1},$$

称为顶点算子，满足

$$Y(h(-1)\mathbf{1},z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)z^{-n-1} \in \mathrm{End}M(0)[[z^{\pm}]].$$

Set

$$h^+(z) = \sum_{n\geq 0} h(n)z^{-n-1}, \tag{3.1}$$

$$h^-(z) = \sum_{n\geq 0} h(-n-1)z^n. \tag{3.2}$$

这给出了顶点算子$Y(h(-1)\mathbf{1},z)$分解为其产生算子$h^-(z)$和湮灭算子$h^+(z)$。令 $\omega = \frac{1}{2}h(-1)h(-1)\mathbf{1}$，并定义$L(n) \in \mathrm{End}M(0)$如下:- $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$。于是,

$$L(n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} h(n-k)h(k) + \sum_{k<0} h(k)h(n-k)\right) \tag{3.3}$$

满足 Virasoro 对易关系:

$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(n+m) + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}.$$

顶点代数$M(0)$与 ω 所构成的对称为仿射海森堡顶点算子代数 [FLM]。对于$p > 0$, 令$M_p(0)$为$M(0)$的子空间，由

$$M_p(0) = \{h(-k_1)\ldots h(-k_p)\mathbf{1}\}_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}$$

并令$M_0(0) = \mathbb{C}\mathbf{1}$。在物理学中，$p$ 在自由场论中称为粒子数 。设

$$M(0)^p = \bigoplus_{k\geq 0}^{p} M_k(0),$$

这是$M(0)$上的一个滤过。空间$M(0)$在$L(0)$的作用下具有 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次向量空间的结构:

$$M(0)_n = \{v \in M(0) \mid L(0)v = nv\}.$$

这里，$L(0)h(-k_1)\ldots h(-k_p)\mathbf{1} = (k_1+\cdots+k_p)h(-k_1)\ldots h(-k_p)\mathbf{1}$。特别地，$M(0)_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ 且$M(0)_1 = \mathbb{C}h(-1)\mathbf{1}$。由 (3.3) 以及$h(0) = 0$，可得:

命题 3.1。设 $p \geq 0$。那么，

$$L(n)M_p(0) \subset \begin{cases} M_p(0) & (\text{if } n = -1, 0, 1) \\ M_p(0) \oplus M_{p-2}(0) & (\text{if } n \geq 2) \\ M_p(0) \oplus M_{p+2}(0) & (\text{if } n \leq -2). \end{cases}$$

注 3.2。 如命题 *3.1* 所述，*Virasoro* 代数一般并不保持粒子数。事实上，对于 $n \geq 2$，二阶微分算子(3.3)对应于源自调和余循环的二阶微分算子(2.6) 。此外，$\{L(n)\}_{n=-1,0,1}$ 保持粒子数这一事实，对应于 $\{L(n)\}_{n=-1,0,1}$ 生成$\mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{Conf}^+(S^2)$这一事实；对于此类变换，命题 *1.8* 意味着 $\rho_1 = \rho_{\mathrm{cl}}$。关于这些现象在格林函数边界条件方面的解释，参见 [Mo3]。

众所周知，$M(0)$ 存在唯一的对称双线性型 $(-,-)$：$M(0) \otimes M(0) \to \mathbb{C}$满足以下条件：（例如参见 [FHL, Li]）

- $(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 1$.
- 对于任意 a、b、$c \in M(0)$,

$$(Y(a,z)b,c) = (b, Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}a, z^{-1})c) \tag{3.4}$$

作为形式幂级数成立。

定义反线性映射 θ：$M(0) \to M(0)$，其定义为

$$\theta(h(-k_1)\ldots h(-k_n)\mathbf{1}) = (-1)^n h(-k_1)\ldots h(-k_n)\mathbf{1}$$

对于任意 $k_1 \geq \cdots \geq k_n \geq 1$。于是，$\theta$是一个顶点算子代数反线性自同构，满足 $\theta^2 = \mathrm{id}_{M(0)}$。定义半双线性型 $(-,-)_M$：$M(0) \otimes M(0) \to \mathbb{C}$，其定义为 $(a,b)_M = (\theta(a),b)$，其中 a、$b \in M(0)$。于是，$(-,-)_M$是正定的 [DL]。

注 3.3. 配备非退化不变双线性型(3.4) 和反线性对合 θ，且其相应的半双线性型为正定的（完全）顶点算子代数，称为酉（完全）顶点算子代数 [DL, CKLW,AMT]。仿射海森堡顶点代数是酉顶点算子代数的一个例子。

令$\overline{M(0)^p}$表示$M(0)^p$关于内积$(-,-)_M$的希尔伯特空间完备化。注意，由 (3.4) 可知，当$p \neq q$时，$M_p(0)$与$M_q(0)$相互正交。以下命题可推广到任意酉全顶点算子代数中（另见 [AMT]）。

命题 3.4. 设$v \in M(0)^p$且$w \in M(0)^q$。那么，对于任意$\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$，形式幂级数

$$Y(v,z)w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v(n)wz^{-n-1}$$

在范数$(-,-)_M$下收敛。代入$z = \zeta$后，它因此定义了希尔伯特空间$M(0)^{p+q}$中的一个元素，也就是说，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|v(n)w\|^2_M\, |\zeta|^{-2n-2} < \infty$成立。

证明。回忆一下，向量$\mathrm{v} \in \mathrm{M}(0)$若满足$\mathrm{L}(1)\mathrm{v} = 0$且$\mathrm{L}(0)\mathrm{v} = \Delta\mathrm{v}$，则称为权为$\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$的拟初级向量。任意酉顶点算子代数的底层向量空间均由$\{\mathrm{L}(-1)^n\mathrm{v}\}_{n\geq 0}$张成，其中 v 遍历所有拟初级向量（参见 [DLM]）。由线性性，只需对$\mathrm{Y}(\,^1\mathrm{l}!\mathrm{L}(-1)^l\mathrm{v}, \mathrm{z})\mathrm{w}$证明该命题，其中$\mathrm{l} \geq 0$，$\mathrm{v} \in \mathrm{M}(0)_\Delta$，$\mathrm{w} \in \mathrm{M}(0)_{\Delta'}$，且 v 为拟初级向量。由于

$$Y\left(\frac{1}{l!}L(-1)^l v, z\right)w = \frac{\partial_z^l}{l!}Y(v,z)w = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{l}v(n)wz^{-n-1-l},$$

并且$v(n)w \in M(0)_{\Delta+\Delta'-n-1}$，只需证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\binom{-n-1}{l}\right)^2 \|v(n)w\|^2_M\, |\zeta|^{-2n-2l-2} < \infty.$$

令z_1,z_2为形式变量。由 (3.4),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(l!)^2}(Y(L(-1)^l v, z_1)w, Y(L(-1)^l v, z_2)w)_M\\
&= \frac{1}{(l!)^2}\partial_{z_1}^l\partial_{z_2}^l(Y(v,z_1)w, Y(v,z_2)w)_M\\
&= \frac{1}{(l!)^2}\partial_{z_1}^l\partial_{z_2}^l(w, Y(e^{L(1)z_1}(-z_1^{-2})^{L(0)}\theta(v), z_1^{-1})Y(v,z_2)w)_M\\
&= \frac{1}{(l!)^2}\partial_{z_1}^l\partial_{z_2}^l(-z_1^{-2})^{\Delta}(w, Y(\theta(v), z_1^{-1})Y(v,z_2)w)_M\\
&= \frac{1}{l!}(-1)^{\Delta}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{l}\partial_{z_1}^l z_1^{-2\Delta}z_2^{-n-l-1}(w, Y(\theta(v), z_1^{-1})v(n)w)_M\\
&= (-1)^{\Delta}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\binom{-n-1}{l}\right)^2 z_1^{-n-l-1}z_2^{-n-l-1}(w, \theta(v)(2\Delta-n-2)v(n)w)_M.
\end{aligned}$$

众所周知，这个形式幂级数与有理多项式$\mathbb{C}[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, (1-z_1z_2)^{-1}]$的展开式一致，并且在区域$|z_1|^{-1} > |z_2|$内绝对收敛（例如，参见 [FB, LL]）。考虑到$(\mathbb{C}[,)$的第一个变量中的反线性，我们得到

$(-,-)_M$ 的变量，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(l!)^2}(Y(L(-1)^l v,z_1)w, Y(L(-1)^l v,z_2)w)_M\Big|_{z_1=z_2=\zeta}\\
&=(-1)^{\Delta}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{l}^2 z_1^{-n-l-1}z_2^{-n-l-1}(w,\theta(v)(2\Delta-n-2)v(n)w)_M\Big|_{z_1=\overline{\zeta},z_2=\zeta}\\
&=(-1)^{\Delta}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{l}^2 |\zeta|^{-2n-2l-2}(w,\theta(v)(2\Delta-n-2)v(n)w)_M,
\end{aligned}$$

由于 $|\zeta|^{-1}>1>|\zeta|$，该级数绝对收敛。比较系数可得 n

$$\|v(n)w\|_M^2=(-1)^{\Delta}(w,\theta(v)(2\Delta-n-2)v(n)w)_M,$$

命题得证。 □

3.2. 关于 $\mathbb{CE}_2$-代数与仿射ffi涅维尔顶点代数之间的关系。 本节讨论 $M(0)$ 与 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$-代数 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 之间的关系。

注意到，通过简单计算可得

$$(h(-k-1)^n\mathbf{1}, h(-k-1)^n\mathbf{1})_M=n!(k+1)^n$$

对任意 $k\geq 0$ 和 $n>0$均成立。特别地，$\|h(-k-1)\mathbf{1}\|_M=\sqrt{k+1}$，我们希望将此向量与 $\sqrt{k+1}e_k(z)=(\overline{k+1})z^k\in A^2(\mathbb{D})$ 识别起来。令

$$h_j(z)=\sqrt{j+1}e_j(z)\in A^2(\mathbb{D}).$$

受此观察启发，对任意 $p\geq 0$，定义一个线性映射

$$\Psi: M_p(0)\to \mathrm{Sym}^p(A^2(\mathbb{D}))$$

对于任意$n\geq 1$、$p=k_1+\cdots+k_n$以及$i_1>i_2>\cdots>i_n\geq 0$,

$$\Psi(h(-i_1-1)^{k_1}\ldots h(-i_n-1)^{k_n})=\sqrt{p!}\,\hat{S}^p((h_{i_1}(z))^{\otimes k_1}\otimes\cdots\otimes(h_{i_n}(z))^{\otimes k_n}).$$

这里，$\hat{S}_p$表示对称化算子（正交投影 (1.2)）$A^2(\mathbb{D})^{\hat{\otimes}p}\to\mathrm{Sym}^pA^2(\mathbb{D})$。对$p$取直和，得到一个线性映射

$$\Psi: M(0)\to \mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D})).$$

引理 3.5. 线性映射 $\Psi: M(0)\to\mathrm{Sym}(A^2(\mathbb{D}))$ 相对于$(-,-)_M$和$(-,-)_A$是等距的。

证明。 令$n,m\geq 1, p=k_1+\cdots+k_n=l_1+\cdots+l_m$和 $i_1>i_2>\cdots>i_n\geq 0, j_1>j_2>\cdots>j_m\geq 0$。由 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}
&(h(-i_1-1)^{k_1}\ldots h(-i_n-1)^{k_n}\mathbf{1}, h(-j_1-1)^{l_1}\ldots h(-j_m-1)^{l_m}\mathbf{1})_M\\
&=(\mathbf{1}, h(i_1+1)^{k_1}\ldots h(i_n+1)^{k_n}h(-j_1-1)^{l_1}\ldots h(-j_m-1)^{l_m}\mathbf{1})_M\\
&=\begin{cases}k_1!(i_1+1)^{k_1}k_2!(i_2+1)^{k_2}\ldots k_n!(i_n+1)^{k_n}, & (n=m, i_s=j_s, k_s=l_s \text{ for all } s=1,\ldots,n)\\ 0, & (\text{otherwise}).\end{cases}
\end{aligned}$$

注意到 $(e_i(z), ej(z))_A = \delta_{i,\ j}$，可得

$$\left\|\hat{S}\left(e_{i_1}(z)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}(z)^{\otimes k_n}\right)\right\|_A^2 = \frac{k_1!k_2!\ldots k_n!}{p!}$$

因此，Ψ 是一个等距映射。 □

特别地，等距映射 Ψ 诱导希尔伯特空间的等距同构

$$\overline{M_p(0)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^p A^2(\mathbb{D}) \quad \text{and} \quad \overline{M(0)^p} \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^p.$$

由命题 3.4，对任意 $\zeta \in \mathbb{D}$ 和 $v \in M(0)^p$，我们有 $Y(v,z)\mathbf{1}\Big|_{z=\zeta} \in M(0)^p$。

引理 3.6. 对任意 $\zeta \in \mathbb{D}$ 和 $n \geq 0$,

$$\Psi(Y(h(-n-1)\mathbf{1}, z)\mathbf{1}|_{z=\zeta}) = \Psi\left(\frac{1}{n!}\partial_z^n h^-(z)\mathbf{1}|_{z=\zeta}\right) = \frac{1}{n!}\partial_\zeta^n E_\zeta(z) \in A^2(\mathbb{D}).$$

证明。由于

$$Y(L(-1)^n h(-1)\mathbf{1}, z)\mathbf{1}|_{z=\zeta} = L(-1)^n \exp(\zeta L(-1))h(-1)\mathbf{1} = \sum_{k\geq 0} \frac{\zeta^k}{k!} L(-1)^{k+n} h(-1)\mathbf{1}$$

且 $L(-1)^{k+n}h(-1)\mathbf{1} = (k+n)!h(-k-n-1)\mathbf{1}$,

$$\Psi(Y(L(-1)^n h, z)\mathbf{1}|_{z=\zeta}) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+n+1)!}{k!} z^{k+n}\zeta^k = \partial_\zeta^n E_\zeta(z).$$

□

令 $\zeta \in \mathbb{D}$ 满足 $\zeta \neq 0$。则存在 r、$s > 0$，使得

$$\overline{B_r(\zeta)} \cap \overline{B_s(0)} = \emptyset \quad \text{and} \quad B_r(\zeta), B_s(0) \subset \mathbb{D}. \tag{3.5}$$

则，$(B_{\zeta,\ r},\ B_{0,\ s}) \in \mathbb{CE}_2(2)$ 由命题 2.10 得出。

定理 3.7。设 $\zeta \in \mathbb{D}$ 满足 $\zeta \neq 0$，且 $1 > r$、$s > 0$ 满足 (3.5)。则对于规范化的 $\mathbb{CE}_2^{\mathrm{HS}}$ -代数 (2.12)，对于任意 $v_1, v_2 \in M(0)$,

$$\rho^{\mathcal{N}}_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\Psi(v_1), \Psi(v_2)) = \Psi(Y(r^{L(0)}v_1, z)s^{L(0)}v_2|_{z=\zeta}) \tag{3.6}$$

作为 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 中的元素。

以下引理直接由命题 2.10 得出:

引理 3.8。对于任意 n、$m \geq 0$,

$$\hat{C}_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(h_n(z), h_m(z)) = (-1)^n r^{n+1} s^{m+1} \frac{(n+m+1)!}{n!m!}\zeta^{-n-m-2}.$$

定理 3.7 的证明。令 n、$m \geq 1$ 以及 $i_1 \geq \ldots i_n \geq 0$ 和 $j_1 \geq \cdots \geq j_m \geq 0$。设

$$\Delta = (i_1+1) + \cdots + (i_n+1) \quad \text{and} \quad \Delta' = (j_1+1) + \cdots + (j_m+1)$$

and $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，对于子集 $S \subset [n]$，将其补集 $[n] \setminus S$ 记为 S'。令

$$C_z^{i,j} = \left[\frac{\partial_z^i}{i!}h^+(z), h(-j-1)\right] = (-1)^i \frac{(i+j+1)!}{i!j!} z^{-i-j-2}.$$

由于 $h(-s-1)\mathbf{1}=\frac{1}{s!}L(-1)^s h$，由$M(0)$的定义可知

$$\begin{aligned}
&Y(r^{L(0)}h(-i_1-1)\cdots h(-i_n-1)\mathbf{1},z)s^{L(0)}h(-j_1-1)\cdots h(-j_m-1)\mathbf{1}\\
&=r^{\Delta}s^{\Delta'}\sum_{S\subset[n]}\prod_{p\in S'}\left(\frac{\partial_z^{i_p}}{i_p!}h^-(z)\right)\prod_{s\in S}\left(\frac{\partial_z^{i_s}}{i_s!}h^+(z)\right)h(-j_1-1)\cdots h(-j_m-1)\mathbf{1}\\
&=r^{\Delta}s^{\Delta'}\sum_{S\subset[n]}\sum_{T:S\hookrightarrow[m]}\left(\prod_{s\in S}C_z^{i_s,j_{T(s)}}\right)\left(\prod_{p\in S'}\frac{\partial_z^{i_p}}{i_p!}h^-(z)\right)\left(\prod_{q\in[m]\setminus T(S)}h(-j_q-1)\right)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

这里，$T:S\hookrightarrow[m]$ 遍历从S 到 $[m]$的所有单射。此外，S 遍历满足 $\#S\leq m$ 的子集；否则，第二个表达式为零。由引理 3.6,

$$\begin{aligned}
&\Psi(Y(r^{L(0)}h(-i_1-1)\cdots h(-i_n-1)\mathbf{1},z)s^{L(0)}h(-j_1-1)\cdots h(-j_m-1)\mathbf{1}|_{z=\zeta})\\
&=r^{\Delta}s^{\Delta'}\sum_{S\subset[n]}\sum_{T:S\hookrightarrow[m]}\left(\prod_{s\in S}C_\zeta^{i_s,j_{T(s)}}\right)\sqrt{(n+m-2\#S)!}\hat{S}^{n+m-2\#S}\left(\bigotimes_{p\in S'}\frac{\partial_z^{i_p}}{i_p!}E_\zeta(z)\otimes\bigotimes_{q\in[m]\setminus T(S)}h_{j_q}(z)\right).
\end{aligned}$$

另一方面，利用命题 1.8，我们计算得

$$\begin{aligned}
&\rho^{\mathcal{N}}_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\Psi(h(-i_1-1)\cdots h(-i_n-1)\mathbf{1}),\Psi(h(-j_1-1)\cdots h(-j_n-1)\mathbf{1}))\\
&=\rho^{\mathcal{N}}_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\sqrt{n!}\hat{S}^n(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z)),\sqrt{m!}\hat{S}^m(h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z))\\
&=\sqrt{n!m!}\mathcal{N}\rho_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\mathcal{N}^{-1}\hat{S}^n(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z)),\mathcal{N}^{-1}\hat{S}^m(h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z)))\\
&=\mathcal{N}\rho_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\hat{S}^n(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z)),\hat{S}^m(h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z)))\\
&=\mathcal{N}\hat{S}\left(\rho_{\mathrm{cl}}(B_{\zeta,r})\otimes\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,s})\right)\exp(\hat{C}_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})})(\hat{S}^n(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z)),\hat{S}^m(h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z)))\\
&=\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\frac{\sqrt{(n+m-2k)!}}{k!}\hat{S}^{n+m-2k}\left(\rho_{\mathrm{cl}}(B_{\zeta,r})\otimes\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,s})\right)\\
&\times\hat{C}^k_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(\hat{S}^n(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z)),\hat{S}^m(h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z)))\\
&=\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\frac{\sqrt{(n+m-2k)!}}{k!}\hat{S}^{n+m-2k}\left(\rho_{\mathrm{cl}}(B_{\zeta,r})\otimes\rho_{\mathrm{cl}}(B_{0,s})\right)\\
&\times\hat{C}^k_{(B_{\zeta,r},B_{0,s})}(h_{i_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{i_n}(z),h_{j_1}(z)\otimes\cdots\otimes h_{j_m}(z))
\end{aligned}$$

由引理 2.2、引理 3.6 和引理 2.3，可得

$$\begin{aligned}
\rho_1(B_{\zeta,r})(h_i(z))&=\frac{r^{i+1}}{i!}\partial_\zeta^i E_\zeta(z),\\
\rho_1(B_{0,s})(h_j(z))&=s^{j+1}h_j(z).
\end{aligned}$$

由于由S 和T指定的 $\hat{}C^k$ 中有$k!$ 个收缩，结论由引理 3.8 得出。

□

推论 3.9. *The* $\mathbb{CE}_2$-代数 对称$A^2(\mathbb{D})$ 是简单的。

证明。令

$$I=\{v\in M(0)\mid(\mathbf{1},Y(a,z)v)_M=0\text{ for any }a\in M(0)\}.$$

根据顶点代数的定义，容易证明I是$M(0)$的一个理想。由于$M(0)$是一个单顶点代数，$I = 0$。根据定理 3.7，$(\mathbf{1}, Y(a,z)v)_M = 0$ 当且仅当

$$(\mathbf{1}, \rho_{(B_{\xi,r},B_{0,s})(\Psi(a),\Psi(v))})_A = 0.$$

因此，根据 [Mo2，推论 3.11], $N_2^{\text{alg}}\text{-pt}(\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})) = 0$ 和 $\mathrm{Sym}A^2(\mathbb{D})$ 是简单的。 □

一般而言，对于任意维数 $d \geq 2$，$\mathbb{CE}_d$-代数 [Mo2，定义 1.34]的代数核心在适当条件下可赋予一种类似于（完全）顶点代数的代数结构。从物理角度看，这对应于共形场论具有算符乘积展开并满足自举方程这一事实。我们称这种结构为完全顶点 d-代数。完全顶点d-代数的定义及其与 $\mathbb{CE}_d$-代数的关系将在 [Mo4]中讨论。

参考文献

[AF1] D. Ayala 和 J. Francis，《拓扑流形的因子化同调》，《拓扑学杂志》，8，(4)，1045–1084，2015年。[AF2] D. Ayala 和 J. Francis，《配边假设》，arXiv:1705.02240。[AGT] M. S. Adamo、L. Giorgetti 和 Y. Tanimoto，《带标记表示范畴的二维共形场论中的 Wightman 场》。《数学物理通讯》，404，(3)，1231–1273，2023年。[AMT] M.S. Adamo、Y. Moriwaki 和 Y. Tanimoto，《酉完全顶点算子代数的 Osterwalder-Schrader 公理》，arXiv:2407.18222。[Bo1] R.E. Borcherds，《顶点代数、Kac-Moody 代数与魔群》，《美国国家科学院院刊》，83，1986年，(10)，3068–3071。[Bo2] R.E. Borcherds，《怪兽月光与怪兽李超代数》，《数学发明》，109，1992年，(2)，405–444。[Br] D. Bruegmann，《顶点代数与 Costello-Gwilliam 因子化代数》，2020年，arXiv:2012.12214。[BD] A. Beilinson 和 V. Drinfeld，《手征代数》，美国数学学会，AMS Colloquium Publications，51，2004年。[BKLR] M. Bischoff、Y. Kawahigashi、R. Longo 和 K-H. Rehren，《代数共形量子场论中的相边界》，《数学物理通讯》，342，(1)，1–45，2016年。[BPZ] A. A. Belavin、A. M. Polyakov、A. B. Zamolodchikov，《二维量子场论中的无限维共形对称性》，《核物理》B，241，1984年，(2)，333–380。[CG1] K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数》第一卷，《新数学专著》，31，剑桥大学出版社，2016年。[CG2] K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数》第二卷，《新数学专著》，41，剑桥大学出版社，2021年。[CKLW] S. Carpi、Y. Kawahigashi、R. Longo 和 M. Weiner，《从顶点算子代数到共形网及其逆向构造》，《美国数学会回忆录》，254，(1213)，2018年。[CN] J. H. Conway 和 S. P. Norton，《怪兽月光》，《伦敦数学会会刊》，11，(3)，308–339，1979年。[CS] D. Calaque 和 C. Scheimbauer，《关于配边的 (∞, n)-范畴的一则注记》，《代数与几何拓扑》，19，2019年，533–655。[DGT] C. Damiolini、A. Gibney 和 N. Tarasca，《由顶点代数构造的共形块及其在$\mathcal{M}_{g,n}$上的联络》，《几何与拓扑》，25，(5)，2021年。

[DKRV] F. David、A. Kupiainen、R. Rhodes 和 V. Vargas，《黎曼球面上的刘维尔量子引力》，《数学物理通讯》，342，(3)，869–907，2016年。[DL] C. Dong 和 X. Lin，《酉顶点算子代数》。《代数杂志》，397，2014年，252–277。[DLM] C. Dong、Z. Lin 和 G. Mason，《关于作为 sl_2-模的顶点算子代数》，《太平洋数学杂志》，178，1，51–77，1997年。[FB] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi，《顶点代数与代数曲线》，《数学调查与专著》，88，第二版，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2004年。[FLM] I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman，《顶点算子代数与魔群》，《纯粹与应用数学》，134，Academic Press, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1988年。[FHL] I. Frenkel、Y. Huang 和 J. Lepowsky，《关于顶点算子代数及其模的公理化方法》，《美国数学会回忆录》，104，1993年，(494)。[FRS] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《共形关联函数、Frobenius 代数与三角剖分》，《核物理》624，2002年，452–468。[GW] L. Gårding 和 A.S. Wightman，《相对论量子理论中的算子值分布场》，Arkiv f¨or Fysik，28，129–189，1964年。[HK] Y.-Z. Huang、L. Kong，《全场代数》，《数学物理通讯》，272，2007年，(2)，345–396。[HKZ] H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu，《伯格曼空间理论》，《数学研究生教材》，199，施普林格，纽约州纽约市，2000年。[HT1] A.G. Henriques 和 J.E. Tener，《圆环的 Segal-Neretin 半群》，arXiv:2410.05929。[HT2] A.G. Henriques 和 J.E. Tener，《Virasoro 代数正能量表示的积分化》，arXiv:2506.08684。[Ka] V.G. Kac，《顶点代数入门》，《大学讲座丛书》，10，(2)，1998年。[Lu1] J. Lurie，《高阶代数》，在线版本，2025年12月22日。[Lu2] J. Lurie，《拓扑场论分类》，《数学当前进展》，2008年，129–280，2009年，波士顿国际出版社。[Li] H. Li，《顶点算子代数上的对称不变双线性型》，《纯粹与应用代数杂志》，96，1994年，(3)，279–297。[LL] J. Lepowsky 和 H. Li，《顶点算子代数及其表示导论》，《数学进展》，227，Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2004年。[LM] M. L¨uscher 和 G. Mack，《量子场论中的整体共形不变性》，《数学物理通讯》，41，203–234，1975年。[Mo1] Y. Moriwaki，《二维共形场论、全顶点代数与流-流形变》，《数学进展》，427，(2023)。[Mo2] Y. Moriwaki，《Ind-Hilbert 空间中的共形平坦因子化同调与共形场论》，arXiv:2602.08729。[Mo3] Y. Moriwaki，《共形拉普拉斯算子的预因子化代数：中心荷与 Hilbert-Fock 空间》，arXiv:2602.17549。[Mo4] Y. Moriwaki，《关于函子性共形场论与高维全顶点代数》，即将出版。[MS] G. Moore 和 N. Seiberg，《经典与量子共形场论》，《数学物理通讯》123，1989年，177–254。[Ni] Y. Nishinaka，《因子化包络与包络顶点代数》，arXiv:2512.07635。[RSS] D. Radnell、E. Schippers 和 W. Staubach，《带边黎曼曲面的魏尔–彼得松类 Teichm¨uller 空间上的希尔伯特流形结构》，《当代数学通讯》，17，(4)，2015年。[Sc] C.I. Scheimbauer，《作为完全扩展拓扑场论的因子化同调》，2014年，ETH Z¨urich，博士论文（苏黎世联邦理工学院 Dr. sc.）。

[Se] G. Segal，共形场论的定义。拓扑、几何与量子场论，421–577，伦敦数学会讲义丛书，308，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[SS] E. Schippers和W. Staubach，《无限共形型曲面的魏尔–彼得森 Teichmüller 理论》，《继承瑟斯顿传统 III》，施普林格，2024年，169–247。[TT] L.A. Takhtajan 和 L-P. Teo，《万有 Teichmüller 空间上的魏尔–彼得森度量》，美国数学会回忆录，183，861，2006年。[TUY] A. Tsuchiya、K. Ueno 和 Y. Yamada，具有规范对称性的稳定曲线万有族上的共形场论，纯数学高级研究，**19**，459–566，1989年。[Vi] B. Vicedo，因子化产生的完整万有包络顶点代数，《昂利·庞加莱年刊》，2026年。[Zh] Y. Zhu，顶点算子代数特征标的模不变性，《美国数学会杂志》，**9**，1996年，(1)，237–302。