arXiv:2603.06532v1 [math-ph] 6 Mar 2026

关于一类泊松拟-尼延豪斯流形的对合性定理

E. Chu˜no Vizarreta[1],G. Falqui[2,5], I. Mencattini[3], M. Pedroni[4,5]

[1]贝洛雅尔丁学术单位，伯南布哥联邦农村大学，巴西 *eber.vizarreta@ufrpe.br*

[2]数学与应用系，米兰-比可卡大学，意大利 *gregorio.falqui@unimib.it*

[3]数学与计算机科学研究所，圣保罗大学，巴西 *igorre@icmc.usp.br*

[4]管理、信息与生产工程系，贝加莫大学，意大利 *marco.pedroni@unibg.it*

[5]意大利国家核物理研究院，米兰-比可卡分部，米兰，意大利

摘要

本文旨在继续研究泊松拟尼延惠斯几何在经典完全可积系统理论中的应用。具体而言，在触发变形的闭二形式与定义泊松拟尼延惠斯结构的闭3-形式均可因式分解的假设下，我们将介绍变形定理和对合性定理的新版本。我们还将通过若干泊松拟-尼延豪斯流形的对合性实例来补充这些结果。

关键词： 可积系统；Toda 格；Poisson拟Nijenhuis流形；双哈密顿流形。

数学主题分类： 37J35, 53D17, 70H06。

1 引言

Poisson-尼延胡斯结构这一概念在 [15], 中提出，另见 [14], ，它是一种用于描述经典哈密顿系统完全可积性的几何框架。简而言之，这一现象的原因可概括如下：递归算子的存在，即泊松-尼延胡斯结构定义中的无挠率(1,1) 张量，保证存在一组特殊函数，它们相对于底层结构所关联的所有泊松括号两两对合。寻找以下对象是一个自然且有趣的问题

比泊松-尼延胡斯结构更弱、但仍可用于描述经典完全可积性的几何结构。

一项旨在推广泊松-尼延胡斯结构概念的有趣方案发表于 [18], ，其中引入了泊松拟-尼延豪斯结构。对于这些结构，相应 (1,1) 张量的挠率并不为零，而是受到一个闭3-形式的控制；精确定义见下一节。然而，这还不足以确保存在一组特殊的泊松对易函数，而这正是泊松-尼延胡斯情形的特征。

换言之，重述我们上面的论述，并呼应 [18], 中的注释 3.13，可以说，在泊松拟-尼延豪斯流形上确定一组能够保证存在一组（极大）泊松对易函数的条件，是一个很有趣的问题；这将其几何学与经典可积系统理论联系起来。

在一系列论文 [8, 9, 6, 2] 中，我们开始研究这一问题。受经典托达系统示例的启发，我们引入了对合泊松拟尼延惠斯结构的概念。此外，我们还找到了使泊松拟-尼延豪斯结构成为对合结构的一组充分条件，见定理 2；并描述了将一个泊松拟-尼延豪斯结构变形为另一个结构的方法，见定理 3。

本文旨在沿着这一研究方向继续探索，并有以下两个目标：1）在适当的因子化假设下研究变形与对合问题；2）提供对合泊松拟尼延惠斯结构的新例子。

更详细地说，本文的安排如下。在第2节中，我们将回顾Poisson-Nijenhuis几何与泊松拟尼延惠斯几何的基本概念，并简要说明Poisson-Nijenhuis结构如何进入经典完全可积系统理论。在第3节中，我们将在触发变形的闭二形式满足适当因子分解假设的条件下，证明变形定理的一个版本（即定理 3），见命题 5。后者的一个应用可见于例 7 和例 9，二者均致力于Toda系统（开放与闭合）。第4节包含本短文最重要的结果，即对合性定理的一个新版本（即定理 2）。该结果同样是在定义泊松拟尼延惠斯结构的闭3-形式满足适当因子分解假设的条件下证明的，见定理13。这一结果应用于例14、例15、例16和例17。我们想强调，例15和例17中所描述的泊松拟-尼延豪斯结构据我们所知是新的。特别地，例17中所探讨的结构，是通过对类型 D_n的开放托达系统的泊松-尼延胡斯结构进行变形而得到的，它所描述的可积系统似乎并不与仿射李代数相关联（见 [17], 表3）。我们还要强调，例17中用于构造对合泊松拟尼延惠斯结构的2-形式，与描述类型 C_n 的开放托达系统的泊松-尼延胡斯结构之变形中所用的2-形式相同，见 [2]。最后，例 19给出了推论 18（定理13的一个推论）的一个应用，其灵感来自 [3]的第 6 节。

2 关于 Poisson-Nijenhuis 结构、PqN 结构及其变形的预备知识

在本节中，我们回顾关于Poisson-Nijenhuis结构与泊松拟-尼延豪斯结构的若干定义和结果，以及由闭二形式驱动的变形过程。此外，我们评述Poisson-Nijenhuis结构在经典可积系统理论中的应用。此后，所谓Poisson-Nijenhuis（双哈密顿、泊松拟-尼延豪斯）流形，是指赋予了泊松-尼延胡斯（双哈密顿、泊松拟-尼延豪斯）结构的流形。

若 $N\colon T\mathcal{M}\to T\mathcal{M}$ 是流形 $\mathcal{M}$ 上的一个 (1，1) 张量场，则其 尼延豪斯挠率 定义为

$$T_N(X,Y)=[NX,NY]-N\left([NX,Y]+[X,NY]-N[X,Y]\right). \tag{1}$$

给定一个 p-形式 α，满足 $p\geq 1$，可以构造另一个 p-形式 $i_N\alpha$，如下:

$$i_N\alpha(X_1,\ldots,X_p)=\sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1,\ldots,NX_i,\ldots,X_p). \tag{2}$$

若对所有函数 f 都有 $i_Nf=0$，则 i_N 是一个零次导子。此外，通常的嘉当微分可以修改为

$$\mathrm{d}_N=i_N\circ\mathrm{d}-\mathrm{d}\circ i_N. \tag{3}$$

事实证明，当且仅当 N 的挠率消失时，$\mathrm{d}_N^2=0$ 。

现在假设 $(\mathcal{M},\ \pi)$ 是一个泊松流形。于是可以在 $\mathcal{M}$ 上定义 1-形式之间的李括号，如下:

$$[\alpha,\beta]_\pi=L_{\pi^\sharp\alpha}\beta-L_{\pi^\sharp\beta}\alpha-\mathrm{d}\langle\beta,\pi^\sharp\alpha\rangle, \tag{4}$$

其中 $\pi^\sharp\colon\ T^*\mathcal{M}\to T\mathcal{M}$ 由 $\langle\beta,\pi^\sharp\alpha\rangle=\pi(\alpha,\beta)$ 定义。该李括号可以唯一地延拓到 $\mathcal{M}$ 上的所有形式，使得若 η 是一个 q-形式且 η' 是一个 q'-形式，则 $[\eta,\eta']_\pi$ 是一个 $(q+q'-1)$-形式，并且满足下列条件:

(K1) $[\eta,\eta']_\pi=-(-1)^{(q-1)(q'-1)}[\eta',\eta]_\pi$;

(K2) $[\alpha,f]_\pi=i_{\pi^\sharp\alpha}\mathrm{d}f=\langle\mathrm{d}f,\pi^\sharp\alpha\rangle$ 对所有 $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ 以及对所有 1-形式 α;

(K3) $[\eta,\cdot]_\pi$ 是楔积的次数为 $q-1$ 的导子，即对任意微分形式η'',

$$[\eta,\eta'\wedge\eta'']_\pi=[\eta,\eta']_\pi\wedge\eta''+(-1)^{(q-1)q'}\eta'\wedge[\eta,\eta'']_\pi. \tag{5}$$

这个扩张是一个分次李括号，这意味着除了满足（K1）之外，还满足分次雅可比恒等式:

$$(-1)^{(q_1-1)(q_3-1)}[\eta_1,[\eta_2,\eta_3]_\pi]_\pi+(-1)^{(q_2-1)(q_1-1)}[\eta_2,[\eta_3,\eta_1]_\pi]_\pi+(-1)^{(q_3-1)(q_2-1)}[\eta_3,[\eta_1,\eta_2]_\pi]_\pi=0, \tag{6}$$

其中， q_i 是 η_i的次数。它有时也称为科苏尔括号——参见例如 [11]及其中的参考文献。它与泊松括号的关系为

$$[\mathrm{d}f,\mathrm{d}g]_\pi=\mathrm{d}\{f,g\},$$

其中

$$\{f,g\}=\pi(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g)=\langle \mathrm{d}g,\pi^\sharp \mathrm{d}f\rangle. \tag{7}$$

泊松双向量 π 与流形 $\mathcal{M}$ 上的一个 (1,1) 张量场 N 称为相容的，见 [15, 14]，如果

$$\begin{aligned} &N\pi^\sharp=\pi^\sharp N^*, \qquad \text{where } N^*:T^*\mathcal{M}\to T^*\mathcal{M} \text{ is the transpose of } N;\\ &L_{\pi^\sharp\alpha}(N)X-\pi^\sharp L_X(N^*\alpha)+\pi^\sharp L_{NX}\alpha=0, \qquad \text{for all 1-forms } \alpha \text{ and vector fields } X. \end{aligned} \tag{8}$$

注意，第一个条件意味着 $N\pi^\sharp$是反对称的，因此对所有 $l\geq 0$， $N^l\pi^\sharp$也都是反对称的。文献 [13] 证明，条件 (8) 成立当且仅当 d_N是 $[\cdot,\cdot]_\pi$的导子，即

$$\mathrm{d}_N[\eta,\eta']_\pi=[\mathrm{d}_N\eta,\eta']_\pi+(-1)^{(q-1)}[\eta,\mathrm{d}_N\eta']_\pi \tag{9}$$

如果 η 是一个 q-形式，且 η' 是任意微分形式。

一个*Poisson-Nijenuis*流形（下文简称 PN）是一个三元组 $(\mathcal{M},\pi,N)$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个光滑流形， π 是与 N相容的泊松张量（见 (8)），且 N 的挠率为零（见 (1)）。每个 PN 流形都配有一个序列 $\{\pi_k\}_{k\geq 1}$ ，其中包含两两相容的泊松双向量场，并且对所有 $k\geq 1$， $\pi_k^\sharp=N^k\pi^\sharp$ 。两个双向量场的相容性通过它们的肖滕括号为零来表达，参见例如 [7]。注意，每个 PN 流形尤其也是双哈密顿的，即配有一对相容的泊松双向量场，记作 $\pi_0=\pi$ 和 π_1。在这样的流形上，若 $\{H_k\}_{k\geq 1}$ 是一个满足以下条件的函数序列

$$\pi_1^\sharp \mathrm{d}H_k=\pi_0^\sharp \mathrm{d}H_{k+1}, \quad \forall k\geq 1, \tag{10}$$

那么，对于所有的 l， $r\geq 1$,

$$\{H_l,H_r\}_1=0=\{H_l,H_r\}_0,$$

其中，括号 $\{\cdot,\cdot\}_i$, $i=0$，1 在式 (7) 中定义。满足式 (10) 的函数序列称为相对于 $(\pi_0,\ \pi_1)$ 的 *Lenard-Magri*链 。

PN 流形具有增强的双哈密顿结构，因此存在一个特殊的 Lenard-Magri链 $\{H_k\}_{k\geq 1}$，其中 $H_k=\frac{1}{2k}\mathrm{Tr}\ N^k$。事实上，由于 $T_N=0$，可以证明

$$N^*\mathrm{d}H_k=\mathrm{d}H_{k+1}, \quad \forall k\geq 1, \tag{11}$$

这立即推出式 (10)。总之，在 PN 流形 $(\mathcal{M},\ \pi,\ N)$ 上，可以找到大量泊松对易函数，这正是 PN 结构在经典可积系统理论中具有重要意义的原因。

为了推广 PN 框架，Sti´enon 和 Xu [18] 将四元组 $(\mathcal{M},\ \pi,\ N,\ \phi)$ 定义为泊松拟-尼延豪斯流形（以下简称 PqN），条件如下:

- 泊松双向量 π 与（1，1）张量场 N 相容;
- 三形式 ϕ 与 $i_N\phi$ 是闭的;

- $T_N(X,Y) = \pi^\sharp(i_{X\wedge Y}\phi)$对所有向量场 X 与 Y成立，其中 $i_{X\wedge Y}\phi$ 是定义为$\langle i_{X\wedge Y}\phi, Z\rangle = \phi(X, Y, Z)$的1-形式。

注释 1.

(i) N 具有非零挠率的一个结果是， π 是与 PqN 结构相关联的唯一泊松张量。除非另有说明，下文将用 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示相应的泊松括号。

(ii) 近期， [1提出了一个稍微更一般的 PqN 流形定义].

由于 PqN 流形上的 $T_N \neq 0$ ，关系式 (11) 不再成立，而是由以下关系取代

$$N^*\mathrm{d}H_k = \mathrm{d}H_{k+1} + \phi_{k-1}, \qquad k \geq 1, \tag{12}$$

其中 H_k 如上所定义，而 1-形式 ϕ_k 定义为

$$\langle \phi_k, X\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(N^k i_X T_N), \qquad k \geq 0, \tag{13}$$

其中 $i_X T_N(Y) = T_N(X, Y)$，对于 X， Y为 $\mathcal{M}$上的向量场。由于存在 1-形式ϕ_k，关系式 (12) 通常并不能保证函数 H_k 满足泊松对合，因此，一般的 ***PqN*** 结构 不适用于描述完全可积性。如引言中所述，受 A_n型 Toda 系统的启发，我们将函数 $\{H_k\}_{k\geq 1}$ 构成唯一可用泊松结构下的泊松交换族的 PqN 结构定义为 ***involutive***（对合的）PqN 结构，并证明了（见 [2]）以下结论

定理 2 （对合性定理）。 设（$\mathcal{M}, \pi, N, \phi$）是一个 ***PqN*** 流形，且 $H_k = \frac{1}{2k}\mathrm{Tr}\ N^k$。假设存在一个 *2*-形式Ω 满足：

(a) $\phi = -2\mathrm{d}H_1 \wedge \Omega$; ***(b)*** $\Omega(X_j, Y_k) = 0$，对所有 $j, k \geq 1$ 均成立，其中 $Y_k = N^{k-1}X_1 - X_k$ 且 $X_k = \pi^\sharp \mathrm{d}H_k$。

那么，对所有 j, k， $\{H_j, H_k\} = 0$。

本节最后，我们回顾一个关于 PqN 流形变形的结果。该结果在 [6], 中得到证明，是对 [9], 中结果的推广，后者以 PN 流形为起点。关于其在 Toda 格上的应用，参见 [9, 2] 和第 4 节。

定理 3 （变形定理）。 设（$\mathcal{M}, \pi, N, \phi$）是一个 ***PqN*** 流形，且Ω 是一个闭二形式。照常定义$\Omega^\flat$：$T\mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ 为$\Omega^\flat(X) = i_X\Omega$。若

$$\widehat{N} = N + \pi^\sharp\,\Omega^\flat \qquad and \qquad \widehat{\phi} = \phi + \mathrm{d}_N\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega]_\pi, \tag{14}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$那么，$(\mathcal{M}, \pi, N, \phi)$ 是一个 ***PqN*** 流形。

3 具有因子分解 2-形式的变形

本节我们考虑 PqN 流形的一些特殊变形，这些变形由两个 1-形式的楔积构成的 2-形式控制。我们从

引理 4. 设 π 是 $\mathcal{M}$ 上的泊松张量，且 N 是与 π 相容的 *(1,1)* 型张量场。设 α、β 和 γ 是 $\mathcal{M}$ 上的 *1*-形式，使得

$$\mathrm{d}_N\alpha = \alpha\wedge\gamma, \qquad \mathrm{d}_N\beta = \beta\wedge\gamma.$$

If

$$\delta = \beta + \frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi \quad \textit{and} \quad \Omega = \alpha\wedge\delta,$$

then

$$\mathrm{d}_N\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega]_\pi = \alpha\wedge\epsilon, \tag{15}$$

其中

$$\epsilon = 2\gamma\wedge\beta + \frac{3}{2}\gamma\wedge[\beta,\alpha]_\pi + \frac{1}{2}\beta\wedge[\alpha,\gamma]_\pi + [\delta,\alpha]_\pi\wedge\delta. \tag{16}$$

证明. 利用 (9) 以及科苏尔括号的性质，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_N\Omega &= \mathrm{d}_N(\alpha\wedge\delta) = \mathrm{d}_N\alpha\wedge\delta - \alpha\wedge\mathrm{d}_N\delta = \alpha\wedge\gamma\wedge\left(\beta+\frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi\right) - \alpha\wedge\left(\mathrm{d}_N\beta + \frac{1}{2}\mathrm{d}_N[\beta,\alpha]_\pi\right)\\
&= \alpha\wedge\left\{\gamma\wedge\left(\beta+\frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi\right) - \beta\wedge\gamma - \frac{1}{2}[\mathrm{d}_N\beta,\alpha]_\pi - \frac{1}{2}[\beta,\mathrm{d}_N\alpha]_\pi\right\}\\
&= \alpha\wedge\left(2\gamma\wedge\beta + \frac{1}{2}\gamma\wedge[\beta,\alpha]_\pi - \frac{1}{2}[\beta\wedge\gamma,\alpha]_\pi - \frac{1}{2}[\beta,\alpha\wedge\gamma]_\pi\right)\\
&= \alpha\wedge\left(2\gamma\wedge\beta + \frac{1}{2}\gamma\wedge[\beta,\alpha]_\pi + \frac{1}{2}[\alpha,\beta\wedge\gamma]_\pi - \frac{1}{2}[\beta,\alpha\wedge\gamma]_\pi\right)\\
&= \alpha\wedge\left(2\gamma\wedge\beta + \frac{1}{2}\gamma\wedge[\beta,\alpha]_\pi + \frac{1}{2}[\alpha,\beta]_\pi\wedge\gamma + \frac{1}{2}\beta\wedge[\alpha,\gamma]_\pi - \frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi\wedge\gamma - \frac{1}{2}\alpha\wedge[\beta,\gamma]_\pi\right)\\
&= \alpha\wedge\left(2\gamma\wedge\beta + \frac{3}{2}\gamma\wedge[\beta,\alpha]_\pi + \frac{1}{2}\beta\wedge[\alpha,\gamma]_\pi\right).
\end{aligned}$$

经过类似的计算可得

$$[\Omega,\Omega]_\pi = [\alpha\wedge\delta,\alpha\wedge\delta]_\pi = 2\alpha\wedge[\delta,\alpha]_\pi\wedge\delta.$$

因此，我们有 $\mathrm{d}_N\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega]_\pi = \alpha\wedge\epsilon$，其中 ϵ 由 (16) 给出。 □

命题 5。 设 $(\mathcal{M},\pi,N,\phi)$ 为一个 *PqN* 流形。假设 α 和 β 是 $\mathcal{M}$ 上的闭 *1*-形式，使得

$$\mathrm{d}_N\alpha = \alpha\wedge\beta, \qquad \mathrm{d}_N\beta = 0. \tag{17}$$

If

$$\delta = \beta + \frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi \quad \textit{and} \quad \Omega = \alpha\wedge\delta, \tag{18}$$

那么 $(\mathcal{M},\pi,N,\phi)$ 是一个 *PqN* 流形，其中

$$\widehat{N} = N + \pi^\sharp\Omega^\flat, \qquad \widehat{\phi} = \phi + \frac{1}{2}\alpha\wedge[[\beta,\alpha]_\pi,\alpha]_\pi\wedge\delta = \phi + \frac{1}{2}\,[[\alpha,\beta]_\pi,\alpha]_\pi\wedge\Omega.$$

证明。只需在特例 $\gamma=\beta$ 下应用引理 4，然后应用定理 3。注意，由于 Ω 是闭的，α 和 δ 都是闭的。变形的 PqN 流形的 3-形式为

$$\widehat{\phi}=\phi+\mathrm{d}_N\Omega+\frac{1}{2}[\Omega,\Omega]_\pi=\phi+\alpha\wedge\epsilon,$$

并且结果表明

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left[[\beta,\alpha]_\pi,\alpha\right]_\pi\wedge\delta.$$

□

注 6. 作为前一结果的直接推论，若 $(\mathcal{M},\pi,N)$ 是一个 PN 流形且$[[\beta,\alpha]_\pi,\alpha]_\pi=0$，那么通过以下方式得到的变形结构

$$\Omega=\alpha\wedge\left(\beta+\frac{1}{2}[\beta,\alpha]_\pi\right),\tag{19}$$

也属于 PN 结构。

接下来的两个例子将讨论与开 Toda 格和闭 Toda 格相关的 PN 和 PqN 结构。

例 7. 假设 $(\mathbb{R}^{2n},\pi,N)$ 是开 *Toda* 格的 *Das-Okubo PN* 结构 *[5]*。这意味着 π 是典范泊松张量，即 $\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}$，并且

$$\begin{aligned}N=&\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\partial_{q_i}\otimes\mathrm{d}q_i+\partial_{p_i}\otimes\mathrm{d}p_i\right)+\sum_{i<j}\left(\partial_{q_i}\otimes\mathrm{d}p_j-\partial_{q_j}\otimes\mathrm{d}p_i\right)\\&+\sum_{i=1}^{n-1}e^{q_i-q_{i+1}}\left(\partial_{p_{i+1}}\otimes\mathrm{d}q_i-\partial_{p_i}\otimes\mathrm{d}q_{i+1}\right).\end{aligned}\tag{20}$$

如果 $f=e^{q_n}-e^{-q_1}$ 且 $g=\sum_{i=1}^{n}p_i$，则可以验证

$$\mathrm{d}_N\mathrm{d}f=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g,\qquad\mathrm{d}_N\mathrm{d}g=0,\qquad\{\{g,f\},f\}=0.$$

第二个断言由$\mathrm{d}_NH_1=N^*\mathrm{d}H_1=\mathrm{d}H_2$得出，其中 $H_k=\frac{1}{2k}\mathrm{Tr}(N^k)$；第三个断言由 $\{g,f\}=e^{q_n}+e^{-q_1}$得出。因此可以应用注 *6*，其中 $\alpha=\mathrm{d}f$和 $\beta=\mathrm{d}g$。在这种情况下，用于将 *Das-Okubo PN* 结构变形为另一种 *PN* 结构的 *2*-形式（见(19)）为$\Omega_{\mathrm{Ts}}=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}h$，其中

$$h=g+\frac{1}{2}\{g,f\}=\sum_{i=1}^{n}p_i+\frac{1}{2}(e^{q_n}+e^{-q_1}).$$

我们有

$$\Omega_{\mathrm{Ts}}=(e^{q_n}\mathrm{d}q_n+e^{-q_1}\mathrm{d}q_1)\wedge\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i+e^{q_n-q_1}\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}q_n$$

并且，变形后的 *PN* 结构 $(\mathbb{R}^{2n},\pi,N_{\mathrm{Ts}})$，其中 $N_{\mathrm{Ts}}=N+\pi^\sharp\Omega_{\mathrm{Ts}}^\flat$，与 *Tsiganov* 在 *[20]*，中发现的结构一致；该结构用于通过广义 *Lenard-Magri* 递归关系求得闭 *Toda* 格的运动积分。

在 *[20]* 中还指出，（典范）变换

$$Q_j = q_j \ \forall j = 1, \ldots, n, \quad P_j = p_j \ \forall j = 2, \ldots, n-1, \quad P_1 = p_1 - e^{-q_1}, \quad P_n = p_n - e^{q_n}, \tag{21}$$

将 ***Das-Okubo PN*** 结构映射为 （$\mathbb{R}^{2n}$、 π、 N_{Ts}）。因此， N_{Ts} 的各次幂的迹通过微分同胚（21）与 N的各次幂的迹相同，也就是说，与开 ***Toda*** 格的运动积分相同。

在三粒子情形下，我们有

$$N = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & p_2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p_3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -e^{q_1-q_2} & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ e^{q_1-q_2} & 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & e^{q_2-q_3} & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{array}\right)$$

and

$$N_{\mathrm{Ts}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_1 + e^{-q_1} & 0 & e^{q_3} & 0 & 1 & 1 \\ e^{-q_1} & p_2 & e^{q_3} & -1 & 0 & 1 \\ e^{-q_1} & 0 & p_3 + e^{q_3} & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -e^{q_1-q_2} & e^{q_3-q_1} & p_1 + e^{-q_1} & e^{-q_1} & e^{-q_1} \\ e^{q_1-q_2} & 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & p_2 & 0 \\ -e^{q_3-q_1} & e^{q_2-q_3} & 0 & e^{q_3} & e^{q_3} & p_3 + e^{q_3} \end{array}\right).$$

注 8。 *[20],* 中得到的 ***PN*** 流形（上文记为（$\mathbb{R}^{2n}$、 π、 N_{Ts}））是 *[19]* 中所介绍的一般构造的一个特殊情形，该构造基于经典 ***Yang-Baxter*** 方程理论，更确切地说，基于与其解相关的 ***Sklyanin*** 括号。

例 9。 我们再次从开 ***Toda*** 格的 ***Das-Okubo PN*** 结构出发。若 $f = e^{q_n}$、$g = e^{-q_1}$和 $I = \sum_{i=1}^{n} p_i$, 则可以验证引理 ***4*** 适用，其中 $\alpha = \mathrm{d}f$、 $\beta = \mathrm{d}g$以及 $\gamma = \mathrm{d}I$。如例 *7* 中所述，我们有 $\delta =$dh，其中

$$h = g + \frac{1}{2}\{g, f\} = g = e^{-q_1}.$$

因此$\Omega = \alpha \wedge \beta = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = e^{q_n - q_1}\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_n$，以下将其记作$\Omega_1$。于是，变形 ***PqN*** 结构为$(\mathbb{R}^{2n}, \pi, N_-, \phi_-)$，其中 $N_- = N + \pi^\sharp\Omega_1^\flat$，而 *3*-形式 ϕ_- 则为（见(14)、(15)和(16)），

$$\phi_- = \mathrm{d}_N\Omega_1 + \frac{1}{2}[\Omega_1, \Omega_1]_\pi = \alpha \wedge \epsilon = \mathrm{d}f \wedge (2\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}g) = 2e^{q_n - q_1}\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}q_1. \tag{22}$$

有关此 ***PqN*** 结构及其与闭 ***Toda*** 格的关系，更多详情请参见 *[2]*。注意， *[2]* 中出现的 *2*-形式 Ω 是此处出现的Ω_1 的相反数。在三粒子情形下，我们有

$$N_- = N + \pi^\sharp\Omega_1^\flat = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & p_2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p_3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -e^{q_1-q_2} & e^{q_3-q_1} & p_1 & 0 & 0 \\ e^{q_1-q_2} & 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & p_2 & 0 \\ -e^{q_3-q_1} & e^{q_2-q_3} & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{array}\right). \tag{23}$$

若取 $f = -e^{q_n}$，则得到称为 $(\mathbb{R}^{2n}, \pi, N_+, \phi_+)$ 的 ***PqN*** 流形，其中 *[2]*。

注10。

1. 如例 7 所示，通过应用正则变换 (21)，可以从 Das-Okubo 结构得到 Tsiganov PN 结构。找出能够诱导出一种变形、且该变形可由底层泊松流形上的正则变换描述的闭 2-形式，并对其进行刻画，这是一个有趣且完全开放的问题。

2. 通过 2-形式 $\Omega_2 = \Omega_{\mathrm{Ts}} - \Omega_1$, , 可以从 PqN 结构（$\mathbb{R}^{2n}$， π， N_-， ϕ_-）得到 Tsiganov Poisson-Nijenhuis 结构，其中 Ω_{Ts} 和 Ω_1 分别见例 7 和例 9。结果表明

$$\Omega_2 = (e^{q_n}\mathrm{d}q_n + e^{-q_1}\mathrm{d}q_1) \wedge \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g,$$

其中 f 和 g 如例 7 所示。此外，若通过 Ω_2, 对 Das-Okubo PN 结构进行变形，则会得到另一个 PqN 结构（$\mathbb{R}^{2n}$， π， N_2， ϕ_2）。可以验证$\phi_2 = -\phi_-$ ，并且在三粒子情形下,

$$N_2 = N + \pi^\sharp \Omega_2^\flat = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_1 + e^{-q_1} & 0 & e^{q_3} & 0 & 1 & 1 \\ e^{-q_1} & p_2 & e^{q_3} & -1 & 0 & 1 \\ e^{-q_1} & 0 & p_3 + e^{q_3} & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -e^{q_1-q_2} & 0 & p_1 + e^{-q_1} & e^{-q_1} & e^{-q_1} \\ e^{q_1-q_2} & 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & e^{q_2-q_3} & 0 & e^{q_3} & e^{q_3} & p_3 + e^{q_3} \end{array}\right). \quad (24)$$

我们知道 Ω_{Ts} 会导出一个 PN 结构，因此它必定是

$$\mathrm{d}_N \Omega_{\mathrm{Ts}} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mathrm{Ts}}, \Omega_{\mathrm{Ts}}]_\pi = 0.$$

由于 $\Omega_{\mathrm{Ts}} = \Omega_1 + \Omega_2$, 这一事实也可以视为 $\phi_2 = -\phi_-$ 和 $[\Omega_1, \Omega_2]_\pi = 0$ 的推论（见 [6] 中的注记 4）。图 1 总结了这些变形过程。注意，也可以添加一条标记为 $\Omega_2 - \Omega_1$ 的垂直向下箭头。

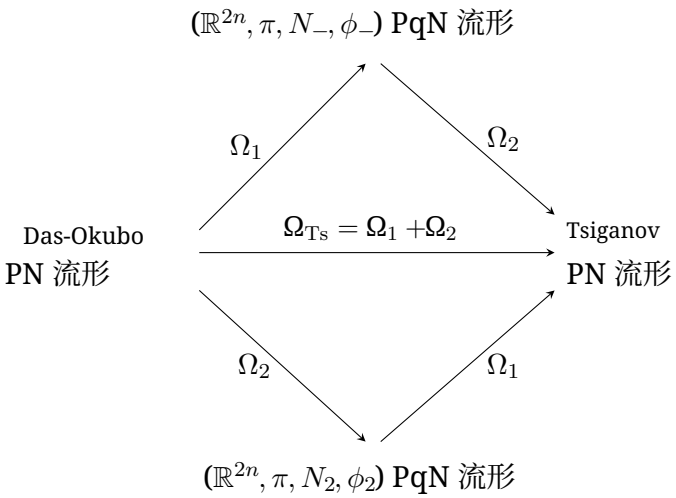


图 1：来自 Das-Okubo PN 结构的变形。

4 一个可逆性定理

本节给出 PqN 流形为 involutive（对合的）的一个简单充分条件。我们从

引理 11。 设 $(\mathcal{M}、\ \pi、\ N、\ \phi)$ 是一个 ***PqN*** 流形，满足 $\phi=\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$，其中 $\alpha、\ \beta$ 和 γ 是 ***1-*** 形式。如果

$$H_k=\frac{1}{2k}\operatorname{Tr}(N^k),\qquad X_k=\pi^\sharp \mathrm{d}H_k,\qquad Y_k=N^{k-1}X_1-X_k,$$

then

$$\langle\alpha,Y_k\rangle=0\qquad \textit{for all } k\geq 1. \tag{25}$$

证明。 首先，我们证明

$$T_N=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\pi^\sharp\alpha\otimes\beta\wedge\gamma. \tag{26}$$

事实上，对于任意一对向量场 $X、\ Y$，

$$\begin{aligned}
T_N(X,Y)&=\pi^\sharp\left(i_{X\wedge Y}\phi\right)=\pi^\sharp\left(i_{X\wedge Y}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\right)=\pi^\sharp\left(i_Y i_X(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\right)\\
&=\pi^\sharp\left(i_Y\left(\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\langle\alpha,X\rangle\beta\wedge\gamma\right)\right)=\pi^\sharp\left(\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\langle\alpha,X\rangle\left(\langle\beta,Y\rangle\gamma-\langle\gamma,Y\rangle\beta\right)\right)\\
&=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\langle\alpha,X\rangle\left(\langle\beta,Y\rangle\pi^\sharp\gamma-\langle\gamma,Y\rangle\pi^\sharp\beta\right)=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\langle\beta,X\rangle\langle\gamma,Y\rangle-\langle\beta,Y\rangle\langle\gamma,X\rangle\right)\pi^\sharp\alpha\\
&=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}(\beta\wedge\gamma)(X,Y)\pi^\sharp\alpha.
\end{aligned}$$

由 (26) 可得

$$i_X T_N=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\pi^\sharp\alpha\otimes\left(\langle\beta,X\rangle\gamma-\langle\gamma,X\rangle\beta\right). \tag{27}$$

现在考虑 1-形式 (13)，并利用 (27)，可得

$$\begin{aligned}
\langle\phi_l,X\rangle&=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(N^l\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\pi^\sharp\alpha\otimes\left(\langle\beta,X\rangle\gamma-\langle\gamma,X\rangle\beta\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\langle\beta,X\rangle\operatorname{Tr}\left(N^l\pi^\sharp\alpha\otimes\gamma\right)-\langle\gamma,X\rangle\operatorname{Tr}\left(N^l\pi^\sharp\alpha\otimes\beta\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\langle\beta,X\rangle\langle\gamma,N^l\pi^\sharp\alpha\rangle-\langle\gamma,X\rangle\langle\beta,N^l\pi^\sharp\alpha\rangle\right)\\
&=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\langle\alpha,X\rangle\langle\beta,N^l\pi^\sharp\gamma\rangle,
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们利用了 $N^l\pi^\sharp$ 的反对称性。因此，

$$\phi_l=\sum_{\circlearrowleft(\alpha,\beta,\gamma)}\langle\beta,N^l\pi^\sharp\gamma\rangle\alpha. \tag{28}$$

最后，我们回顾一下（见 [2], 公式 (56) 之前）：

$$Y_k = \pi^\sharp \sum_{l=0}^{k-2} (N^*)^{k-l-2}\, \phi_l. \tag{29}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha, Y_k \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{k-2} \langle \alpha, \pi^\sharp\, (N^*)^{k-l-2}\, \phi_l \rangle = -\sum_{l=0}^{k-2} \langle \phi_l, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \\
&= -\sum_{l=0}^{k-2} \Big(\langle \alpha, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \beta, N^l \pi^\sharp \gamma \rangle + \langle \beta, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \gamma, N^l \pi^\sharp \alpha \rangle + \langle \gamma, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \alpha, N^l \pi^\sharp \beta \rangle \Big) \\
&= -\sum_{l=0}^{k-2} \langle \beta, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \gamma, N^l \pi^\sharp \alpha \rangle + \sum_{l=0}^{k-2} \langle \gamma, N^{k-l-2}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \beta, N^l \pi^\sharp \alpha \rangle = 0,
\end{aligned}$$

其中，在倒数第二个等式中，我们再次用到了 $N^l\pi^\sharp$ 的反对称性。 □

推论 12. 若$(\mathcal{M}, \pi, N, \phi)$ 是满足引理 *11* 假设的 *PqN* 流形，则对所有 $k \geq 1$,

$$\langle \alpha, Y_k \rangle = \langle \beta, Y_k \rangle = \langle \gamma, Y_k \rangle = 0, \tag{30}$$

从而 $i_{Y_k}\phi = 0$。此外，由(28) 可知 $\langle \phi_l, Y_k \rangle = 0$，这意味着 t

$$\langle \phi_l, X_k \rangle = \langle \phi_l, N^{k-1} X_1 \rangle. \tag{31}$$

现在我们已准备好陈述本文的主要结果。

定理13. 设$(\mathcal{M}, \pi, N, \phi)$ 是一个满足 $\phi = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ 的 *PqN* 流形，其中 $\alpha = \mathrm{d}H_1$,$H_k = \frac{1}{2k}\operatorname{Tr}(N^k)$, 且 β, γ 是 *1*-形式。则$(\mathcal{M}, \pi, N, \phi)$ 是 ***involutive***（对合的），即

$$\{H_l, H_m\} = 0 \qquad \textit{for all } l, m \geq 1.$$

证明。 我们可以证明 [2] 中定理 4 的假设均得到满足，但我们认为给出一个自洽的证明是值得的。

我们由 [2] （等式 (16)）回忆可知

$$\{H_l, H_m\} = \{H_{l-1}, H_{m+1}\} - \langle \phi_{m-1}, X_{l-1} \rangle - \langle \phi_{l-2}, X_m \rangle. \tag{32}$$

利用 (31)，我们得到

$$\{H_l, H_m\} = \{H_{l-1}, H_{m+1}\} - \langle \phi_{m-1}, N^{l-2} X_1 \rangle - \langle \phi_{l-2}, N^{m-1} X_1 \rangle. \tag{33}$$

由 (28)，并考虑到 $X_1 = \pi^\sharp \mathrm{d}H_1 = \pi^\sharp \alpha$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_{m-1}, N^{l-2} X_1 \rangle \\
&= \langle \beta, N^{m-1}\pi^\sharp \gamma \rangle \cancel{\langle \alpha, N^{l-2} X_1 \rangle} + \langle \gamma, N^{m-1}\pi^\sharp \alpha \rangle \langle \beta, N^{l-2} X_1 \rangle + \langle \alpha, N^{m-1}\pi^\sharp \beta \rangle \langle \gamma, N^{l-2} X_1 \rangle \\
&= \langle \gamma, N^{m-1} X_1 \rangle \langle \beta, N^{l-2} X_1 \rangle - \langle \beta, N^{m-1} X_1 \rangle \langle \gamma, N^{l-2} X_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{34}$$

交换 $m-1$ 和 $l-2$ 后，最后一行的符号会改变。因此，(33)归结为$\{H_l, H_m\} = \{H_{l-1}, H_{m+1}\}$, 众所周知，这意味着函数 H_k彼此对合。 □

现在我们给出定理13的一些应用示例。在所有这些例子中，泊松张量 π 都是标准的。

例14。 考虑例 *9* 中描述的 ***PqN*** 流形 $(\mathbb{R}^{2n}, \pi, N_-, \phi_-)$。由于

$$\phi_- = 2\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}f$$

且 $\mathrm{d}I = \mathrm{d}H_1^-$，其中 $H_k^- = \frac{1}{2k}\mathrm{Tr}(N_-^k)$，我们可以应用定理*13*证明该 ***PqN*** 流形是 ***involutive***（对合的）。在这种情况下

$$H_2^- = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{e}^{q_i - q_{i+1}} - \mathrm{e}^{q_n - q_1} \tag{35}$$

是闭 ***Toda*** 格的能量，其中第一个粒子与最后一个粒子之间的相互作用是排斥性的。要得到经典闭***Toda***格的能量，必须考虑合适的广义递归关系，或者作为替代，考虑 ***PqN*** 结构 $(\mathbb{R}^{2n}, \pi, N_+, \phi_+)$ 的 ***(1,1)*** 型张量场的幂的迹，更多详情见 *[2]*。

例15。 我们也可以将定理*13*应用于注*10*中发现的新 ***PqN*** 流形 $(\mathbb{R}^{2n}, \pi, N_2, \phi_2)$。事实上，利用 (22) 可得

$$\phi_2 = -\phi_- = -2e^{q_n - q_1}\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}q_1 = 2\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}e^{q_n} \wedge \mathrm{d}e^{-q_1}, \qquad where\ I = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

由于 $H_1 = I + e^{-q_1} + e^{q_n}$，其中 $H_k = \frac{1}{2k}\mathrm{Tr}(N_2^k)$，我们有 $\phi_2 = 2\mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{d}e^{q_n} \wedge \mathrm{d}e^{-q_1}$，因此该 ***PqN*** 流形是 ***involutive***（对合的）。我们计划今后研究与此 ***PqN*** 结构相关的可积系统。

例16。 现在考虑与李代数 $C_n^{(1)}$和 $A_{2n}^{(2)}$ 相关的（闭）***Toda***晶格的 ***PqN***结构 $(\mathbb{R}^{2n}, \pi, \widehat{N}, \widehat{\phi})$。这些结构见于 *[2]*，，其中证明了 $\widehat{\phi} = -2\mathrm{d}\,\widehat{H}_1 \wedge \Omega$，其中 $\widehat{H}_k = \frac{1}{2k}\,\mathrm{Tr}(\,\widehat{N}^k)$ 且 $\Omega = \mathrm{d}(e^{-2q_1}) \wedge \mathrm{d}p_1$。因此，定理*13*立即表明这些 ***PqN*** 流形是 ***involutive***（对合的），无需进行 *[2]*附录*A* 中冗长的计算。

在下面的例子中，我们使用与例16中相同的闭二形式，对 D_n-Toda 系统的 PN 结构进行变形，从而构造出一个新的对合 PqN 结构。

例17。 我们考虑 ***Toda***晶格类型 D_n 的 ***PN*** 结构 （$\mathbb{R}^{2n}$、 π、 N），即哈密顿量为 $H_{D_n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} + e^{q_{n-1}+q_n}$ 的哈密顿系统。***Nijenhuis*** 张量 N 为 $(\pi')^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}$，其中与泊松双向量 π' 相关的泊松括号可在 *[4]*，方程（*39*）中找到。通过闭二形式 $\Omega = \mathrm{d}(e^{-2q_1}) \wedge \mathrm{d}p_1$，我们将（$\mathbb{R}^{2n}$、 π、 N）变形为 ***PqN*** 结构 （$\mathbb{R}^{2n}$、 π、 $\widehat{N}$、 $\widehat{\phi}$）。事实证明，3-形式 $\widehat{\phi}$ 为

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi} &= \mathrm{d}_N\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega]_\pi = \mathrm{d}_N\Omega \\
&= \left(-4e^{-2q_1}\mathrm{d}q_1 \wedge N^*\mathrm{d}q_1 + 2e^{-2q_1}\mathrm{d}(N^*\mathrm{d}q_1)\right) \wedge \mathrm{d}p_1 - 2e^{-2q_1}\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}(N^*\mathrm{d}p_1) \\
&= -8e^{-2q_1}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\left(e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}\right)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_1 - e^{q_{n-1}+q_n}\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_{n-1} \wedge \mathrm{d}p_1\right. \\
&\left. + \left(e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_{n-1}+q_n}\right)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}p_i\right),
\end{aligned}$$

因为

$$N^*\mathrm{d}q_1 = -(p_1^2 + 2e^{q_1-q_2})\mathrm{d}q_1 + (e^{q_1-q_2} - 2e^{q_2-q_3})\mathrm{d}q_2 + 2\sum_{i=3}^{n-1}(e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i-q_{i+1}})\mathrm{d}q_i$$
$$- 2e^{q_{n-1}+q_n}dq_{n-1} + 2(e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_{n-1}+q_n})\mathrm{d}q_n - 2\sum_{i=1} p_i\mathrm{d}p_i$$
$$N^*\mathrm{d}p_1 = e^{q_1-q_2}(p_1+p_2)\mathrm{d}q_2 - (p_1^2 + 2e^{q_1-q_2})dp_1 - e^{q_1-q_2}\mathrm{d}p_2.$$

另一方面，简单计算表明

$$\widehat{H}_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\widehat{N}) = \sum_{i=1}^{n}\{p_i, q_i\}' - 2e^{-2q_1} = -2H_{D_n} - 2e^{-2q_1}$$

且 $\widehat{\phi} = -2\mathrm{d}\widehat{H}_1 \wedge \Omega$。因此，定理*13*表明，*PqN* 结构$(\mathbb{R}^{2n}, \pi, \widehat{N}, \widehat{\phi})$是 *involutive*（对合的）。

为方便读者，我们将上文讨论的 Poisson-Nijenhuis 结构与 PqN变形汇总于表1。

结构	2-形式 Ω	变形结构
Das-Okubo PN 结构	Ω_{Ts} (例 7)	Tsiganov PN 结构 $(\pi,\ N_{\mathrm{Ts}})$
Das-Okubo PN 结构	$\Omega_1 = \mathrm{d}(e^{q_n}) \wedge \mathrm{d}(e^{-q_1})$ (例 9)	对合 PqN (π, N_-, ϕ_-)
Das-Okubo PN 结构	$-\Omega_1$ （例 9）	对合 PqN（$\pi,\ N_+,\ \phi_+$） for $A_n^{(1)}$-Toda
对合 PqN (π, N_-, ϕ_-)	$\Omega_2 = \Omega_{\mathrm{Ts}} - \Omega_1$ (注10)	对合 PqN (π, N_2, ϕ_2)
Poisson-Nijenhuis 结构对于 B_n-Toda [16]	$\Omega = \mathrm{d}(e^{-2q_1}) \wedge \mathrm{d}p_1$ (例16)	对合 PqN 对于 $A_{2n}^{(2)}$-Toda
Poisson-Nijenhuis 结构对于 C_n-Toda [16]	$\Omega = \mathrm{d}(e^{-2q_1}) \wedge \mathrm{d}p_1$ （例16）	对合 PqN 用于 $C_n^{(1)}$ -Toda
Poisson-Nijenhuis 结构对于 D_n-Toda [4]	$\Omega = \mathrm{d}(e^{-2q_1}) \wedge \mathrm{d}p_1$ (例17)	具有哈密顿量的系统的对合 PqN $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i-q_{i+1}} + e^{q_{n-1}+q_n} + e^{-2q_1}$

表1：变形列表

我们以以下结果作为本文的结尾，它是命题5和定理13的直接推论。

推论 18。 设$(\mathcal{M}、\ \pi、\ N)$ 为一个 *PN* 流形。假设 $\alpha、\ \beta、\ \delta$ 为闭 *1*-形式，且Ω 为一个闭二形式，并满足命题 *5* 的假设，见(17) 和(18)。设$\widehat{\ }\ \widehat{\ }(\mathcal{M}、\ \pi、\ N、\ \phi)$ 为如下定义的变形的 *PqN* 流形：

$$\widehat{N} = N + \pi^\sharp\Omega^\flat, \qquad \widehat{\phi} = \frac{1}{2}\alpha \wedge [[\beta, \alpha]_\pi, \alpha]_\pi \wedge \delta.$$

如果 $\alpha = \mathrm{d}\,\widehat{H}_1$ 且 $\widehat{H}_k = \frac{1}{2k}\mathrm{Tr}(\widehat{N}^k)$，那么

$$\{\widehat{H}_l, \widehat{H}_m\} = 0 \qquad for\ all\ l, m \geq 1.$$

下一个也是最后一个例子旨在展示前一个推论的一个应用。更确切地说，我们将说明，利用方程 (18) 可以构造一个与变量分离理论相关的 PN 结构的 PN 变形，参见 [3] 中的第 6 节。

例 19。 设 Q 为带有坐标 (q_1, q_2)的 $\mathbb{R}^2$ 。设 L 为定义在 Q 上的 ***(1,1)*** 张量，其矩阵表达式为

$$L = \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 \\ q_1 q_2 & q_2^2 \end{pmatrix}.$$

简单计算可得，它在 $T^*Q = \mathbb{R}^4$ 上的余切提升具有如下形式 m

$$N = \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & 0 & 0 \\ q_1 q_2 & q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 p_2 - q_2 p_1 & q_1^2 & q_1 q_2 \\ q_2 p_1 - q_1 p_2 & 0 & q_1 q_2 & q_2^2 \end{pmatrix},$$

其挠率为 自由的，因为 L 是——例如，参见 *[3, 12]*。事实上，容易验证，

$$\left[L\frac{\partial}{\partial q_1}, L\frac{\partial}{\partial q_2}\right] = 0 \quad and \quad L\left(\left[L\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial q_1}, L\frac{\partial}{\partial q_2}\right]\right) = 0.$$

现在设

$$h = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^{-2} + q_2^{-2}). \tag{36}$$

其微分为

$$\mathrm{d}h = p_1 \mathrm{d}p_1 + p_2 \mathrm{d}p_2 - q_1^{-3}\mathrm{d}q_1 - q_2^{-3}\mathrm{d}q_2,$$

其经由 N^* 的像为

$$\begin{aligned} N^*\mathrm{d}h &= (-q_1^{-1} - q_1 q_2^{-2} + q_2 p_1 p_2 - q_1 p_2^2)\mathrm{d}q_1 + (-q_2 q_1^{-2} - q_2^{-1} + q_1 p_1 p_2 - q_2 p_1^2)\mathrm{d}q_2 \\ &+ (q_1^2 p_1 + q_1 q_2 p_2)\mathrm{d}p_1 + (q_1 q_2 p_1 + q_2^2 p_2)\mathrm{d}p_2. \end{aligned}$$

通过使用上述公式进行繁琐但直接的计算可得

$$\mathrm{d}_N \mathrm{d}h = -\mathrm{d}(N^*\mathrm{d}h) = \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,L. \tag{37}$$

此外，由于 N 是一个 ***Nijenhuis*** 张量，并且 迹 $N =$ 2迹 L,

$$\mathrm{d}_N \mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,L = 0. \tag{38}$$

换言之， $\alpha = \mathrm{d}h$ 与 $\beta = \mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,L$ 满足方程(17)。现在可以观察到

$$[\beta, \alpha]_\pi = \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}(q_1^2 + q_2^2), \mathrm{d}(p_1^2 + p_2^2) + \mathrm{d}(q_1^{-2} + q_2^{-2})\right]_\pi = \frac{1}{2}\mathrm{d}\{q_1^2 + q_2^2, p_1^2 + p_2^2\} = 0,$$

其中 π 是 $\mathbb{R}^4$上的典范泊松张量。前述计算得到 $\delta = \beta$ 与$\Omega = \alpha \wedge \beta$，参见公式(18)。用坐标写出，

$$\Omega = -2(p_1q_1\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + p_2q_1\mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_1 + p_1q_2\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_2 + p_2q_2\mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2),$$

这意味着

$$\widehat{N} = N + \pi^\sharp\Omega^\flat = \begin{pmatrix} q_1^2 + 2p_1q_1 & q_1q_2 + 2p_1q_2 & 0 & 0 \\ q_1q_2 + 2p_2q_1 & q_2^2 + 2p_2q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1p_2 - q_2p_1 & q_1^2 + 2p_1q_1 & q_1q_2 + 2p_1q_2 \\ q_2p_1 - q_1p_2 & 0 & q_1q_2 + 2p_2q_1 & q_2^2 + 2p_2q_2 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$最后，注意到 $\phi = 0$，因为 $[\beta, \alpha]_\pi = 0$。这意味着(π, N) 是原始 *PN* 结构(π, N)的 *PN* 变形，另见注 *6*。

注 20. 上一例子中的初始 *PN* 结构属于一类在变量分离理论中起重要作用的泊松-尼延豪斯结构，参见*[12, 3, 10]*及其中的参考文献。方程(17) 是变量分离理论之双哈密顿方法的关键组成部分，再次参见 *[12, 3]*。正如我们已经指出的，上述例子展示了 *[3]*第 *6* 节中所述 *PN* 结构的一种 *PN* 变形。寻找在变量分离理论中具有重要意义的泊松-尼延豪斯结构的对合 *PqN*变形，将是有趣的。

致谢。 我们感谢 Andrea Raimondo、Pavel Etingof、Semenov Tian-Shansky 和 Pol Vanhaecke 的有益意见与有趣讨论。MP 感谢 ICMC-USP，即圣保罗大学（University of S˜ao Paulo）的数学与计算机科学研究所 ´ı˜，以及米兰比可卡大学数学与应用数学系的款待，并感谢贝加莫大学支持他于2025年在外派访问教授项目下访问 ICMC-USP。IM 感谢米兰比可卡大学数学与应用数学系的款待，以及贝加莫大学支持他于2026年的访问。本项目获得了欧盟“地平线2020”研究与创新计划下玛丽·斯克-沃多夫斯卡-居里资助（编号 778010）$IPaDEGAN$ 以及意大利 PRIN 2022（2022TEB52W）- PE1 - 项目可积性的魅力：从非线性波到随机矩阵的资助。全体作者衷心感谢意大利国家高等数学研究所 GNFM 分部的主持（本工作的部分内容在其主持下完成），以及意大利国家核物理研究院项目 MMNLP（非线性物理中的数学方法）的经费支持。

参考文献

[1] Bursztyn, H., Drummond, T., 乘法张量的李理论，《数学年刊》**375**（2019年），1489–1554。[2] Chu˜no Vizarreta, E., Falqui, G., Mencattini, I., Pedroni, M., *Poisson*拟*Nijenhuis*流形、闭合托达格点与广义递归关系，《数学物理通讯》**115**（2025年），84（22页）。

[3] Crampin, M., Sarlet, W., Thompson, G., 双微分演算、双哈密顿系统与共形Killing张量, 《物理学杂志A》33（2000），8755–8770。[4] Damianou, P. A., Kouzaris, S. P., D_N型Bogoyavlensky-Toda系统, 《物理学杂志A：数学与一般》36（2003），1385–1399。[5] Das, A., Okubo, S., Toda晶格的系统研究, 《物理学纪事》190（1989），215–232。[6] do Nascimento Luiz, M., Mencattini, I., Pedroni, M., 拟Lie双代数丛、Dirac结构与Poisson拟Nijenhuis流形的变形, 《巴西数学会通报》（新辑）55（2024），18页。[7] Dufour, J.-P., Zung, N.T., Poisson结构及其正规形, 《数学进展》第242卷，Birkh¨auser出版社，2005。[8] Falqui, G., Mencattini, I., Ortenzi, G., Pedroni, M., Poisson拟Nijenhuis流形与Toda系统, 《数学物理分析与几何》23（2020），17页。[9] Falqui, G., Mencattini, I., Pedroni, M., 典范PN结构的Poisson拟Nijenhuis变形, 《几何与物理杂志》186（2023），10页。[10] Falqui, G., Pedroni, M., 双哈密顿系统的变量分离, 《数学物理分析与几何》6（2003），139–179。[11] Fiorenza, D., Manetti, M., Koszul括号的形式性与全纯Poisson流形的变形, 《同调、同伦及其应用》14（2012），63–75。[12] Ibort, A., Magri, F., Marmo, G., 双哈密顿结构与St ¨ackel可分离性, 《几何与物理杂志》33（2000），210–218。[13] Kosmann-Schwarzbach, Y., 泊松-尼延豪斯流形的Lie双代数丛, 《数学物理通讯》38（1996），421–428。[14] Kosmann-Schwarzbach, Y., Magri, F., Poisson-Nijenhuis结构, 《亨利·庞加莱研究所年刊》53（1990），35–81。[15] Magri, F., Morosi, C., Ragnisco, O., 无穷维哈密顿系统的约化技术：若干思想与应用, 《数学物理通信》99（1985），115–140。[16] Nunes da Costa, J.M., Damianou, P.A., Toda 系统与单Lie群的指数, 《数学科学通报》125（2001），49–69。[17] Reyman, A.G., Semenov-Tian-Shansky, M.A., 有限维可积系统理论中的群论方法。载于：动力系统VII, 《数学科学百科全书》第16卷（Arnol’d, V.I., Novikov, S.P.编），Springer，柏林, 1994。[18] Sti´enon, M., Xu, P., Poisson拟Nijenhuis流形, 《数学物理通讯》270（2007），709–725。[19] Tsiganov, A.V., 与Sklyanin括号相容的一族Poisson括号, 《物理学杂志A》40（2007），4803–4816。

[20] Tsiganov, A.V.，关于*Toda*晶格的两种不同双哈密顿结构，《物理学杂志A》**40**（2007），6395–6406。