arXiv:2603.06535v1 [math.GR] 6 Mar 2026

群对的有限性性质与拟等距

Kevin Li 和 Luis Jorge S ´ANCHEZ SALDA ˜NA

Abstract. 我们证明，群对的几何有限性性质和同调有限性性质在一种适当的群对拟等距概念下保持不变。

1. Introduction

群上同调这一主题，交织着代数拓扑、群论与同调代数，内容丰富。CW复形的拓扑性质可通过分类空间转化为群的性质，而这些性质也有相应的代数表述。

设 G 是一个离散群，且 $n \in \mathbb{N}$。群 G 是 F_n 型，当且仅当存在一个 BG 的 CW 模型，其 n 骨架有限。等价地说，存在一个 EG 的 G-CW 模型，其 n 骨架是余紧的。群 G 是 FP_n 型，当且仅当平凡的 $\mathbb{Z}G$-模 $\mathbb{Z}$ 有一个投射 $\mathbb{Z}G$ 分解，且该分解在 $\leq n$ 次数上有限生成。群是 F_1 型，当且仅当它是有限生成的；群是 F_2 型，当且仅当它是有限呈示的。对于 $n \geq 2$，群是 F_n 型，当且仅当它是有限呈示的且为 FP_n型。例如，双曲群对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都是 F_n 型。

这些以拓扑和代数方式定义的群的有限性性质在拟等距这一几何等价关系下保持不变，事实上，拟收缩也继承了这些性质。通过赋予有限生成集所对应的词度量，可以将一个有限生成群视为度量空间。

定理 1.1 (Alonso [Alo94])。设 G 和 H 是有限生成群，且 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 2$。假设 G 是 H的拟收缩。那么有以下结论：

(i) 如果 H 属于 FP_n型，则 G属于 FP_n型；
(ii) 如果 H 属于 F_n型，则 G属于 F_n型。

特别地，如果 G 和 H 拟等距，那么 G 属于 FP_n 型（分别属于 F_n型）当且仅当 H 属于 FP_n 型（分别属于 F_n型）。

群对的有限性性质。在许多拓扑情形下，考虑群对的相对情形是自然且必要的，例如带边流形。群对的上同调得到了系统发展，例如用于处理庞加莱对偶群对 [BE78、Alo91]。近年来，人们重新关注群对的上同调，尤其是在相对双曲群及其推广的背景下 [MW20、PS24、MPSV25、Pat]。

在全文中，我们只考虑以下形式的群对。

Date：2026年3月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20J05，20F65。
Key words and phrases. 群对的拟等距，群对的有限性性质，子群族的Bredon有限性性质。

定义 1.2。 一个群对$(G,\mathcal{P})$由一个有限生成群 G 和一个非空有限的子群集合 $\mathcal{P}$ 构成，其中各子群均属于 G。（集合 $\mathcal{P}$ 中可以包含重复项。）

我们用 $G/\mathcal{P}$ 表示 G-集 $\coprod_{P\in\mathcal{P}} G/P$。我们也将 $G/\mathcal{P}$ 视为陪集 $(gP)_{P\in\mathcal{P},\ gP\in G/P}$ 的集合。考虑相伴的置换 $\mathbb{Z}G$-模 $\mathbb{Z}[G/\mathcal{P}]:=\bigoplus_{P\in\mathcal{P}}\bigoplus_{gP\in G/P}\mathbb{Z}$。设 $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}]\to\mathbb{Z}$ 为在每个直和项上均为恒等的增广映射$\mathbb{Z}G$-映射。我们用 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 表示 $\mathbb{Z}G$-模 $\ker(\varepsilon)$。

群对的有限性性质定义如下。

定义 1.3. 设 $(G,\mathcal{P})$ 为一个群对，并设 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $n\geq 1$。群对 $(G,\mathcal{P})$ 是 类型 F_n，如果存在一个 G-CW 对 $(X,G/\mathcal{P})$，使得 $X\setminus G/\mathcal{P}$ 中的每个胞腔都具有平凡稳定子，X 可缩，且 X 的 n-骨架是余紧的。

群对 $(G,\ \mathcal{P})$ 是*FP* 型 FP_n，如果 $\mathbb{Z}G$-模 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 是 FP_{n-1} 型；也就是说，存在一个投射 $\mathbb{Z}G$-分解 $\cdots\to P_1\to P_0\to\Delta_{G/\mathcal{P}}\to 0$，使得对于每个 $i=0,\ \ldots,\ n-1$，$\mathbb{Z}G$-模 P_i 都是有限生成的。

群 G 的有限性性质等价于群对 $(G,\ \{1\})$ 的有限性性质，其中 $\{1\}$ 是仅由平凡子群构成的集合。群对是 F_2 型，当且仅当它是相对有限呈示的（定义 2.1）。对于 $n\geq 2$，群对是 F_n 型，当且仅当它是相对有限呈示且为 FP_n 型（定理 3.8）。例如，相对双曲群对对于每个 $n\geq 1$ [都是 F_n 型（MPP19，Pat]）。

群对的拟等距。 群对的拟等距是指群之间的一种拟等距，它“粗略地保留”了集合中子群的陪集。度量空间之间的函数 $f\colon X\to Y$若对所有 $x,x'\in X$，均有 $d_Y(f(x)\ f(x'))\leq L\cdot d_X(x,x')+C$，则称其为 (L,C)-*Lipschitz* 映射。

定义 1.4。 设 $(G,\mathcal{P})$ 和 $(H,\mathcal{Q})$ 为群对。我们在 G和 H上分别赋予与某些有限生成集相关联的词度量。设 $L,C,M\in\mathbb{R}$，且满足 $L\geq 1$、$C\geq 0$和 $M\geq 0$。

- 一个 (L,C,M)-群对之间的 *Lipschitz* 映射 $f=(f_1,f_2)\colon (G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 由一个 (L,C)-Lipschitz 映射 $f_1\colon G\to H$以及一个函数 $f_2\colon G/\mathcal{P}\to H/\mathcal{Q}$组成，并且对每个 $A\in G/\mathcal{P}$，均有.....其中 hdist_H 表示 H的子集之间的豪斯多夫距离。 $\mathrm{hdist}_H\big(f_1(A),f_2(A)\big)<M,$
- 一个群对 (f,r) 的 (L,C,M)-拟收缩由群对之间的 (L,C,M)-Lipschitz 映射 $f\colon (G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 和 $r\colon (H,\mathcal{Q})\to(G,\mathcal{P})$ 组成，使得对所有 $g\in G$，我们都有 $d_G\big(r_1\circ f_1(g)\ g\big)\leq C$，且 $r_2\circ f_2=\mathrm{id}^{G/\mathcal{P}}$。
- 一个 (L,C,M)-Lipschitz 映射 $f\colon (G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$，若存在群对之间的 (L,C,M)-Lipschitz 映射$r\colon (H,\mathcal{Q})\to(G,\mathcal{P})$，使得 (f,r) 和 (r,f) 是 (L,C,M)-群对的拟收缩，则称其为强 (L,C,M)-对的拟等距。

如果存在 $L,C,M\in\mathbb{R}$，满足 $L\geq 1$、$C\geq 0$，且使得 $(G,\mathcal{P})$ 是 $(H,\mathcal{Q})$ 的 (L,C,M)-拟收缩（分别是与 $(H,\mathcal{Q})$ 强 (L,C,M)-拟等距），则称 $(G,\mathcal{P})$ 是 $(H,\mathcal{Q})$ 的拟收缩（分别是与 $(H,\mathcal{Q})$强拟等距）。

我们在第 2 节中，将定义 1.4 与文献 [HMPSS25] 中关于群对的其他拟等距概念联系起来。这提供了许多群对的拟收缩和强拟等距的例子（例 2.7）。群的若干经典几何不变量，例如端的数目和 Dehn

函数，在群对中也有相对版本；最近已证明，这些版本在（强）群对拟等距下是不变量 [MPSS22, HMPSS23]。

拟等距不变性。我们的主要结果是，群对的有限性性质可由拟收缩继承，因而在强拟等距下保持不变。这为群对给出了定理 1.1 的相对版本。

定理 1.5 （定理 4.6 和推论 4.13）。设（$G, \mathcal{P}$）和（$H, \mathcal{Q}$）为群对，且 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 2$。假设（$G, \mathcal{P}$）是（$H, \mathcal{Q}$）的拟收缩。则有以下结论：

（i）若（$H, \mathcal{Q}$）是FP$_n$型，则（$G, \mathcal{P}$）是FP$_n$型；
（ii）若（$H, \mathcal{Q}$）是F$_n$型，则（$G, \mathcal{P}$）是F$_n$型。

特别地，若（$G, \mathcal{P}$）和（$H, \mathcal{Q}$）强拟等距，则（$G, \mathcal{P}$）是FP$_n$ 型（分别是F$_n$型）当且仅当（$H, \mathcal{Q}$）是FP$_n$ 型（分别是F$_n$型）。

证明定理 1.5 的策略遵循 Alonso 对定理 1.1 的证明，但需要进行细微的修改。这些修改是必要的，因为与凯莱图不同，锥化凯莱图（定义 2.2）不是局部有限的，因此 Rips 复形不是余紧的，并且固定长度的环路有无穷多个轨道。我们通过使用至多包含一个锥顶点的变体来规避这一问题。

对于部分 (i)，我们首先建立 Brown 判据的相对版本（定理 3.5），该结果本身可能也具有独立的意义。然后，我们将该判据应用于“单锥 Rips复形”（定义 4.1）；它是锥化凯莱图上的 Rips 复形的一个余紧子复形。对于部分 (ii)，我们利用锥化凯莱图中的“单锥环路”（定义 4.8），证明相对有限呈示性可由拟收缩继承（定理 4.12）。结合部分 (i)，这便得到部分 (ii)，因为类型 F$_n$ 等价于相对有限呈示性和类型 FP$_n$ （定理 3.8）。

群对存在一种较弱的（不一定是强）拟等距概念（定义 2.5）。我们不知道定理 1.5 对（不一定是强）拟等距的群对是否也普遍成立。HMPSS23 的问题 1 中曾提出：相对有限呈示性是否在群对的拟等距下保持不变?

针对子群族的 Bredon 有限性性质。另一种研究较多的相对有限性性质，是群相对于子群族的 Bredon 有限性性质（定义4.14）。这些性质是通过族的分类空间以及轨道范畴上的投射分解来定义的。若集合 $\mathcal{P}$ 是自交非正常的（定义 2.8），则群对 $(G, \mathcal{P})$ 的有限性性质等价于 G 相对于包含 $\mathcal{P}$ 的最小子群族 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ 的 Bredon 有限性性质（命题 4.15）。由定理 1.5 可知，自交非正常集合 $\mathcal{P}$ 的 Bredon 有限性性质 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-FP$_n$ 和 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-F$_n$ 可由拟收缩继承，因此在群对的强拟等距下保持不变。

定理1.6 (推论 4.16**).** 设$(G, \mathcal{P})$ 与$(H, \mathcal{Q})$ 为群对，其中 $\mathcal{P}$与 $\mathcal{Q}$是由不同子群构成的自共轭交集平凡集。设 $n \in \mathbb{N}$满足 $n \geq 2$。假设$(G, \mathcal{P})$ 是$(H, \mathcal{Q})$的拟收缩。则下列结论成立：

(i) 若 H 为 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-FP$_n$型，则 G为 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-FP$_n$型；(ii) 若 H 为 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-F$_n$型，则 G为 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-F$_n$型。

特别是，如果$(G, \mathcal{P})$ 与$(H, \mathcal{Q})$ 强拟等距，那么$(G, \mathcal{P})$ 是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-FP$_n$ 型（分别是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-F$_n$ 型），当且仅当$(H, \mathcal{Q})$ 是 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-FP$_n$ 型（分别是 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-F$_n$ 型）。

致谢。 这项工作的部分内容是在作者访问牛津大学和俄亥俄州立大学期间完成的。我们感谢这两所机构的热情接待。第一作者获得了 SFB 1085 高阶不变量 （雷根斯堡大学项目，获德国研究联合会资助）的部分支持。第二作者感谢 DGAPA-UNAM 项目 PAPIIT IN102426 提供的经费支持。

2. Quasi-isometry of group pairs

我们简要回顾群对几何的一些结果。更多背景请参阅 [HMPSS23, HMPSS25]。

群具有有限生成性和有限呈示性的基本性质，自然地推广到了群对。

定义 2.1. 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 S 是 G 的子集。包含映射 $S\subset G$ 和 $P\subset G$ 对于 $P\in\mathcal{P}$ 诱导出一个群同态

$$\varphi\colon F:=F(S)*\underset{P\in\mathcal{P}}{*}P\to G, \tag{2.1}$$

其中 $F(S)$ 是以 S 为基的自由群。若群同态 φ 是满射，则集合 S 是 $(G,\mathcal{P})$ 的相对生成集。$(G,\mathcal{P})$ 的相对表示 $\langle S,\mathcal{P}\mid R\rangle$由 相对生成集 S 以及 F 的子集 R 构成；该子集在 F 中正规生成 $\ker(\varphi)$。若相对表示 $\langle S,\mathcal{P}\mid R\rangle$ 中的集合 S 和 R 都是有限集，则该相对表示是有限的。若存在 $(G,\mathcal{P})$ 的有限相对表示，则群对 $(G,\mathcal{P})$ 是相对有限呈示的。

群的几何性质反映在其凯莱图中。对于群对，这一作用由锥化凯莱图承担。回忆一下， $G/\mathcal{P}$ 表示G-集合$\coprod_{P\in\mathcal{P}}G/P$。

定义 2.2. 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 S 是 $(G,\mathcal{P})$ 的有限相对生成集合。锥化凯莱图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 是一个顶点集为 $G\sqcup G/\mathcal{P}$的图，并含有两类边：对于所有满足 $g^{-1}g'\in S$的 $g,g'\in G$，有 $\{g,g'\}$；对于所有满足 $g\in g'P$的 $g\in G$和 $g'P\in G/\mathcal{P}$，有$\{g,g'P\}$。

有限生成群 G 是有限呈示的，当且仅当通过向 G的凯莱图附加有限多个 2-胞腔的 G-轨道，可以得到一个单连通空间。群对的相应结果如下。

命题 2.3 ([HMPSS23，命题 4。9])。 设 $(G,\mathcal{P})$ 为一个群对，并设 S为 $(G,\mathcal{P})$ 的一个相对生成集。设 $\varphi\colon F:=F(S)**_{P\in\mathcal{P}}P\to G$为典范群同态 (2.1)。则图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 是连通的，并且存在群的同构

$$\pi_1(\widehat{\Gamma}(G,\mathcal{P},S))\cong\ker(\varphi).$$

特别地，核 $\ker(\varphi)$ 在 F 中正规有限生成，当且仅当 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 中存在有限多个环路，使得由 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 通过对这些环路中的每一个及其每个 G-平移各粘贴一个 2-胞腔而得到的 2-复形是单连通的。

我们主要考虑锥化凯莱图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$，此时 S是 G 的一个有限（非相对）生成集。于是，由 G 中的顶点张成的 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 的全子图就是凯莱图 $\Gamma(G,S)$。注意，若 S 与 S' 都是 G 的有限生成集，则 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 与 $\Gamma(G,\mathcal{P},S')$ 拟等距，并且我们有时只写作 $\Gamma(G,\mathcal{P})$。

群对之间的 Lipschitz 映射（定义 1.4）可以（非典范地）延拓为锥化凯莱图之间的 Lipschitz 映射。

引理 *2.4*（[*HMPSS23*，引理 *5.9*]）。设 $(G,\mathcal{P})$ 和 $(H,\mathcal{Q})$ 为群对。设 $f=(f_1,f_2)\colon (G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 是一个 (L,C,M)-利普希茨群对之间的映射。我们记 $\widehat{f}\coloneqq f_1\sqcup f_2\colon G\sqcup G/\mathcal{P}\to H\sqcup H/\mathcal{Q}$，并令 $L\coloneqq \max\{L+C,M+1\}$。那么存在一个一维 *CW* 复形之间的胞腔映射

$$\widehat{f}_*\colon \widehat{\Gamma}(G,\mathcal{P})\to\widehat{\Gamma}(H,\mathcal{Q})$$

在顶点上由 $\widehat{f}$ 给出，并满足以下条件：$\Gamma(G,\mathcal{P})$ 中的每条（有向）边 $[v,w]$ 都映射为 $\widehat{\Gamma}(H,\mathcal{Q})$ 中的一条边路径 $f_*[v,w]$，从 $f(v)$ 到 $f(w)$，其长度为 $\le L$。此外，$H/\mathcal{Q}$ 中 $f_*[v,w]$ 的顶点数等于 $G/\mathcal{P}$ 中 $[v,w]$ 的顶点数。

证明。我们固定 $\Gamma(G,\mathcal{P})$ 中边的一个定向。对于 $\Gamma(G,\mathcal{P})$ 中一条有向边 $[v,w]$，有三种情况：若 $v,w\in G$，则取 $f_*[v,w]$ 为 $\widehat{\Gamma}$ 中的凯莱图 $\Gamma(H)$ 内从 $f(v)$ 到 $f(w)$ 的一条测地线。由于 f_1 是 (L,C)-利普希茨的，$f_*[v,w]$ 的长度有界于 $L+C$。

若 $v\in G$ 且 $w\in G/\mathcal{P}$，则 v 是陪集 w中的一个元素。由于 f 是群对之间的 (L,C,M)-Lipschitz 映射，因此存在陪集 $f_2(w)$中的一个元素 u，使得 $d_H(f_1(v),u)\le M$。我们取 $f_*[v,w]$ 为一条测地线与一条边的串接：该测地线位于 $\Gamma(H)$ 中，从 $f_1(v)$到 u；该边从 u 连到顶点 $f_2(w)$。则 $f_*[v,w]$ 的长度有界于 $M+1$。

若 $v\in G/\mathcal{P}$ 且 $w\in G$，我们取 $f_*[v,w]$，其定义与前一种情况类似。□

我们将群对的强拟等距概念（定义 1.4）与文献 [HMPSS25]中的其他概念联系起来。

定义 2.5. 设 $(G,\mathcal{P})$ 和 $(H,\mathcal{Q})$ 是群对。我们在 G 和 H 上分别取关于某些有限生成集的词度量。设 $L,C,M\in\mathbb{R}$ 满足 $L\ge 1$、$C\ge 0$ 和 $M\ge 0$。对于函数 $q\colon G\to H$，我们定义如下关系

$$\dot{q}\coloneqq\big\{(A,B)\in G/\mathcal{P}\times H/\mathcal{Q}\;\big|\;\operatorname{hdist}_H(q(A),B)<M\big\},$$

其中 hdist_H 表示 H 的子集之间的豪斯多夫距离。若 (L,C,M)- 群对的拟等距 $q\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 是一个 (L,C)-拟等距 $q\colon G\to H$，且投影 $\dot{q}\to G/\mathcal{P}$ 和 $\dot{q}\to H/\mathcal{Q}$ 均为满射。

此外，还考虑群对的拟等距 q，其中从 $\dot{q}$ 出发的投影还要求是双射 [HMPSS23，第 5] 节。群对的强拟等距（定义 1.4）介于这两种概念之间。

引理 2.6. 设$(G,\mathcal{P})$ 和$(H,\mathcal{Q})$ 是群对。以下结论成立：

(i) 若 $q\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 是对的拟等距，且投影 $\dot{q}\to G/\mathcal{P}$和 $\dot{q}\to H/\mathcal{Q}$均为双射，则$(G,\mathcal{P})$和$(H,\mathcal{Q})$是强拟等距的；(ii) 若$(G,\mathcal{P})$和$(H,\mathcal{Q})$是强拟等距的，则 $(G,\mathcal{P})$和 $(H,\mathcal{Q})$ 是拟等距的。

证明。(i) 设 $q\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 是一个 (L,C,M)-拟等距，且投影 $\dot{q}\to G/\mathcal{P}$ 和 $\dot{q}\to H/\mathcal{Q}$ 均为双射。令 $f_1\coloneqq q$，并令 $f_2\colon G/\mathcal{P}\to H/\mathcal{Q}$为由关系 $\dot{q}$定义的双射。则 $f=(f_1,f_2)\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 是群对之间的 (L,C,M)-Lipschitz 映射。令 $r_1\colon H\to G$为 q的一个 (L,C)-拟逆，并令 $r_2\colon H/\mathcal{Q}\to G/\mathcal{P}$为 f_2的逆映射。则 $r=(r_1,r_2)\colon(H,\mathcal{Q})\to(G,\mathcal{P})$

是群对之间的 Lipschitz 映射。事实上，对每个 $B \in H/\mathcal{Q}$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{hdist}_G\big(r_1(B), r_2(B)\big) &\leq \operatorname{hdist}_G\big(r_1(B), r_1 \circ q_1(r_2(B))\big) + C\\ &\leq L \cdot \operatorname{hdist}_H\big(B, q_1(r_2(B))\big) + 2C\\ &= L \cdot \operatorname{hdist}_H\big(q_2 \circ r_2(B), q_1(r_2(B))\big) + 2C\\ &< L \cdot M + 2C.\end{aligned}$$

根据构造，(f, r) 和 (r, f) 是群对的拟回缩。

(ii) 设 $f = (f_1, f_2) : (G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$ 是群对的一个强 (L, C, M)-拟等距。那么，$q := f_1 : (G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$ 是群对的一个 (L, C, M)-拟等距。事实上，由于 f_2 是双射，投影 $\dot{q} \to G/\mathcal{P}$ 和 $\dot{q} \to H/\mathcal{Q}$ 均为满射。□

我们列举一些群对拟等距的例子。

例 2.7. 对于以下例子，我们假设这些集合由不同子群组成。

(i) 设 $(G, \mathcal{P})$ 是一个群对，且 H 是 G 的一个有限指标子群。那么，存在一个显式的子群集合 $\mathcal{Q}$，它是 H 的子群，使得包含映射 $q\colon H \to G$ 是群对 $(H, \mathcal{Q}) \to (G, \mathcal{P})$ 的一个拟等距 q MPSS22，命题 2.13]。(ii) 设 $(G, \mathcal{P})$ 和 $(H, \mathcal{Q})$ 是相对双曲群对，其中集合 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 由有限生成的非相对双曲群组成。那么，群之间的每个拟等距 $q\colon G \to H$ 都是群对 $(G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$ 的一个拟等距 q BDM09，定理 4.1]。(iii) 设 $(G, \mathcal{P})$ 是一个群对，其中集合 $\mathcal{P}$ 是拟等距特征的 [MPSS22，定义 2.3], ，并设 H 是一个有限生成群。如果 $q\colon G \to H$ 是群之间的一个拟等距，那么存在 H 的一个拟等距特征子群集合 $\mathcal{Q}$，使得 $q\colon (G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$ 是群对的一个拟等距 [MPSS22，定理 1.1]。关于拟等距特征集合的许多具体例子，请参见 [HMPSS25，第 4] 节。

我们以群对的拟等距 q 从 $\dot{q}$ 具有双射投影的一个充分条件结束本节。

定义 2.8. 设 $(G, \mathcal{P})$ 是一个群对。若对所有 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ 和 $g \in G$，以下条件都成立，则集合 $\mathcal{P}$ 称为约化的：若 $P_1 \cap gP_2g^{-1}$ 在 P_1 和 gP_2g^{-1} 中的指数均有限，则 $P_1 = P_2$ 和 $g \in P_1$。若对所有 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ 和 $g \in G$，以下条件都成立，则集合 $\mathcal{P}$ 称为几乎互不正规（分别称为自交非正常）：若 $P_1 \cap gP_2g^{-1}$ 是无限的（分别为非平凡的），则 $P_1 = P_2$ 和 $g \in P_1$。

显然，每个自交非正常集合都是几乎互不正规集合，而每个由无限子群构成的几乎互不正规集合都是约化的。

命题 2.9 ([HMPSS23, 命题 5.12])。设 $(G, \mathcal{P})$ 和 $(H, \mathcal{Q})$ 为群对。若集合 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 均为约化且由不同子群组成，则对于任意对的拟等距 $q\colon (G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$，投影 $\dot{q} \to G/\mathcal{P}$ 和 $\dot{q} \to H/\mathcal{Q}$ 均为双射。

3. Finiteness properties of group pairs

在本节中，我们于定理 3.5 建立 Brown 判据 [Bro87，定理 2.2] 的一个相对版本。它借助分解以及适当滤过的本质无环性来刻画群对的同调有限性性质。全文中，我们考虑左模与左作用。

回顾：一个 R-模 M 是类型 FP_n，如果存在 M 的一个投射 R-分解，且该分解在次数 $\leq n$ 上有限生成。群对 $(G,\ \mathcal{P})$ 是 FP_n 型，如果 $\mathbb{Z}G$-模 $\Delta_{G/\mathcal{P}} \coloneqq \ker(\varepsilon\colon\ \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \to \mathbb{Z})$ 是 FP_{n-1} 型（定义 1.3）。要推出 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 的有限性性质，可以使用 $\mathbb{Z}$ 的、除次数 0 外均为投射的 $\mathbb{Z}G$-分解。

引理 3.1。设$(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 1$。以下条件等价：

(i) 群对$(G,\mathcal{P})$ 属于FP_n型；(ii) $\mathbb{Z}G$-模 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$是有限生成的，并且对于每个 $k = 1,\ldots,n-1$以及每个 $\mathbb{Z}G$-模正合列

$$P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \oplus \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \xrightarrow{\eta+\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

其中，对于每个 $i = 0,\ldots,k$，$\mathbb{Z}G$-模 P_i都是有限生成投射的，则 $\mathbb{Z}G$-模$\ker(\partial_k)$是有限生成的；

(iii) 存在一个 $\mathbb{Z}G$-模正合列

$$L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to L_0 \oplus \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \xrightarrow{\eta+\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

其中，对于每个 $i = 0,\ldots,n$，$\mathbb{Z}G$-模 L_i都是有限生成自由模。

证明。假设 (i) 成立，并给定一个如 (ii) 中所示的正合列。对图应用蛇引理

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] & \longrightarrow & P_0 \oplus \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \eta+\varepsilon} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

可得一个 $\mathbb{Z}G$-模 $\ker(\eta+\varepsilon) \cong P_0 \oplus \Delta_{G/\mathcal{P}}$ 的同构。根据假设，$\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 是 FP_{n-1} 型，而 P_0 是有限生成投射的，因此 $\mathbb{Z}G$-模 $\ker(\eta+\varepsilon)$ 是 FP_{n-1} [型（Bie81，命题 1.4]）。考虑正合列

$$P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} \ker(\eta+\varepsilon) \to 0$$

并应用 [Bro82，命题 VIII.4.3] ，即可得出所需结论。

假设 (ii) 成立。则可通过归纳构造出一个如 (iii) 中所示的正合列。

假设 (iii) 成立。考虑正合列

$$L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to \ker(\eta+\varepsilon) \to 0$$

这表明 $\mathbb{Z}G$-模 $\ker(\eta+\varepsilon)$ 是 FP_{n-1}型。与证明第一部分中的情形一样，存在一个 $\mathbb{Z}G$-模 $\ker(\eta+\varepsilon) \cong L_0 \oplus \Delta_{G/\mathcal{P}}$ 的同构。由于 L_0 是有限生成自由的，因此 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 是 FP_{n-1} [型（Bie81，命题 1.4]）。□

我们将使用可能不是有限生成的分解，但它们具有由有限生成（不一定是正合的）子复形构成的滤过。

定义 3.2. 设 R 是一个环，M 是一个 R-模。一个增广于 M 上的 R-链复形由一个集中在次数 ≥ 0 的 R-链复形 $(C_*,\ \partial_*)$ 以及一个满射 R-映射 η: $C_0 \twoheadrightarrow M$ 组成，且满足 $\eta \circ \partial_1 = 0$。（增广映射 η 通常会省略不写。）设 C_* 是一个增广于 M 上的 R- 链复形。若 C_* 的 R- 子复形 C'_* 的限制映射

$\eta|_{C_0'}\colon C_0' \to M$ 是满射，则称其为增广的。增广映射 η 诱导一个满射 $H_0(\eta)\colon H_0(C_*) \twoheadrightarrow M$。对于 $i \in \mathbb{N}$，我们将 C_* 的约化同调定义为

$$\widetilde{H}_i(C_*) \coloneqq \begin{cases} H_i(C_*) & \text{if } i \geq 1; \\ \ker(H_0(\eta)) & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

令 D 为一个有向集（通常会省略不提）。R链复形 C_* 的一个滤过 是由 R 子复形组成的有向系统（C_*^α）$_{\alpha\in D}$，其映射为包含映射，并且满足 $C_* = \varinjlim_{\alpha\in D} C_*^\alpha$。由 G子复形构成的 G-CW 复形的滤过也类似定义。

群的有向系统（H_α）$_{\alpha\in D}$ 若对每个 $\alpha \in D$，都存在 $\beta \in D$ 使得 $\beta \geq \alpha$，且结构映射 $H_\alpha \to H_\beta$ 为平凡映射，则称其本质平凡 。

首先，我们利用自由部分分解以及由有限生成子复形构成的滤过的本质无环性，刻画模的有限性性质。

引理 3.3。设 R 为一个环，M 为一个 R-模，且 $n \in \mathbb{N}$。设 L_* 为一个自由的 R-链复形，其增广映射取值于 M。设 $(L_*^\alpha)_\alpha$ 为由增广 R子复形构成的 L_* 的一个滤过。假设以下条件成立：

(i) 对于每个 $i = 1, \ldots, n-1$，都有 $H_i(L_*) = 0$，且增广映射诱导出一个同构 $H_0(L_*) \cong M$；(ii) 对于每个 α 以及每个 $i = 0, \ldots, n$，R-模 L_i^α都是有限生成自由的。

那么，R-模 M 是FP$_n$ 型，当且仅当对于每个 $i = 0, \ldots, n-1$，群的有向系统$(H_i(L_*^\alpha))_\alpha$ 都是本质平凡的。

证明。对于 $n = 0$，结论成立。设 $n \geq 1$。根据 [BE74、命题1.2和引理1.1], ，R-模 M 是FP$_n$ 型，当且仅当对于每个指标集 J以及每个 $i = 1, \ldots, n-1$，$\mathrm{Tor}_i^R(\prod_J R, M) = 0$，且自然映射 $\mathrm{Tor}_0^R(\prod_J R, M) \to \prod_J M$是一个同构。对于 $i \leq n-1$，存在如下 R-模同构：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_i^R(\prod_J R, M) &\cong H_i\big((\prod_J R) \otimes_R L_*\big) \cong H_i\big((\prod_J R) \otimes_R \varinjlim_\alpha L_*^\alpha\big) \\ &\cong H_i\big(\varinjlim_\alpha (\prod_J R) \otimes_R L_*^\alpha\big) \cong \varinjlim_\alpha H_i\big((\prod_J R) \otimes_R L_*^\alpha\big) \\ &\cong \varinjlim_\alpha H_i(\prod_J L_*^\alpha) \cong \varinjlim_\alpha \prod_J H_i(L_*^\alpha) \end{aligned}$$

其中，第一个同构用到了假设 (i)，倒数第二个同构用到了假设 (ii)。此外，对于 $i = 0$，存在一个 R-模的短正合列

$$0 \to \varinjlim_\alpha \prod_J \widetilde{H}_0(L_*^\alpha) \to \varinjlim_\alpha \prod_J H_0(L_*^\alpha) \to \prod_J M \to 0.$$

根据 [Bro87，引理 2.1], ，群的有向系统 $(H_\alpha)_\alpha$ 本质平凡，当且仅当对于每个指标集 J，都有 $\varinjlim_\alpha \prod_J H_\alpha = 0$。证明至此完成。□

接下来，在群环上，我们将部分分解的条件从自由模放宽为由置换模组成。

命题 3.4。设 G 是一个群，M 是一个 $\mathbb{Z}G$-模，且 $n \in \mathbb{N}$。设 C_* 是一个在 M 上增广的 $\mathbb{Z}G$-链复形。设 $(C_*^\alpha)_\alpha$ 是 C_* 的一个滤过，其子复形 $\mathbb{Z}G$ 均带有增广。假设满足以下条件：

(i) 对于每个 $i = 1, \ldots, n-1$，我们都有 $H_i(C_*) = 0$，且增广映射诱导出一个同构 $H_0(C_*) \cong M$;

(ii) 对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们都有 $C_i = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_i} \mathbb{Z}[G/G_\sigma]$，其中某个集合 Σ_i 及其子群 G_σ 属于 G;(iii) 对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 和每个 $\sigma \in \Sigma_i$，群 G_σ 属于 FP_{n-i};(iv) 对于每个 α 和每个 $i = 0,\dots,n$，我们都有 $C_i^\alpha = \bigoplus_{\sigma\in\Omega_i} \mathbb{Z}[G/G_\sigma]$，其中 Ω_i 是 Σ_i 的一个有限子集。

那么，$\mathbb{Z}G$-模 M 是FP_n型，当且仅当对于每个 $i = 0,\dots,n-1$，$\widetilde{\ }$群的有向系统$(H_i(C_*^\alpha))_\alpha$ 本质平凡。

证明。对于 $i \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in \Sigma_i$，令 L_*^σ 为 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}G_\sigma$-分解，它在 $\leq n-i$次内有限生成。根据标准构造 [Bro87，命题 1.1]，存在一个自由 $\mathbb{Z}G$-链复形 L_*，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$L_k = \bigoplus_{i+j=k} \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_i} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\sigma} L_j^\sigma$$

同时存在一个 $\mathbb{Z}G$-链映射 $f\colon L_* \to C_*$，它是一个拟同构（即在同调中诱导同构）。C_* 的滤过$(C_*^\alpha)_\alpha$ 导出 L_*的一个滤过$(L_*^\alpha)_\alpha$，其中对于每个 α 和每个 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$L_k^\alpha = \bigoplus_{i+j=k} \bigoplus_{\sigma\in\Omega_i} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\sigma} L_j^\sigma.$$

特别地，对于每个 $k \leq n$，$\mathbb{Z}G$-模 L_k^α 是有限生成自由的。此外，限制映射 $f|_{L_*^\alpha}\colon L_*^\alpha \to C_*^\alpha$ 是拟同构。因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，群的有向系统 $(H_i(L_*^\alpha))_\alpha$ 和 $(H_i(C_*^\alpha))_\alpha$ 同构；特别地，其中一个本质平凡，当且仅当另一个也本质平凡。于是，将引理 3.3 应用于在 M 上增广的自由 $\mathbb{Z}G$-链复形 L_* 以及 L_* 的滤过 $(L_*^\alpha)_\alpha$，即可得出该结论。□

最后，我们利用 G-CW 复形的胞腔链复形来刻画群对的同调有限性性质。我们用 $X^{(n)}$ 表示 G-CW 复形 X 的 n-骨架。

定理 3.5。设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且设 $n \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 1$。设 $(X, G/\mathcal{P})$ 是一个 G-*CW* 对。设 $(X_\alpha)_\alpha$ 是 X 的一个由 G-子复形构成的滤过。假设满足以下条件：

(i) X 是$(n-1)$-无圈的；(ii) 对于 $X \smallsetminus G/\mathcal{P}$ 中的每个胞腔 σ，其稳定子 G_σ 是$\mathsf{FP}_{n-\dim(\sigma)}$型的；(iii) 对于每个 α，都有 $X_\alpha^{(0)} = X^{(0)}$，且 X_α 是连通的；(iv) 对于每个 α，商 $G\backslash X_\alpha^{(n)}$ 都是紧致的。

当且仅当对于每个 $i = 1,\dots,n-1$，群的有向系统$(H_i(X_\alpha;\mathbb{Z}))_\alpha$ 本质平凡时，群对$(G,\mathcal{P})$ 是FP_n 型的。

证明。令 C_* 和 C_*^α 分别表示 X 和 X_α的胞腔 $\mathbb{Z}G$-链复形。我们有

$$C_0 = C_0^\alpha = \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \oplus \bigoplus_{v\in\Sigma_0} \mathbb{Z}[G/G_v],$$

其中 Σ_0 是 $X \smallsetminus G/\mathcal{P}$中0-胞腔的一组 G-轨道代表元。考虑显然的增广映射 η: $C_0 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$。对图表应用蛇引理

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in\Sigma_0}\mathbb{Z}[G/G_v] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

得到 $\mathbb{Z}G$-模的一个短正合列

$$0 \to \Delta_{G/\mathcal{P}} \to \ker(\eta) \to \bigoplus_{v\in\Sigma_0} \mathbb{Z}[G/G_v] \to 0. \tag{3.1}$$

由于 Σ_0 是有限的，且对于每个 $v \in \Sigma_0$，群 G_v 都是 FP$_n$型，因此 $\mathbb{Z}G$-模 $\bigoplus_{v\in\Sigma_0} \mathbb{Z}[G/G_v]$ 是 FP$_n$型。由短正合列 (3.1) 可知， $\mathbb{Z}G$-模 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$ 是 FP$_{n-1}$ 型，当且仅当 ker(η) 是 FP$_{n-1}$ [型 Bie81，命题 1.4]。

考虑截断的 $\mathbb{Z}G$-链复形 $C_{*\geq 1}$，通过映射 $\partial_1\colon C_1 \twoheadrightarrow \ker(\eta)$ 增广到 ker(η) 上。对于每个 α，根据假设 (iii)， $\mathbb{Z}G$-子复形 $C^{\alpha}_{*\geq 1}$ of $C_{*\geq 1}$ 都是增广的。注意，对于每个 $i \geq 1$，我们有

$$\widetilde{H}_i(C^{\alpha}_{*\geq 1}) \cong H_i(C^{\alpha}_{*}).$$

于是，对增广到 ker(η) 上的 $\mathbb{Z}G$-链复形 $C_{*\geq 1}$ 以及 $C_{*\geq 1}$ 的滤过 $(C^{\alpha}_{*\geq 1})_{\alpha}$ 应用命题 3.4（取 $n-1$），即可得到所述结论。□

我们单独记录定理 3.5 的一个特殊情形：当 X 自身的 n-骨架是余紧的，且我们取常值滤过时。这是 Bro87 命题 1 关于群对的相对版本。

推论 3.6. 设$(G,\mathcal{P})$是一个群对，且设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 1$。设$(X, G/\mathcal{P})$是一个 G-*CW* 对。假设满足以下条件：

(i) X 是$(n-1)$-无圈的；(ii) 对于 $X \setminus G/\mathcal{P}$ 中的每个胞腔 σ，其稳定子 G_σ 是FP$_{n-\dim(\sigma)}$型；(iii) 商 $G\backslash X^{(n)}$ 是紧致的。

那么群对$(G,\mathcal{P})$ 是FP$_n$型。

注 3.7. 同调有限性性质可以定义在任意环 R 上。若平凡 RG-模 R 是 FP$_n$ 型，则群 G 是 FP$_n$(R) 型。若 RG-模 ker($R[G/\mathcal{P}] \to R$) 是 FP$_{n-1}$ 型，则群对 $(G,\mathcal{P})$ 是 FP$_n$(R) 型。通过考虑系数取自 R的同调，定理 3.5 对 FP$_n$(R) 型也成立。

我们通过将群对在 $\mathbb{Z}$ 上的同调有限性性质与几何有限性性质（定义 1.3）联系起来来结束本节。其证明类似于群的相应结果，参见 [Bro82，定理 VIII.7.1]和 [Alo91，第 4] 节。我们称 G-CW 对 (X, A) 是相对自由 的，如果 $X \setminus A$ 中的每个胞腔都具有平凡稳定子。

定理 3.8. 设$(G,\mathcal{P})$ 为一个群对，并设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 2$。则$(G,\mathcal{P})$为F$_n$ 型当且仅当$(G,\mathcal{P})$ 是相对有限呈示的且为FP$_n$型。

证明. 假设 $(G,\mathcal{P})$ 为 F$_n$型。设 $(X, G/\mathcal{P})$ 为一个相对自由的 G-CW 对，其中 X 是可缩的且具有余紧的 n-骨架。则由推论 3.6，$(G,\mathcal{P})$ 为 FP$_n$ 型。此外，$(G,\mathcal{P})$ 的一个相对有限表示可如下得到。一个“爆破”构造 [Hae92] 从 $(X, G/\mathcal{P})$ 产生一个自由的 G-CW 对 $(EG, \coprod_{P\in\mathcal{P}} G \times_P EP)$，它在 $EG \setminus \coprod_{P\in\mathcal{P}} G \times_P EP$ 中仅有有限多个维数为 $\leq n$ 的胞腔的 G-轨道。通过商去 G-作用，我们得到一个 CW 对 $(BG, \coprod_{P\in\mathcal{P}} BP)$，它在 $BG \setminus \coprod_{P\in\mathcal{P}} BP$ 中仅有有限多个维数为 $\leq n$ 的胞腔。于是 BG 的 2-骨架给出 $(G,\mathcal{P})$ 的一个有限相对表示。

假设 $(G,\mathcal{P})$ 相对有限呈示且为 FP$_n$ 型。设 $\langle S, \mathcal{P} \mid R\rangle$ 是 $(G,\mathcal{P})$ 的一个有限相对表示。只需构造一个相对自由的 G-CW 对 $(X, G/\mathcal{P})$，使得 X 是 n 维、($n-1$)-无圈、单连通且余紧。我们按骨架归纳。设 $X^{(1)}$

$\widehat{}$ 为锥化凯莱图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$（定义 2.2）。由于相对表示 $\langle S,\mathcal{P}\mid R\rangle$ 是有限的，根据命题 2.3，我们可以向 $X^{(1)}$ 附加有限多个自由的 G-轨道 2-胞腔，从而得到一个单连通 2-复形 $X^{(2)}$。假设我们已构造出一个相对自由的 G-CW 对 $(X^{(n-1)},G/\mathcal{P})$，其中 $X^{(n-1)}$ 是 $(n-1)$ 维、$(n-2)$-无圈、单连通且余紧的。我们用 $C_*(X^{(n-1)})$ 表示 $X^{(n-1)}$ 的胞腔 $\mathbb{Z}G$-链复形，该复形在 $\mathbb{Z}$ 上增广。由于 $X^{(n-1)}$ 是 $(n-2)$-无圈的，以下 $\mathbb{Z}G$-模序列正合

$$0\to H_{n-1}(X^{(n-1)};\mathbb{Z})\to C_{n-1}(X^{(n-1)})\to\cdots\to C_0(X^{(n-1)})\to\mathbb{Z}\to 0.$$

由于 G-CW 对 $(X^{(n-1)},G/\mathcal{P})$ 是相对自由的，且 $X^{(n-1)}$ 是余紧的，对于所有 $i=1,\ldots\ldots,n-1$，$\mathbb{Z}G$-模 $C_i(X^{(n-1)})$ 都是有限生成自由的，而 $C_0(X^{(n-1)})$ 的形式为 $L\oplus\mathbb{Z}[G/\mathcal{P}]$，其中 L 是有限生成自由的 $\mathbb{Z}G$-模。由于群对 $(G,\mathcal{P})$ 是 FP_n 型，根据引理 3.1 可知，$\mathbb{Z}G$-模 $H_{n-1}(X^{(n-1)};\mathbb{Z})$ 是有限生成的。令 $(z_j)_j$ 为 $H_{n-1}(X^{(n-1)};\mathbb{Z})$ 的一个有限 $\mathbb{Z}G$-生成集。由于 $X^{(n-1)}$ 是单连通且 $(n-2)$-无圈的，Hurewicz 定理给出了映射 $(f_j\colon S^{n-1}\to X^{(n-1)})_j$，它们代表同调类 $(z_j)_j$。最后，我们沿着映射 $(f_j)_j$ 及其 G-平移，将 n-胞腔的自由 G- 轨道附加到 $X^{(n-1)}$ 上，从而构造出所需空间 $X=X^{(n)}$。□

4. Quasi-isometry invariance

我们证明，群对的同调有限性性质和相对有限可呈性可由拟收缩继承，因此在强拟等距下保持不变。

4.1. 群对的同调有限性性质。证明群的同调有限性性质可由拟收缩继承的思路 [Alo94] 大致如下：根据 Brown 判据，当且仅当 Rips 复形的滤过本质上是 $(n-1)$-无圈时，群才是 FP_n 型；而这一性质可由拟收缩继承。我们将这些论证改编到群对的相对情形中。

定义 4.1。设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 S 是 G的有限生成集。我们用 d_S 表示 G 上的词度量。考虑集合 $G\sqcup G/\mathcal{P}$，并称 $G/\mathcal{P}$ 中的元素为锥顶点。设 $\alpha\in\mathbb{N}$。

U $G\sqcup G/\mathcal{P}$ 的有限子集是直径为 $\le\alpha$ 的单锥子集，如果它满足以下条件：

- (G,d_S) 中 $U\cap G$ 的直径不超过 α；
- U 至多包含一个锥顶点 A。对于每个 $g\in U\cap G$，(G,d_S) 中 g 与 A 之间的距离不超过 α，其中陪集 A 被视为 G的子集。明确地说，对于每个 $g\in U\cap G$，存在 $a\in A$使得 $d_S(g,a)\le\alpha$。

$\widehat{}$单锥 α-*Rips* 复形 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 是一个单纯复形，其单纯形是 $G\sqcup G/\mathcal{P}$ 中所有直径为 $\le\alpha$的单锥子集。对于满足 $\beta\ge\alpha$的 $\beta\in\mathbb{N}$，$\widehat{}$ $\widehat{}$ $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 是 $R_\beta(G,\mathcal{P},S)$ 的子复形，我们定义

$$\widehat{R}_\infty(G,\mathcal{P},S):=\varinjlim_{\alpha\in\mathbb{N}}\widehat{R}_\alpha(G,\mathcal{P},S).$$

unicone Rips复形在以下意义下与群对的 Lipschitz 映射相容。

引理 4.2. 设 $(G,\mathcal{P})$ 与 $(H,\mathcal{Q})$ 为群对，并设 S 与 T分别为 G 与 H的有限生成集。设 $f=(f_1,f_2)\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 为群对之间的一个(L,C,M)-*Lipschitz* 映射。则下列结论成立：

(i) 对所有满足 $\alpha' \geq L\alpha + C + M$ 的 α、$\alpha' \in \mathbb{N}$，存在一个单纯映射

$$f_*\colon \widehat{R}_\alpha(G,\mathcal{P},S) \to \widehat{R}_{\alpha'}(H,\mathcal{Q},T)$$

在顶点上的定义为 $f_1 \sqcup f_2$：$G \sqcup G/\mathcal{P} \to H \sqcup H/\mathcal{Q}$;

(ii) 设 $r\colon (H,Q) \to (G,\mathcal{P})$ 是一个(L,C,M)-*Lipschitz* 群对之间的映射，且(f,r) 是一个拟回缩。对所有 $\alpha,\alpha',\beta,\beta' \in \mathbb{N}$，若 $\alpha' \geq L\alpha + C + M$,$\beta' \geq \alpha'$ 且 $\beta \geq L\beta' + 2C + M$，则下图在单纯同伦意义下可交换

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_\alpha(G,\mathcal{P},S) & \xrightarrow{f_*} & \widehat{R}_{\alpha'}(H,\mathcal{Q},T) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{R}_\beta(G,\mathcal{P},S) & \xleftarrow{r_*} & \widehat{R}_{\beta'}(H,\mathcal{Q},T) \end{array}$$

特别地，对每个 $i \in \mathbb{N}$，若同调群的有向系统$(H_i(R_{\alpha'}(H,\mathcal{Q},T);\mathbb{Z}))_{\alpha'\in\mathbb{N}}$ 本质平凡，则同调群的有向系统 $(H_i(R_\alpha(G,\mathcal{P},S);\mathbb{Z}))_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 本质平凡。

证明。我们记 $G := G \sqcup G/\mathcal{P}$, $H := H \sqcup H/\mathcal{Q}$，以及 $f := f_1 \sqcup f_2\colon G \to H$。

(i) 设 U 是 G 中直径为 $\leq \alpha$ 的单锥子集，位于 G 子集 $f(U) = f_1(U \cap G) \sqcup f_2(U \cap G/\mathcal{P})$ 是 H中直径为 $\leq L\alpha + C + M$ 的单锥子集。事实上，由于 $\operatorname{diam}(U \cap G, d_S) \leq \alpha$，且 f_1 是 (L,C)-Lipschitz 映射，因此 $\operatorname{diam}(f_1(U \cap G)\ d_T) \leq L\alpha + C$。若 U 含有唯一的锥顶点 A，则 $f_2(A)$ 是 $f(U)$ 的唯一锥顶点。对于每个 $g \in U \cap G$，都存在 $a \in A$，使得 $d_S(g,a) \leq \alpha$。由于 f 是群对之间的 (L,C,M)-Lipschitz 映射，因此存在 $b \in f_2(A)$，使得 $d_T(f_1(a)\ b) \leq M$。综上，我们有

$$d_T\big(f_1(g),b\big) \leq d_T\big(f_1(g),f_1(a)\big) + d_T\big(f_1(a),b\big) \leq L\alpha + C + M.$$

换言之，$(H,\ d_T)$ 中 $f_1(U \cap G)$ 的任意元素到子集 $f_2(A)$ 的距离均不超过 $L\alpha + C + M$。

(ii) 设 U是 G 中直径为 $\leq \alpha$ 的单锥子集。由 (i) 可知，$\widehat{r} \circ f(U)$是 G 中直径为 $\leq L(L\alpha + C + M) + C + M$ 的单锥子集。由于 (f,r)是群对的 (L,C,M)-拟回缩，G 的子集 $\widehat{r} \circ f(U)$ 包含与 U 相同的锥顶点（若存在），且并集 $\widehat{r} \circ f(U) \cup U$是 G 中直径为 $\leq L(L\alpha + C + M) + C + M + C$ 的单锥子集。由于 β 大于此直径，将 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 的每个顶点 v 在线性地移动到 $R_\beta(G,\mathcal{P},S)$ 内的 $\widehat{r} \circ f(v)$，可延拓为所需的单纯同伦 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S) \times [0,1] \to R_\beta(G,\mathcal{P},S)$。□

如果 S 与 S' 是 G的有限生成集，则 G上的恒等映射诱导群对的强拟等距$(G,\mathcal{P},S) \to (G,\mathcal{P},S')$。引理 4.2 表明，特别地，$(H_i(R_\alpha(G,\mathcal{P},S)))_{\alpha\in\mathbb{N}}$是否本质平凡与 G的有限生成集 S 无关。

注 4.3. 我们对定义 4.1 和引理 4.2 的表述简洁明了且自成一体，但有些读者或许会觉得，下面对 unicone Rips 复形的等价描述在概念上更为直观。设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，并设 S 是 G 的有限生成集。将陪集视为 G 的子集，则 G 上的词度量 d_S 可扩展为 $G \sqcup G/\mathcal{P}$ 上的“距离函数” d_S。一般而言，d_S 不是度量，因为它既不满足分离性，也不满足三角不等式。然而，通常定义的 α-Rips 复形仍然有意义：它是一个单纯复形，其单纯形是 $(G \sqcup G/\mathcal{P}, d_S)$ 中直径为 $\leq \alpha$ 的所有有限子集。这一构造曾在 [MPP19] 中被研究。接着，unicone α-Rips 复形 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 是 $(G \sqcup G/\mathcal{P}, d_S)$ 上的 α-Rips 复形的子复形，由所有至多包含一个 中元素的子集组成

。要用这一描述证明引理 4.2，只需证明群对 $(G,\mathcal{P}) \to (H,\mathcal{Q})$ 之间的 Lipschitz 映射会诱导出一个 Lipschitz$\widehat{\ }$映射 $(G\sqcup G/\mathcal{P}, d_S) \to (H\sqcup H/\mathcal{Q}, d_T)$，然后利用（unicone）Rips 复形的自然性。

凯莱图 $\Gamma(G,S)$ 上的等距 G-作用可延拓为 unicone Rips复形 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 上的单纯$\widehat{\ }G$-作用，对每个 $\alpha\in\mathbb{N}$ 成立，因而$\widehat{\ }$在 $R_\infty(G,\mathcal{P},S)$ 上亦成立。下文中，我们不区分单纯复形及其几何实现。

引理 4.4. 设 $(G,\mathcal{P})$ 为一个群对，并设 S 为 G 的一个有限生成集。则下列结论成立：

$\widehat{\ }$(i) $R_\infty(G,\mathcal{P},S)$（非等变地）可缩；$\widehat{\ }$(ii) 对每个 $\alpha\in\mathbb{N}$，$R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$ 的重心细分 $R_\alpha(G,\mathcal{P},S)'$ 是$\widehat{\ }$一个余紧的 G-CW-复形。此外，$R_\alpha(G,\mathcal{P},S)'\smallsetminus G/\mathcal{P}$中的每个胞腔都具有有限稳定子。

证明。 (i) 我们有如下形式的推出

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{A\in G/\mathcal{P}} R_\infty(G,S) & \xrightarrow{\coprod \mathrm{id}} & R_\infty(G,S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{A\in G/\mathcal{P}} \mathrm{Cone}_A(R_\infty(G,S)) & \longrightarrow & \widehat{R}_\infty(G,\mathcal{P},S) \end{array}$$

其中 $R_\infty(G,S)$ 是定义在 (G,d_S) 上的 ∞-Rips 复形，而 Cone_A 是以$\widehat{\ }$为锥点的锥。由于 $R_\infty(G,S)$ 可缩，$R_\infty(G,\mathcal{P},S)$ 也可缩。

$\widehat{\ }$(ii) 记 $G:=G\sqcup G/\mathcal{P}$和 $R_\alpha:=R_\alpha(G,\mathcal{P},S)$。我们证明，在 G 中，直径为 $\le\alpha$ 的单锥子集仅有有限多个 G-轨道。事实上，由于 (G,d_S) 局部有限，直径为 $\le\alpha$ 、且不含锥顶点的 G 中的 unicorn 子集仅有有限多个 G-轨道。设 U 是$\widehat{\ }$中直径为 $\le\alpha$ 且恰含一个锥顶点的单锥子集。由于集合 $\mathcal{P}$ 是有限的，此类基数为一的 U 仅有有限多个 G-轨道。假设 U具有如下形式：$\{A,v_1,\dots,v_l\}$，其中 $A\in G/\mathcal{P}, v_1,\dots,v_l\in G$，且 $l\ge 1$。不妨经过 G平移，设 v_1 是单位元 $e\in G$。那么 A 是 $G/\mathcal{P}$ 中仅有的有限多个陪集之一，它们在 (G,d_S) 中到 e 的距离为 $\le\alpha$ 。元素 $v_2,\dots,v_l$ 位于 (G,d_S) 中以 e 为中心、半径为 α 的球内；根据局部有限性，该球也是$\widehat{\ }$有限的。因此，R_α 上的单纯 G-作用是余紧的。任何带有单纯G-作用的单纯复形的重心细分都是一个 G-CW 复形，且余紧性得以保持。

$\widehat{\ }$我们证明，$R'_\alpha\smallsetminus G/\mathcal{P}$ 中的每个胞腔都有有限稳定子。

$\widehat{\ }$重心细分 R'_α的一个顶点 σ 对应于 R_α 的一个单形 $\{v_0,\dots,v_l\}$。稳定子 G_σ 是 $\{v_0,\dots,v_l\}$的集合稳定子，它是逐点稳定子 $\bigcap_{i=0}^l G_{v_i}$的有限扩张，其中 G_{v_i} 是 $v_i\in\widehat{G}$的稳定子。如果 $v_i\in G$，那么 G_{v_i} 是平凡的；如果 $v_i\in G/\mathcal{P}$，那么 G_{v_i} 是 $\mathcal{P}$中某个群的共轭。特别是，如果 σ 含有 G中的一个元素，那么稳定子 G_σ 是有限的。 R'_α的一条边 $\tau$$\widehat{\ }$对应于 R_α 中单形 $\{w_0,\dots,w_k\}\subset\{v_0,\dots,v_l\}$$\widehat{\ }$之间的严格包含，其中 $0\le k<l$。稳定子 G_τ 是 σ的集合稳定子$=\{v_0,\dots,v_l\}$ 中逐点固定 $\{w_0,\dots,w_k\}$的子群。特别是，稳定子 G_τ是 G_σ 的子群；该群是有限的，因为 σ 至多包含一个锥顶点，因此至少包含 G中的一个元素。维数为 ≥ 2 的胞腔的稳定子是边稳定子的子群，因此也是有限的。□

群对的同调有限性性质可以用单锥 Rips 复形来刻画。

命题 4.5。 设$(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $n\geq 2$。那么$(G,\mathcal{P})$是FP$_n$ 型，当且仅当对于每个 $i=1,\ldots,n-1$，同调$\widehat{\ }$群的有向系统$(H_i(R_\alpha(G,\mathcal{P});\mathbb{Z}))_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 本质平凡。

$\widehat{\ }$证明。 将定理 3.5 应用于 G-CW 对 $(R_\infty(G,\mathcal{P})',G/\mathcal{P})\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$以及 $R_\infty(G,\mathcal{P})'$的滤过 $(R_\alpha(G,\mathcal{P})')_{\alpha\geq 1}$ 即可得出结论。引理 4.4 保证定理 3.5 的条件得到满足。□

由此我们推得，群对的同调有限性性质在拟收缩下具有继承性。

定理 4.6。 设（G、$\mathcal{P}$）和（H、$\mathcal{Q}$）是群对，且 $n\in\mathbb{N}$满足 $n\geq 2$。如果（G、$\mathcal{P}$）是（H、$\mathcal{Q}$）的拟收缩，并且（H、$\mathcal{Q}$）是FP型$_n$，那么（G、$\mathcal{P}$）是FP型$_n$。

证明。 根据命题 4.5，由于 $(H,\ \mathcal{Q})$ 是 FP型$_n$，群的有向系统$\widehat{\ }(H_i(R_{\alpha'}(H,\ \mathcal{Q});\ \mathbb{Z}))_{\alpha'\in\mathbb{N}}$ 对每个 $i=1$，…，$n-1$ 都是本质平凡的。由于 $(G,\ \mathcal{P})$ 是 $(H,\ \mathcal{Q})$ 的拟收缩，根据引理 4.2，群的有向系统$\widehat{\ }(H_i(R_\alpha(G,\ \mathcal{P});\mathbb{Z}))_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 对每个 $i=1$，…，$n-1$ 都是本质平凡的。因此，根据命题 4.5，群对 $(G,\ \mathcal{P})$ 也是 FP型$_n$。□

注 4.7。 通过相同的证明，定理 4.6 更一般地适用于环 R上的 FP$_n(R)$ 型，以及取系数于 R 的同调。

4.2. **相对有限呈示性**。 群的有限呈示性在拟收缩下保持不变的经典证明大致如下：一个群是有限呈示的，当且仅当其凯莱图是粗单连通的，而粗单连通性在拟收缩下保持不变。我们将这些论证改编到群对的相对情形中。

设 Λ 是一个单纯图，并设 $l\in\mathbb{N}$。在 Λ中，长度为 $l-1$ 的（边）路径是由 Λ 中的顶点组成的序列 v_1，v_2，…，v_l，满足对于每个 $i=1$，…，$l-1$，$\{v_i,v_{i+1}\}$ 都是 Λ 中的一条边。在 Λ 中，长度为 l 的（边）环路是 Λ 中的一条边路径 v_1，v_2，…，v_l，且 $\{v_l,v_1\}$ 是 Λ中的一条边。下文中，我们不区分边回路及其几何实现。

定义 4.8. 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 G 的有限生成集为 $S\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。我们用 Γ 表示锥化凯莱图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$（定义 2.2）。$G/\mathcal{P}$ 中 Γ 的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$顶点称为锥顶点。Γ 中的边回路若至多包含一个锥顶点，则称为单锥回路。

对于 $l\in\mathbb{N}$，我们用 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ Γ 表示具有单锥回路上附着一个 $\widehat{\ }$2-胞腔$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。若存在 $l\in\mathbb{N}$ 使得 Γ_l 单连通，则称图 Γ 是粗单锥$\widehat{\ }$单连通的。

粗单锥单连通性可由拟收缩继承。

引理 4.9. 设$(G,\mathcal{P})$ 和$(H,\mathcal{Q})$ 是群对，且 S 和 T 分别是 G 和 H 的有限生成集。若$(G,\mathcal{P})$ 是$(H,\mathcal{Q})$ 的拟收缩，且$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$图 $\Gamma(H,\mathcal{Q},T)$ 是粗单锥单连通的，那么图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$也是粗单锥单连通的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。 我们记 $\Gamma_G:=\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 和 $\Gamma_H:=\Gamma(H,\mathcal{Q},T)$。设 (f,r) 是一对空间的拟回缩，其中 $f\colon(G,\mathcal{P})\to(H,\mathcal{Q})$ 和 $r\colon(H,\mathcal{Q})\to(G,\mathcal{P})$ 是一对空间之间的利普希茨映射。引理 2.4 给出一个胞腔映射 $f_*\colon\Gamma_G\to\Gamma_H$ 以及一个常数 $L\in\mathbb{R}$，该常数仅取决于拟等距常数。于是，对每个长度为 、位于 中的环路 γ，

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$我们可以在 Γ_H 中得到一个与之对应、长度为 $\leq L\cdot l$ 的环路 $f_*\gamma$，其锥顶点数与 γ 相同。特别地， $f_*\gamma$ 是单锥回路，当且仅当 $\gamma\widehat{}$ $\widehat{}$是单锥回路。类似地，引理 2.4 给出一个胞腔映射 $\hat{r}_*\colon \Gamma_H\to\Gamma_G$，使得对于 Γ_H 中每个长度为 $\leq l$ 的（单锥）环路 δ，我们都能得到一个与之对应、长度为 $\leq L\cdot l$ 的（单锥）环路$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$，它位于 Γ_G 中。于是， $\hat{r}_*(f_*\gamma)$ 是 Γ_G 中的一个环路，其锥顶点与 γ 的锥顶点相同（如果有的话）。由于 (f, r) 是一个拟回缩，存在仅取决于拟等距常数的 $l_1\in\mathbb{N}$,$\widehat{}$，使得 Γ_G 中的每个环路 γ 都与 Γ_{G,l_1} 中的 $\hat{r}_*(f_*\gamma)$ 同伦。事实上，环路 γ 和 $\hat{r}_*(f_*\gamma)$ 可以通过一个由 2-胞腔组成的“环带”连接起来，这些 2-胞腔沿长度一致有界的单锥环路附着。

$\widehat{}$ $\widehat{}$取 $l_2\in\mathbb{N}$ 使得Γ_{H,l_2} 是单连通的。令 $l_3:=L\cdot l_2$。那么 $\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$映射 $\hat{r}_*\colon \Gamma_H\to\Gamma_G$ 可扩张为二维复形之间的映射$\Gamma_{H,l_2}\to\Gamma_{G,l_3}$。因此，对于$\widehat{}$ $\widehat{}$ Γ_H中的任意环路 δ，将 δ 在Γ_{H,l_2}中的零伦向前推，即可得到环路 $\hat{r}_*\delta\widehat{}$ $\widehat{}$在Γ_{G,l_3}中是零伦的。综上，对于 $l_4:=\max\{l_1,l_3\}$， Γ_G 中的任意环路 γ 都在Γ_{G,l_4}中是$\widehat{}$零伦的。□

如果 S 和 S' 是 G的有限生成集，那么 G上的恒等映射会导出群对 $(G、\mathcal{P}、S)$ 与 $(G、\mathcal{P}、S')$ 之间的强拟等距。引理 4.9 特别表明， $\Gamma(G、\mathcal{P}、S)$ 粗单锥单连通这一性质与 G的有限生成集 S 无关。

引理 4.10。 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对，且 S 是 G的有限生成集。以下结论成立：

$\widehat{}$(i) 对于 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$中的每个环路 γ，都存在 $l\in\mathbb{N}$，使得 γ在 2-复形 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)_l$中是零同伦的；(ii) 对于每个 $l\in\mathbb{N}$， $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$中长度为 l的单锥环路只有有限多个 G-轨道。

$\widehat{}$ $\widehat{}$证明。 我们记 $\Gamma:=\Gamma(G,\mathcal{P},S)$。

(i) 我们对 γ的锥顶点数进行归纳。若 γ 是单锥回路，则结论成立。否则，取 γ 的一个锥顶点 A，并令 v 和 w 为沿着 γ与 A 相邻的顶点。由于 v 和 w 位于 G中，存在一条从 w 到 v 的路径 ζ，其由 G中的顶点组成。于是，环路 A,ζ 是$\widehat{}$的一个单锥回路，其长度记为 $<l_1$。因此， γ 在Γ_{l_1} 中同伦于一个环路 γ'，且其锥顶点比 γ少一个。根据归纳法，环路 γ' 在 Γ_{l_2} 中对于某个 $l_2\in\mathbb{N}$是零伦的。因此，对于 $l:=\max\{l_1,l_2\}$，环路 γ 在 Γ_l中是零伦的。

(ii) 由于凯莱图 $\Gamma(G,\ S)$是局部有限的，因此长度为 l 且不含锥顶点的环路只有有限多个$\curlywedge G$-轨道。设 γ 是 Γ中长度为 l 且恰有一个锥顶点 A的环路。经过 G-平移后，不妨设沿着 γ 与 A 相邻的某个顶点是单位元 $e\in G$。于是， A 是有限多个陪集 $(eP)_{P\in\mathcal{P}}$ 之一。 γ的其余 $l-2$ 个顶点位于 $\Gamma(G,\ S)$中以 e 为中心、半径为 $l-2$ 的球内；根据局部有限性，这个球也是有限的。□

群对的相对有限呈示性可以用单锥环路来刻画。

命题 4.11。 设 $(G,\mathcal{P})$ 是一个群对。那么，$(G,\mathcal{P})$ 是相对有限$\widehat{}$呈示的，当且仅当图 $\Gamma(G,\mathcal{P})$ 是粗单锥单连通的。

证明。假设 $(G,\mathcal{P})$ 有有限相对表示 $\langle S,\mathcal{P}\mid R\rangle$。我们可以假设 S 是 G 的有限（非相对）生成集。根据命题 2.3，我们可以通过向 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 附加有限多个 G-轨道$\widehat{}$的 2-胞腔，得到一个单连通 2-复形。根据引理 4.10 (i)，我们可以假设这些有限个

$\widehat{\ }$ G-轨道的 2-胞腔沿着 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 中的单锥回路附加。因此，图 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 是粗单锥单连通的。

$\widehat{\ }$假设对于某个有限$\widehat{\ }$生成集 S， G 的 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 是粗单锥单连通的。令 $l\in\mathbb{N}$ 满足 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)_l$ 单连通。根据引理 4.10 (ii)， $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 中长度为 $<l$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$的单锥环路只有有限多个 G-轨道。于是，2-复形 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)_l$ 可由 $\Gamma(G,\mathcal{P},S)$ 附加有限多个 G-轨道的 2-胞腔（沿单锥环路附加）得到。因此，由命题 2.3，$(G,\mathcal{P})$ 存在有限相对表示 $\langle S,\mathcal{P}\mid R\rangle$。□

我们由此推得，群对的相对有限呈示性在拟收缩下得以继承。

定理 4.12。 设$(G,\mathcal{P})$ 和$(H,\mathcal{Q})$ 为群对。若$(G,\mathcal{P})$ 是$(H,\mathcal{Q})$ 的拟收缩，且$(H,\mathcal{Q})$ 相对有限呈示，则$(G,\mathcal{P})$ 相对有限呈示。

证明。 根据命题 4.11，由于 $(H,\mathcal{Q})$ 相对有限呈示，图$\curlywedge\Gamma(H,\mathcal{Q})$ 粗单锥单连通。由于 $(G,\mathcal{P})$ 是 $(H,\mathcal{Q})$ 的拟收缩$\widehat{\ }$，引理 4.9 表明，图 $\Gamma(G,\mathcal{P})$ 粗单锥单连通。于是，根据命题 4.11，群对 $(G,\mathcal{P})$ 相对有限呈示。□

推论 4.13。 设$(G,\mathcal{P})$ 和$(H,\mathcal{Q})$ 为群对，并设 $n\in\mathbb{N}$ *with* $n\geq 2$。若$(G,\mathcal{P})$ 是$(H,\mathcal{Q})$ 的拟收缩，且 $(H,\mathcal{Q})$ 为 F_n 型，则 $(G,\mathcal{P})$ 为 F_n 型。

证明。 由定理 3.8，对于 $n\geq 2$，一个群对是 F_n 型当且仅当它是相对有限呈示的且为 FP_n型。于是该结论由定理 4.12 和定理 4.6 得出。□

推论 4.13 与定理 4.6 共同证明了定理 1.5。

4.3. 族的Bredon有限性性质。 我们将群对的有限性性质与另一种已被充分研究的、相对于子群族的群的有限性性质概念联系起来，该概念称为Bredon有限性性质。关于群的Bredon上同调的背景，我们参阅 [Flu11]。

设 G 为一个群。一个子群族 G是 G 的子群的非空集合 $\mathcal{F}$，它在取子群以及在 G 的元素共轭下封闭。典型例子分别是由平凡子群、所有有限子群以及所有几乎循环子群构成的族。

设 $\mathcal{F}$ 是 G 的一个子群族。若对于 G 的每个子群 K，不动点集 Y^K 在 $K\in\mathcal{F}$ 时可缩，否则为空，则 G-CW复形 Y 是分类空间 $E_{\mathcal{F}}G$ 的一个模型。等价地， Y 是 G-同伦范畴中、迷向子群属于 $\mathcal{F}$ 的 G-CW复形的终对象。

轨道范畴 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ 的对象是形如 G/K 的 G-集合，其中 $K\in\mathcal{F}$，态射是 G-映射。 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-模 的范畴是从 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ 到阿贝尔群范畴的逆变函子范畴。平凡的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-模 $\mathbb{Z}$ 将每个对象映射到 $\mathbb{Z}$，并将每个态射映射为 $\mathbb{Z}$ 上的恒等映射。 G-CW复形 Y 的胞腔 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-链复形 $\underline{C}_*(Y)$ 在 G/K 处的取值，是不动点集 Y^K 的胞腔 $\mathbb{Z}$-链复形。

定义4.14。 设 G 是一个群， $\mathcal{F}$ 是 G 的子群族，且 $n\in\mathbb{N}$。如果存在一个 G-CW模型 $E_{\mathcal{F}}G$，其 n-骨架余紧，则群 G 是型 $\mathcal{F}$-F_n 。如果平凡 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-模 $\mathbb{Z}$ 是 FP_n 型，则群 G 是型 $\mathcal{F}$-FP_n 型。

群的有限性性质等价于相对于仅包含平凡子群的子群族的 Bredon 有限性性质。

对于由 $\mathcal{P}$ 个 G子群组成的集合，我们关联上包含 $\mathcal{P}$中所有群的 G 子群的最小族 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ 。明确地说，族 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ 由 $\mathcal{P}$ 中各群的所有共轭以及它们的所有子群组成。群对 $(G,\mathcal{P})$ 的上同调与相对于 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ 的 G 的 Bredon上同调之间的关系已在 [ANCMSS21]中进行了研究。当集合 $\mathcal{P}$ 是自交非正常的（定义 2.8）时，我们证明群对的有限性性质与 Bredon有限性性质是等价的（命题 4.15）。

我们首先进行一些一般性的准备。对于一个 G-CW复形 Y，奇异 G-子复形 Y^{sing} 是由 Y 中所有具有非平凡稳定子的胞腔组成的 G-子复形。G-CW复形 G 之间的一个 G-同伦等价限制为奇异 G-子复形之间的一个 G-同伦等价。代数上，一个自由$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-模 M 具有如下形式

$$\underline{M}=\bigoplus_{j\in J}\mathbb{Z}[\mathrm{Map}_G(-,G/K_j)]$$

对于某个集合 J 和子群 $K_j\in\mathcal{F}$。奇异 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-子模 M^{sing}是由下式给出的 M 的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-子模

$$\underline{M}^{\mathrm{sing}}:=\bigoplus_{j\in J,K_j\neq 1}\mathbb{Z}[\mathrm{Map}_G(-,G/K_j)].$$

对于自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-链复形 M_*, 奇异 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-子复形 M_*^{sing}按次数由奇异 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-子模定义。自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-链复形之间的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-链同伦等价限制为奇异 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-子复形之间的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$-链同伦等价。

命题 4.15。设$(G,\mathcal{P})$ 为一个群对，其中集合 $\mathcal{P}$ 自交非正常且由不同子群组成。令 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ 表示包含 $\mathcal{P}$ 的 G 的最小子群族。设 $n\in\mathbb{N}$，且 $n\geq 1$。则有以下结论：

(i) $(G,\mathcal{P})$ 属于类型 F_n 当且仅当 G 属于类型 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathsf{F}_n$;
(ii) $(G,\mathcal{P})$ 属于类型 FP_n 当且仅当 G 属于类型 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathsf{FP}_n$。

证明。 由于集合 $\mathcal{P}$ 是自交非正常的，且由不同子群组成，因此存在一个 G-推出形式的模型 Z，如下所示

$$\begin{array}{ccc}\coprod_{P\in\mathcal{P}}G\times_P EP & \longrightarrow & EG\\ \downarrow & & \downarrow\\ \coprod_{P\in\mathcal{P}}G/P & \longrightarrow & Z\end{array}\tag{4.1}$$

其中，上方的水平映射是一个 G-子复形的包含映射，左侧的垂直映射则由对每个 $P\in\mathcal{P}$的常值映射 $EP\to P/P$ 诱导。注意， $Z^{\mathrm{sing}}=G/\mathcal{P}$。回顾一下，若一个 G-CW 对（X， A）满足 $X\smallsetminus A$ 中的每个胞腔都具有平凡稳定子，则称其为相对自由的。

(i) 假设（G， $\mathcal{P}$）属于 F_n 型，并令（X， $G/\mathcal{P}$）为一个相对自由的 G-CW 对，其中 X 可缩，且具有余紧的 n-骨架。由于集合 $\mathcal{P}$是自交非正常的，且由不同子群组成，因此 G-CW 复形 X 是 $E_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$的一个模型，并具有余紧的 n-骨架。

假设 G 是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathsf{F}_n$ 型，并令 Y 为 $E_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$ 的一个 G-CW模型，其 n-骨架余紧。分类 G-映射 $Y\to Z$（其中 Z 是 (4.1) 中 $E_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$ 的模型）是一个 G-同伦等价，并且限制为一个 G-同伦

等价 $Y^{\mathrm{sing}} \to Z^{\mathrm{sing}} = G/\mathcal{P}$。我们将 $\widehat{Y}$ 表示为下面的 G-推出

$$\begin{array}{ccc} Y^{\mathrm{sing}} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/\mathcal{P} & \longrightarrow & \widehat{Y} \end{array}$$

其中，上方的映射是包含映射 $Y^{\mathrm{sing}} \to Y$，左侧的映射是 G-同伦等价 $Y_{\mathrm{sing}} \to G/\mathcal{P}$。那么， G-CW 对 $(\widehat{Y}, G/\mathcal{P})$ 是相对自由的，并且 $\widehat{Y}$是可缩的，且具有余紧的 n-骨架。

(ii) 假设 $(G, \mathcal{P})$ 是 FP_n 型，并设 L_* 是 $\Delta_{G/\mathcal{P}}$的一个自由 $\mathbb{Z}G$-分解，其在次数 $\leq n-1$上有限生成。将增广映射 $L_0 \to \Delta_{G/\mathcal{P}}$ 与包含映射 $\Delta_{G/\mathcal{P}} \to \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}]$ 复合，可得到一个 $\mathbb{Z}G$-链复形

$$\cdots \to L_1 \to L_0 \to \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \tag{4.2}$$

它是 $\mathbb{Z}$的一个 $\mathbb{Z}G$-分解。我们如下定义一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链复形 L_* ： 令 $L_*(\underline{G}/1)$为链复形 (4.2)。对于满足 $K \neq 1$、 $K \subset gPg^{-1}$对于 $g \in G$ 和 $P \in \mathcal{P}$的 $K \in \mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$ ，令 $L_*(G/K)$为 $L_*(G/1)$的 $\mathbb{Z}$-子复形，它集中在次数 0 上，由对应于 $gP \in G/\mathcal{P}$的 $\mathbb{Z}[G/\mathcal{P}]$ 的 $\mathbb{Z}$-直和项给出。此定义良好，因为集合 $\mathcal{P}$ 是自交非正常的，且由不同子群组成。于是， L_* 是平凡 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-模 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-分解，且在次数 $\leq n$上有限生成。

假设 G 是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathrm{FP}_n$ 型，并令 M_* 为平凡 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-模 $\mathbb{Z}$ 的自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-分解，且在次数 $\leq n$上有限生成。由 (4.1) 得到的 $E_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$ 的模型 Z 的胞腔 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链复形 $C_*(Z)$ 是 $\mathbb{Z}$ 的自由$\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-分解。根据同调代数基本引理，存在一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链同伦等价 $M_* \to C_*(Z)$，且它限制为一个$\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链同伦等价 $M_*^{\mathrm{sing}} \to C_*(Z)^{\mathrm{sing}}$。注意， $C_*(Z)^{\mathrm{sing}} \cong C_*(Z^{\mathrm{sing}}) = C_*(G/\mathcal{P})$。我们定义 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链复形

$$\widehat{\underline{M}}_* := \operatorname{coker}\big(\underline{M}_*^{\mathrm{sing}} \to \underline{M}_* \oplus \underline{C}_*(G/\mathcal{P})\big),$$

其中，该映射是包含映射 $M_*^{\mathrm{sing}} \to M_*$与 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-链同伦等价 $M_*^{\mathrm{sing}} \to C_*(G/\mathcal{P})$之和。于是， $\widehat{\underline{M}}_*$是 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle}G$-分解，在 $\leq n$ 次有限生成，并满足 $\widehat{\underline{M}}_*^{\mathrm{sing}} \cong C_*(G/\mathcal{P})$。通过$\widehat{\ }$在 $G/1$处计算 M_* ，我们得到一个具有如下形式的 $\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}G$-分解

$$\cdots \to \widehat{\underline{M}}_2(G/1) \to \widehat{\underline{M}}_1(G/1) \to L \oplus \mathbb{Z}[G/\mathcal{P}] \to \mathbb{Z} \to 0,$$

其中，对于 $i = 1, \ldots, n$，$\mathbb{Z}G$-模 L和 $M_i(G/1)$均为有限生成自由模。因此，根据引理 3.1，群对 $(G, \mathcal{P})$ 属于 FP_n 型。$\square$

由命题 4.15、定理 4.6 和推论 4.13 可立即得出，针对互不正规集合的 Bredon有限性性质可由拟收缩继承。

推论 4.16. 设 $(G, \mathcal{P})$ 和 $(H, \mathcal{Q})$ 是群对，其中 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$是由不同子群组成的 *mal-normal* 集。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 2$。假设 $(G, \mathcal{P})$ 是$(H, \mathcal{Q})$的拟收缩。那么以下结论成立：

(i) 如果 H 是 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-$\mathrm{FP}_n$ 型，那么 G是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathrm{FP}_n$ 型；
(ii) 如果 H 是 $\mathcal{F}\langle Q\rangle$-$\mathrm{F}_n$ 型，那么 G是 $\mathcal{F}\langle\mathcal{P}\rangle$-$\mathrm{F}_n$ 型。

References

[Alo91] J.M. Alonso. 群的拟射影维数与相对上同调维数. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 325(2):715–739, 1991. [Alo94] J.M. Alonso. 群的有限性条件与拟等距.

J. Pure Appl. , ( ): – . [

Algebra 95 2 121 129, 1994

ANCMSS21] J.A. Ariciniega-Nev´arez, J.L. Cisneros-Molina, and L.J. S´anchez Salda˜na. 带系数的相对群同调理论与比较同态.*Quaest. Math.*, 44(8):1107–1132, 2021. [BDM09] J. Behrstock, C. Drut¸u, and L. Mosher. 厚度量空间、相对双曲性与拟等距刚性. *Math. Ann.*, 344(3):543–595, 2009. [BE74] R. Bieri and B. Eckmann. 对偶群的有限性性质.

Comment. Math. , : – .[BE78]

Helv. 49 74 83, 1974

R. Bieri and B. Eckmann. 群对的相对同调与庞加莱对偶. *J. Pure Appl. Algebra*, 13(3):277–319, 1978. [Bie81] R. Bieri. *Homological dimension of discrete groups*. 玛丽女王学院数学笔记。玛丽女王学院纯数学系，伦敦，第二版，1981.[Bro82] K.S. Brown. *Cohomology of groups*, 第87卷，收录于 *Graduate Texts in Mathematics*. 施普林格出版社，纽约-柏林，1982.[Bro87] K.S. Brown. 群的有限性性质. *J. Pure Appl. Algebra*, 44 75, 1987 1 3 45(-): – .[Flu11] M. Fluch. *On Bredon (Co-)Homological Dimensions of Groups*. 博士论文，南安普顿大学，2011年。arXiv:1009.4633. [Hae92] A. Haefliger. 群复形的扩张. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42 1 2 275(-): –311, 1992. [HMPSS23] S. Hughes, E. Mart´ınez-Pedroza, and L.J. S´anchez Salda˜na. 相对填充函数的拟等距不变性（附录由 Ashot Minasyan 撰写）.

Groups

Geom. Dyn. 17 4 1483 1515, 2023

, ( ): – . [

HMPSS25] S. Hughes, E. Mart´ınez-Pedroza, and L.J. S´anchez Salda˜na. 群对拟等距的综述：不变量与刚性。载于

Geometric methods in group theory—

papers dedicated to Ruth Charney 34 *Sémin. Congr.* 137 154 , 第 卷，页码 –。

法国数学会，巴黎，2025年。[MPP19] E. Mart´ınez-Pedroza and P. Przytycki. 相对双曲群的抛物子群族的可拆分类空间. *J. Inst. Math. Jussieu*, 18(2):329–345, 2019. [MPSS22] E. Mart´ınez-Pedroza and L.J. S´anchez Salda˜na. 子群的拟等距刚性与滤过端. *Algebr. Geom. Topol.*, 22(6):3023–3057, 2022. [MPSV25] F. Milizia, N. Petrosyan, A. Sisto, and V. Vankov. 双曲性的上同调刻画. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2025 23, 2025 24 353, 1 ( ):Paper No. rnaf – .[MW20] J.F. Manning and O.H. Wang. 上同调与鲍迪奇边界.

Michigan

Math. J. 69 3 633

, ( ): –669,

2020. [Pat] H. Patil. 相对双曲群对的相对上同调维数。预印本，arXiv:2505.04349，2025年。[PS24] N. Petrosyan and B. Sun. 群论德恩填充的上同调 II.

Adv. , :Paper No. – .

Math. 437 109412, 1 56, 2024

Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin, 14195 Berlin, Germany
Email address: kevin.li@fu-berlin.de

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Ciudad de México, Mexico*Email address*: luisjorge@ciencias.unam.mx