arXiv:2603.06553v1 [math.FA] 6 Mar 2026

关于 CD_ω（K）空间的序贯单调闭包

Sukrit Chalana、Denny H. Leung 和 Foivos Xanthos

Abstract. 在这篇短文中，我们解决了 Wickstead 在 [13], 中提出的一个问题，该问题源于对巴拿赫格之间正则算子空间的黎斯完备化的研究。

1. Introduction

设 E 为一个阿基米德向量格，且 E^δ 为 E的序完备化。在下文中，我们将 E 视为 E^δ的序稠密且主导子格。记$u(E)$为 E 中 E^δ的 σ-上元，即 $u(E)$: $= \{x \in E^\delta \mid x_n \uparrow x$对某个（$x_n$） $\subset E\}$ 成立；以及 $l(E)$: $= \{x \in E^\delta \mid x_n \downarrow x$ 对某个（x_n） $\subset E\}$ 成立的 E 中 E^δ的 σ-下元。显然， $u(E) - u(E)$是 E^δ的一个子空间。此外，通过应用格恒等式（$x - y$）$^+ = x \vee y - y$，可以直接验证该空间实际上是 E^δ 的一个子格。此外，容易看出 $u(E) - u(E) = u(E) \cup l(E) - u(E) \cup l(E)$。这为下述空间的定义提供了依据，并且该空间在格同构意义下唯一。

定义 1.1。设 E 是一个阿基米德向量格，其序完备化为 E^δ。$E^{\sigma m}$：$= u$（E）$- u$（E）的子格称为 E^δ 的序贯单调闭包。

据我们所知，上述概念最早在 [11] 中得到研究。在近期的论文 [13], 中，Wickstead 进一步研究了这一空间，并将其称为序列序闭包，记作 E^σ。我们认为，记号 $E^{\sigma m}$ 和术语序贯单调闭包 更为恰当（见注 2.6），因此本文始终采用这一术语和记号。若 E 是巴拿赫格，则 $E^{\sigma m}$可赋予最大延拓范数 $||x||_{E^{\sigma m}} := \inf \{||y|| \mid y \in E, y \geq |x|\}$，该范数将 E 上的格范数延拓为 $E^{\sigma m}$上的格范数。在 [13, 定理 5.6] 中证明了，若E 是几乎 σ-序完备的巴拿赫格，则 $(E^{\sigma m}, ||\cdot||_{E^{\sigma m}})$ 是完备的；而在 [13, 问题 5.8] 中，提出了对于任意巴拿赫格E，$(E^{\sigma m}, ||\cdot||_{E^{\sigma m}})$ 是否完备的问题。这个问题源于对正则算子空间的黎斯完备化的研究。在本文中，我们通过给出一类巴拿赫格 E，使得 $E^{\sigma m}$ 不一致完备，从而证明该问题的答案是否定的；因此，$(E^{\sigma m}, ||\cdot||_{E^{\sigma m}})$ 不是完备空间。

日期：2026年3月9日。2020 数学主题分类。46B42,46A40,47B65。关键词和短语。巴拿赫格、有界半连续函数之差、序完备化、正则算子空间。

2. The main result

下面回顾向量格理论中的一些标准术语。设 E, F 是向量格。线性算子 $T: E \to F$ 称为格同态，若对所有 $x, y \in E$，有$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$。若$T$ 除了是格同态之外还是双射，则称 T 为格同构。在这种情况下，我们称 E, F格同构，并记作 $E \cong F$。设 Y 是 E的子格。若对每个 $x \in E$，都存在 $y \in Y$ 使得 $x \leq y$，则称Y 在 E中主导；若对每个 $x \in E_+$，$x \neq 0$ 都存在 $y \in Y$ 使得$0 < y \leq x$，则称 Y 在 E 中序稠密。若 E 中的每个非空（可数）且有上界的序有界子集都有上确界，则称 E 是（σ-）序完备的。每个阿基米德向量格都格同构于某个序完备空间的序稠密且主导的子格；该空间在格同构意义下唯一，记作 E^δ（例如参见 [10, 第32]节）。设 K 是非空豪斯多夫拓扑空间。我们用 $B(K)$表示 K 上的有界函数空间，用 $C_b(K)$表示有界连续函数空间。注意，$B(K)$在逐点序下是序完备向量格，在一致范数 $||\cdot||_\infty$下是巴拿赫格。我们用 $\mathbb{1}_F$表示集合 $F \subset K$的示性函数。有界半连续函数之差构成的集合记作 $DBSC(K)$，即

$$\mathrm{DBSC}(K) = \{f_1 - f_2 \mid f_1, f_2 \text{ semicontinuous and bounded } on\ K\}.$$

下述空间是在 [1]中引入的。

$$CD_\omega(K) = \big\{f \in B(K) \,\big|\, \exists g \in C_b(K) : [f \neq g] \text{ is at most countable}\big\}.$$

以下结果给出了关于 $CD_\omega(K)$ 空间的一些基本事实。证明基本上已在 [1], 中给出，但作者还额外假设 K 是紧致且基本不连通的，因此我们在此重述证明。若集合 $A \subset K$ 满足 $\mathrm{int}(A) = \emptyset$，则称其为无处稠密。若集合 $M \subset K$ 是无处稠密集的可数并，即 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ 且每个 N_n 在 K中都是无处稠密的，则称其为瘦集（或第一纲集）。若 K 没有孤立点，则称其为完美；若每个瘦集的补集在 K中都稠密，则称其为贝尔空间。最后，若 K 是可分且完全可度量化的空间，则称其为波兰空间。我们还记得，每个非空的完美波兰空间都是不可数的（例如参见 [8, 定理 6.2]）。

命题 2.1. 设 K 为完美贝尔空间，则空间 $CD_\omega(K)$ 是$(B(K), ||\cdot||_\infty)$的序稠密、主导且闭子格。此外，存在一个有界线性投影 $P_c: CD_\omega(K) \to C_b(K)$，它同时也是格同态，使得对所有 $f \in CD_\omega(K)$，$[P_c(f) \neq f]$ 至多可数。

证明。对于 $f_i, g_i \in B(K)$与 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，

$$[\lambda f_1 + \mu f_2 \neq \lambda g_1 + \mu g_2], [f_1 \vee f_2 \neq g_1 \vee g_2] \subset [f_1 \neq g_1] \cup [f_2 \neq g_2].$$

由此立即可知，$CD_\omega(K)$ 是 $B(K)$ 的子格。由于对所有 $x \in K$ 都有 $\mathbb{1}_{\{x\}} \in CD_\omega(K)$，且 $\mathbb{1}_K \in CD_\omega(K)$，我们得到 $CD_\omega(K)$ 是 $B(K)$ 的序稠密且主导的子格。设 $f \in CD_\omega(K)$。我们断言，存在唯一的 $g \in C_b(K)$，使得 $[f \neq g]$ 至多可数。根据定义，这样的 g 的存在性

$CD_\omega(K)$。假设 g，$g' \in C_b(K)$，且 $[f \neq g]$，$[f \neq g']$ 至多可数。由于 K 没有孤立点，$[f \neq g] \cup [f \neq g']$ 是瘦集。由于 K 是贝尔空间，

$$A := [f = g] \cap [f = g'] = ([f \neq g] \cup [f \neq g'])^c$$

在 K中稠密。现在，g，g' 是两个在稠密集 A上取值相同的连续函数；因此$g = g'$。这就证明了该断言。

定义 P_c： $CD_\omega(K) \to C_b(K)$，使得 $P_c(f) = g$，其中 g 是 $C_b(K)$中唯一满足 $[f \neq g]$ 至多可数的元素。利用该断言中 g 的唯一性，很容易看出 P_c 是线性格同态。显然，P_c 是一个投影。若 $f \in CD_\omega(K)$，则 $|f| \leq ||f||\mathbb{1}_K$。因此，由于 P_c是格同态，$|P_c(f)| \leq ||f||\mathbb{1}_K$。所以，$||P_c(f)|| \leq ||f||$，故 P_c 是有界算子。

最后，我们将证明 $CD_\omega(K)$在（$B(K)$ $||\cdot||_\infty$）中是闭的。设（f_n）是 $CD_\omega(K)$中的一个柯西序列，且 f 是其在 $B(K)$中的一致极限。由于 P_c 有界，（$P_c(f_n)$)是 $C_b(K)$中的柯西序列，因而有一致极限 $g \in C_b(K)$。注意，$[f \neq g] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [P_c(f_n) \neq f_n]$，因此 $[f \neq g]$ 至多可数。所以 $f \in CD_\omega(K)$，如所需。□

命题 2.1 尤其表明，$B(K)$ 是 $CD_\omega(K)$ 的序完备化。因此，$CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 可实现为 $B(K)$ 的子格。下面的引理将用于计算 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$。

引理 2.2. 设 E 是 $B(K)$的序稠密子格，且 L 是由 K 上所有有界函数构成的集合，这些函数均可表示为来自 E 的序列的逐点递增极限之差。若 $f, g \in B(K)$ 满足 $g \in L$，且集合 $[f \neq g]$ 至多可数，则 $f \in L$。

证明. 首先注意，由于 E 在 $B(K)$ 中序稠密，对于所有有限$A \subset K$ 及 $h \in B(K)$，我们有 $h \cdot \mathbb{1}_A \in E$。设 $h = f - g$。则 $h \in B(K)$，且 $[h \neq 0]$ 至多可数。取有限集 F_n，$G_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$，使得 (F_n) 和 (G_n) 分别递增至 $\{h < 0\}$ 和 $\{h > 0\}$。定义

$$d_n = h \cdot \mathbb{1}_{F_n}, u_n = h \cdot \mathbb{1}_{G_n}.$$

那么，(d_n) 是一个递减序列，而 (g_n) 是 E 中的一个递增序列。若 $h(x) < 0$，则存在 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$ 都有 $x \in F_n$。因此

$$(h \wedge 0)(x) = h(x) = \lim d_n(x).$$

另一方面，若 $h(x) \geq 0$，则对所有 n 都有 $x \notin F_n$，因而

$$(h \wedge 0)(x) = 0 = \lim d_n(x).$$

这证明了 $d_n \downarrow h \wedge 0$。类似地，$u_n \uparrow h \vee 0$。根据定义，这表明 $h \wedge 0$ 和 $h \vee 0$ 属于 L。由于 L 是 $B(K)$ 的子空间，$h = h \wedge 0 + h \vee 0 \in L$。最后，$f = g + h \in L$，因为 g，$h \in L$，并且 L 是 $B(K)$ 的子空间 □

下面我们将建立 DBSC(K) 与 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 之间的联系。这里回顾一下：若 K 是可度量化的，则函数 $f \in B(K)$ 下半（上半）连续，当且仅当存在一个序列 $(f_n) \subset C(K)$，使得 $f_n \uparrow f$ $(f_n \downarrow f)$（例如参见 [2, 引理 2.41、定理 3.13]）。

定理 2.3。设 K 是一个完美可度量贝尔空间，则

$$CD_\omega(K)^{\sigma m} = \{f \in B(K) \mid \exists g \in \mathrm{DBSC}(K) \ : [f \neq g] \ is\ at\ most\ countable\}$$

此外，对于任意序稠密子格 E *of* $B(K)$ ，只要满足 $E^{\sigma m} = CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 和 $C_b(K) \subset E \subset CD_\omega(K)$。

证明。令 $L := \{f \in B(K) \mid \exists g \in \mathrm{DBSC}(K) : [f \neq g]$至多可数$\}$。由命题 2.1 可知，$B(K)$ 是 $CD_\omega(K)$ 的序完备化，因此$CD_\omega(K)^{\sigma m} = u(CD_\omega(K)) - u(CD_\omega(K))$。令 $f \in u(CD_\omega(K))$。那么存在 $(f_n) \subset CD_\omega(K)$，使得 $f_n \uparrow f$。由命题 2.1，算子 P_c 是正的，因此 $(P_c(f_n))$ 在 $C_b(K)$ 中递增且序有界。因此，$(P_c(f_n))$ 逐点递增至一个有界下半连续函数 g。由于对每个 n ， $[f \neq g] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [P_c(f_n) \neq f_n]$ 和 $[P_c(f_n) \neq f_n]$ 由命题 2.1 至多可数，故 $[f \neq g]$ 至多可数。若 $h \in u(CD_\omega(K)) - u(CD_\omega(K))$，令 $h = h_1 - h_2$ ，其中 $h_i \in u(CD_\omega(K))$，$i = 1$，2。由前述论证，存在有界下半连续函数 g_1、g_2，使得对于 $i = 1$，2，$[h_i \neq g_i]$ 至多可数。于是 $g := g_1 - g_2 \in \mathrm{DBSC}(K)$，且 $[h \neq g] \subseteq [h_1 \neq g_1] \cup [h_2 \neq g_2]$ 至多可数。这证明了 $u(CD_\omega(K)) - u(CD_\omega(K)) \subset L$。

反之，设 $f \in B(K)$ 满足存在 $g \in \mathrm{DBSC}(K)$，使得 $[f \neq g]$ 至多可数。根据定义可得，$\mathrm{DBSC}(K) \subset u(CD_\omega(K)) - u(CD_\omega(K))$。由于根据命题 2.1， $CD_\omega(K)$ 在 $B(K)$ 中序稠密，我们可以应用引理 2.2 得出 $f \in u(CD_\omega(K)) - u(CD_\omega(K))$。

最后，设 E 是 $B(K)$ 的一个序稠密子格，且 $C_b(K) \subset E \subset CD_\omega(K)$。那么 $B(K)$ 是 E 的序完备化，因此 $E^{\sigma m} = u(E) - u(E)$。由于 $E \subset CD_\omega(K)$，显然有 $E^{\sigma m} \subset CD_\omega(K)^{\sigma m}$。另一方面， $C_b(K) \subset E$ 意味着 $\mathrm{DBSC}(K) \subset u(E) - u(E)$。因此

$$CD_\omega(K)^{\sigma m} = L \subset E^{\sigma m}$$

由引理 2.2。 □

现在我们将注意力转向 $\mathrm{DBSC}(K)$ 中序列的一致极限。我们用 $\mathcal{B}_1^1(K)$ 表示 $\mathrm{DBSC}(K)$ 在 $(B(K), \|\cdot\|_\infty)$ 中的闭包。假设存在一个由 K 的非空闭子集组成的序列 $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ ，使得

(a) 对任意 $n \in \mathbb{N}$， $F_0 = K$, $F_n \subsetneq F_{n-1}$。 (b) 若 $x \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$，且 U 是 x 的开邻域，则 $U \cap (F_{n-1} \setminus F_n)$ 不可数。

定义 $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n}^n \mathbb{1}_{F_{n-1} \setminus F_n}$。由于 $\mathbb{1}_{F_{n-1} \setminus F_n} = \mathbb{1}_{F_{n-1}} - \mathbb{1}_{F_n}$ 是有界上半连续函数之差，且 f 的级数在 K 上一致收敛，因此 $f \in \mathcal{B}_1^1(K)$。

命题 2.4。设 K 是一个可度量化空间，其中包含满足 *(a)* 和 *(b)* 的非空闭集序列 $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ 。按上述方式定义 f 。若 $g \in \mathrm{DBSC}(K)$，则 $S := [f \neq g]$ 不可数。

证明。反设存在 $g \in \mathrm{DBSC}(K)$，使得 $S := [f \neq g]$ 至多可数。我们可将 g 写为 $h - k$，其中 h, k 是定义在 K 上的有界下半连续函数。由于 $f = (-1)_n^{\ n}$ 在 $F_{n-1} \setminus F_n$ 上，且 $h = k + (-1)_n^{\ n}$ 在 $F_{n-1} \setminus (F_n \cup S)$ 上，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。对任意 n， $F_n \neq \emptyset$，因此由 (b) 可知 $F_{n-1} \setminus (F_n \cup S)$ 非空。取定 $n \in \mathbb{N}$，并设 $x \in F_{2n-1} \setminus (F_{2n} \cup S)$。令 $B(x, \frac{1}{m})$ 为以 为中心、

半径为 $\frac{1}{m}$ 的开单位球。由 (b) 可知， $B(x,\ \frac{1}{m}) \cap (F_{2n-2}\backslash F_{2n-1})$ 不可数。因此，对每个 $m \in \mathbb{N}$, 均有 $B(x,\ \frac{1}{m}) \cap F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S) \neq \emptyset$。特别地，存在一个取值于 $F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S)$ 且收敛到 x 的序列 (x_m)。由 h 的下半连续性,

$$\begin{aligned} k(x) + \frac{1}{2n} = h(x) &\leq \liminf h(x_m) \\ &= \liminf k(x_m) - \frac{1}{2n-1} \leq \sup_{y \in F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S)} k(y) - \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$\sup_{x \in F_{2n-1}\backslash(F_{2n} \cup S)} k(x) \leq \sup_{y \in F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S)} k(y) - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}. \tag{1}$$

现假设 $z \in F_{2n}\backslash(F_{2n+1} \cup S)$。再次由 (b)，我们可以在 $F_{2n-1}\backslash(F_{2n} \cup S)$ 中选取一个收敛于 z 的序列 (y_m)。由 (1) 以及 k 的下半连续性,

$$k(z) \leq \liminf k(y_m) \leq \sup_{y \in F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S)} k(y) - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

由此可得

$$\sup_{z \in F_{2n}\backslash(F_{2n+1} \cup S)} k(z) \leq \sup_{y \in F_{2n-2}\backslash(F_{2n-1} \cup S)} k(y) - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \text{ for any } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

因此

$$\sup_{z \in F_{2n}\backslash(F_{2n+1} \cup S)} k(z) \leq \sup_{y \in F_0\backslash(F_1 \cup S)} k(y) - \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j}.$$

这是不可能的，因为 k 有界，且对任意 n， $F_{2n}\backslash(F_{2n+1} \cup S)$ 非空。 □

定理 2.5. 设 K 为一个不可数波兰空间。存在 $f \in \mathcal{B}_1^1(K)$，使得对任意 $g \in \mathrm{DBSC}(K)$, $[f \neq g]$ 都是不可数的。

证明. 鉴于命题 2.4，只需在 K 中构造一个满足条件 (a) 和 (b) 的闭集序列 $(F_n)_{n=0}^\infty$。由 [8, 推论 6.5]， K 包含康托尔集的一个同胚副本，我们将其实现为 $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$。设 $\iota : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to K$ 为一个同胚嵌入。对 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$A_n = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : a(i,j) = 0 \text{ if } 1 \leq i \leq n\} \text{ and } F_n = \iota(A_n).$$

再令 $F_0 = K$。显然，$(F_n)_{n=0}^\infty$ 是 K 中的一个闭集序列，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$都有 $F_n \subsetneq F_{n-1}$。假设对某个 $n \in \mathbb{N}$有 $x \in F_n$。于是对某个 $a \in A_n$有 $x = \iota(a)$。设U 为 x的一个开邻域。则 $V := \iota^{-1}(U)$ 是 a 在$\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$中的一个开邻域。存在有限集 $I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，使得

$$W := \{b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : b(i,j) = a(i,j)\ \forall (i,j) \in I\} \subseteq V.$$

选取 $(n, j_0) \in I^c$。若 $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$满足：只要 $(i,j) \in I \cup (\{1,\dots,n-1\} \times \mathbb{N})$，就有 $b(n,j_0) = 1$且 $b(i,j) = a(i,j)$，那么 $b \in W$，因此 $\iota(b) \in U$。此外，若 $1 \leq i \leq n-1$，则 $b(i,j) = a(i,j) = 0$。于是 $b \in A_{n-1}$。由于 $b(n,j_0) \neq 0$，故 $b \notin A_n$。因此， $\iota(b) \in F_{n-1}\backslash F_n$。由于这样的 b 有不可数多个，$U \cap (F_{n-1}\backslash F_n)$ 是不可数的。□

注 2.6。我们回顾一下：在序完备向量格 E 中，序列 (x_n) 序收敛到 $x \in E$，是指存在 E 中的序列 (y_n)，使得 $|x_n - x| \leq y_n \downarrow 0$。显然，每个 $x \in E^{\sigma m}$ 都是 E 中某个序列的序极限。下文将证明，对于一类 $CD_\omega(K)$-空间，存在来自 $CD_\omega(K)$ 的序收敛序列，其序极限不属于 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$。首先注意，对于 $B(K)$ 中的序有界序列，序收敛等价于逐点收敛（例如应用 [2, 引理 8.17], [6, 推论 2.12]）。接下来，取 K 为一个完美波兰空间。由定理 2.3，我们可以将 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 视为 $\{f \in B(K) \mid \exists g \in \mathrm{DBSC}(K) : [f \neq g]$ 至多可数 $\}$。取定理 2.5 中的 f。于是应用 [8, 引理 24.11], ，很容易看出 f 是 $CD_\omega(K)$ 中一个序列 (g_n) 的逐点极限；并且将 (g_n) 替换为 $g_n \wedge ||f||_\infty \vee (-||f||_\infty)$ 后，我们可以假设 (g_n) 是序有界的。特别地， f 是 $CD_\omega(K)$ 中某个序列的序极限；然而，定理 2.5 断言 f 不属于 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$。

现在我们可以陈述主要结果了。设 E 是一个阿基米德向量格，并且 $e \in E_+$。 e 的主理想及其上的相应范数定义如下： $I_e = \{x \in E \mid |x| \leq \lambda e$ 对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}_+\}$, $||x||_e = \inf\{\lambda \geq 0 \mid |x| \leq \lambda e\}$。如果对所有 $e \in E_+$，$(I_e, \ ||\cdot||_e)$都是完备的，我们就称 E 是一致完备的。我们还注意到，每个巴拿赫格都是一致完备的（例如参见 [5, 推论 2.59]），并且一致完备性在格同构空间之间保持不变。

定理 2.7. 设 K 是一个完美波兰空间，则 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 不是一致完备的。

证明。 根据定理 2.3，我们可以将 $CD_\omega(K)^{\sigma m}$ 与 $\{f \in B(K) \mid \exists g \in \mathrm{DBSC}(K) : [f \neq g]$ 至多可数$\}$等同起来。定理 2.5断言$(CD_\omega(K)^{\sigma m}, \ ||\cdot||_{1_K})$不完备，因此结论成立。

□

回顾一下， E 称为几乎 σ序完备 向量格，如果它可以嵌入为一个 σ-序完备向量格的超序稠密子格（例如参见[4, 11]）。接下来，我们考察 $E^{\sigma m}$的 σ-序完备性与 E的几乎 σ-序完备性之间的关系。下面的结果众所周知；为方便读者，我们在此给出一个独立证明。

命题 2.8。 设 E 是一个几乎 σ-序完备向量格，则 $E^{\sigma m}$ 是 σ-序完备的。

证明。设 X 是 σ-序完备空间，使得 E 可视为 X 的超序稠密子格，也就是说， E 是 X 的子格，并且对每个 $x \in X_+$，存在 $(x_n) \subset E_+$ 使得 $x_n \uparrow x$。下文中，我们也将 X 视为其序完备化 X^δ 中的序稠密且主导子格。令 $I := \{y \in X_\delta \mid \exists x \in E : \ |y| \leq |x|\}$ 为 X^δ 中由 E 生成的理想。则 I 序完备，且 E 在 I 中序稠密且主导，因此 $I \cong E^\delta$。我们将 $u(E)$ 和 $l(E)$ 分别记为 I 中 E 的 σ- 上元集和 σ- 下元集。接下来证明 $l(E) = u(E)$。取 $x \in u(E)$，则 $x \in X$，且存在 $v \in E$ 使得 $x \leq v$，特别地 $v - x \in X_+$，因此存在一个序列 $(v_n) \subset E_+$ 使得 $v_n \uparrow v - x$，于是 $v - v_n \downarrow x$ 且 $x \in l(E)$。类似地，我们可以证明 $l(E) \subset u(E)$。现在注意到 $(u(E) - u(E))^+ = (u(E) - l(E))^+ = (u(E) + u(E))^+ = u(E)^+$。取 $(x_n) \subset (E^{\sigma m})_+ = u(E)^+$，使得 (x_n) 递增且

在 $E^{\sigma m}$ 中序有界。则存在 $x \in I$ 使得 $x_n \uparrow x$，且 $(w_{n,\,k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 E_+ 中，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$x_n = \sup w_{n,\,k}$。令 $w_n = \bigvee_{k=1}^{n} w_{n,\,k}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则 $(w_n) \subset E_{k\in\mathbb{N}}$，且显然 $w_n \uparrow x$，因此 $x \in E^{\sigma m}$，结论得证。 □

下面的结果表明，上述事实的逆命题一般并不成立。

命题 2.9. 设 $K_\infty = K \cup \{\infty\}$ 是不可数集 K 在赋予离散拓扑后的一点紧化。则 $C(K_\infty)^{\sigma m}$ 是 σ-序完备的，但$C(K_\infty)$ 并非几乎 σ-完备。

证明. $C(K_\infty)$不是几乎 σ-序完备的事实可由 [13, 例 3.4]得出。我们定义 $T\colon C(K_\infty) \to B(K)$ 如下：$T(f) = f\restriction_K$对所有 $f \in C(K_\infty)$成立。显然，T 是格同态。我们还注意到 T 是单射。事实上，设 $f, g \in C(K_\infty)$满足 $f\restriction_K = g\restriction_K$。由于 f, g在 K_∞上连续，且 K在 K_∞中稠密，因此得到$f = g$。显然，对所有 $x \in K$，$\mathbb{1}_K \in T(C(K_\infty))$且 $\mathbb{1}_x \in T(C(K_\infty))$。由此可知 $C(K_\infty) \cong T(C(K_\infty))$且 $C(K_\infty)^\delta \cong B(K)$。接下来我们将把$C(K_\infty)$与 $T(C(K_\infty))$等同起来。我们将证明

$$u(C(K_\infty)) - u(C(K_\infty)) = \{f \in B(K) \mid \exists c \in \mathbb{R}:\ \ [f \neq c] \text{ 至多可数}\}$$

我们首先注意到，$\{f \in B(K) \mid \exists c \in \mathbb{R}:\ \ [f \neq c] \text{ 至多可数}\}$ 是 $B(K)$ 的一个 σ-序完备子格。令 $f \in B(K)$，且 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $[f \neq c]$ 至多可数。由于常值函数 c 属于 $C(K_\infty)$，应用引理 2.2 可得$f \in u(C(K_\infty)) - u(C(K_\infty))$。接下来我们证明 $C(K_\infty) \subset \{f \in B(K) \mid \exists c \in \mathbb{R}: [f \neq c] \text{ 至多可数}\}$。令 $f \in C(K_\infty)$ 且 $c = f(\infty)$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $U_n = f^{-1}(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$，则 U_n 在 K_∞ 中是开集，因此 U_n^c 是 $K_\infty \setminus \{\infty\}$ 的闭子集，故 U_n^c 至多有限。我们还知道 $[f \neq c] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c$，因此 $[f \neq c]$ 至多可数。于是有 $u(C(K_\infty)) - u(C(K_\infty)) \subset \{f \in B(K) \mid \exists c \in \mathbb{R}:\ \ [f \neq c] \text{ 至多可数}\}$，结论得证。□

设 X 是一个偏序向量空间。若 X^ρ 是一个向量格，且存在双正线性映射 $i\colon X \to X^\rho$，使得 $i(X)$ 在 X^ρ 中序稠密，并且由 $i(X)$ 生成的 X^ρ 的子格等于 X^ρ，则称 X^ρ 是 X 的黎斯完备化。设 E, F 是巴拿赫格，则 E 与 F 之间所有正则算子构成由正线性算子 $T\colon E \to F$ 生成的空间，记为 $\mathcal{L}^r(E, F)$。在 [13], 中，Wickstead 给出了关于 F 的一个充分条件，使得 $\mathcal{L}^r(c, F)$ 的黎斯完备化是一致完备的，其中 c 是收敛序列空间。下文将通过给出一个充要条件来改进这一结果。

定理 2.10。 设 F 是一个巴拿赫格。以下命题等价 $t.$

(i) $F^{\sigma m}$ 是一致完备的。(ii) $\mathcal{L}^r(c, F)$ 的黎斯完备化是一致完备的。

证明。 令 F^δ为 F的序完备化。下文将 $F, F^{\sigma m}$视为 F^δ的序稠密且主导的子格。根据 [7, 引理 3.2.1]，我们可以将 F的范数扩展为 F^δ上的完备格范数。令 $T \in \mathcal{L}^r(E, F^\delta)$，我们用$||T||$表示 T的算子范数，用 $||T||_r = ||\,|T|\,||$表示 T的正则范数。空间$\mathcal{L}^r(E, F^\delta)$在正则范数下是一个巴拿赫格（例如参见 [2, 定理 4.74]）。根据

[13, 定理 5.5], ， $\mathcal{L}^r(c, F)$的黎斯完备化可以识别为子格$\mathcal{H} := \{T \in \mathcal{L}^r(c, F^{\sigma m}) \mid T(c_0) \subset F\}$，它是 $\mathcal{L}^r(c, F^\delta)$ 的子格，其中 c_0 是零序列空间（另见 [9, 定理 3.2]）。

$(i) \Rightarrow (ii)$：我们将证明 $\mathcal{H}$ 是$(\mathcal{L}^r(E, F^\delta)$ $||\cdot||_r)$的闭子格。事实上，设$(T_n \subset \mathcal{H}$ c F^δ $x \in c$ $|T_n\ x\ - T\ x\ | \leq |T_n -)$使得$T|\ x \Rightarrow ||T_n\ x\ - T\ x\ || \leq ||T_n - T||_r \cdot ||x||$ $T_n\ x \xrightarrow{||\cdot||} T\ x$ $T_n\ x \subset F^{\sigma m}$ $T_n \xrightarrow{||\cdot||_r} T \in \mathcal{L}^r(,)$。固定，则我们有( ) ( ) ( ) ( ) ( )，从而( ) ( )。由于(( ))且 $F^{\sigma m}$ 是一致完备的，我们得到 $T(x) \in F^{\sigma m}$（例如应用 [12, 引理1.1]），从而$T \in \mathcal{L}^r(E, F^{\sigma m})$。类似地，对所有 $x \in c_0$我们得到 $T(x) \in F$。因此 $\mathcal{H}$ 在$(\mathcal{L}^r(E, F^\delta)$ $||\cdot||_r)$中是闭的，结论随之成立。

$(ii) \Rightarrow (i)$：假设 $F^{\sigma m}$ 不是一致完备的，则由 [2, 定理 9.3]我们可以找到一个 $y_0 \in (F^{\sigma m})_+$ 以及 I_{y_0} 中一个正的 $||\cdot||_{y_0}$-柯西序列 (f_n)，它在 I_{y_0}中不$||\cdot||_{y_0}$ 收敛。设 $\phi :\ c \to \mathbb{R}$ 为极限泛函，$\mathbf{1} \in c$ 为常值一序列。对所有 $n \in \mathbb{N}$ 令 $T_n(x) = \phi(x) f_n$，并令 $T_0(x) = \phi(x) y_0$，则 $\{T_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}$。此外，$(T_n)$ 在 $(I_{T_0}, ||\cdot||_{T_0})$ 中是柯西的。事实上，设 $\epsilon > 0$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$使得对所有 n、$m \geq n_0$有 $|f_n - f_m| \leq \epsilon y_0$。固定 $x \in c_+$，则对每一个满足$|z| \in [0, x]$ 的 $z \in c$，我们有 $|T_n(z)\ - T_m(z)| = |\phi(z)||f_n - f_m| \leq \phi(x)|f_n - f_m|$。因此，由 Riesz-Kantorovich 公式可得 $|T_n - T_m|(x) = \sup\{|T_n(z)\ - T_m(z)| \mid |z| \in [0, x]\} \leq \phi(x)|f_n - f_m|$。特别地，对所有 n、$m \geq n_0$我们有 $|T_n - T_m| \leq \epsilon T_0$。于是 (T_n) 在 $(I_{T_0}, ||\cdot||_{T_0})$ 中是柯西的，并且存在 $T \in I_{T_0}$使得 (T_n) 关于$||\cdot||_{T_0}$收敛于 T。现在，由于对所有 $n \in \mathbb{N}$有 $|T_n(1)\ - T(1)| = |f_n - T(1)| \leq |T_n - T|(1)$，且 $T_0(1) = y_0$，从而 $f_n \xrightarrow{||\cdot||_{y_0}} T(1) \in I_{y_0}$，这是一个矛盾。

□

References

[1] Abramovich, Y. A., & Wickstead, A. W. (1993). 含单位元 AM-空间中的特殊类.《数学分析及其应用杂志》, 180, 398–411.[2] Aliprantis, C. D., & Border, K. C. (2006). 无穷维分析：漫游者指南. 第三版. Springer.[3] Aliprantis, C. D., & Burkinshaw, O. (2006). 正算子（第 119 卷）. Springer Science & Business Media.[4] Aliprantis, C. D., & Langford, E. (1974). 几乎 σ-Dedekind 完备的 Riesz 空间与主要包含定理.《美国数学会会刊》, 44(2), 421–426.[5] Aliprantis, C. D., & Tourky, R. (2007). 锥与对偶. 数学研究生教材，第 84 卷. 美国数学会.[6] Gao, N., Troitsky, V. G., & Xanthos, F. (2017). 巴拿赫格中的 uo-收敛及其在 Ces´aro 均值中的应用.《以色列数学杂志》, 220, 649–689.[7] Kalauch, A., & van Gaans, O. (2018). 前 Riesz 空间（第 66 卷）. Walter de Gruyter 有限责任公司.[8] Kechris, A. S. (1995). 经典描述集合论（第 156 卷）. Springer.[9] Kiervin Starkey, Q., & Xanthos, F. (2025). $\mathcal{L}^r(E, F)$ 在 $\mathcal{L}^r(E, F^\delta)$ 中的遍布性.《数学研究》, 36(5), 1405–1416.[10] Luxemburg, W. A. J., & Zaanen, A. C. (1971). Riesz 空间 I. North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹.[11] Quinn, J. (1975). 中间 Riesz 空间.《太平洋数学杂志》, 56(1), 225–263.[12] Taylor, M. A., & Troitsky, V. G. (2020). 巴拿赫格中的双基序列.《泛函分析杂志》, 278(10), 108448.

[13] Wickstead, A.W. (2024). 某些正则算子空间的 Riesz 完备化. 《数学研究》, 35(3), 443–458.
Department of Mathematics, Toronto Metropolitan University, 350 Victoria Street, Toronto, Canada M5B 2K3电子邮箱: schalana@torontomu.caDepartment of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 117543电子邮箱: dennyhl@u.nus.edu
Department of Mathematics, Toronto Metropolitan University, 350 Victoria Street, Toronto, Canada M5B 2K3电子邮箱: foivos@torontomu.ca