arXiv:2603.06554v1 [math.GT] 6 Mar 2026

4-球面中的 3-球布鲁尼安链环

SEUNGWON KIM、GHEEHYUN NAHM 和 ALISON TATSUOKA

摘要。对于每个整数 $n \geq 2$，我们构造无穷多个 n 分支的 S^4 中的 3-球布鲁尼安链环。我们的主要工具是第三作者关于 S^4 中 2-球面的平凡双分支链环存在分裂球面的结果；我们也给出该结果的一个新证明。

1. 引言

在一项突破性工作中 [BG21], Budney 和 Gabai 构造了无穷多个打结的3-球，位于S^4中。本文中，对于每个整数 $n \geq 2$，我们构造无穷多个 n分支的*3*-球布鲁尼安链环3-球，位于 S^4中。更确切地说：

定义 1.1 （3-球的布鲁尼安链环）。设 $n \geq 2$ 并固定 n 个两两不相交的三维球B_1，$\cdots$，B_n，位于 S^4中。设 $K_i = \partial B_i$且 $K = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_n$。我们将 $B := B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$称为 n分支的张成 *3*-球无链环，对应于 K。

设 B'_1、$\cdots$和 B'_n 是另一组两两不相交的 3-球，满足 $\partial B'_i = K_i$。如果由张成 3-球 $B' = B'_1 \sqcup \cdots \sqcup B'_n$ 构成的 n分量链环满足：B' 与 B 关于 K非同痕，但对于每个 $i = 1$、$\cdots$和 n，由张成 3-球$B \setminus B_i$ 和 $B' \setminus B'_i$ 构成的（$n-1$）分量链环关于 $K \setminus K_i$同痕，那么我们称其为 布鲁尼安链环。

我们的主要结果如下：

定理 1.2。对于每个 $n \geq 2$，在 S^4中存在无穷多个两两非同痕的 n分量三维球布鲁尼安链环。

我们对定理 1.2 中的所有 $n \geq 2$ 情形证明了定理4.2。为便于说明，我们还针对 $n = 2$ 情形给出了定理4.1的另一种构造，因为证明这些链环是布鲁尼安链环比定理4.2的证明更为简单。定理4.1的构造也可推广到所有 $n \geq 2$；参见注记4.4。

我们通过运用一族无限多个微分同胚来构造我们的三维球布鲁尼安链环$\boldsymbol{\delta_k}$，而 $S^1 \times B^3$ Budney-Gabai 曾用它们在 [BG21]中构造打结三球。这些微分同胚属于哑铃微分同胚；我们将在第2 节和第3节回顾这些构造。

我们用于区分这些布鲁尼安链环的主要工具，是第三作者关于 [Tat25]（定理1.4）的结果：关于2-球面在 S^4中平凡双分支链环存在分裂球面的结果。我们还给出定理1.4的新证明。这个证明源于 Peter Kronheimer 在2025年6月国际理论物理中心会议上提出的一个问题；我们感谢他提出这个问题。

定义 1.3。二分量链环 $K = K_1 \sqcup K_2 \subset S^n$ 的分裂球面 Σ 是嵌入在 S^n 中的 S^{n-1}，使得 K_i 位于 $S^n \setminus \Sigma$ 的不同连通分支中。链环 K 的两个分裂球面若在 S^n 中相对于 K 同痕，则称它们同痕。

SK 获得了韩国国家研究基金会（NRF）由韩国政府（科学技术信息通信部，MSIT）资助的项目经费（编号：2022R1C1C2004559）。GN 部分获得了 ILJU学术文化基金会、西蒙斯合作项目低维拓扑的新结构以及普林斯顿百年奖学金的支持。AT 部分获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金的支持，并在2026年春季学期驻留于加利福尼亚州伯克利的西蒙斯-劳弗数学科学研究所期间，获得了美国国家科学基金会（NSF）DMS-1928930号项目的资助。

定理 1.4 （[Tat25]；定理3.5中重述。 平凡双分量链环的 *2*-球面中，存在无穷多个两两不同痕的分裂 *3*- 球面 2- 球面中 S^4。

注 1.5（在 3维球中对 3个三维球解结与解链）。 Powell [Pow25] 证明，任意两个用于构成 n分量 3维球中一个 n 分量平凡链环的张成三维球链环，在将其内部推入 S^4 后，都相对于边界同痕。∂ 他的工作推广了 Hartman B^5的一项结果。Hartman [Har24], 证明了，对于 S^4中的平凡结，张成三维球也有相同结论。

注 1.6。 定理 $n = 2$ 的情形 1.2 最近由 Niu 独立证明 [Niu26]。Niu 也使用哑铃微分同胚构造其布鲁尼安链环，但通过不同的方法加以区分，即将 Budney 和 Gabai 的 W_3 不变量 [BG21]的推广。

1.1. **结构安排**。 第 2 节回顾 Budney 和 Gabai 在 [BG21]中引入的哑铃微分同胚的构造。第 3 节给出定理 1.4[Tat25] （定理 3.5）的另一种证明，该定理论述了 S^4中平凡 2-球面的分裂球面的存在性，并回顾证明所需的 [BG21]中的相关工具。第 4 节构造 n分量的三维球布鲁尼安链环，该构造适用于 S^4 中的所有 $n \geq 2$ （定理 4.2）。

1.2. **约定**。 流形均带有定向，流形之间的映射均保持定向。如果 X 是一个带定向的流形，则$\overline{X}$ 赋予 X 相反定向。

$A \approx B$ 表示 A 与 B 同痕。若微分同胚和同痕逐点固定边界，则称其为关于 ∂ 的 rel.。类似地，如果 F 是一个集合，那么若微分同胚和同痕逐点固定 F，则称其为关于 F 的 rel.。

除非另有说明，当我们在 S^4 中绘制对象时，我们将 $S^4 = B^4 \cup S^3 \times [-1,1] \cup B^4$ 视为 $S^3 \times \overline{0}$，并绘制它们与 S^4的“时间切片”的交集，其中我们将该时间切片 $S^3 \times 0$ 视为 $\mathbb{R}^3$ 加上一个无穷远点。某些对象并不完全位于这个时间切片中：特别是，我们经常考虑与 $S^3 \times 0$ 分别在赤道处相交于 1-球面和 2-球面的 2-球面和 3-球面。在这些情况下，我们设想这些球面的其余部分分别在附近的时间切片 $S^3 \times \pm\varepsilon$中由 2-圆盘和 3-圆盘封闭。（对 2-球面的这种描述也可以看作是不带任何带的带状平凡链环图。）

致谢。GN 感谢 Peter Ozsváth 一直以来的支持和宝贵讨论。AT 感谢 Dave Gabai 的悉心指导和宝贵建议。

2. 杠铃微分同胚

本节回顾杠铃微分同胚的构造；更多细节请参见 [BG21]的第5章。Budney 和 Gabai 构造了一些有趣的微分同胚（“杠铃微分同胚”），作用于一个4维流形 X 。他们首先定义一个辅助的4维流形（即“加厚模型杠铃”） $\mathcal{NB} := S^2 \times D^2 \natural S^2 \times D^2$ 以及一个有趣的微分同胚（即“杠铃映射”）$\beta\colon \mathcal{NB} \to \mathcal{NB}$相对 ∂。随后，他们指定一个从 $\mathcal{NB}$到 X的嵌入，并通过前推 X 得到 β的一个微分同胚；这一操作称为哑铃植入。

2.1. **杠铃映射** $\beta\colon \mathcal{NB} \to \mathcal{NB}$。 考虑 B^4 中两条不相交且适当嵌入的弧 A_1 和A_2。于是 $B^4 \setminus (N(A_1) \sqcup N(A_2)) \cong S^2 \times D^2 \natural S^2 \times D^2$。杠铃映射 β 将通过对 B^4 中 A_1 的某个特定同痕应用同伦延拓定理来定义，且该同痕相对于 $N(A_2)$ 固定。此同痕称为弧旋转，其定义为将 A_1 绕 A_2 正向旋转（或者等价地，将 A_1 绕 A_2 的子午二维球面 S_2 正向旋转）；下面我们将对此进行解释。

将 B^4 视为 $B^3 \times [-1,1]$，假设 A_1 完全出现在 $B^3 \times 0$ 的切片中，作为一条竖直弧，并令 B^4 为弧 A_2，即与$\mathrm{pt} \times [-1,1]$ 相交于一点的 $B^3 \times 0$，该点与 A_1不相交（图2.1 （a））。通过将 A_1 在 $B^3 \times 0$ 中拖动正向绕交点旋转$A_2 \cap (B^3 \times 0)$，使其返回起始位置，同时始终固定 ∂A_1。我们可以

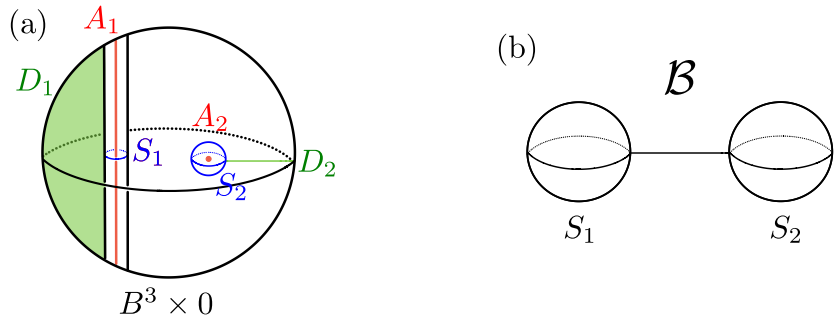


图 2.1。（a）：弧 A_1 和 A_2、2-球面 S_1 和 S_2，以及 D_1 和 D_2 这两个 2-圆盘，位于 $B^4 = B^3 \times [-1,1]$的 $B^3 \times 0$ 切片中。注意， D_1 完整地出现在这个三维切片中，而 D_2 与其相交成一条弧；类似地， S_2 完整地出现在这个切片中，而 S_1 与其相交于一个赤道 S^1。（b）：杠铃 $\mathcal{B}$。

安排使邻域 $N(A_1)$ 在执行此同痕后回到相同位置。因此，应用环境同痕延拓定理，我们关于 A_1 相对于$N(A_2)$的同痕可由 B^4相对于 $N(A_2)$的一单参数族微分同胚实现，其中时刻 1 映射是 B^4 的一个微分同胚，并逐点固定 $N(A_1)\sqcup N(A_2)\sqcup N(\partial B^4)$。从 B^4中切除$N(A_1)\sqcup N(A_2)$，并取该时刻 1 映射的限制，便得到微分同胚β：$\mathcal{NB} \to \mathcal{NB}$；注意， β固定边界 $\partial(\mathcal{NB})$，正如所需。还要注意， β相对于 ∂ 同痕于 $\mathcal{NB}$ 的微分同胚，该微分同胚由在 B^4 中将 A_2 绕 A_1 负向旋转得到（见[BG21，注 5.4 ii)]）。

2.2. **哑铃植入**。 给定一个嵌入 f：$\mathcal{NB} \hookrightarrow X$，我们可以通过嵌入 f，将杆微分同胚映射 $\beta \in \mathrm{Diff}_\partial(\mathcal{NB})$ 推前，并得到一个微分同胚，称为 $\beta_f \in \mathrm{Diff}_\partial(X)$，它作用于 X，且相对于 ∂。这一操作称为哑铃植入，以此方式得到的微分同胚称为哑铃微分同胚。在本小节中，我们回顾确定哑铃微分同胚 β_f（相对于 ∂）同痕类所需的信息。

注意到 $\mathcal{NB}$ 变形收缩到由两个通过一条弧连接的 2-球面所构成的二维复形上（图 2.1（b））；该二维复形称为 杠铃，记作 $\mathcal{B}$。根据 [BG21，备注 5，12], 哑铃微分同胚 β_f 在保持 ∂不变的条件下，$f|_{\mathcal{B}}$ 由其限制唯一确定（回顾一下，我们的约定要求流形之间的映射是保定向的）；特别地， β_f 不依赖于杆的框架。这促成了下面的定义。

定义 2.1 （哑铃）。 4-流形中的一个哑铃 X 由以下对象组成：

（1）两个定向的嵌入 S^2，其法丛是平凡的（“袖口”），以及（2）一条定向的嵌入区间 $[0,1]$，连接这两个 S^2（“杆”）。

我们要求袖口彼此不相交，并且杆只在其端点处与袖口相交。

根据上述讨论， η 中的 X 一个杠铃唯一确定（在相对于 ∂的同痕意义下）相应的杠铃微分同胚，属于 $\mathrm{Diff}_\partial(X)$。注意，杆上的定向仅用于区分两个袖口。我们将植入杠铃 η 所得到的杠铃微分同胚记为 $\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Diff}_\partial(X)$。

引理 2.2。 设 η 是一个定向<*STYLE_PLACEHOLDER*>4</*STYLE_PLACEHOLDER*>流形 X中的杠铃。那么，反转一个袖口或杆的定向，会使相应的杠铃微分同胚 $\boldsymbol{\eta}$ 变为其逆元。

证明。 这可由构造得出（比较 [BG21，定理 5。6], 这是“较难的情形”：反转杆的定向。

这三个结论均可由以下两个观察得出：(1) 将一条弧绕一个球面正向旋转所得到的微分同胚，是将同一条弧绕同一球面反向 旋转所得到的微分同胚的逆元（在 ∂ 相对同痕意义下）。(2) 将第一条弧绕第二个球面正向旋转所得到的 $\mathcal{NB}$ 上的微分同胚，与将第二条弧绕第一个球面反向旋转所得到的 $\mathcal{NB}$ 上的微分同胚，在 ∂ 相对同痕。□

因此，袖口和杆的定向共有八种选择，所得的哑铃植入在相对于 ∂的同痕意义下有两种（可能）不同的情况，且其中一种是另一种的逆元（同样相对于 ∂同痕）。请注意，在证明定理3.5时，仔细处理定向非常重要。

3. 哑铃与打结的 S^3'

本节中，我们给出第三作者定理3.5的另一种证明。该定理 [Tat25],指出，平凡二分量二维链环 $S^2 \sqcup S^2$ 在 S^4中有无穷多个两两非同痕的分裂球面。我们通过证明这些分裂球面可提升为 $S^1 \times S^3$中的非同痕非分离三维球面来区分它们； S^4 是$S^2 \sqcup S^2$沿 $S^1 \times S^3$ 的二重分支覆盖。在 $S^1 \times S^3$ 中，这些三维球面的非同痕性可由 Budney 和 Gabai 的 W_3不变量检测，该不变量用于 $S^1 \times S^3$中的非分离三维球面。

在证明定理3.5之前，我们先简要回顾他们关于打结 3-球面的构造，以及他们用来区分这些球面的 W_3 不变量。需要指出的是，我们只陈述证明定理3.5所需的内容，不过为方便读者，我们尽量为他们的陈述和证明提供准确的出处，见 [BG21]。

定义 3.1。令 $\mathrm{Emb}_0(S^3, S^1 \times S^3)$ 表示从 S^3 到 $S^1 \times S^3$ 的嵌入空间，其中的嵌入均与标准嵌入pt $\times S^3$ 的 S^3同伦。令 $\mathrm{Diff}_0(S^1 \times S^3)$ 表示微分同胚 $S^1 \times S^3 \to S^1 \times S^3$ 的空间，其中的微分同胚均与恒等映射同伦。

令 $\varphi \in \mathrm{Diff}_0(S^1 \times S^3)$。Budney 和 Gabai 定义了 φ的 W_3 不变量，该不变量只依赖于$\varphi(\mathrm{pt} \times S^3)$: 他们（1）将某个元素 $[\varphi]$ 与群 $\pi_2\mathrm{Emb}_\partial(I, S^1 \times B^3;\, I_0)$ 中的某个元素相关联（该元素取决于一些额外的选择），并（2）定义从 $\pi_2\mathrm{Emb}_\partial(I, S^1 \times B^3;\, I_0)$ 到一个较易处理的 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间的同态（并证明 $[\varphi]$ 的像不依赖于步骤（1）中所作的额外选择） [BG21、推论7.18 和定理 8.5]。

定理 3.2 ([BG21，命题3.3，推论7.18，定理8.5和推论8。6])。 存在一个同态

$$W_3 : \pi_0\mathrm{Diff}_0(S^1 \times S^3) \to \mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}] \Big/ \left\langle t_1^{\alpha-\beta} t_3^{-\beta} - t_1^{\alpha} t_3^{\alpha-\beta} = t_1^{\beta-\alpha} t_3^{-\alpha} - t_1^{\beta} t_3^{\beta-\alpha} \right\rangle \tag{3.1}$$

t帽子可经由映射 $\pi_0\mathrm{Diff}_0(S^1 \times S^3) \to \pi_0\mathrm{Emb}_0(S^3, S^1 \times S^3)$ 诱导而得 y

$$\mathrm{Diff}_0(S^1 \times S^3) \to \mathrm{Emb}_0(S^3, S^1 \times S^3) : \varphi \mapsto \varphi(\mathrm{pt} \times S^3).$$

Budney 和 Gabai [BG21，第7节和定理8。1] 还计算了 W_3 某些 $S^1 \times S^3$ [BG21定义611], 中某些 $\vec{w} \in \mathbb{Z}^{k-1}$的杠铃微分同胚类的 $S^1 \times S^3$ [BG21定义6。11], 称为扭曲θ_k 植入 $\boldsymbol{\theta_k}(\vec{v},\ \vec{w})$ 对于 $\vec{v},\ \vec{w} \in \mathbb{Z}^{k-1}$。一般定义请参阅 [BG21定义611]，我们将重点讨论特殊情形

$$\boldsymbol{\delta_k} := \boldsymbol{\theta_k}((0,0,\cdots,0,1),(0,0,\cdots,0,1,0)),\ \boldsymbol{\delta_k'} := \boldsymbol{\theta_k}((0,0,\cdots,0,1,0),(0,0,\cdots,0,1)). \tag{3.2}$$

我们将 $S^1 \times S^3 = (S^1 \times B^3) \cup (S^1 \times S^2 \times [-1,1]) \cup (S^1 \times \overline{B^3})$。哑铃 δ_k和 δ_k'包含在 $S^1 \times S^2 \times [-1,1]$中；它们与 $S^1 \times S^2 \times 0$ 的交集绘于图 3.1 中，适用于$k = 5$ (这里，我们将 $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$；事实上，它们包含在 $S^1 \times \mathbb{R}^2 \times [-1,1]$中。

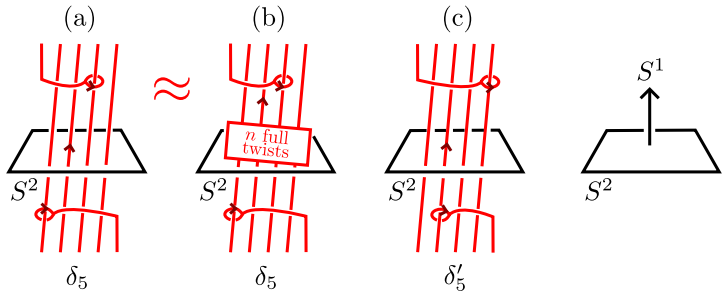


图3.1。 哑铃 δ_5 和 δ_5'；图中只画出了它们与 $S^1 \times S^2 \times 0$ 的交集。袖口上的箭头表示袖口与 $S^1 \times S^2 \times 0$的有向交集的定向。横杆上的箭头表示横杆的定向。请注意（注3.4），(a) 和 (b) 中所画的哑铃是同痕的。

一般来说， δ_k 和 δ_k' 的横杆绕着 S^1 方向转 k 圈。 δ_k的顶部袖口连接从右数第二股，底部袖口连接从左数第一股。 δ_k' 的顶部袖口连接从右数第一股，底部袖口连接从左数第二股。

定理3.3。 $W_3(\boldsymbol{\delta_4})$ $W_3(\boldsymbol{\delta_5})$ $\cdots$线性无关。此外，我们有 $W_3(\boldsymbol{\delta_k}) = -W_3(\boldsymbol{\delta_k'})$。

证明。第一部分见 [BG21，定理 8.3]。第二部分也可由 [BG21，第7节和定理 8.1], 推出，其中他们计算了所有扭曲 θ_k 植入的 W_3 不变量。为方便读者，下面给出精确且尽可能简洁的参考文献：首先，Budney 和 Gabai 在 [BG21，定义 7.16], 中定义了一族元素 $F_k(p,q) \in \pi_2\mathrm{Emb}_\partial(I, S^1 \times B^3; I_0)$，但本段并不需要其精确定义。由方程（3.2）和 [BG21，定理 8.1], ，我们有 $[\boldsymbol{\delta_k}] = F_k(k-1, k-2)$和 $[\boldsymbol{\delta_k'}] = F_k(k-2, k-1)$。由于根据[BG21，推论 7.18], 的证明， $F_k(p,q) = -F_k(q,p)$，因此有 $W_3(\boldsymbol{\delta_k}) = -W_3(\boldsymbol{\delta_k'})$。□

注记 3.4。 如图 δ_k 所示，在横杆上引入任意数量的整圈扭转3.1 （b）会得到一个同痕的杠铃，因为我们处于4 维空间中，因此可以解开这些扭转。

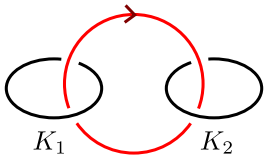


图 3.2。一个 S^1 （红色）嵌入在平凡的二分量 2-链环 $K_1 \sqcup K_2 \subset S^4$的补空间中。图中仅画出了与赤道 $S^3 \times 0 \subset B^4 \cup S^3 \times [-1,1] \cup B^4 = S^4$ 的交集。

回忆一下，杠铃 δ_k 包含于 $(S^1 \times B^3) \cup (S^1 \times S^2 \times [-1,1]) \subset S^1 \times S^3$中。通过识别 $(S^1 \times B^3) \cup (S^1 \times S^2 \times [-1,1]) \cong S^1 \times B^3$，我们也可以将杠铃 δ_k 视为包含于 $S^1 \times B^3$ 中的杠铃，并将哑铃微分同胚 $\boldsymbol{\delta_k}$ 视为 $S^1 \times B^3$ 上相对于 ∂的微分同胚。

现在我们可以陈述并证明定理 3.5。设 $K = K_1 \sqcup K_2$ 是 S^4中的一个平凡二分量二维链环。图 3.2 中的红色圆描述了 ι 的一个嵌入： $S^1 \times B^3 \hookrightarrow S^4 \setminus N(K)$，在同痕与框架的意义下。设 $\boldsymbol{\beta_k}$ 是 S^4 相对于 K 的微分同胚，由沿 ι 前推 $\boldsymbol{\delta_k} \in \mathrm{Diff}_\partial(S^1 \times B^3)$ 给出。于是， $\boldsymbol{\beta_k}$ 由杠铃 $\beta_k := \iota(\delta_k) \subset S^4 \setminus N(K)$给出。注意，由注 3.4， β_k 相对于 $\partial N(K)$的同痕类不依赖于红色圆的框架，因此 $\boldsymbol{\beta_k}$ 相对于 K 的同痕类也不依赖于该框架。

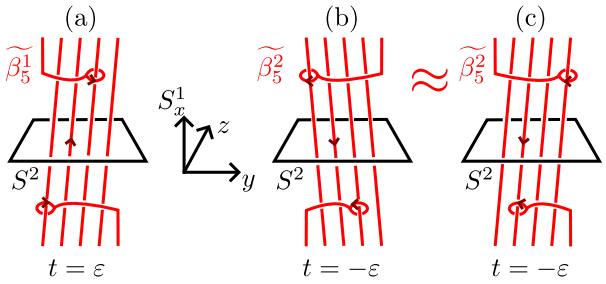


图 3.3. 将 $S^1\times S^3$ 视为 $(S^1\times B^3)\cup(S^1\times S^2\times[-1,1])\cup(S^1\times B^3)$。(a) 和 (b): 杠铃 β_5 在 $S^1\times S^3$中的两个提升；图中画出了它们与时间切片 $S^1\times S^2\times\pm\varepsilon$ 的交集。(c): 与 (b) 中杠铃同痕的一个副本

定理 3.5 ([Tat25]). 设 Σ 是 $K=K_1\sqcup K_2$ 在 S^4中的标准分裂球面。则对所有 $k,\ \ell\geq 4,\ \ k\neq\ell$, 分裂球面 $\boldsymbol{\beta_k}\Sigma$ 与 $\boldsymbol{\beta_\ell}\Sigma$ 相对于 K是非合痕的。

证明。考虑沿着 K对 S^4 作二重分支覆盖，所得空间为 $S^1\times S^3$。利用定理3.3，通过区分它们在 $S^1\times S^3$ 中的提升，我们区分 Σ、$\sim$ $\sim\boldsymbol{\beta_k}\Sigma$和 $\boldsymbol{\beta_\ell}\Sigma$。令 β_k^1、β_k^2 为杠铃 β_k在 $S^1\times S^3$中的两个 $\sim$ $\sim$提升。那么， $\boldsymbol{\beta_k^2}\circ\boldsymbol{\beta_k^1}$是 $\boldsymbol{\beta_k}$的一个提升。由于 Σ在 $S^1\times S^3$中的两个提升同痕于 S^3_{std}: $=\{*\}\times S^3$ 及其相反定向的版本， $\boldsymbol{\beta_k}\Sigma$ 的两个提升也$\sim\sim$同痕于 $\boldsymbol{\beta_k^2\beta_k^1}S^3_{std}$ 及其相反定向的版本。因此，接下来只需证明 S^3_{std}、$\sim\sim$ $\sim\sim\boldsymbol{\beta_k^2\beta_k^1}S^3_{std}$ 和 $\boldsymbol{\beta_\ell^2\beta_\ell^1}S^3_{std}$两两非合痕。

令 ρ： $S^1\times S^3\to S^1\times S^3$ 为沿 K 对 S^4 作二重分支覆盖的非平凡覆盖变换。我们更明确地描述 ρ: 将 $S^1\times S^3$视为 $(S^1\times B^3)\cup(S^1\times S^2\times[-1,1])\cup(S^1\times B^3)$。于是， ρ交换 $S^1\times B^3$和 $S^1\times B^3$。对于 $S^1\times S^2\times[-1,1]$, 将 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 视为具有坐标 x, 将 $S^2=\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$ 视为具有坐标 $y,\ z$，并令 $[-1,1]$ 具有坐标 t。那么 ρ在 $S^1\times S^2\times[-1,1]$ 上的作用为 $(x,\ y,\ z,\ t)\mapsto(-x,\ y,\ z,\ -t)$。

因此，我们看到哑铃 $\widetilde{\beta_k^1},\widetilde{\beta_k^2}$ 如图 3.3 (a) 和 (b) 所示。特别地，$\sim$ β_k^1 是$\sim$同痕于 δ_k，并且 β_k^2 同痕于（旋转 π 沿 yz 方向）图 3.3 (c) 中的杠铃，该杠铃由 δ_k' 通过反转两个袖口和杆的定向得到。因此，$\sim$杠铃微分同胚 $\boldsymbol{\beta_k^2}$ 与 $\boldsymbol{\delta_k'}$ 根据引理 2.2互为逆元，于是我们有

$$W_3(\widetilde{\boldsymbol{\beta_k^2}})=-W_3(\boldsymbol{\delta_k'})=W_3(\boldsymbol{\delta_k})=W_3(\widetilde{\boldsymbol{\beta_k^1}})$$

由定理3.3。因此，我们有

$$W_3(\widetilde{\boldsymbol{\beta_k^2}}\circ\widetilde{\boldsymbol{\beta_k^1}})=2W_3(\boldsymbol{\delta_k}),$$

$\sim\sim$ $\sim\sim$从而 S^3_{std}、$\boldsymbol{\beta_k^2\beta_k^1}S^3_{std}$与 $\boldsymbol{\beta_\ell^2\beta_\ell^1}S^3_{std}$根据定理 3.2 和 3.3两两非合痕的。 □

4. 三维球的布鲁尼安链环

本节中，我们先构造由两个分量组成的3维球的布鲁尼安链环（定理4.1），以作热身。然后，我们讨论一般情形 $n\geq 2$ 并构造由 n个分量组成的3维球的布鲁尼安链环（定理4.2），采用一种受 Bing 加倍启发的构造方法。我们利用 [Tat25]的分裂球面检测它们的链接关系（定理3.5）。

在本节中，我们按照定理 S^4 相对 F 的讨论，构造 $F\subset S^4$ 的微分同胚，具体如下。首先，我们构造嵌入 3.5 $c\colon S^1\hookrightarrow S^4\setminus N(F)$，它们进而描述了 $S^1\times B^3$在 $S^4\setminus N(F)$中的嵌入（在同痕和框架意义下）。然后，我们将 $\boldsymbol{\delta_k}$ 视为 $S^1\times B^3$ 相对 ∂ 的微分同胚，并沿着 $\boldsymbol{\delta_k}$ （分别沿着$\boldsymbol{\delta_k}^{-1}$）前推

这些嵌入。回想一下，所得微分同胚在相对 F 的同痕意义下，仅取决于核 S^1 的嵌入 c；因此，我们将这个微分同胚称为沿 c 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ （分别沿 $\boldsymbol{\delta_k}^{-1}$ c）所给出的微分同胚。

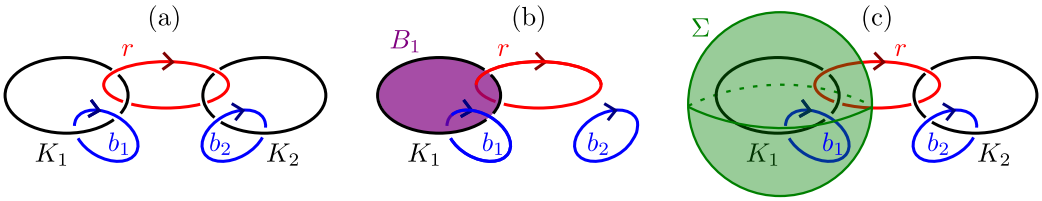


图4.1。（a）： $K_1 \sqcup K_2$ 中的一个平凡二分量二维链环、一条红色圆 r和两个蓝色圆 b_1，b_2 中的 $S^4 \setminus (K_1 \sqcup K_2)$。沿 r 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$，并沿 b_1 前推$\boldsymbol{\delta_k}^{-1}$ 和 b_2，得到S^4中的二分量三维球布鲁尼安链环。（b）：如果忽略 K_2，那么只有 r 和 b_1 与 B_1相交，相应的微分同胚相互抵消。注意，B_1 在紫色二维圆盘中与 $S^3 \times 0$ 时间切片相交。（c）：（a）与分裂球面 $\Sigma = \partial N(B_1)$ 的组合，该球面在 $S^3 \times 0$ 切片中与绿色二维球面相交。注意，蓝色圆不与 Σ相交。

定理 4.1. 设 $K = K_1 \sqcup K_2$ 是 S^4 中的一个平凡双链环。则存在一个三维球双分量链环的无限族 $B_1 \sqcup B_2$，满足 $\partial B_1 = K_1$ 和 $\partial B_2 = K_2$，使得对于该族中任意两个不同的链环 $B_1 \sqcup B_2$ 和 $B_1' \sqcup B_2'$，有 $B_1 \sqcup B_2 \not\approx B_1' \sqcup B_2'$ ***rel.*** $K_1 \sqcup K_2$，但 $B_1 \approx B_1'$ ***rel*** K_1 且 $B_2 \approx B_2'$ ***rel.*** K_2。

证明。取跨越 K_1 和 K_2 的三维球 B_1 和 B_2，它们位于 S^4 中。令 $\boldsymbol{r_k}$ 为由图4.1 (a) 中沿红色圆 r 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ 得到的 S^4 rel. K 的微分同胚。类似地，令 $\boldsymbol{b_{k,1}}$（分别为 $\boldsymbol{b_{k,}}2$）为沿图 4.1 (a) 中蓝色圆 b_1 （分别为 b_2）前推 $\boldsymbol{\delta_k}^{-1}$ 得到的推前。令 $\boldsymbol{\gamma_k} := \boldsymbol{r_k} \circ \boldsymbol{b_{k,1}} \circ \boldsymbol{b_{k,}}2$。我们将证明 $\{B_1 \sqcup B_2\} \sqcup \{\boldsymbol{\gamma_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\gamma_k}(B_2)\}_{k \geq 4}$ 是我们所需的无限族。

首先，由于 b_2 与 B_1 不相交，我们有 $\boldsymbol{\gamma_k}(B_1) \approx \boldsymbol{r_k} \circ \boldsymbol{b_{k,}}_1(B_1)$ 相对于 K。如果忽略 K_2，那么 r 与 b_1 相对于 K_1 同痕。因此，我们有 $\boldsymbol{r_k} \circ \boldsymbol{b_{k,}}_1(B_1) \approx B_1$ 相对于 K_1。同样的论证表明，$\boldsymbol{\gamma_k}(B_2) \approx B_2$ 相对于 K_2。

现在我们将证明，$\boldsymbol{\gamma_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\gamma_k}(B_2) \not\approx B_1 \sqcup B_2$ 相对于 K。假设它们同痕。考虑 B_1 在 S^4 中的一个小正则邻域 $N(B_1)$。那么 $N(B_1) \cong B^4$，因此 $\Sigma := \partial N(B_1) \cong S^3$ 是二分支链环 K 的一个分裂球面。如果 $\boldsymbol{\gamma_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\gamma_k}(B_2) \approx B_1 \sqcup B_2$ 相对于 K，那么 S^4 的子空间 $\boldsymbol{\gamma_k}(N(B_1))$ 和 $N(B_1)$ 可通过一个相对于 K 的 S^4 的环境同痕彼此同痕；特别地，必有 $\boldsymbol{\gamma_k}(\Sigma) \approx \Sigma$ 相对于 K。另一方面，由于蓝色圆可相对于 K 同痕至与 Σ 不相交，因此 $\boldsymbol{\gamma_k}(\Sigma) \approx \boldsymbol{r_k}(\Sigma)$ 相对于 K。然而，$\boldsymbol{r_k}$ 是定理 3.5 中的微分同胚 $\boldsymbol{\beta_k}$，因此根据定理 3.5，$\boldsymbol{r_k}(\Sigma) \not\approx \Sigma$ 相对于 K，这就得到了矛盾。由于改变 k 会产生非同痕分裂球面 $\boldsymbol{\beta_k}(\Sigma)$，同样的证明表明，对于 $k \neq \ell$、k、$\ell \geq 4$，$\boldsymbol{\gamma_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\gamma_k}(B_2) \not\approx \boldsymbol{\gamma_\ell}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\gamma_\ell}(B_2)$ 相对于 K，由此得到二分支布鲁尼安三维球链环的无限族。□

现在我们证明一般情形。

定理 4.2。 设 $K = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_n$ 是 S^4 中一个平凡的 n 分量 *2*-链环。那么存在一个由 n 分量三维球链环组成的无限族 $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$，满足 $\partial B_i = K_i$；对于族中任意两个不同的链环 $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$ 和 $B' = B_1' \sqcup \cdots \sqcup B_n'$，$B$ 与 B' 在 K 的相对意义下非同痕，但对于每个 $i = 1$、$\cdots$、n，三维球的 $(n-1)$ 分量链环 $B \setminus B_i$ 和 $B' \setminus B_i'$ 在 $K \setminus K_i$ 的相对意义下同痕。

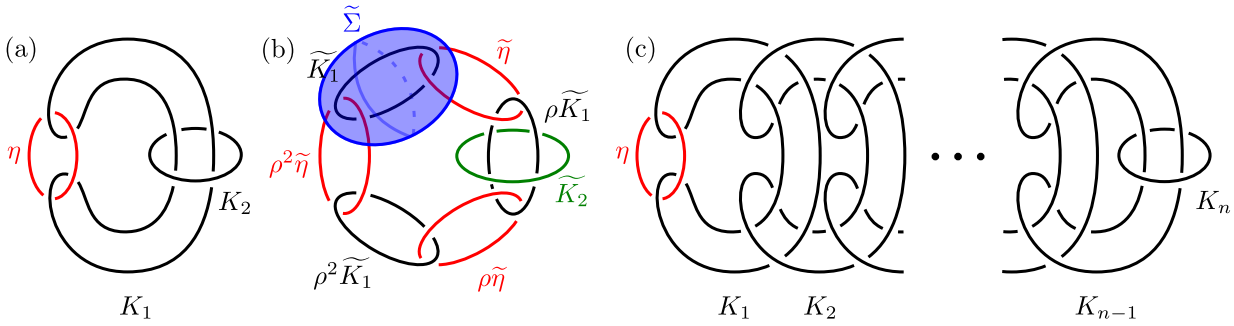


图 4.2。(a)、(c)：沿着 η 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$，得到 S^4中的三维球的布鲁尼安链环。(b)： S^4 沿 K_2 的三重循环分支覆盖，以及分裂三维球面 $\Sigma = \partial N$的提升 $\widetilde{\Sigma}$；该球面将 $\widetilde{K_1}$与 $\rho\widetilde{K_1} \sqcup \rho^2\widetilde{K_1}$分开（$B_1$）。

证明。考虑 η，它位于 n 分量平凡链环 $K = K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_n$ 在 S^4 中的补空间内，该链环见图 4.2 (c)。令 $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$，其中 B_i 是一个 三维球，且 $\partial B_i = K_i$。令$\boldsymbol{\eta_k}$ 为 S^4 关于 K 的微分同胚，它由沿着 η 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ 得到。我们将证明$\{B\} \sqcup \{\boldsymbol{\eta_k}(B)\}_{k\geq 4}$ 就是所需的无限族。

首先注意，按构造，若忽略任意一个 K_i，那么我们就可以将 η 与$K \setminus K_i$“解链”，也就是说，可以将 η 相对于 $K \setminus K_i$ 同痕至一个与 $K \setminus K_i$不相交的 4-球中，因此还可以进一步将 η 相对于 $K \setminus K_i$ 同痕至与 B不相交。因此，对于 $i = 1$，……，n，$(n-1)$ 分量的三维球链环$\boldsymbol{\eta_k}(B)$、$\setminus \boldsymbol{\eta_k}(B_i)$和 $B \setminus B_i$ 相对于 $K \setminus K_i$ 同痕。

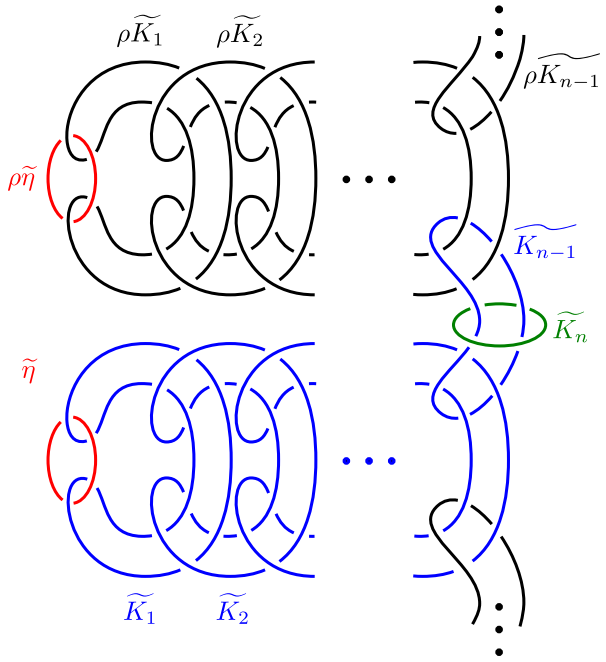
现在，我们对 n 进行归纳，并证明对于不同的 k、$\ell \geq 4$， B、$\boldsymbol{\eta_k}(B)$ $\boldsymbol{\eta_\ell}(B)$ 两两不同痕（相对于 K）。归纳的基础情形是 $n = 2$：见图 4.2 (a)。与定理 4.1 的证明相同，要证明 $\boldsymbol{\eta_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\eta_k}(B_2)$ 相对于 K 同痕，只需证明对于分裂球面 $\Sigma := \partial N(B_1)$（对应 K），$\boldsymbol{\eta_k}(\Sigma)$ 在 S^4 中相对于 K 同痕。因此，假设 $\boldsymbol{\eta_k}(\Sigma) \approx \Sigma$。我们考虑 S^4 沿 K_2 的三重循环分支覆盖：见图 4.2 (b)（注意，这个分支覆盖仍然是 S^4）。令 ρ 为对应于 $\sim$ $\sim K_2$ 子午线的覆盖变换，令 K_2 为 K_2 的提升，并令 $\widetilde{\eta}$ 和 K_1 分别为图中 η 和 K_1 的一个提升。

令 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}$ 为沿着 η 的提升 $\widetilde{\eta}$、$\rho\widetilde{\eta}$ 和 $\rho^2\widetilde{\eta}$ 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ 所得到的三个微分同胚的复合。于是，$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}$ 是 $\boldsymbol{\eta_k}$ 的一个提升。令 $\widetilde{\Sigma}$ 为 Σ 的那个将 $\widetilde{K_1}$ 与 $\rho\widetilde{K_1} \sqcup \rho^2\widetilde{K_1}$ 分开的提升。若 $\boldsymbol{\eta_k}(\Sigma) \approx \Sigma$ （相对于 K），那么在三重分支循环覆盖中，存在某个 $i \in \{0, 1, 2\}$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}(\widetilde{\Sigma}) \approx \rho^i\widetilde{\Sigma}$（相对于 $\bigsqcup_{i=0}^{2} \rho^i\widetilde{K_1}$）。对于 $i = 0$ 的各个 $\rho^i\widetilde{\Sigma}$，1、2、 $\widetilde{\Sigma}$ 中只有一个能将 $\widetilde{K_1}$ 与 $\rho\widetilde{K_1} \sqcup \rho^2\widetilde{K_1}$ 分开，因此必有 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}(\widetilde{\Sigma}) \approx \widetilde{\Sigma}$（相对于 $\bigsqcup_{i=0}^{2} \rho^i\widetilde{K_1}$）。然而，$\sim$ $\sim$ $\sim$ 我们要证明，$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}(\Sigma)$ 甚至不同痕于 Σ（相对于 $K_1 \sqcup \rho K_1$）。正如定理 4.1 的证明中那样，如果忽略 $\rho^2\widetilde{K_1}$，那么 $\rho\widetilde{\eta}$ 和 $\rho^2\widetilde{\eta}$ 可以在保持 $\widetilde{K_1} \sqcup \rho\widetilde{K_1}$ 不变的同痕下变形为互不相交。因此，若 $\boldsymbol{\beta_k}$ 是由沿着 $\widetilde{\eta}$ 前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ 所给出的 S^4（相对于 $\widetilde{K_1} \sqcup \rho\widetilde{K_1}$）的微分同胚，则有

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Sigma} \approx \boldsymbol{\beta_k}\widetilde{\Sigma} \not\approx \widetilde{\Sigma} \text{ rel. } \widetilde{K_1} \sqcup \rho\widetilde{K_1}$$

根据定理3.5，因此 $\boldsymbol{\eta_k}(\Sigma) \not\approx \Sigma$ 相对于 K。同样的论证表明，这些对 $\boldsymbol{\eta_k}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\eta_k}(B_2)$ 和 $\boldsymbol{\eta_\ell}(B_1) \sqcup \boldsymbol{\eta_\ell}(B_2)$ 也都是非合痕的（相对于 K，当 $k \neq \ell$ 时）。

现在进行归纳步骤；令 $n \geq 3$。考虑如图 4.3 所示的沿着 K_n（它仍然是 S^4）的 S^4 的 m 重（$m \geq 2$）循环分支覆盖。令 ρ 为对应于 K_n 的子午线的甲板变换。于是我们看到，m 将 η 提升为 $\widetilde{\eta}$、$\rho\widetilde{\eta}$、……、$\rho^{m-1}\widetilde{\eta}$。令 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{k}}}$ 为沿着 $\widetilde{\eta}$、$\rho\widetilde{\eta}$、……、$\rho^{m-1}\widetilde{\eta}$ 对 $\boldsymbol{\delta_k}$ 的推前的复合所给出的微分同胚。若 $\boldsymbol{\eta_k}(B) \approx B$（相对于 K），则特别有 $\boldsymbol{\eta_k}(B \setminus B_n) \approx B \setminus B_n$（相对于 K）；因此，在 $\sim$ $\sim$ $\sim$ 分支循环覆盖中，若 B_1、……、B_{n-1} 是 B_1、……、B_{n-1} 的提升，且 ∂B_i 是 K_i 的提升



FI图 4.3。 一个 m重（$m \geq 2$）循环分支覆盖图 4.2 （c）在 K_n

的 K_i ，绘于图 4.3，那么

$$\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}(\widetilde{B}_1) \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{k}}(\widetilde{B}_{n-1}) \approx \widetilde{B}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{B}_{n-1} \text{ rel. } \widetilde{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{K}_{n-1}. \tag{4.1}$$

另一方面，如果我们忽略 K_n 的提升以及除 $\widetilde{K_1}$、$\cdots$、$\widetilde{K_{n-1}}$ 之外的 K_1、$\cdots$、K_{n-1} 的提升，那么可以看到，$\widetilde{\eta}$ 与 $K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_{n-1}$ 的构型，与我们用来构造（$n-1$）分量的 3-球布鲁尼安链环时所使用的 η 与 $K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_{n-1}$ 的构型相同。根据归纳假设，公式 (4.1) 不成立。因此，$\boldsymbol{\eta_k}(B) \not\approx B$ 相对于 K。同样的论证表明，对于 $k \neq \ell$， $\boldsymbol{\eta_k}(B) \not\approx \boldsymbol{\eta_\ell}(B)$ 相对于 K。□

注 4.3。在定理 4.2 关于 $n = 2$ 的证明中，通过仔细追踪定向，可以证明如下结论：考虑 m 重循环分支覆盖，即 S^4 在 $\widetilde{K_2}$ 上、对任意 $m \geq 2$ 的覆盖，令 K_1 为 K_1 的一个提升，并令 B_1 与 B_1^η 分别为 B_1 与 $\boldsymbol{\eta_k}(B_1)$、$\widetilde{K_1}$ 的提升，使其边界为 K_1。则 B_1 与 B_1^η 相对于 ∂ 不同痕。该计算类似于我们对定理 3.5 的证明：在 $S^4 \setminus N(\widetilde{K_1}) \cong S^1 \times B^3$ 中，我们有 $\widetilde{B_1^\eta} = \boldsymbol{\delta'_k}^{-1} \circ \boldsymbol{\delta_k}(\widetilde{B_1})$。

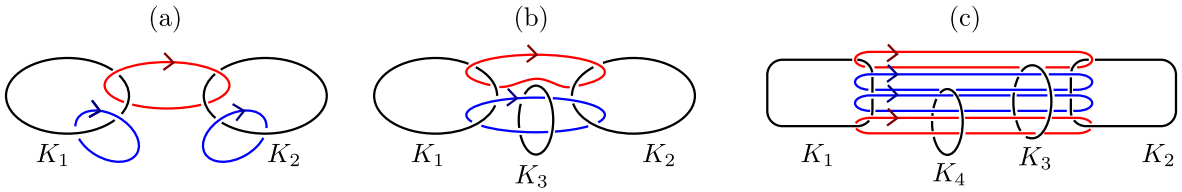


图 4.4. 沿红色圆前推 $\boldsymbol{\delta_k}$ ，并沿蓝色圆前推 $\boldsymbol{\delta_k}^{-1}$ ，可在 S^4 中得到 3-球的布鲁尼安链环。

注 4.4。 注意，我们本可以构造 n分支布伦尼安三球链环，以2分支链环（定理4.1 ）直接作为基例，并推广图4.4(b) 与 (c) 中所绘的构造。我们发现定理4.2（受 Bing 加倍启发）的构造更便于阐述，并将另一种证明留给感兴趣的读者。（为证明三维球链环是非合痕的，对 n 作归纳，并考虑S^4 沿 K_n的二重分支覆盖。）

参考文献

[BG21] Ryan Budney 和 David Gabai，四维球面中的打结三球 S^4，arXiv 预印本 arXiv:1912.09029v3 (2021)。[Har24] Daniel Hartman，*5*-球中的解结三球，《美国数学会会刊》**152**(2024)，第 3 期，1333–1336。MR 4693687[Niu26] Weizhe Niu，四维球面中二分拆的布伦尼安张成三圆盘，arXiv 预印本 arXiv:2603.05063 (2026)。[Pow25] Mark Powell，四维球面中的张成三圆盘推入五维圆盘，arXiv 预印本 arXiv:2512.05952 (2025)。[Tat25] Alison Tatsuoka，无链接的 S^2的分裂球面 S^4，arXiv 预印本 arXiv:2502.01817 (2025)。

成均馆大学，水原，京畿道，16419 大韩民国电子邮箱地址：
seungwon.kim@skku.edu

数学系 ，普林斯顿大学 ，普林斯顿 ，新泽西州 08544 ，USA
电子邮箱地址：gn4470@math.princeton.edu

普林斯顿大学数学系，普林斯顿，新泽西州 08540，美国电子邮件地址：at8451@princeton.edu