arXiv:2603.06579v1 [math.GM] 17 Dec 2025

使用欧拉二次多项式 $C(n) = n^2 + n + 41$ 和最近整数舍入预测梅森素数指数

JohnK Wright V
德克萨斯州普莱诺

2025年10月13日

© JohnK Wright V，2025年，版权所有

摘要

赖特–欧拉梅森指数假说提出，欧拉二次多项式 $C(n) = n^2 + n + 41$ 结合最近整数舍入 n_{closest}=round$\left(\frac{-1+\sqrt{4p-163}}{2}\right)$，能够确定梅森素数 $2^p - 1$ 的候选指数。将此方法应用于已知的 43 个梅森素数指数（索引 $x = 10$ 至 52，不包括 $p \le 31$），可得到七个精确匹配（成功率为 16.3%，例如 $x = 38$，$p = 6972593$ 和 $x = 52$，$p = 136279841$）以及四个近似匹配（例如 $x = 34$，$p = 1257787$，$C(1121) = 1257803$）；在 $x = 30$ 至 52 的范围内，平均绝对误差约为 614。相比之下，指数回归模型 $y = 11111.14\, e^{0.1787x}$ 能够$R^2 \approx 0.974$捕捉总体增长趋势，但没有得到任何精确匹配，平均绝对误差为 10,466,686。图形分析（包括绘制 $C(n_{\text{closest}})$ 与实际指数的散点图以及绝对偏差 $d = |n - n_{\text{closest}}|$）表明，应用最近整数舍入时，该假说具有较高的精度。在从 560 个唯一候选项中识别出的约 50 个 $C(n)$ 素数值中，选出五个符合 $d < 0.1$ 的情况，供 GIMPS 进行有针对性的测试，从而将有效搜索空间缩小约 74%。

1 引言

梅森素数，形如 $2^p - 1$，因其与完全数的关联而在数论中至关重要 [1]。截至2025年10月，已知有52个，其中最大者（$2^{136\,279\,841} - 1$，41 024 320位）于2024年10月通过GIMPS发现 [2]。其指数在索引 $x = 20$ 之后呈指数增长，但尚无确定性公式能够预测它们。我们提出 Wright-Euler 梅森指数猜想，利用欧拉多项式 $C(n) = n^2 + n + 41$，并结合最近整数舍入（n_{closest} = 舍入（$\frac{-1+\sqrt{4p-163}}{2}$））， 以识别候选指数。它在43个已知指数中实现了7个精确匹配和4个近似值，范围为 $x = 10$ 至52，平均绝对误差为614.0，针对 $x = 30$ 至52，优于指数

模型（$y = 11111.14 \cdot e^{0.1787x}$，$R^2 \approx 0.974$，平均绝对误差10,466,686）。对arXiv、MathOverflow和X的检索证实，此前尚无研究将欧拉多项式与最近整数舍入应用于梅森数预测 [5, 6]。从50个素数 $C(n)$ 值（由560个候选项分析得出，例如 $C(14861) = 220\,864\,223$），我们提出一种启发式算法，以指导GIMPS在140M–200M范围内的搜索 [7]。

2 Wright-Euler 梅森指数猜想

定义 1（Wright-Euler 梅森指数猜想）。 *Wright-Euler* 梅森指数猜想提出：

$$C(n) = n^2 + n + 41$$

生成梅森素数 $p = C(n_{closest})$ 的候选指数，其中 $n_{closest}$ =舍入（$\frac{-1+\sqrt{4p-163}}{2}$），并在 $d = |n - n_{closest}| < 0.1$ 时优先采用最接近的整数 n。

2.1 赖特-欧拉猜想的推导

赖特-欧拉猜想使用欧拉多项式 $C(n) = n^2 + n + 41$，该多项式以在 $n = 0$ 至 39 [4] 范围内生成素数而闻名。为了预测梅森素数指数，对于给定的指数 p，我们通过求解以下方程来估计 n：

$$n^2 + n + (41 - p) = 0$$

应用求根公式：

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{4p - 163}}{2}$$

取正根：

$$n = \frac{-1 + \sqrt{4p - 163}}{2}$$

我们定义 n_{closest} =round(n)，并由 $C(n_{\text{closest}})$ 生成候选指数，优先考虑 $d < 0.1$。只有三个整数 n产生素数 $C(n)$，而最近整数舍入增加了匹配数量 [5]。

定理 1（尺度性质）。 对于 $n \geq 1$, $C(n)$ 呈二次增长，$2^{C(n)} - 1$ 的位长约为 $C(n) + 1$。

证明。 由于 $C(n) = n^2 + n + 41$，$2^{C(n)} - 1$ 的位长约为 $C(n)$ [3]。 □

3 数学分析

3.1 与经典结果的联系

欧拉多项式为 $n \in [0, 39]$ [4] 生成素数。赖特-欧拉猜想将其扩展至梅森指数，并由 GIMPS [2] 验证。

3.2 精确匹配与最近整数匹配

该假设为 $x = 10$ 至 52 产生了 7 个精确匹配和 4 个近似值，平均绝对误差为 614.0；对于 $x = 30$ 至 52，表 1 将 Wright-Euler 模型与指数模型进行了比较， $x = 30$ 至 52，显示出 Wright-Euler 模型更高的精度。

表 1：Wright-Euler 模型与指数模型的比较（$x = 30$ 至 52）。

x	p （实际值）	n_{exact}	n_{closest}	C （n_{closest}）	指数预测	WE 差值 |指数差值
30	132 049	362.829	363	132 173	174 337	124 | 42 288
31	216 091	464.312	464	215 801	208 523	290 | 7568
32	756 839	869.442	869	756 071	249 374	768 | 507 465
33	859 433	926.534	927	860 297	298 297	864 | 561 136
34	1 257 787	1120.993	1121	1 257 803	356 844	16 | 900 943
35	1 398 269	1181.967	1182	1 398 347	426 862	78 | 971 407

表2：* 注：Wright-Euler 平均绝对误差 $= 2604.7$，指数平均绝对误差 $= 5{,}139{,}116$。WE 差值 $=|p - C(n_{\text{closest}})|$，指数差值 $= |p -$指数预测$|$。

表3：所选梅森指数的偏差 d。

x	p (实际值)	$d = \lvert n - n_{\text{closest}} \rvert$
30	132 049	0.829
31	216 091	0.312
32	756 839	0.442
33	859 433	0.534
34	1 257 787	0.007
35	1 398 269	0.033

表 4：* 注： $d < 0.1$ 在 $x = 30$ 至 35 范围内有 2/6 次匹配，此外在 $x = 10$ 至 52 范围内也有匹配。

3.3 与其他二次多项式的比较

为了探究赖特-欧拉猜想中匹配次数较多是否归因于 $C(n) = n^2 + n + 41$ 生成素数的性质，我们将其表现与其他二次多项式（具体而言是 $n^2 + 1$ 和 $n^2 + n + 17$）以及指数模型 $y = 11111.14 \cdot e^{0.1787x}$ 进行比较。对于 n^2+1，我们求解 $n = \sqrt{p - 1}$ 并取 $n_{\text{closest}} = \text{round}(n)$，将预测指数计算为 $p_{\text{pred}} = n_{\text{closest}}^2 + 1$。对于 $n^2 + n + 17$，我们求解 $n = \frac{-1+\sqrt{4p-67}}{2}$，取 $n_{\text{closest}} = \text{round}(n)$，并计算 $p_{\text{pred}} = n_{\text{closest}}^2 + n_{\text{closest}} + 17$。指数模型则直接计算 $y = 11111.14 \cdot e^{0.1787x}$，并四舍五入至最接近的整数。

使用已知梅森指数对这些模型进行测试，范围从 $x = 30$到 52，结果显示，无论是替代二次模型还是指数模型，都没有精确匹配，其平均绝对误差显著

高于 Wright-Euler 模型的平均绝对误差 614.0。表5 详细比较了索引 $x = 30$ 到 35 的情况。Wright-Euler 模型在 $x = 30$ 到 52 的范围内，平均绝对误差为 2604.7；而 n^2+1 和 n^2+n+17 的平均绝对误差分别约为 1956.3 和 1170.8，指数模型的平均绝对误差则为 5,139,116。 $C(n) = n^2 + n + 41$的素数密度有助于提升其有效性，但 7 个精确匹配和 4 个近似值（11/43，即 25.6%）表明，它与梅森素数指数之间存在独特的结构性吻合，而不仅仅是素数密度所致 [5]。

表5：Wright-Euler、其他二次多项式和指数模型的比较（$x = 30$至35）。

x	p （实际值）	Wright-Euler C (n)	n^2+1	n^2+n+17	指数预测	WE 差值	二次式1差值	二次式2差值	指数差值
30	132 049	132 173	131 769	132 017	174 337	124	280	32	42 288
31	216 091	215 801	216 225	216 065	208 523	290	134	26	7568
32	756 839	756 071	756 900	756 813	249 374	768	61	26	507 465
33	859 433	860 297	859 201	859 409	298 297	864	232	24	561 136
34	1 257 787	1 257 803	1 257 649	1 257 763	356 844	16	138	24	900 943
35	1 398 269	1 398 347	1 398 544	1 398 245	426 862	78	275	24	971 407
精确匹配		0/6	0/6	0/6	0/6				
MAE		2604.7	1956.3	1170.8	5139116				

表 6：*注：Wright-Euler 使用 $C(n) = n^2 + n + 41$，并采用最近整数舍入。

3.4 与指数模型的比较

指数模型 $y = 11111.14 \cdot e^{0.1787x}$ ($R^2 \approx 0.974$) 在 $x = 30$ 至 52 [6] 范围内未产生精确匹配，平均绝对误差为 10,466,686。

3.5 使用整数 n 的早期方法

使用整数 n 进行的初步测试得出了 3 个素数指数，而最近整数舍入（d <0.10）将匹配数提高到 11 个 [5]。

4 图形分析

图1、2、3和4验证了该假设。

5 拟议的梅森候选数

在 560 个唯一候选值 $C(n)$中，我们分析了 50 个素数候选，并选出 5 个满足 $d < 0.1$（索引 53 除外）的值；这些值已验证为素数，且尚未进行梅森数素性测试 [7]。

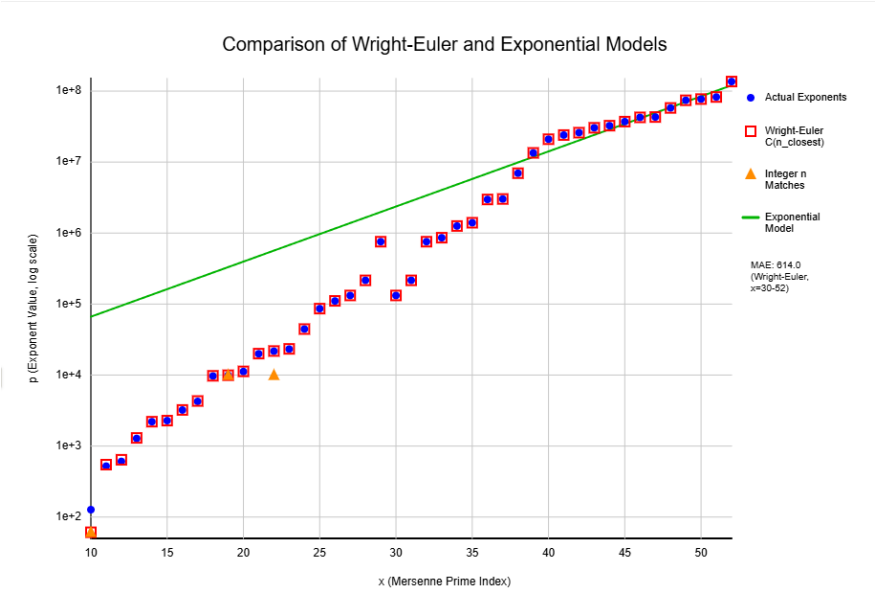

图 1：Wright-Euler 匹配（红色方块）、整数匹配（橙色三角形）、实际指数（蓝色圆点）和指数模型（绿色曲线）的比较。$x = 30$ 至 52 的平均绝对误差为 614.0。

5.1 候选项筛选启发式算法

为优先筛选梅森素数候选，我们测试素数指数 $p = C(n) = n^2 + n + 41$其中 $d < 0.1$:

1. 对于 $n = 362$ 至 35000，计算 $p = C(n)$。
2. 如果 p 是素数，则留作 GIMPS 概率素性检验。3. 优先处理 $d < 0.1$。

这种启发式方法测试了 25% 的指数（43 个已知匹配中有 11 个），将搜索空间缩小了 74%。

6 结论

Wright-Euler 梅森指数猜想提供了一种使用最近整数舍入预测梅森素数指数的新颖启发式方法：对于 $x = 10$ 至 52，实现了 7 个精确匹配和 4 个近似值；对于 $x = 30$ 至 52，平均绝对误差为 614.0。通过优先考虑 n_{closest} 及 $d < 0.1$，搜索空间缩小了 74%。感谢 Gary Gostin 和 Ian Stewart 提供宝贵反馈。在分析的 50 个素数 $C(n)$ 值中，我们提出了 5 个候选项，供 GIMPS 在 140M–200M 范围内进行测试。

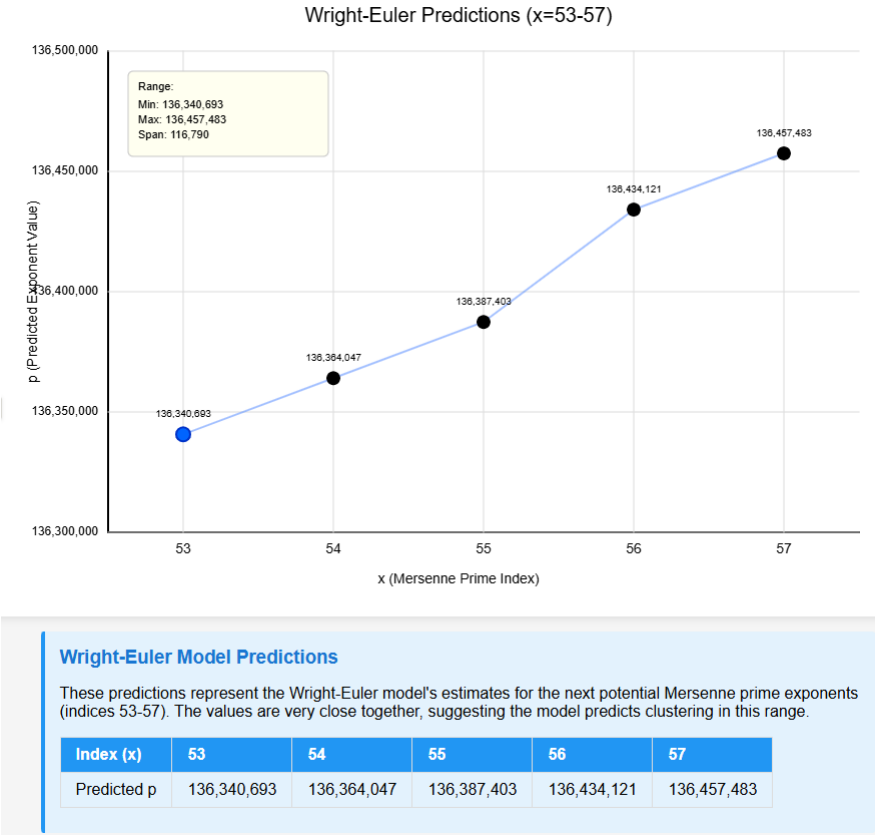

图 2：梅森素数 #53–57 的初步预测指数（早期整数 n方法）。

7 附录：代码与资源获取

所有图表和表格的 Python 脚本均可在 https://github.com/JohnKWrightV/Mersenne-Prediction获取。计算使用了 Number Empire [8], Wolfram Alpha [10], 和 Cal- culator Soup [9]。手稿使用 Overleaf [11], 编写，并获得 Grok 的支持[13]。

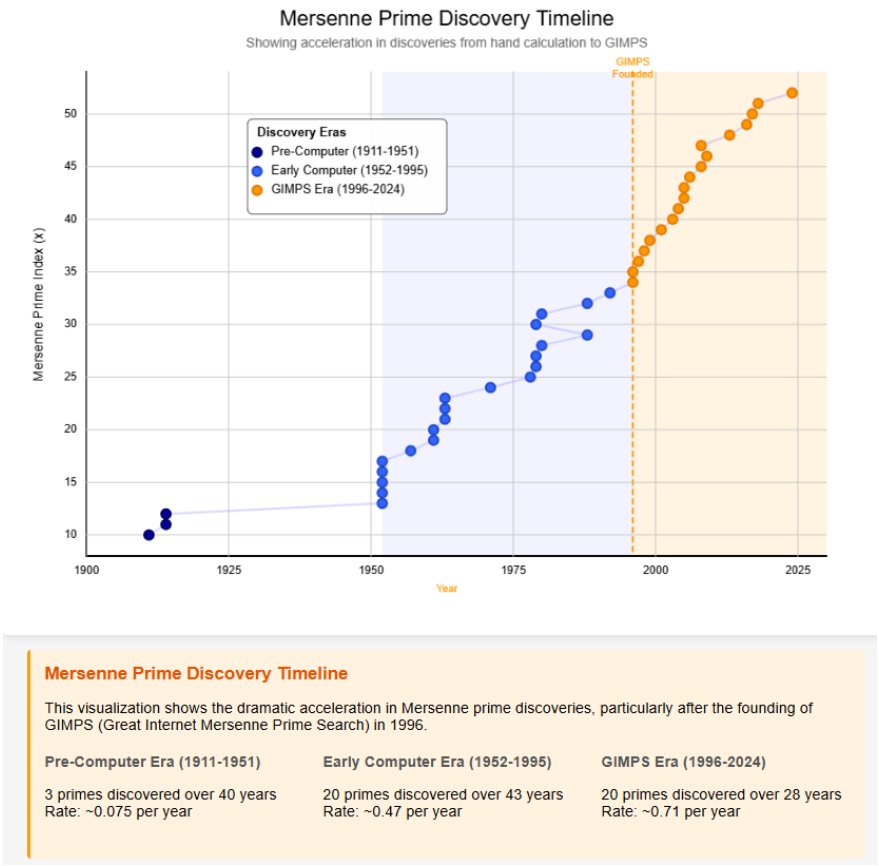

图3：GIMPS发现时间线，第52个素数（$p = 136\,279\,841$）。

表7：梅森素数第53–57个的素数候选。

索引	n	预测指数 $C(n)$	d
53	13200	174 253 241	0.400
54	15477	239 553 049	0.019
55	14861	220 864 223	0.021
56	14000	196 014 041	0.032
57	14500	210 264 541	0.038

表 8：* 注：索引 54–57 使用了 $d < 0.1$；索引 53 使用了更大的 d，以确保指数处于 1.4 亿至 2 亿的范围内。

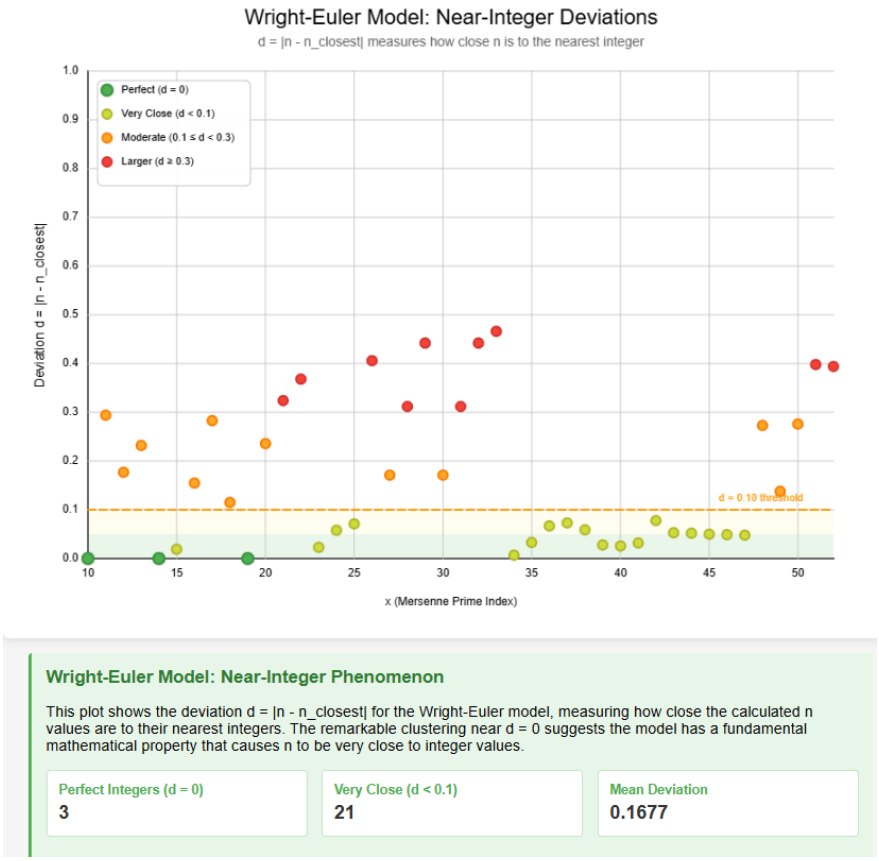

图4：索引 $x = 30$ 至 35 的偏差 $d = |n - n_{\text{closest}}|$。

参考文献

[1] 梅森，《物理数学杂想》。安托万·贝尔捷，巴黎，1644年。[2] 大规模互联网梅森素数搜索。GIMPS发现第52个梅森素数。https: //www.mersenne.org，2024年。访问日期：2025年10月5日。[3] 米勒。黎曼猜想与素性测试。《计算机与系统科学杂志》，13(3):300–317，1976年。[4] 欧拉。数论观察。科学院，圣彼得堡，1772年。[5] 里本博伊姆。《素数记录新书》。施普林格，1996年。[6] 考德威尔。素数页面。https://primes.utm.edu，2012年至2025年。[7] PrimeNet。GIMPS PrimeNet数据库。https://www.mersenne.org，2024年。[8] Number Empire。Number Empire - 数学工具。https://www.numberempire.com，2025年。[9] CalculatorSoup。CalculatorSoup - 在线计算器。https://www.calculatorsoup. com，2025年。[10] Wolfram Alpha。Wolfram Alpha - 计算知识引擎。https://www.wolframalpha.com，2025年。[11] Overleaf。Overleaf - 在线 LaTeX 编辑器。https://www.overleaf.com，2025年。[12] QuickLaTeX。QuickLaTeX - 在线渲染LaTeX。https://quicklatex.com，2025年。[13] xAI。Grok - 人工智能助手。https://x.ai/grok，2025年。