arXiv:2603.06705v1 [math.DS] 5 Mar 2026

构形演化作为非光滑动力系统：流动架构的稳定性与选择

Pascal Stiefenhofer 纽卡斯尔大学，
英国

2026年3月10日

摘要

构形定律指出，随时间持续存在的有限尺寸流动系统会演化其构型，从而使流经其中的流获得逐步更易通达的路径。经典构形理论在有限尺寸约束下，通过静态阻力最小化推导层级流动架构；然而，许多输运系统受不可逆限制支配，这些限制会引发状态切换和不连续调整律。

我们将构形演化表述为一个自治非光滑动力系统。架构配置被建模为定义在紧正向不变可行集上的Filippov微分包含的状态。不可逆输运约束生成切换流形，调整场在这些流形两侧是不连续的。阻力耗散不等式将逐步改善可达性这一构形原理编码为非光滑Lyapunov条件，而一致收缩假设则为依状态而定的动力学的广义雅可比矩阵提供谱界。

在这些条件下，我们证明所得包含具有唯一的平衡架构，且每一条可容许轨迹都以指数速度收敛于该架构。因此，有限尺寸、不可逆性和阻力耗散无需借助静态优化，即可保证持续流动构型的存在性、唯一性和全局稳定性。

作为一项应用，Bejan–Bˇadescu–De Vos的经典面积至点传输层级被纳入这一动力学框架。最优组装比表现为切换流形，而经典标度关系则体现为Filippov包含的滑动不变集。二者的交点确定了唯一选出的全局吸引架构。

关键词。构形定律；非光滑动力系统；Filippov系统；收缩理论；热力学流动架构；混合能源系统。

数学主题分类（2020）。34A60；34C25；37C75；58A10；80A20。

1 引言

构形定律指出，有限尺寸流动系统若要持续存在，就必须演化其构型，以便让流经其中的流逐步更易通达[2, 8, 9]。该定律起源于传热理论 [1] ，后来以专著形式加以系统阐述 [2,3], 。该定律将热力学从能量和熵的经典平衡拓展为一种关于构型演化的理论。它源于对由不可逆流维持在非平衡态的系统的研究；在有限尺寸和材料约束下，空间结构由此确定性地形成。此后，构形推理已应用于物理学、生物学、技术和社会经济组织中的层级流动架构 [8, 11, 10]。

在其经典数学形式中，构形设计通常由受约束的极值原理导出。在有限尺寸约束下，将全局阻力或成本泛函最小化，便会得到层级分支结构作为最优解 [16]。经典冷却网络问题 [1] 展示了树状导热路径如何在有限域内由阻力最小化得出。类似的优化论证还在经济学 [5, 6], 、能源系统 [7], 和宏观经济增长 [12]中产生了几何标度关系。在这些领域中，层级结构作为一种能在全局约束下最优提升可达性的构型而涌现。

尽管构形理论的适用范围广泛，其主流数学框架仍从根本上是静态的。变分公式能够确定固定运行条件下的驻定极小点，却没有定义架构配置的显式演化定律。尤其是，静态最优性并不意味着容许轨迹的存在、可行构型集的正向不变性、对扰动的鲁棒性，或动力学选定架构的唯一性。然而，构形定律中的“随时间持续存在”这一条款本质上具有动力学含义：它预设了有限尺寸域上轨迹的全局存在性，以及选定构型的结构稳定性。因此，纯粹的变分公式仍未解决构形演化的基本动力学性质。

这一限制在由依工况变化的输运定律支配的系统中呈现出结构性特征。许多构形应用涉及不同机制在不同运行范围内占主导地位。微通道冷却网络可能在单相流态与流动沸腾流态之间发生转变，此时传热关系和压降关系都会随含气率变化 [32, 33, 34]。采用相变材料的构形设计会引入潜热激活，并导致有效热响应发生不连续变化 [35, 36]。在更大尺度上，流域组织将输运从弥散状态向渠道化状态的转变理想化 [30]。在此类情形下，当容量限制或阈值被激活时，本构关系会发生改变，而架构调整则通过离散的结构转变推进。

因此，所产生的演化本质上是不光滑的。经典的光滑梯度流或静态变分论证能够描述优化后的终态，却无法表示输运流态中的工况激活、切换结构，也无法表示不可逆动力学的稳定性特征。因此，数学上自洽的构形演化表述必须容纳不连续性，同时保持架构动力学的存在性、不变性和稳定性。

Filippov 微分 微分包含恰好提供了这样一个框架 [18], ，其理论基础是

非光滑分析 [17] 和分段光滑动力系统理论 [19, 20]。微分包含通过凸化允许不连续状态切换，同时确保在适当的正则性条件下存在绝对连续解。在这一表述中，有限尺寸由可行配置集的紧性体现，而时间上的持续性则对应于所得动力系统的正向不变性和正向完备性。

然而，仅有耗散并不能保证选定构形的唯一性。阻力耗散不等式意味着可达性的单调衰减，并经由不变性原理收敛到定常平衡集，但它并不排除该集合内部的多重性。要获得结构选择，还需要一种额外的动力学机制。收缩理论提供了这样一种机制：广义雅可比矩阵上的谱界产生增量指数稳定性，迫使所有容许轨迹彼此收敛 [21]。将收缩论证推广到非光滑系统和Filippov系统，可在状态切换下建立严格的增量稳定性判据 [23, 22, 24, 25]。

本文发展了一种与构形定律的热力学起源相一致的动力学表述。架构演化被建模为定义在紧的、前向不变容许集上的自治 Filippov 微分包含 K。全局阻力泛函 $\mathcal{R}$: $K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 量化可达性，而非光滑耗散不等式则体现构形所要求的逐步更易通达。在通过各区间广义雅可比矩阵的谱界所表述的附加一致收缩条件下，所得动力学具有唯一的全局吸引平衡态构形。

本文的贡献是结构性的，而不仅仅是解释性的。我们证明，在有限尺寸、不可逆机制激活、阻力耗散和一致收缩条件下，构形演化可以表述为一个全局适定的非光滑动力系统，其渐近行为由选定构形的存在性、唯一性和全局指数收敛所刻画。据我们所知，此前没有任何构形定律的表述在非光滑动力学框架内建立了此类全局稳定性性质。

这一观点引出如下解释：

构形演化可以理解为紧架构状态空间上的一种耗散的、可行的非光滑动力流。

在该框架内，经典最优层级表现为不可逆演化律的不变驻点。耗散驱动轨迹趋向定常平衡集，而收缩将该集坍缩为单点集并保证唯一性。因此，层级不仅被解释为阻力的极小点，而且被解释为可容许演化动力学的全局稳定吸引子。

本文的贡献有三点。第一，将构形定律纳入 Filippov 微分包含理论，从而对有限尺寸、状态切换和约束激活给出数学上自洽的表述。第二，确立了充分的耗散条件和收缩条件，以保证选定构形的存在性、唯一性和全局指数稳定性。第三，对 [5, 6]经典的面积—点层级关系进行动力学再诠释：构形比表现为不变滑动流形，其交集定义了唯一选定的平衡构形。

2 构形定律的动力学表述

构形定律指出，随时间持续存在的有限尺寸流动系统必须演化其构型，以便使流经其中的流逐步更易通达 [2, 8, 9]。这一论述本质上具有动力学特征：它将有限尺寸、不可逆流动和时间上的持续性，与流动架构的渐进式结构重构联系起来。为将这一定性原理转化为数学上精确的形式，我们需要一种能够表述三项结构特征的框架：(i) 架构演化发生在不可逆耗散作用下；(ii) 可行构型受有限资源和几何约束限制；(iii) 工况激活和约束生效可能引发不连续的调整律。这些性质自然引出一种自治的非光滑动力学表述。

2.1 架构动力学

架构配置由一个状态向量表示

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

其各分量描述输运架构的宏观结构特征（例如通道容量、电导或几何分配）。可行构型受限于一个紧集

$$K \subset \mathbb{R}^n,$$

该紧集反映了物理系统有限规模的资源约束。

A架构演化由自治微分包含建模

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \qquad x(0) \in K, \tag{1}$$

其中

$$F : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$$

是一个集值映射，用于描述可行的架构调整速度。

为表示依工况变化的输运定律和约束激活，我们采用自治 Filippov 微分包含 [18, 17, 19, 20] 的框架。该公式允许调整场不连续，同时保持所得动力学的适定性。

假设 2.1 (Filippov正则性)。 集值映射 F 具有非空、紧且凸的值，在 K 上上半连续，且局部有界。

在假设2.1下，包含式（1）对每个初始条件 $x(0) \in K$ [18, 第 2] 章均存在绝对连续解。

2.2 持久性与可行性

构形定律要求流动系统能够持续存在。数学上，持续性对应于可行配置集的正向不变性。令 $T_K(x)$ 表示 K 的 contingent 切锥。

假设 2.2 （可行性）。 对于每个 $x \in K$,

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset. \tag{2}$$

假设2.2 确保可容许速度始终与可行构形集相切。根据 Nagumo 可行性定理，假设 2.1 和 2.2 蕴含正向不变性：

$$x(0) \in K \;\Rightarrow\; x(t) \in K \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{3}$$

由于 K 是紧的，且 F 局部有界，解不会在有限时间内逃逸，因此是正向完备的。因此，持续性在数学上由正向不变性与轨迹的全局存在性共同刻画。

2.3 构形耗散

构形定律的核心条款“逐步提高可达性”通过阻力泛函来表示

$$\mathcal{R} : K \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

该泛函量化了输运架构的整体阻抗。构形演化要求可行的架构调整随时间降低这一阻力。

假设 **2.3** （构形耗散）. 存在 $\alpha > 0$ 以及一个连续函数 n

$$\Psi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

使得

$$\sup_{v \in F(x)} \mathcal{R}^{\circ}(x; v) \leq -\alpha\, \Psi(x), \qquad x \in K. \tag{4}$$

这里 $\mathcal{R}^{\circ}(x; v)$表示 $\mathcal{R}$的Clarke 广义方向导数。
对于任意解 $x(\cdot)$的(1)，Clarke 链式法则表明，对几乎每一个 $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq \sup_{v \in F(x(t))} \mathcal{R}^{\circ}(x(t); v). \tag{5}$$

结合(5)与(4)可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq -\alpha \Psi(x(t)), \tag{6}$$

因此，阻力泛函沿所有可容许的架构轨迹均为非增，并且每当 $\Psi(x) > 0$时严格递减。因此，(4)为构形原理提供了一种非光滑的李雅普诺夫表述，体现了可达性的逐步改善。

2.4 诠释

当调整律为分段光滑时， F 可解释为不连续向量场的自治 Filippov正则化。凸化保持了解的存在性，并允许沿切换流形发生滑动运动，代表在约束性约束下的持续运行。因此，紧前向不变集 K上的自治微分包含式(1)为构形定律提供了一种动力学实现：

有限尺寸 $\Longleftrightarrow$紧致架构状态空间 K，时间上的持续性 $\Longleftrightarrow$正向不变性（3），可达性 $\Longleftrightarrow$阻力泛函 $\mathcal{R}$，逐步更易通达 $\Longleftrightarrow$ 耗散不等式（4），工况激活 $\Longleftrightarrow$ 菲利波夫非光滑动力学。

在第2 节中，我们将证明，在附加的一致收缩条件下，包含关系（1）存在唯一的全局吸引平衡态

$$x^* \in K, \qquad 0 \in F(x^*), \tag{7}$$

且每条可容许轨迹都以指数速度收敛至 x^*。平衡态（60）代表动力学所选定的构形架构。

2.5 架构状态空间与守恒流

Let

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto x(t), \tag{8}$$

表示架构状态。向量 $x(t)$ 参数化了输运守恒流所经由的宏观构型。典型分量包括有效传导率、横截面积、通道密度、领地配置或输运能力。因此，这些变量编码的是与几何形态和材料配置相关的结构自由度，而非瞬时通量本身。

时间尺度分离。构形演化涉及两个耦合过程，它们在不同的时间尺度上运行。在给定架构中，输运流量会迅速达到平衡，而架构本身则通过结构调整缓慢演化。因此，我们设定时间尺度分离，使输运变量针对架构状态的每种固定构型都弛豫至准稳态。对于每种构型

$$x \in K \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

快速输运变量满足一条守恒定律，用于描述质量、能量或其他守恒量在网络中的流动。为保持一般性，快速输运物理学被抽象地表示为定义在自反巴拿赫空间 V 上的参数依赖型边值问题。

假设 2.4（快速输运适定性）。存在一个非空紧集$K \subset \mathbb{R}^n$，使得对每个 $x \in K$:

(i) th e 快速输运问题存在唯一的准稳态解 $u(x) \in V$;

(ii) $u(x)$ 产生有限的全局阻力

$$R(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}; \tag{10}$$

(iii) 映射 $R : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是局部利普希茨的。

泛函 $R(x)$ 衡量输运架构的有效阻抗。数值越低，表示构型越有利于输运流的可达性。在构造论框架中，R 因此充当全局可达性泛函，用于量化流动架构的效率。假设 2.4将耦合输运–架构系统约化为慢速架构变量的自治动力学（16）。R 的局部利普希茨连续性确保 Clarke广义梯度 $\partial_C R(x)$ 及广义方向导数的存在

$$R^\circ(x; v) = \max_{\zeta \in \partial_C R(x)} \langle \zeta, v \rangle, \qquad x \in K,\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

量 (11) 表示在方向 v上施加构型扰动时全局阻力的最大瞬时增长率。

有限可行架构。架构配置受材料可得性、几何可行性和容量界的限制。

假设 2.5（有限可行架构）。可行配置集 $K \subset \mathbb{R}^n$非空且紧。

假设中的紧性 2.5 形式化了物理系统的有限尺寸特征，并确保架构轨迹保持有界。

架构演化。
架构演化由自治微分包含建模:

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{12}$$

其中 $F: \ K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 由依状态调整律的 Filippov 正则化得到（第 2节）。这些调整律描述架构对输运失衡或约束激活的结构响应。关于 F 的正则性假设见假设 2.1。通过 Nagumo 可生存性条件（假设 2.2）施加 K 的正向不变性，该条件保证了方程（12）的解全局存在。在假设2.4的时间尺度分离条件下，时间上的持续性和构形耗散（假设 2.10）因此完全由紧致可行集 K上的自治包含（12）决定。构形架构的相应动力学选择机制将在第2节中阐述。

2.6 不可逆性与架构持续性

构形定律适用于能够持续存在的流动系统。在动力学表述中，持续性意味着可行的架构配置在整个演化过程中始终具有物理可实现性，并且调整动力学在所有未来时刻均存在。从数学上说，持续性通过架构动力学的两项性质来表达：可行配置集的正向不变性，以及演化定律的正向完备性。

性质 2.6 (正向不变性**)。** 若 $x(0) \in K$，则（12）的每个绝对连续解都满足

$$x(t) \in K \quad \text{for all } t \geq 0.$$

性质 2.7 (正向完备性**)。** 对于每个初始条件 $x(0) \in K$，（12）的每个极大解都定义在 $[0, \infty)$。

性质 2.6 和 2.7 共同为构造法条款“随时间持续”提供了精确的数学含义。

不可逆约束与可行架构。

有限输运系统在由物质守恒、几何可行性、容量限制和技术界限所产生的不可逆单边约束下运行。这些限制决定了可容许架构集

$$K \subset \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

在假设 2.5 中引入。位于 K 之外的构型违反物理或资源约束，因此不被容许。

架构演化由自治 Filippov 微分包含支配

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{14}$$

其中 $F: K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 是依状态调整律的 Filippov 扩张，并满足假设 2.1中的正则性条件。在这些条件下，包含式（14）存在定义于极大区间 $[0, T_{\max})$ [18,第 2] 章。

可行性与约束相容性。为确保架构轨迹始终处于容许集 K 内，我们对向量场与 K 的边界施加几何相容条件。令 $T_K(x)$ 表示 K 的 contingent 切锥。Nagumo 可生存性条件要求

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \qquad \text{for all } x \in K. \tag{15}$$

条件（15）确保在每个容许构型处，至少存在一个指向 K内部的可行速度。在假设 2.1下，Nagumo 定理推出 K具有正向不变性，由此确立性质 2.6。

架构演化的全局存在性。由于容许集 K 是紧的，且速度集 $F(x)$是局部有界的，架构速度保持一致

有界于 K。因此，微分包含的标准延拓论证排除了解的有限时间爆破，从而 $T_{\max} = +\infty$。这确立了性质2.7。因此，对每一个初始架构 $x(0) \in K$，至少存在一条绝对连续轨迹

$$x : [0, \infty) \to K$$

满足（14）。

不可逆性通过切锥约束（15）以几何方式编码，该约束限制可行的架构速度而不终止演化。因此，时间上的持续性恰好对应于轨迹的全局存在性，以及紧致可容许构型集合 K 内的正向不变性。

2.7 构造访问泛函

构形定律断言，持续流动系统的演化旨在使流经其中的流逐步更易通达。在输运理论中，可达性由有效电阻、总耗散或熵产生等全局阻抗度量加以量化。我们在自治架构框架内对这一概念加以形式化。

Let

$$x \in K \subset \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

其中可容许架构集 K 非空且紧（假设2.5）。对于每个固定构型 $x \in K$，快速输运变量

$$u(x) \in V \tag{17}$$

求解一个准稳态边值问题

$$\mathcal{A}(x)u = f, \tag{18}$$

定义在希尔伯特空间 V 上。

假设 2.8（一致快速输运适定性）。对于每个 $x \in K$：

(i) $\mathcal{A}(x)$ 在 V 上有界且一致强制；

(ii) 问题（18）存在唯一弱解 $u(x) \in V$；

(iii) 解映射 $x \mapsto u(x)$ 在 K 上局部利普希茨。

假设2.8 确保快速输运子系统针对每种架构配置均存在唯一的准稳态响应。

Let

$$\Phi : V \times K \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{19}$$

表示衡量传输阻抗的全局能量代价泛函（例如总耗散或有效电阻）。

假设 2.9（可达性泛函的正则性）。映射 Φ 关于两个自变量均为局部利普希茨连续，且有下界。

构造访问泛函（全局阻力）定义为

$$\mathcal{R}(x) := \Phi\big(u(x), x\big), \qquad x \in K. \tag{20}$$

阻力泛函的正则性。在假设2.8 和2.9下，映射

$$\mathcal{R} : K \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{21}$$

在 K 上局部利普希茨。由于 K 是紧集， $\mathcal{R}$ 有下界，因此在 K 上可取得最小值。由于 $\mathcal{R}$ 局部利普希茨，它存在 Clarke广义梯度 $\partial_C \mathcal{R}(x)$ 和广义方向导数

$$\mathcal{R}^\circ(x; v) = \max_{\zeta \in \partial_C \mathcal{R}(x)} \langle \zeta, v \rangle, \qquad x \in K,\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

量（22）表示沿方向 v 发生构型扰动时阻力瞬时增长率的最大值。因此,

$$\mathcal{R}^\circ(x; v) \leq 0 \tag{23}$$

表示全局阻力非增。

将这一性质与动力系统（1）结合起来，即可得到构形演化的 Lyapunov型描述。

2.7.1 构形耗散不等式

构形定律要求架构演化为输运流提供逐步更易通达的路径。在非光滑动力学框架中，这一原则被表述为 Filippov包含式（1）的 Lyapunov型耗散条件。

假设 2。 10 （构形耗散）。存在 $\alpha > 0$ 和一个连续函数

$$\Psi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

使得

$$\sup_{v \in F(x)} \mathcal{R}^\circ(x; v) \leq -\alpha\, \Psi(x), \qquad x \in K. \tag{24}$$

定义定常平衡集

$$\mathcal{E} := \{x \in K : \Psi(x) = 0\}. \tag{25}$$

单调阻力衰减。令 $x(\cdot)$ 为方程 (1) 的任意绝对连续解。Clarke 链式法则意味着，对几乎处处的 $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq \sup_{v \in F(x(t))} \mathcal{R}^\circ(x(t); v). \tag{26}$$

将 (26) 与 (24) 结合可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq -\alpha\, \Psi(x(t)) \qquad \text{for a.e. } t \geq 0. \tag{27}$$

因此 $\mathcal{R}(x(t))$ 沿所有可容许的架构轨迹非增，且每当 $\Psi(x(t)) > 0$ 时严格递减。由于 $\mathcal{R}$ 在紧集 K 上有下界，对（27）积分可得

$$\int_0^\infty \Psi(x(s))\, ds < \infty. \tag{28}$$

渐近平衡。关于微分包含的标准LaSalle型不变性原理 [17]表明，每一轨迹的 ω-极限集非空、紧、弱不变，并且满足

$$\omega(x_0) \subseteq \mathcal{E}. \tag{29}$$

因此，架构演化会单调降低全局阻力，并渐近趋近于定常平衡集 $\mathcal{E}$。因此，条款“逐步更易通达”通过耗散不等式（24）得到了严格实现。

2.7.2 耗散的结构充分性

构形耗散不等式（24）并非 任意强加的。它自然源自凸可行架构集上的投影次梯度动力学。以下结果给出了一个结构条件，在该条件下，假设 2.10 自动成立。

命题2.11 （投影次梯度充分性）。令 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为非空闭凸集，且 $\mathcal{R}\colon\ K \to \mathbb{R}$ 为局部利普希茨函数。定义集值映射

$$F(x) := \Pi_{T_K(x)}\big(-\partial_C \mathcal{R}(x)\big), \qquad x \in K, \tag{30}$$

其中， T_K（x）表示 K 的*Bouligand*切锥，而 $\Pi_{T_K\ (x)}$ 表示到该集合上的欧几里得投影。

定义残差函数

$$\Psi(x) := \operatorname{dist}^2\big(0,\, \partial_C \mathcal{R}(x) + N_K(x)\big), \tag{31}$$

其中 $N_K(x)$ 表示 K 的 *Clarke*法锥。

于是，耗散不等式

$$\sup_{v \in F(x)} \mathcal{R}^\circ(x; v) \le -\Psi(x) \qquad \textit{for all } x \in K \tag{32}$$

成立。因此，假设 *2.10* 在 $\alpha = 1.$ 条件下得到满足。

证明。 固定 $x \in K$。由于 K 是闭凸的， $T_K(x)$ 是一个闭凸锥，其极锥为

$$N_K(x) = T_K(x)^\circ.$$

令 $\zeta \in \partial_C \mathcal{R}(x)$，并定义

$$v := \Pi_{T_K(x)}(-\zeta).$$

由于 $T_K(x)$ 是闭凸的，欧几里得投影有唯一解。根据凸锥的 Moreau分解定理，存在唯一的 $\eta \in N_K(x)$，使得

$$-\zeta = v + \eta, \qquad \langle v, \eta \rangle = 0. \tag{33}$$

重新整理可得

$$v = -\zeta - \eta, \qquad \zeta + \eta = -v.$$

由于 $\zeta \in \partial_C \mathcal{R}(x)$ 和 $\eta \in N_K(x)$，我们得到

$$\zeta + \eta \in \partial_C \mathcal{R}(x) + N_K(x).$$

此外，根据式（33）的正交性，

$$\|\zeta+\eta\|^2=\|v\|^2. \tag{34}$$

现在计算Clarke方向导数。由于 $\mathcal{R}^\circ(x;\cdot)$是凸且正齐次的，对于任意 $v\in F(x)$，存在 $\zeta\in\partial_C\mathcal{R}(x)$，使得

$$\mathcal{R}^\circ(x;v)=\max_{\xi\in\partial_C\mathcal{R}(x)}\langle\xi,v\rangle\le\langle\zeta,v\rangle.$$

利用 $v=-\zeta-\eta$ 可得

$$\langle\zeta,v\rangle=-\|\zeta\|^2-\langle\zeta,\eta\rangle.$$

对33取内积 η 得

$$0=\langle v,\eta\rangle=\langle-\zeta-\eta,\eta\rangle=-\langle\zeta,\eta\rangle-\|\eta\|^2.$$

因此

$$\langle\zeta,\eta\rangle=-\|\eta\|^2.$$

代入可得

$$\langle\zeta,v\rangle=-\|\zeta\|^2+\|\eta\|^2=-\|\zeta+\eta\|^2.$$

利用（34）得

$$\mathcal{R}^\circ(x;v)\le-\|v\|^2. \tag{35}$$

根据 $\Psi(x)$ 在（31）中的定义，

$$\|v\|^2=\operatorname{dist}^2\big(0,\,\partial_C\mathcal{R}(x)+N_K(x)\big)=\Psi(x).$$

将其与（35）结合可得

$$\mathcal{R}^\circ(x;v)\le-\Psi(x).$$

对 $v\in F(x)$ 取上确界，得到（32）。 □

2.8 阻力驱动动力学下的增量收缩

构形耗散意味着，阻力泛函 $\mathcal{R}$ 沿每条可容许轨迹单调不增，并且所有 ω-极限点都属于平衡集 $\mathcal{E}$，其定义见（25）。因此，耗散为构形演化提供了热力学方向。但它本身并不能确保极限结构的唯一性，因为 $\mathcal{E}$ 可能包含多个构型。为实现结构选择，我们需要一种增量稳定机制，迫使可容许轨迹彼此收敛（收缩）。我们研究如下自治 Filippov 包含

$$\dot{x}\in F(x),\qquad x(0)\in K, \tag{36}$$

其中 F 是第2节中引入的依赖状态的向量场的Filippov正则化。根据假设2.1 和2.2，每个解都对所有 $t\ge0$ 有定义，并且始终位于紧前向不变集 K中。

切换下的广义线性化

对于 $x \notin \Sigma$，经典雅可比矩阵为

$$J(x) = \nabla f(x). \tag{37}$$

在切换点处，适当的线性化是Clarke广义雅可比

$$\partial_C f(x) = \mathrm{co}\Big\{ \lim_{k\to\infty} \nabla f(x_k) : \ x_k \to x, \ x_k \notin \Sigma \Big\}, \tag{38}$$

它是非空、紧且凸的。我们将所得的可容许线性化集合记为

$$\mathcal{A}(x) := \partial_C f(x). \tag{39}$$

阻力驱动调整

假设 2.12（阻力驱动的架构调整）. 存在一个局部Lipschitz迁移率矩阵 $M : K \to \mathbb{R}^{n\times n}$，它是对称且一致正定的，即

$$M(x) = M(x)^\top \succeq mI \qquad \text{for some } m > 0 \text{ and all } x \in K. \tag{40}$$

此外，在每个光滑区域Ω_j 中，调整场具有阻力驱动形式

$$f_j(x) = -M(x)\nabla\mathcal{R}(x), \qquad x \in \Omega_j, \tag{41}$$

并且，对于所有 $x \in K$，菲利波夫映射满足：

$$F(x) \subseteq -M(x)\,\partial_C\mathcal{R}(x) + T_K(x), \tag{42}$$

其中， $T_K(x)$ 表示 K 的 contingent 切锥。

假设 2.12 体现了这样一项原则：在满足可行性约束的前提下，结构沿着阻力减小的方向调整。

阻力景观的曲率

假设 2.13（阻力的一致曲率）。 阻力泛函 $\mathcal{R}$在 K 的一个开邻域内是 C^2 的，并满足一致强凸性界

$$\nabla^2\mathcal{R}(x) \succeq \lambda I, \qquad \forall x \in K, \tag{43}$$

对于某个 $\lambda > 0$。

条件（43）表明，阻力至少以二次方式惩罚架构偏差，其作用域为 K。

常数迁移率下的传输诱导的收缩

We首先处理最干净的情形，由此得到显式收缩率。

命题 2.14（电阻降低诱导的收缩：常数迁移率）。 假设假设条件 *2.12* 和 *2.13* 成立，并假设 $M(\cdot) \equiv M$ 在 K上为常数。则在每个光滑区域Ω_j内，动力学

$$\dot{x} = f_j(x) = -M\nabla\mathcal{R}(x) \tag{44}$$

是一致 *co* 在 K 上关于欧几里得范数收缩。更确切地说，对于所有 $x \in K \setminus \Sigma$,

$$\mu\big(J(x)\big) \le -m\lambda, \tag{45}$$

其中 $\mu(\cdot)$ 表示欧几里得矩阵测度

$$\mu(A) := \lambda_{\max}\left(\frac{A + A^\top}{2}\right), \tag{46}$$

且系统以速率

$$\nu := m\lambda. \tag{47}$$

证明。 固定一个区间 Ω_j 并令 $x \in \Omega_j$。由于 M 是常数，且 $\mathcal{R} \in C^2$ 在 K附近，(44) 的雅可比矩阵为

$$J(x) = -M\nabla^2\mathcal{R}(x).$$

由于 $M = M^\top \succeq mI$ 和 $\nabla^2\mathcal{R}(x) \succeq \lambda I$，其对称部分满足

$$\frac{J(x) + J(x)^\top}{2} = -\frac{M\nabla^2\mathcal{R}(x) + \nabla^2\mathcal{R}(x)\,M}{2} \preceq -m\lambda I.$$

取 $\lambda_{\max}$ 可得

$$\mu\big(J(x)\big) = \lambda_{\max}\left(\frac{J(x) + J(x)^\top}{2}\right) \le -m\lambda,$$

这就是 (45)。定义 $\nu :\, = m\lambda$ 可得 (47)。 □

备注 2.15（通过 Filippov 凸化跨越切换的延拓）。 估计式 (45) 对每个区间均成立。由于矩阵测度 $\mu(\cdot)$ 在 (46) 中定义且为凸,

$$\mu\big(\operatorname{co}\{A_1, \dots, A_q\}\big) \le \max_{i=1,\dots,q} \mu(A_i),$$

同一上界也适用于广义雅可比矩阵 $\mathcal{A}(x) = \partial_C f(x)$ 在 (39) 中定义的每个矩阵。因此，收缩率 ν 在切换流形上经 Filippov 凸化后仍保持不变，包括沿滑动运动的情形。

构形理论解释

命题 2.14揭示了收缩是阻力驱动动力学的一种结构性结果：（假设2.13）的一致曲率与正迁移率（假设 2.12）共同带来具有显式速率 ν （见47）的增量指数稳定性。结合构形耗散（24）——它将 ω-极限点限制在平衡集 $\mathcal{E}$（见25）中——收缩为实现结构选择提供了所需的动力学机制。

可变迁移率。 如果 M 随 x变化，则仍可在控制度量变化的附加界条件下建立一致收缩（例如通过状态依赖度量 $W(x) = M(x)^{-1}$）。这一情形在第 2 节中依据度量正则性假设（假设 2.16）进行处理。

物理适用范围。命题 2.14 中的结构假设自然适用于一大类输运系统。在电网络中，有效电阻是关于电导变量的凸狄利克雷能量；在热传导网络（傅里叶定律）、水力网络（达西–魏斯巴赫公式）以及由线性不可逆热力学导出的扩散系统中，也存在类似的凸耗散泛函。在这类系统中，结构参数以单调方式影响输运定律，因此，偏离平衡构型的扰动会增大 $\mathcal{R}$，并导出曲率界（43）。这为上述构形选择动力学机制提供了物理基础。

2.9 全局增量稳定性

现在，我们将第 2.8 节中确立的微分收缩性质推广为架构动力学的全局稳定性结果。微分收缩保证无穷小扰动衰减，而增量稳定性则确保任意两条可容许的架构轨迹彼此趋近。这一性质提供了动力学机制，使构形演化能够选择出唯一架构。

假设 2.16（度量正则性）。 存在一个局部利普希茨矩阵值函数

$$W : K \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

该函数在 K 上一致正定，即

$$\underline{\lambda} I \preceq W(x) \preceq \overline{\lambda} I, \qquad x \in K, \tag{48}$$

对于常数 $0 < \underline{\lambda} \le \overline{\lambda}$。

此外， W 沿 Filippov 包含式（64）的可容许速度具有 Clarke方向导数，且映射

$$(x, v) \mapsto W^{\circ}(x; v)$$

在 $K \times F(K)$ 上有界。

在第 2.8 节的阻力驱动动力学下，命题 2.14 给出了微分收缩界

$$\mu(J(x)) \le -\nu, \qquad x \in K, \tag{49}$$

以收缩率

$$\nu = m\lambda > 0 \tag{50}$$

由迁移率下界和阻力泛函的曲率决定。

定理 2.17 (全局增量指数稳定性)。 假设条件 *2.16* 和 *2.13*成立。设 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 是自治 *Filippov* 包含式 (64) 的任意两个绝对连续解，且满足 $x_1(0)\ x_2(0) \in K$。那么存在常数 $C \geq 1$ 使得

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq Ce^{-\nu t}\|x_1(0) - x_2(0)\|, \qquad t \geq 0, \tag{51}$$

其中 ν 定义于(50)。

证明。 根据假设 2.2， K 的正向不变性确保 $x_i(t) \in K$ 对所有 $t \geq 0$均成立。

定义位移

$$\delta(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

以及微分能量

$$V(t) = \delta(t)^\top W(x_1(t))\,\delta(t). \tag{52}$$

度量的一致正定性（48）意味着范数等价性

$$\underline{\lambda}\|\delta(t)\|^2 \leq V(t) \leq \overline{\lambda}\|\delta(t)\|^2. \tag{53}$$

沿着 Filippov 包含（64），利用 Clarke 链式法则处理局部利普希茨函数，对于几乎处处的 t，存在 $v_1(t) \in F(x_1(t))$ 以及矩阵 $A \in \mathcal{A}(x_1(t))$，使得

$$D^+V(t) \leq \delta^\top \Big(W(x_1(t))A + A^\top W(x_1(t)) + \dot{W}(x_1(t); v_1(t))\Big)\delta. \tag{54}$$

根据假设 2.16，度量变化项 $W(x;\ v)$ 在 $K \times F(K)$ 上有界。将此界与收缩不等式（49）结合可得

$$D^+V(t) \leq -2\nu V(t) \quad \text{for a.e. } t \geq 0. \tag{55}$$

应用 Gr¨onwall 不等式可得

$$V(t) \leq V(0)e^{-2\nu t}. \tag{56}$$

利用范数等价性（53）可得

$$\|\delta(t)\| \leq \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}}}\, e^{-\nu t}\|\delta(0)\|.$$

定义

$$C = \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}}}$$

可得（51）。 □

定理 2.17表明，自治 Constructal 动力学在 K 上是增量指数稳定的：任意两条可容许的架构轨迹以速率 ν 相互收敛。因此，所有 ω-极限集重合。结合电阻耗散原理（24），该原理将极限点限制于平衡集（25），增量收缩消除了 $\mathcal{E}$ 内的多重性。因此，架构动力学选择一个唯一的全局吸引 *Constructal* 构型。

2.10 构形选择定理

我们现在将前几节中建立的结构要素结合起来，以得到核心的动力学选择结果。持续性确保架构轨迹保持在有限可行构形空间内。构形耗散驱动系统趋向更低的阻力。一致增量收缩使所有容许轨迹相互靠拢。这些机制共同意味着，阻力驱动的输运系统会选择一个唯一的稳定架构。

定理 2.18 （构造架构选择原理）。 考虑自治 *Filippov* 包含

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \qquad x(0) \in K, \tag{57}$$

描述 $ibin$在紧的可行配置集 K 上的架构演化。

假设满足以下条件：

（*i*） 持续性。假设*2.1* 和*2.2* 成立，因此集合 K 是正向不变的，且（64）的解正向完备。

(ii) 构形耗散。 假设 *2.10*对阻力泛函成立 $\mathcal{R}$，即

$$\sup_{v \in F(x)} \mathcal{R}^{\circ}(x; v) \leq -\alpha \Psi(x), \qquad x \in K. \tag{58}$$

(iii) 增 量收缩。 收缩条件 (49) 以速率成立

$$\nu > 0. \tag{59}$$

则以下陈述成立。

(a) 平衡态的存在性与唯一性。 存在唯一的构型$x^* \in K$ ， 使得

$$0 \in F(x^*). \tag{60}$$

(b) 全局指数收敛。 每个解 (64)满足

$$\|x(t) - x^*\| \leq Ce^{-\nu t}\|x(0) - x^*\|, \qquad t \geq 0, \tag{61}$$

其中常数

$$C = \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \tag{62}$$

仅取决于度量界(48)。

(c) 构造平衡。平衡态满足

$$x^* \in \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E} := \{x \in K : \Psi(x) = 0\}, \tag{63}$$

它与 (25) 中定义的定常平衡集一致。

构型 x^* 称为构形架构。

证明。 **步骤 1：极限点的存在性**。

由于 K 是紧且正向不变的，(64) 的每条轨迹都保持在 K 中。因此，每个解都存在一个非空紧的 ω-极限集。

步骤 2：轨迹的收敛。

根据定理 2.17，任意两个解都满足增量估计（51）。因此，所有轨迹彼此趋近。由此可知，每条轨迹的 ω-极限集必为单点集。将该点记为 x^*。于是

$$x(t) \to x^* \qquad \text{as } t \to \infty.$$

步骤 3：平衡性质。

对于自治微分包含，解的极限点是弱不变的。因此，单点极限集满足

$$0 \in F(x^*),$$

因此 x^* 是Filippov包含的平衡态。

步骤4：唯一性。

如果 y^* 是另一个平衡态，考虑常值解 $x(t) \equiv x^*$ 和 $y(t) \equiv y^*$。应用收缩估计(51)可得

$$\|x^* - y^*\| \le Ce^{-\nu t}\|x^* - y^*\|.$$

令 $t \to \infty$ 可得 $x^* = y^*$。因此该平衡态是唯一的。

步骤5：平衡条件。

根据耗散不等式(58),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \le -\alpha\Psi(x(t)) \quad \text{for a.e. } t.$$

假设 $\Psi(x^*) > 0$。由于 Ψ 连续且 $x(t) \to x^*$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$，使得对于 $t \ge T$，$\Psi(x(t)) \ge \varepsilon$。于是

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \le -\alpha\varepsilon \quad \text{for } t \ge T,$$

这意味着当 $t \to \infty$时，$\mathcal{R}(x(t)) \to -\infty$。这与 $\mathcal{R}$ 在紧集 K上的有界性矛盾。因此 $\Psi(x^*) = 0$ 且 $x^* \in \mathcal{E}$。

□

定理 2.18为构造选择提供了严谨的动力学表述。阻力耗散驱动轨迹趋向定常平衡集，而增量收缩则使该集合收敛为单一的全局吸引平衡点。因此，所得构型 x^* 正是有限可行构形空间上阻力驱动的输运动力学所产生的唯一构形架构。

2.11 加权度量与微分收缩

我们考虑自治 Filippov 包含

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \qquad x(0) \in K, \tag{64}$$

定义在紧前向不变集 K上，其中 F 是分段C^1 调整场 f ，该调整场在第2节中引入。令 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 表示方程（64）的两个绝对连续解。结构选择通过在状态依赖度量下测量轨迹的增量收敛来量化。

在输运系统中，全局阻力对架构扰动的敏感性通常会随区间而变化。输运曲率较强的区域比阻力梯度较弱的区域更强烈地抑制偏离。为捕捉这种异质性，我们引入一种共形加权度量，其缩放取决于架构状态。

共形加权距离。令 $W : K \to \mathbb{R}$ 为局部利普希茨标量场。定义共形范数

$$\|\delta\|_{W(x)} := e^{W(x)}\|\delta\|, \tag{65}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。对于两条轨迹 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$，我们定义加权分离度

$$D(t) := e^{W(x(t))}\|x(t) - y(t)\|. \tag{66}$$

共形缩放使收缩速率能够取决于架构构型，同时避免了完整矩阵值度量所带来的额外复杂性。

假设 2.19（共形权重正则性）。函数 W 在分段-C^1 向量场 f 的每个区间上均为局部利普希茨函数，并且在紧集 K上连续。

在假设 2.19下，映射 $x \mapsto e^{W(x)}$ 在 K上连续，因此距离在切换面两侧仍有明确定义。(66)

容许线性化。令 f 表示底层的分段-C^1 向量场，其Filippov正则化生成 F。容许无穷小线性化由Clarke广义雅可比描述

$$\mathcal{A}(x) := \partial_C f(x), \tag{67}$$

该集合对每个 $x \in K$ 都非空、紧且凸。它包含由光滑向量场的单侧极限产生的所有分区雅可比矩阵。由于 W 是局部利普希茨的，其沿可行速度 $v \in F(x)$ 的变化通过 Clarke方向导数来度量

$$W^\circ(x; v) = \max_{\zeta \in \partial_C W(x)} \langle \zeta, v \rangle. \tag{68}$$

微分收缩条件。令 $\mu(A)$ 表示欧几里得矩阵测度（对数范数）

$$\mu(A) := \lambda_{\max}\left(\frac{A + A^\top}{2}\right). \tag{69}$$

我们称自治 Filippov 系统（64）在共形度量（65）下是 $\lambda > 0$ 一致收缩的，当且仅当存在一个常数

$$\sup_{\substack{v \in F(x) \\ A \in \mathcal{A}(x)}} \big(\mu(A) + W^\circ(x; v)\big) \le -\lambda, \qquad x \in K. \tag{70}$$

项 $\mu(A)$ 给出了可容许制度线性化下无穷小位移瞬时扩张的上界，而 $W^\circ(x; v)$ 则刻画了状态相关的共形缩放所引起的额外变化。

构形理论解释。条件（70）确保加权分离度（66）呈指数衰减，包括制度转换和滑动运动期间。因此，任意两条容许的构形轨迹都会彼此指数收敛。

构形耗散（假设2.10）驱动轨迹趋向平衡集

$$\mathcal{E} := \{x \in K : \Psi(x) = 0\}, \tag{71}$$

该集合刻画了阻力改善停止时的构型。一致收缩随后会通过迫使所有容许轨迹收敛至单一不变构型，消除 $\mathcal{E}$ 内部的多重性。因此，在构形动力演化中，耗散与收缩是互补机制：耗散决定构形变化的热力学方向，而收缩确保选定构形的唯一性与稳定性。第2.9节将证明全局增量指数收敛。

2.11.1 一致收缩的结构充分条件

我们给出一种结构条件，在该条件下，梯度型结构动力学满足一致收缩。在本小节中，$\mu(\cdot)$ 表示欧几里得矩阵测度（对数范数）

$$\mu(A) := \lambda_{\max}\left(\frac{A + A^\top}{2}\right). \tag{72}$$

For 一个光滑区域向量场 f_j，在 K 上以速率 $\nu > 0$ 实现一致收缩 s

$$\mu\big(\nabla f_j(x)\big) \le -\nu \qquad \text{for all } x \in K \cap \Omega_j. \tag{73}$$

由于 μ 是凸的，界（73）可推广至切换面上的 Filippov 凸化。

命题 2.20（梯度型结构充分性）。设 $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，且$\mathcal{R} \in C^2$（$\mathcal{N}$）。假设在 $\mathcal{N}$ 上，区间场具有梯度型表示

$$f_j(x) = -\,M_j(x)\,\nabla\mathcal{R}(x), \tag{74}$$

其中 $M_j \in C^1(\mathcal{N};\ \mathbb{R}^{n\times n})$ 是对称的。

假设 存在常数 $m>0$、$L_M \geq 0$ 和 $\lambda>0$，使得对所有 $x \in \mathcal{N}$ ：

(S1) 一致正迁移率：

$$v^\top M_j(x) v \geq m\|v\|^2 \qquad \textit{for all } v \in \mathbb{R}^n; \tag{75}$$

(S2) 有界迁移率变化：

$$\|DM_j(x)\| \leq L_M; \tag{76}$$

(S3) 阻力的一致曲率：

$$\nabla^2 \mathcal{R}(x) \succeq \lambda I. \tag{77}$$

那么对所有 $x \in \mathcal{N}$，

$$\mu\big(\nabla f_j(x)\big) \leq -m\lambda + \frac{L_M}{2}\,\|\nabla \mathcal{R}(x)\|. \tag{78}$$

因此，在该集合上

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{x \in \mathcal{N} : \|\nabla \mathcal{R}(x)\| \leq \varepsilon\}, \tag{79}$$

以速率.....满足一致收缩

$$\nu = m\lambda - \frac{L_M}{2}\varepsilon, \tag{80}$$

前提是 $\varepsilon < 2m\lambda/L_M$ （按照约定，若 $L_M = 0$，则该条件不适用）。特别地，若 M_j 在 $\mathcal{N}$ 上为常数，则

$$\mu\big(\nabla f_j(x)\big) \leq -m\lambda \qquad \textit{for all } x \in \mathcal{N}. \tag{81}$$

证明。 对（74）求导，得到

$$\nabla f_j(x) = -\,DM_j(x)\big[\nabla \mathcal{R}(x)\big] - \,M_j(x)\,\nabla^2 \mathcal{R}(x), \tag{82}$$

其中 $D\,M_j(x)[\cdot]$ 表示作用于方向向量的 M_j 的 Fr´echet 导数。

令 $M := M_j(x)$ 和 $H := \nabla^2 \mathcal{R}(x)$，并设

$$B := DM_j(x)\big[\nabla \mathcal{R}(x)\big].$$

由于 $\mu(A) = \lambda_{\max}\Big(\frac{A+A^\top}{2}\Big)$，我们有

$$\mu\big(\nabla f_j(x)\big) = \lambda_{\max}\left(-\frac{B+B^\top}{2} - \frac{MH+HM}{2}\right) \leq \lambda_{\max}\left(-\frac{MH+HM}{2}\right) + \lambda_{\max}\left(-\frac{B+B^\top}{2}\right).$$

曲率项。 利用（75）和（77，对于所有 $v \neq 0$，

$$v^\top (MH+HM)v = 2\,v^\top MHv \geq 2m\lambda\|v\|^2,$$

因此

$$\lambda_{\max}\left(-\frac{MH+HM}{2}\right)\le -m\lambda.$$

迁移率变化项。由（76），

$$\|B\|=\big\|DM_j(x)\big[\nabla\mathcal{R}(x)\big]\big\|\le\|DM_j(x)\|\,\|\nabla\mathcal{R}(x)\|\le L_M\,\|\nabla\mathcal{R}(x)\|.$$

由于 $\lambda_{\max}\left(-\frac{B+B^\top}{2}\right)\le\frac{1}{2}\|B+B^\top\|\le\|B\|$，我们得到

$$\lambda_{\max}\left(-\frac{B+B^\top}{2}\right)\le\frac{L_M}{2}\,\|\nabla\mathcal{R}(x)\|.$$

结合这两个界可得（78）。局部收缩率（80）可由 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 立即得到。如果 $L_M=0$（即 M_j 为常数），则（81）成立。 □

注 2.21（结构解释）。乘积 $m\lambda$ 将迁移率与阻力曲率耦合起来。$\mathcal{R}$的一致强凸性与严格为正的迁移率共同确保收缩；迁移率的变化会使收缩率降低，降低量与$\|\nabla\mathcal{R}\|$成正比。特别地，如果 M_j 为常数，则在 $\mathcal{N}$ 上收缩是均匀的，收缩率为 $m\lambda$。

2.12 可达性的稳定化

我们将构形耗散和增量收缩与全局可达性泛函 $\mathcal{R}$ 联系起来：$K\to\mathbb{R}_{\ge 0}$。在假设2.5、2.10和2.13下，定理 2.18 表明，自治 Filippov 包含存在唯一的全局吸引平衡态 $x^*\in K$。

$$\dot{x}(t)\in F(x(t)),\qquad x(0)\in K,\tag{83}$$

满足

$$0\in F(x^*),\qquad \lim_{t\to\infty}x(t)=x^*\quad\text{for every } x(0)\in K.$$

现在我们证明，阻力泛函会相应地趋于稳定。

命题 2.22（阻力的渐近稳定化）。假设条件 *2.5*、*2.10*和*2.13* 均成立。令 $x(\cdot)$ 为方程（83）的任意一个 ***Filippov*** 解，且满足 $x(0)\in K$。则：

(i) 映射 $t\mapsto\mathcal{R}(x(t))$ 在 $[0,\infty)$ 上单调不增且有下界；

(ii) 极限 $\lim_{t\to\infty}\mathcal{R}(x(t))$ 存在，且等于 $\mathcal{R}(x^*)$；

(iii) 若平衡条件

$$\Psi(x)=0\quad\Longleftrightarrow\quad 0\in\partial_C\mathcal{R}(x)+N_K(x)\tag{84}$$

成立，且 $\mathcal{R}$ 在 K上是凸函数，则 x^* 在 K上使 $\mathcal{R}$ 达到极小值；若 $\mathcal{R}$ 在K上严格凸，则该极小点唯一。

证明。 (i) 由于 $\mathcal{R}$在 K 上局部利普希茨，且 $x(\cdot)$ 绝对连续，因此复合函数$t \mapsto \mathcal{R}(x(t))$ 绝对连续。根据 Clarke 链式法则，

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq \sup_{v \in F(x(t))} \mathcal{R}^{\circ}(x(t); v) \quad \text{for a.e. } t \geq 0.$$

根据假设 2.10，

$$\sup_{v \in F(x)} \mathcal{R}^{\circ}(x; v) \leq -\alpha \Psi(x) \leq 0, \qquad x \in K,$$

因此，对于几乎处处的 $t \geq 0$，$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(x(t)) \leq 0$，所以 $\mathcal{R}(x(t))$ 单调不增。由于 K 是紧集且 $\mathcal{R}$ 连续，$\mathcal{R}$ 能取得最小值 $_K\mathcal{R}$，因此 $\mathcal{R}(x(t))$ 有下界。

(ii) 有下界的单调不增函数存在有限极限，因此 $\mathcal{R}_\infty := \text{极限}_{t\to\infty}\mathcal{R}(x(t))$ 存在。此外 $x(t) \to x^*$ 当 $t \to \infty$ 时，根据定理 2.18。由 $\mathcal{R}$ 在 K 上的连续性，

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{R}(x(t)) = \mathcal{R}(x^*).$$

(iii) 如果满足（84），那么 $x^* \in \{x : \Psi(x) = 0\}$意味着 $0 \in \partial_C \mathcal{R}(x^*) + N_K(x^*)$，即 x^*是关于 $\mathcal{R}$ 在 K上的 Clarke驻点。如果 $\mathcal{R}$ 在 K上是凸函数，那么 Clarke驻点条件就是约束凸最小化的一阶最优性条件，因此 $x^* \in$ 最小值点$_K\mathcal{R}$。严格凸性意味着唯一性。 □

命题 2.22 突显了构造选择背后两种结构机制各自发挥的互补作用。耗散不等式保证全局阻力泛函沿容许轨迹单调衰减，从而确定演化的热力学方向。一致收缩则确保架构状态趋向唯一选定的平衡态 x^*。

这两种机制共同实现了通达性的稳定化：架构收敛意味着阻力收敛，而渐近阻力等于 $\mathcal{R}(x^*)$，即在动力学选择的构形架构下所达到的值。从这个意义上说，构形定律可被解释为支配有限尺度输运结构演化的耗散收缩原理。

3 应用：Bejan 构形层级的 Filippov实现

本节将第 2 节提出的自治 Filippov 选择框架应用于 Bejan、B˘adescu 和 De Vos[5] 研究的典型面积—点输运层级。在 [5] 该层级通过一系列嵌套阻力最小化问题构建，这些问题定义于输运网络的各个连续组装层级。我们证明，同一层级架构会自然地成为依赖状态的架构动力学的唯一不变构型。在本框架中，架构演化被建模为自治 Filippov 微分包含，其可容许速度对应于满足几何可行性约束的降阻调整。

在这一动力学表述中， [5]表 1 中给出的最优几何比率，体现为 Filippov 包含的平衡态和滑动条件。因此，经典构形层级可被解释为由阻力驱动的动力学定律所选出的不变构型，而非仅仅是一系列静态优化问题的解。此外，通过 [5] 中的嵌套最小化程序得到的阻力值，与在所选不变构型处计算的阻力李雅普诺夫泛函值一致。这种对应关系为构形层级提供了一种动力学解释：最优组装比是有限可容许架构集合上耗散阻力的切换流的稳态条件。

3.1 Bejan 的基本构件与显式函数形式

物理基本量。 固定输运成本（电阻率）系数

$$K_0 > K_1 > K_2 > \cdots > K_p \ > \ 0,$$

其中， K_{i-1} 是服务区域内每单位可达性的成本， i 表示层级； K_i 是沿层级为i 的主通道进行干线输运的单位成本（这正是 Bejan 的解释，其中 K_0 表示基本层级的弥散输运， K_1 表示干线输运）。

服务区域内均匀的面生成率 $\gamma > 0$ 作用于面积为 A_i 的区域，产生的总流量为

$$m_i \ = \ \gamma A_i.$$

几何决策变量。 在层级 i，服务区域表示为一个矩形，其横向尺寸为 H_i ，纵向尺寸为 L_i，因此

$$A_i = H_i L_i, \qquad r_i := \frac{H_i}{L_i} > 0.$$

等价地,

$$H_i = \sqrt{A_i r_i}, \qquad L_i = \sqrt{\frac{A_i}{r_i}}.$$

基本阻力成本（Bejan公式（1））。对于 $i = 1$，Bejan [6] 将总成本（其 C_1）表示为

$$C_1(H_1, L_1) = m_1 \left(\frac{1}{4} K_0 H_1^2 + \frac{1}{2} K_1 L_1^2 \right), \tag{85}$$

满足面积约束 $A_1 = H_1 L_1$。

一般层级-i 局部—干线成本泛函形式。为将 Bejan 的显式计算推广到所有层级，同时保留在 [5], 中导出的最优长宽比，我们采用相同的可分离二次结构对层级-i 局部—干线成本进行参数化，并允许几何前置因子随层级变化：

$$C_i(H_i, L_i) = m_i \left(\alpha_i K_{i-1} H_i^2 + \beta_i K_i L_i^2 \right), \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{86}$$

其中常数为 $\alpha_i,\ \beta_i > 0$。对于 $i = 1$，Bejan 的式（85）对应于

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

对于 $i \geq 2$，论文中的递归几何意味着不同的有效前因子（因为第 i 级矩形的构造方式与第 1 级矩形不同；参见 Bejan 在引出表 1 时的讨论）。因此，我们选择 (α_i, β_i)，使得 $i \geq 2$ 的极小长宽比与表 1 完全一致（这是确定的 函数形式假设，而非额外的结果）。

对长宽比进行显式极小化。令 $A_i = H_i L_i$ 并代入$H_i = \sqrt{A_i r_i},\ \ L_i = \sqrt{A_i / r_i}$ 到（86）中，得到

$$\frac{C_i}{m_i} = \alpha_i K_{i-1} A_i r_i + \beta_i K_i \frac{A_i}{r_i}. \tag{87}$$

对 r_i 求导，得到唯一极小值点

$$r_{i,\mathrm{opt}} = \frac{H_i}{L_i}\Big|_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{\beta_i}{\alpha_i}} \sqrt{\frac{K_i}{K_{i-1}}}. \tag{88}$$

此外，将（88）代入（87）可得

$$\frac{C_{i,\min}}{m_i} = 2\sqrt{\alpha_i \beta_i}\, \sqrt{K_{i-1} K_i}\, A_i^{1/2}. \tag{89}$$

与 [6] 的精确对应表明

$$\left(\frac{H_1}{L_1}\right)_{\mathrm{opt}} = 2\frac{K_1}{K_0}, \qquad \left(\frac{H_2}{L_2}\right)_{\mathrm{opt}} = \frac{K_2}{K_1}, \qquad \left(\frac{H_i}{L_i}\right)_{\mathrm{opt}} = \frac{K_i}{K_{i-1}} \ \ (i \geq 3),$$

and

$$\frac{C_{1,\min}}{m_1} = \left(\tfrac{1}{2} A_1 K_0 K_1\right)^{1/2}, \qquad \frac{C_{2,\min}}{m_2} = \left(A_2 K_1 K_2\right)^{1/2}, \qquad \frac{C_{i,\min}}{m_i} = \left(A_i K_{i-1} K_i\right)^{1/2} \ \ (i \geq 3).$$

如果我们设定88）–（89，则两者相匹配

$$(\alpha_1, \beta_1) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right), \qquad (\alpha_2, \beta_2) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \qquad (\alpha_i, \beta_i) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ for } i \geq 3, \tag{90}$$

因为此时$r_{1,\ \mathrm{opt}} = 2(K_1/K_0)$，且对于 $i \geq 2$ 有 $r_{i,\ \mathrm{opt}} = K_i/K_{i-1}$ ；而对于$i \geq 2$，$2\sqrt{\alpha_1}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 和$2\sqrt{\alpha_i \beta_i} = 1$ ，从而精确重现了已报道的成本标度。

结论（函数形式假设）。方程（86）结合已确定的系数（90）构成一个闭式阻力泛函，它具有以下性质：**(i)** 为代数形式；**(ii)** 在 $\{A_i > 0, r_i > 0\}$上可微；**(iii)** 可得出恰好是Bejan 的最优长宽比和最小化成本（表 1）。这是将 Bejan 层级嵌入 Filippov 选择框架所需的泛函输入。

3.2 组装变量与 Bejan 的最优分支数

组装定律。令 $n_i \geq 1$ 表示组装成一个 level-i构件的 level-$(i-1)$构件数量（Bejan 的 n_i）。则

$$A_i = n_i A_{i-1}, \qquad m_i = n_i m_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots, p). \tag{91}$$

给定 $(A_1,\ n_2,\ \ldots\ldots,\ n_p)$，所有 $A_i,\ m_i$ 均可递归确定。

Bejan 的组装优化（表 1）。Bejan 递推（参见正文中其公式 (9) 附近及表 1）给出了最优分支数

$$n_{2,\mathrm{opt}} = 2\frac{K_0}{K_2}, \qquad n_{i,\mathrm{opt}} = 4\frac{K_{i-2}}{K_i} \quad (i \geq 3). \tag{92}$$

我们将 (92) 视为目标平衡关系，动力学必须选择这些关系。

组装变量中的光滑代理阻力泛函。为使 n_i 趋向 (92，并进行显式计算，我们引入严格凸的代理惩罚项

$$\mathcal{R}_{\mathrm{br}}(n) := \frac{\kappa_2}{2}\big(n_2 - n_{2,\mathrm{opt}}\big)^2 + \sum_{i=3}^{p} \frac{\kappa_i}{2}\big(n_i - n_{i,\mathrm{opt}}\big)^2, \qquad \kappa_i > 0, \tag{93}$$

在凸域 $\{n_i \geq 1\}$ 上。这不会改变 Bejan 的平衡值（而是确定这些值），并且这正是收缩分析所需的显式泛函形式：$\nabla^2 \mathcal{R}_{\mathrm{br}} \succeq \min_i \kappa_i\, I$。

总阻力李雅普诺夫泛函。定义完整的架构状态

$$x := (r_1, \ldots, r_p, n_2, \ldots, n_p) \in K,$$

具有容许紧集

$$K := \Big\{ x :\ r_i \in [\underline{r}, \overline{r}],\ n_i \in [1, \overline{n}] \Big\}, \tag{94}$$

对于固定界限 $0 < r \leq \underline{r} < \overline{r} < \infty$ 和 $1 < n < \overline{n} < \infty$（取足够大以包含 Bejan 的最优值）。现在设

$$\mathcal{R}(x) := \sum_{i=1}^{p} \Big(\alpha_i K_{i-1} A_i r_i + \beta_i K_i A_i / r_i \Big) \ + \ \mathcal{R}_{\mathrm{br}}(n), \tag{95}$$

其中 $\alpha_i,\ \beta_i$ 由 (90) 给出，且 A_i 由 (91) 生成。在 int(K) 上，该 $\mathcal{R}$ 为 C^2 在 r 中（按构造）C^2 在 n中。唯一极小值点 x^* 的 $\mathcal{R}$ 在 K 上满足

$$r_i^* = r_{i,\mathrm{opt}} \text{ (Bejan Table 1)}, \qquad n_i^* = n_{i,\mathrm{opt}} \text{ (Bejan Table 1)}.$$

3.3 实现 Bejan 层级的依状态区间而定的 Filippov 演化定律

失衡　　fun数（切换坐标）。定义各分量的不平衡量

$$h_i^{(r)}(x) := r_i - r_{i,\mathrm{opt}}, \qquad h_i^{(n)}(x) := n_i - n_{i,\mathrm{opt}}, \tag{96}$$

和全局失衡度量

$$\Psi(x) := \sum_{i=1}^{p} \big(h_i^{(r)}(x)\big)^2 + \sum_{i=2}^{p} \big(h_i^{(n)}(x)\big)^2. \tag{97}$$

当且仅当 $\Psi(x) = 0$ 恰好满足 Bejan 表 1 的比例时，x。

不连续（符号）下降法和 Filippov 正则化。现在我们指定一个依状态区间而定的自治向量场 f 作用于 K:

$$\dot r_i = -\eta_i \,\mathrm{sgn}\big(\partial_{r_i}\mathcal{R}(x)\big), \qquad \dot n_i = -\zeta_i \,\mathrm{sgn}\big(\partial_{n_i}\mathcal{R}(x)\big), \tag{98}$$

with 增益 $\eta_i,\ \zeta_i > 0$，并将 sgn(0) 留作未定义。在切换流形上

$$\Sigma_i^{(r)} := \{x : \partial_{r_i}\mathcal{R}(x) = 0\}, \qquad \Sigma_i^{(n)} := \{x : \partial_{n_i}\mathcal{R}(x) = 0\},$$

右端项发生跳变。因此，98在 (i) 投影到 K 以及 (ii) 凸化之后，按 Filippov 包含来解释:

$$\dot x \in F(x) := -\Pi_{T_K(x)}\ \mathrm{Sgn}\,\big(\nabla\mathcal{R}(x)\big), \tag{99}$$

其中，Sgn 是集值符号映射（逐分量地，Sgn(u) $= \{-1\}$ if $u > 0$, $\{+1\}$ if$u < 0$, and $[-1, 1]$ if $u = 0$），而 $\Pi_{T_K(x)}$ 是到 K 的切锥上的投影。这是不连续最速下降的标准 Filippov 正则化。

精确耗散不等式（构形耗散）。对于任意 $v \in F(x)$,

$$\mathcal{R}^\circ(x; v) = \langle \nabla\mathcal{R}(x), v\rangle \le -\sum_j |\partial_{x_j}\mathcal{R}(x)|,$$

因为 v 选取（某个投影后的）每个偏导数的负号。特别是，由于 $\mathcal{R}$ 在 int(K) 上光滑，并且在紧集 K 上强制有界，因此存在 $\alpha > 0$ （取决于增益界以及 K 上的 $\nabla^2\mathcal{R}$），使得 Lyapunov 不等式

$$\sup_{v\in F(x)} \mathcal{R}^\circ(x; v) \le -\alpha\,\Psi(x) \qquad (x \in K) \tag{100}$$

成立（这是对 Bejan 实例中假设 2.10 的具体验证）。因此$\mathcal{R}$ 沿所有 Filippov 解均不增加，并且在 $\Psi(x) > 0$时严格减小。

滑动 = 动态实现 Bejan 比率。在任意偏导数为零的流形上（例如 $\partial_{r_i}\mathcal{R}=0$）， Filippov 集 Sgn 在该坐标方向包含一组连续的可容许速度；投影会沿该流形产生滑动。因此，Bejan 最优比率作为非光滑包含（99）的不变滑动集，以动态方式得以实现。

3.4 所选层级的收缩与唯一性 y

由于 $\mathcal{R}_{\mathrm{br}}$ 按照构造在 中是全局强凸的， n （93）中的 r部分在 $\mathcal{R}$ 的每个 r_i 上均严格凸 $[r,r]$ （见（87）），因此，综合后的 $\mathcal{R}$ 在 K上强凸，只需选取能够排除退化的界。因此，在极小点 $\mathcal{N}$ 的邻域 x^*内，梯度型充分性结果（命题 2.20）适用于（99）的光滑区域（并通过 Clarke 凸化延拓至切换处），从而在 $\mathcal{N}$上得到假设 2.13 的一致收缩不等式。

因此，根据构造选择定理（定理 2.18），自治的 Filip- pov 包含（99）选出一个 唯一的不变架构 $x^*\in K$，且所有解都以指数速度收敛至该架构。在这一选定的不变架构处，

$$r_i^*=r_{i,\mathrm{opt}},\qquad n_i^*=n_{i,\mathrm{opt}},$$

因此，Bejan 层级恰好被恢复为唯一的全局吸引构形架构。

3.5 Bejan 与 Filippov-Constructal：精确对应

	Bejan–B˘adescu–De Vos（静态）	**本文（自治 Filippov）**
状态变量	设计变量 per 级别：$(H_i,\ L_i)$ 和分支数 n_i；面积 $A_i = H_i L_i$。	架构状态 $x = (r_1, \ldots, r_p, n_2, \ldots, n_p) \in K$ 与 $r_i = H_i/L_i$；A_i生成通过 (91)。
阻力泛函	成本递归地最小化；显式单元成本 $C_1 = m_1\,(\frac{1}{4}K_0H_1^2 + \frac{1}{2}K_1L_1^2)$。	单一李雅普诺夫泛函 $\mathcal{R}(x)$ 中 (95) 由 Bejan- 构建一致的二次局部–主干项 (86)，加上强凸的分支数惩罚项 (93)。
最优长宽比	表 1：$(H_1/L_1)_{\text{opt}} = 2K_1/K_0$，$(H_2/L_2)_{\text{opt}} = K_2/K_1$，$(H_i/L_i)_{\text{opt}} = K_i/K_{i-1}$ for $i \geq 3$.	平衡/滑动条件 $\partial_{r_i}\mathcal{R} = 0$ 产生 $r_i^* = r_{i,\ \text{opt}}$ 恰好通过 (88) – (90)。
最优分支数数字	表 1：$n_{2,\ \text{opt}} = 2K_0/K_2$；$n_{i,\ \text{opt}} = 4K_{i-2}/K_i$ 用于 $i \geq 3$。	平衡条件 $\partial_{n_i}\mathcal{R} = 0$（来自 (93)）强制执行 $n_i^* = n_{i,\ \text{opt}}$ 恰好。
最小化成本标度	表 1: $C_{1,\min}/m_1 = (\frac{1}{2}A_1K_0K_1)^{1/2}$; $C_{2,\min}/m_2 = (A_2K_1K_2)^{1/2}$; $C_{i,\min}/m_i = (A_iK_{i-1}K_i)^{1/2}$ 适用于 $i \geq 3$。	值 $\mathcal{R}(x^*)$ 重现了相同的标度关系，因为 r 部分的 $\mathcal{R}$ 达到 (89) 并带有 Bejan- 已识别的前因子 (90)。
机制选择层级	每个阶段的递归极小化组装阶段。	耗散 +收缩：$\dot{x} \in F(x)$与 $\mathcal{R}$ 耗散的(100) 且增量稳定（Assumption 2.13)选出唯一的全局吸引的不变层级-结构 x^*。
非光滑性的作用	隐式（在相互竞-争的调整之间选择，且未动态建-模）。	显式：状态切换发生于 $\partial_{x_j}\mathcal{R} = 0$；Filippov 凸-化简会导致在 Bejan 平衡流形上滑动，并确保所选不变架构的存在性与唯一性。

表 1：Bejan的构形层级（静态优化）与其在我们框架中作为自治耗散收缩 Filippov 包含的唯一不变架构的实现之间的精确对应关系。

4 讨论：从静态构造最优性到非光滑动力学选择

本节阐明本文所发展的 Filippov表述的概念性贡献。具体而言，我们解释了该框架如何扩展 Bejan、B˘adescu 和 De Vos [5] 的经典构形层级，以及为什么由此形成的观点不仅适用于热力学传输，还适用于经济系统等领域；在这些领域中，约束、折点和状态变化是动力学的内在特征。

4.1 Filippov表述为构形定律增添了什么

构形定律指出，能够随时间持续存在的有限尺寸流动系统，必须演化其构型，以便为流经其中的流提供逐步更易通达的可达性[2, 8, 9]。在该理论的大多数应用中，这一原则通过静态优化来实现：在几何约束或资源约束下，使阻力、耗散或熵泛函最小化 [16, 29, 31]。由此得到的构形——例如经典的面—点传输层级——是通过在连续的组装层级上求解嵌套优化问题获得的。本文所发展的 Filippov表述以动力学选择机制取代了这种静态观点。该机制并不直接假定最优性，而是使构型依据状态依赖动力学定律演化，其轨迹在保持可行性的同时单调降低全局阻力。最优构型随后作为由动力学选择的不变对象出现。

(i) 将有限构型集合上的持续性视为可行性。在当前框架中，构形要求的“有限尺寸”由一个紧的容许架构集合 K表示。架构动力学的正向不变性和正向完备性体现了系统随时间持续存在。从数学上看，这些性质源自微分包含的标准可行性条件 [26]。这种解释将“一个随时间持续存在的有限尺寸系统”这一构形定律的定性表述，转化为对容许演化定律的精确动力学条件。

(ii) 将“逐步更易通达”视为非光滑李雅普诺夫原理。构形改进可达性的要求通过阻力泛函 $\mathcal{R}$ 来表达，其值沿容许轨迹递减。由于状态切换会引入折点和不可微性， $\mathcal{R}$ 被视为局部利普希茨函数，并使用Clarke方向导数 [17]刻画其演化。由此得到的耗散不等式保证阻力单调递减，但由残差泛函Ψ定义的平衡集除外。这一表述以沿系统的整个轨迹应用的李雅普诺夫型条件，取代了反复进行优化。

（iii）动力学中的状态切换与不可逆性。输运系统通常遵循依状态调整律。容量饱和、额外传输路径的启用或材料约束，都会使控制方程出现不连续性。Filippov不连续右端微分方程理论

为描述此类动力学提供了自然的框架 [18, 19, 20]。在这一设定下，约束激活对应于状态空间中的切换流形，而沿约束性约束持续运行则表现为在这些流形上的滑动运动。因此，约束并非异常，而是架构动力学的结构组成部分。

(iv) 通过收缩实现结构选择。仅凭阻力耗散通常只能确保构型收敛到一个平稳集。为解释唯一架构为何会出现，本文引入了第二种机制：通过收缩分析实现增量稳定性 [21]。在阻力泛函满足适当曲率条件、架构动力学满足迁移率界的情况下，容许轨迹会彼此指数收敛。这种收缩性质会将平衡集收缩为单一的全局吸引构型。

在这种动力学解释中，构形设计不再是外部强加的优化结果。相反，选定构形作为有限构形空间上耗散型分区切换流的唯一不变构型而出现。可行性确保持续性，耗散推动可达性的改善，而收缩则解释了最终架构的唯一性与稳定性。这些机制共同为构形定律提供了一种动力学实现方式，与其作为支配流动架构演化的原理这一最初诠释一致 [2, 8]。

4.2 Bejan 面积到点应用如何通过该框架得到扩展

Bejan、B˘adescu 和 De Vos [5] 所分析的面到点输运问题，在构形理论中具有典范意义，因为它在有限区域上进行阻力最小化时，能够给出明确的层级比率和标度关系。在当前框架中，这一层级被嵌入由 Filippov 微分包含所支配的动态架构空间中。因此，经典比率获得了新的动力学诠释，并产生了额外的结构性预测。

（i）最优比率作为切换流形。在层级的静态推导中，最优比率表现为由一阶最优性条件得到的代数等式。在 Filippov表述中，这些相同的关系定义了架构状态空间中的余维一超曲面。形式上，它们通过切换函数 $h_i(x)$产生，将构形空间划分为具有不同架构调整律的区间。因此，构形比在动力学中代表的是几何阈值，而不仅仅是最优参数值。这类切换结构是分段光滑动力系统的典型特征 [18, 19]。

(ii) 边际平衡即滑动不变性。在经典优化表述中，边际阻力贡献相等是最小化问题 [5] 的一阶最优性条件的结果。在 Filippov 框架下，这一条件以动力学方式涌现。当轨迹到达切换流形时，凸化速度集可能包含与该流形相切的方向，从而满足滑动条件 $\langle \nabla h_i(x), v \rangle = 0$。滑动

运动因此代表了在竞争的阻力贡献之间维持构造平衡的持续演化。从这个意义上说，边际阻力相等成为一种动力学不变条件，而非纯粹静态的最优性陈述。

(iii) 作为不变吸引子的层级结构。该框架通过两种机制的相互作用重现了经典标度关系。首先，阻力耗散不等式驱动轨迹趋向阻力改善停止的平衡集。其次，前文确立的收缩性质确保架构动力学具有增量指数稳定性 [21]。这两种机制共同作用，使平衡集收缩为唯一的全局吸引构型。因此，Bejan 层级并非仅仅作为计算所得的极小点出现，而是成为阻力驱动动力学的不变吸引子。

(iv) 静态优化之外的结构性影响。将构形比理解为切换与滑动结构，可以拓展经典模型。首先，可以自然地纳入阻止系统瞬时达到最优状态的不可逆约束。其次，该模型预测，在架构收敛至吸引子之前会出现瞬态路径依赖。第三，依工况变化的输运定律可以共存于统一的动力学描述中。最后，稳定性和鲁棒性特征——例如收敛速率以及扰动后的恢复能力——可以在收缩与非光滑动力学框架内进行分析。这些特征无法通过构形理论中传统采用的纯静态极小化方法加以探究 [8, 9]。

4.3 这对经济学为何重要：折点、上限与区间下的构造选择

许多经济系统都可以解释为流动架构。商品、能量、信息、资本和劳动力在网络中流动，而网络结构则受到容量限制、制度约束和离散技术体制的塑造。构形理论已被用于将经济组织与增长解释为流动可达性优化的结果 [5, 12]。然而，大多数经济模型仍是静态的，或依赖平滑的调整规律；而现实经济环境则具有折点、上限和状态变化。本文提出的Filippov框架为这类系统提供了一种自然的数学语言。

（i）状态切换作为经济调整的结构性特征。在许多经济情境中，当约束生效时，支配系统的调整规则会突然改变。例子包括价格上限与下限、约束性借贷限制、抵押品阈值、库存缺货、物流网络中的容量限制、拥堵定价或平台治理规则。此类特征会在调整动力学中引入不连续性。在本框架内，这些变化被表示为架构状态空间中的切换流形，支配向量场在穿越这些流形时发生区间变化。这一表述使经济调整与分段光滑动力系统理论相一致 [18, 19]。

（ii）滑动作为在约束性约束处的持续运行。经济系统经常在较长时期内直接运行于约束性约束之上。信贷约束在整个商业周期中保持约束性，电力网络在峰值需求期间达到输电限额，交通网络经历持续拥堵，监管上限在受控市场中具有约束力。在Filippov表述中，此类情形对应于沿切换流形的滑动运动 。因此，滑动动力学为在容量限制处的持续运行提供了严格的数学描述，同时保持系统轨迹的适定性。

（iii）“逐步更易通达”作为结构适应。 在经济环境中，可达性这一概念可以解释为一种总阻抗度量——交易成本、拥堵成本、搜寻摩擦、能量损耗、延迟成本或风险溢价。本文引入的耗散不等式表明，系统的构形会不断演化，使这种全球阻抗沿着容许轨迹不会增加。该框架并非在变化的约束下反复求解静态优化问题，而是将结构适应建模为一个连续调整过程，在这一过程中，网络容量、路由份额、投资分配或制度规则沿着改善流量可达性的方向演化。

（iv）收缩与制度确定性。 均衡多重性与路径依赖是经济理论中的核心问题。在当前框架中，单凭耗散性仍可能允许多个极限集存在。收缩通过强制实现增量稳定性，提供了消除这种多重性的额外结构机制 [21]。当阻力景观具有足够的曲率，且调整响应足够灵敏时，所有容许轨迹都会向唯一架构收敛。在经济学上，这意味着三个性质：所选网络或制度构形的确定性、冲击后的可恢复性，以及描述动态选定的构形如何随参数变化而变化的比较静态分析。

（v）将该框架映射到经济对象。动力学表述可以直接转译为经济学术语：

- 架构状态 x：决定流量的容量、路由份额、投资分配或制度参数；
- 可达性泛函 $\mathcal{R}(x)$：总体经济阻抗，例如拥堵成本、交易成本、延迟或风险调整损失；
- 切换流形：由政策约束、容量限制或技术区间形成的阈值；
- 滑动运动：上限、配额或约束持续处于绑定状态；
- 构形架构 x^*：经济网络或制度系统经动态选择形成的稳定配置。

由此看来，构形定律成为一项支配经济流动架构在约束下演化的原则。Filippov框架将经典构形视角从静态最优性拓展到动态结构选择，使其适用于状态切换和约束性约束都是环境内在特征的经济系统。

4.4 对比 ：优化与动力学选择

经典构形表述与本文的动力学框架探讨的是相关但不同的问题。

- **静态构形优化：**“在给定的有限尺寸约束下，哪种构型能使阻力最小？”

- **Filippov构形动力学：**“在不可逆约束和依赖制度的调整下，动力学会选择哪种构型？该构型在容许扰动下有多稳定？”

第二个问题的要求严格得多。它不仅要求确定一种最优构型，还要解释该构型如何从可行演化过程中涌现。具体而言，动力学视角需要四项结构要素。首先，即使调整定律不连续，架构演化也必须保持适定。Filippov不连续右端微分方程理论为此提供了恰当的框架 [18, 19]。其次，必须保证架构的持续性。在本文框架中，这一要求通过可行性以及可行配置集的正向不变性来体现，相关研究见微分包含理论 [26]。第三，“逐步更易通达”的构形原理必须沿容许轨迹成立。这通过阻力耗散不等式来表达，该不等式确保全局可达性泛函沿架构动力学的解递减。最后，还需要一种机制来解释唯一架构为何会涌现。本文采用的机制是通过收缩分析实现增量稳定性，从而确保所有容许轨迹都收敛到同一构型 [21]。

总而言之，状态切换的 Filippov 表示、可达性改善的耗散不等式，以及用于增量稳定性的收缩性质，共同构成了一个连贯的构形演化动力学框架。在这一视角下，架构设计并非由外部优化强加，而是由有限可行构形空间上的阻力驱动动力学所选出的不变构型。

4.5 该框架所揭示的局限性与研究方向 rk

当前框架存在的两个局限性是显而易见的。它们并非弱点，而是表明构形演化的动力学表述可以沿着自然的方向加以扩展。

（i）当收缩失效时。本文的唯一性和鲁棒性结果依赖于增量收缩条件。如果该条件不成立——例如，阻力景观仅具有弱凸性、迁移率场严重依赖状态，或正反馈主导调整动力学——则可能出现多重性。在这种情况下，耗散不等式仍可能驱动轨迹趋近平衡集，但不同的初始条件可能收敛至不同的容许极限，或者在切换流形上出现不同的滑动选择。从经济学或工程学角度看，这一结果并非病态现象。在约束网络系统中，多重性和路径依赖是广泛存在的，而本文所构建的框架为识别能够恢复确定性的精确结构条件提供了一种系统化方法。

（ii）超越自治动力学。本文的分析聚焦于自治架构动力学。然而，许多真实系统都在外生强迫下运行。例如，能源网络中的季节性需求波动、日负荷循环或周期性政策干预。在这类环境中，自然的动力学对象并非固定的平衡点，而是周期不变集。Filippov表述可以自然地扩展到时变微分包含 [18, 19], ，其中所选的“构形架构”将对应于稳定周期轨道，而非定常构型。因此，为这类时变Filippov系统建立完整的收缩与耗散理论，是未来研究的一个有前景的方向。

总结。该框架的主要概念性意义可以简洁地表述如下。Filippov嵌入将构形定律从静态极值原理转变为一种关于结构选择的动力学理论。在这一视角下，有限尺度流动系统在可行构型空间中演化，其动力学具有阻力耗散特性，而其增量稳定性决定了是否会选出唯一架构。这种基于稳定性的观点，为约束输运和经济网络系统中的确定性与鲁棒性提供了自然的解释。

5 结论

本文为受不可逆性、几何约束和依工况变化的输运定律影响的有限尺寸输运系统，建立了构形定律的动力学表述。架构演化被建模为定义在紧致正向不变容许集上的自治Filippov微分包含。不连续性源于输运阈值和单边约束的激活，而滑动运动则表示系统持续运行于构造平衡条件下。两种结构机制支配着结构选择。通过 Clarke 广义方向导数表述的阻力耗散不等式，确保全局阻力泛函沿容许轨迹单调衰减。这一非光滑Lyapunov条件体现了“逐步更易通达”原则，并驱动轨迹趋向由构造关系定义的定常平衡集。以加权度量下容许广义雅可比矩阵的谱负性界表述的一致收缩条件，则保证轨迹指数收敛。收缩使平衡集缩并为单一不变构型，并使架构动力学具有全局增量稳定性。

在这些条件下，Filippov包含存在唯一的全局吸引不变集。在自治情形下，该集合退化为一个平衡态；而在周期性强迫下，它则成为稳定极限环。这个不变对象称为构形架构。因此，构形设计并非源于外加的优化原则，而是耗散约束驱动动力系统的一种稳定性性质。

对 Bejan–Bˇadescu–De Vos 的经典面积到点层级结构的应用表明，已知的构形标度关系在这一框架中自然产生。最优几何比值在架构状态空间中表现为切换流形，而沿这些流形滑动则对应于边际阻力贡献相等。耗散驱动轨迹趋向它们的交集，而收缩则确保该交集坍缩为唯一的全局吸引架构。

更一般地说，研究结果表明，层级传输结构可被解释为耗散收缩非光滑动力系统的不变构型。因此，该框架将构形理论扩展至混合输运流态、结合容量限制和多层级架构，同时在严格的动力学表述中保留特征性的标度关系。

参考文献

[1] A. Bejan，构形理论网络：用于冷却发热体积的导热路径，《国际传热与传质期刊》40（1997）799–816。https://doi.org/10.1016/S0017-9310(96)00175-5[2]A. Bejan，《形状与结构：从工程到自然》，剑桥大学出版社，英国剑桥，2000。[3] A. Bejan，《自然中的设计：构形定律如何支配生物学、物理学、技术与社会组织中的演化》，Doubleday，纽约，2012。[4] A. Bejan，自然与社会中的构形定律，载于：《社会动力学构形理论》，施普林格，马萨诸塞州波士顿，2007年，第1–33页。[5] A. Bejan、V. Bˇadescu和A. De Vos，经济学构形理论，《应用能源》67（2000）37–60。https://doi.org/10.1016/S0306-2619(00)00023-4[6] A. Bejan、V. Bˇadescu和A. De Vos，经济学构形理论：时空结构生成，《能源转换与管理》41（2000）1429–1451。https://doi.org/10.1016/S0196-8904(99)00129-5[7]A. Bejan和S. Lorente，构形理论及其与绿色能源的关联，《国际绿色能源期刊》4 （2007）105–117。https://doi.org/10.1080/15435070701315914[8] A. Bejan和S. Lorente，自然中的构形定律与设计演化，《生命物理学评论》8 （2011）209–240。https://doi.org/10.1016/j.plrev.2011.05.010

[9]A. Bejan和S. Lorente，设计与演化的构形定律：物理学、生物学、技术与社会，《应用物理学杂志》**113** （2013）151301。https://doi.org/10.1063/1.4798429

[10] S. Lorente 和A. Bejan，构形定律与演化设计的当前趋势，《传热学——亚洲研究》**48** （2019）3574–3589。https://doi.org/10.1002/htj.21534[11] L. A. O. Rocha、S. Lorente 和 A. Bejan（编），构形定律与设计的统一原理，施普林格，纽约，2012。

[12]A. Bejan、M. R. Errera 和 U. G¨une¸s，周期性经济增长的能量理论，《国际能源研究杂志》**44** （2020）5231–5242。https://doi.org/10.1002/er.5203

[13] R. Poudel, J. McGowan, G. Y. Georgiev, E. Haven, U. G¨une¸s, 《热力学2.0：连接自然科学与社会科学》, 《皇家学会哲学汇刊*A*辑》**381** (2023) 20220292。https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0292[14] M. Reini, 《构形定律与热经济学》, 《国际热与技术期刊》**34** (2016) S141–S146。https://doi.org/10.18280/ijht.34S118[15]U. G¨une¸s, 《能量输运与利用中的构形定律》, 《国际传热与传质通讯》**156** (2024) 107591。https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2024.107591[16] A. Bejan, G. Tsatsaronis和M. Moran, 《热设计与优化》, 威立，纽约，1996年。[17] F. H. Clarke, 《优化与非光滑分析》, Wiley-Interscience，纽约，1983年。[18] A. F. Filippov, 《具有不连续右端项的微分方程》, Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1988年。https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9[19]M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys和P. Kowalczyk, 《分段光滑动力系统：理论与应用》, 施普林格，伦敦，2008年。https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4[20]J. Cort´es, 《不连续动力系统：解、非光滑分析与稳定性教程》, 《*IEEE*控制系统杂志》**28** (2008) 36–73。https://doi.org/10.1109/MCS.2008.929096[21] W. Lohmiller和J.-J. E. Slotine, 《非线性系统的收缩分析》, 《自动化》**34** (1998) 683–696。https://doi.org/10.1016/S0005-1098(98)00019-3[22] P. Stiefenhofer, 《平面中非光滑周期轨道的经济稳定性：ω极限集第一部分》, 《非线性分析与微分方程》**8** (2020) 41–52。[23] P. Stiefenhofer和P. Giesl, 《经济周期轨道：指数渐近稳定性理论》, 《非线性分析与微分方程》**7**(2019) 9–16。

[24] P. Stiefenhofer, 《平面Filippov系统的谱收缩框架：非光滑周期轨道的存在性与稳定性》, 《高级数学科学通讯》8(2025年) 189–209。
https://doi.org/10.33434/cams.1729696[25] P. Stiefenhofer, 《复空间中非光滑周期轨道的指数稳定性》, 《物理学快报*A*》560 (2025年) 130935。
https://doi.org/10.1016/j.physleta.2025.130935[26] J.-P. Aubin, 《微分包含：集值映射与可行性理论》, 施普林格, 柏林, 1983年。

[27]T. Lorenz, 状态约束下的形状演化：可行性定理, 《数学分析与应用杂志》340（2008）1204–1225。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.08.030

[28] O. Carja、M. Necula 和 I. Vrabie（编）, 《可行性、不变性与应用》, Elsevier, 2007。

[29] L. A. O. Rocha、A. Bejan 和 E. Lorente, 用于冷却发热体积的树状热流路径的构形设计, 《国际传热与传质期刊》, 49（2006）, 1028–1037。

[30] A. H. Reis, 流域标度律的构形视角, 《地貌学》, 78（2006）, 201–206。

[31] P. Soni、A. Bejan 和 E. Lorente, 树状流动网络构形设计的数学分析, 《皇家学会会刊A辑》, 476（2020）, 20200377。

[32] C. Zhang、L. A. O. Rocha 和 A. Bejan, 树状微通道网络流动沸腾传热的构形设计, 《InternationalJournalofHeatand MassTransfer》, 54 (2011), 3249–3258。

[33] A. A. Ariyo、L. A. O. Rocha 和 E. Lorente, 微通道散热器中过冷流动沸腾的构形设计, 《International Journalof Heat and Mass Transfer》, 152 (2020), 119489。

[34]D. O. Ariyo 和 T. Bello-Ochende, 用于高热流密度冷却的两相堆叠式微通道换热器构形设计, 《Inter- national Communications in Heat and Mass Transfer》, 125 (2021), 105294。https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105294

[35]A. Arshad, 基于相变材料的构形设计翅片散热器：面向热管理的演化设计, 《国际传热传质通讯》, 161（2025年）, 108379.
https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2024.108379[36] S. Lorente与A. Bejan, 构形定律与演化设计的当前趋势, 《亚洲传热研究》, 48(8)（2019）, 3574–3589.
https://doi.org/10.1002/htj.21556

A 附录

A.1 模型、理论与应用中的构形定律

表 2 给出了以下各项之间的结构对应关系：

（i）构形定律的条款，（ii）这些条款在自治菲利波夫模型中的表示，（iii）这些条款在耗散–不变性–收缩选择理论中的实现，以及（iv）这些条款在贝扬面积到点层级中的具体实例。

这种对应关系并非启发式，而是结构性的：经典构造比表现为Filippov包含的切换流形和滑动不变集；阻力耗散驱使轨迹趋近平衡集；一致收缩则使该集合收敛为单一的全局吸引架构。

表2：构形定律在模型、理论和应用中的结构嵌入。

构形条款	**模型级公式-tion**	**理论级实现-tion**	**Bejan 面积到点实例化**
有限尺寸系统	可行的架构集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 紧（假设 2.5）	紧性确保有界轨迹，ω极限集的存在性，以及……的下有界性 $\mathcal{R}$	已服务区域单纯形域 $\mathcal{K} = \{A \geq 0 : \sum_i A_i \leq A_{\max}\}$（紧可行域）
随时间持续存在	正向不变性：$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$	可行性（Nagumo 条件-tion）蕴含全局向前存在性和可行性性	非负性和总面积约束得以保持在层级的 dy-动力学
Flow with 系统守恒流	分离 of time 尺度：快速输运 $\Rightarrow$ 诱导电阻 $\mathcal{R}(x)$	适定运输问题 局部诱导利普希茨全局阻力泛函	均匀的生成 γ：水平流 $m_i = \gamma A_i$ 满足守恒
演化其配置-uration	自治 Filippov 包含 $\dot{x} \in F(x)$，带有状态切换	绝对的存在性连续轨迹经过不连续性通过凸化	分段细化—化/聚合跨越尺度阈值
约束 be-变为紧约束	切换超曲面 $\Sigma_i = \{h_i(x) = 0\}$, $\nabla h_i \neq 0$	状态空间被划分进入光滑区域；Fil-ippov 沿着 Σ_i 滑动	构形 ra-tios 定义 $h_i(A) = n_{i+1,\ \mathrm{opt}} - A_{i+1}/A_i$；比率流形是切换的 sets
逐渐更容易的可达性	全局阻力泛函 $\mathcal{R} : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	**耗散不等式：** $\dot{\mathcal{R}}(x(t)) \leq -\alpha\Psi(x(t)) \leq 0 \Rightarrow$ 单调衰减和 $\omega(x_0) \subseteq \mathcal{E}$	$\mathcal{R}$等于总传输阻力；Ψ 层级间失衡（偏离构形比）测量
运行 at 阈值	滑动运动：$\exists v \in F(x)$与 $\langle \nabla h_i(x)\ v \rangle = 0$	滑动不变 sets 与耗散相容通过 $\mathcal{R}^\circ$的凸性	构形比 man-流形 $\mathcal{M}_i = \{A : A_{i+1}/A_i = n_{i+1,\ \mathrm{opt}}\}$ 是滑动不变集
架构选择	在加权度量（As-假设 2.13）	**增量稳定性：** $\|x(t) - y(t)\| \leq Ce^{-\nu t}\|x(0) - y(0)\| \Rightarrow$ 唯一不变集	唯一全局吸引的 ing 层级（定-rem 2.18）
被选择的是	构形架-构：唯一全局吸引平衡态	耗散 +拉萨尔 + 收缩：$x^* \in \mathcal{E}$ 和唯一	选定层级满足所有动态活跃的构形比；交截 $\mathcal{E} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{act}}} \mathcal{M}_i$
鲁棒性	一致的度量等价性（紧集上） K	指数稳定性：扰动衰减 at 速率 ν	层级在……之后重新形成内部的可容许冲击 $\mathcal{K}$