勘误与补遗：一阶领域中的范畴性类性质

Ali Enayat* Mateusz Łełyk†

2026年3月10日

arXiv:2603.06711v1 [math.LO] 5 Mar 2026

1 引言

本文是对我们的论文 [6], 的补充，我们假定读者已备有该文以便随时查阅。第 2 节和第 3 节构成“勘误”部分；前者修正了 [6], 中定理39的证明，后者则给出了一个反例，针对的是证明 [6]中定理 77 时所用的一条引理。第 3 节是“补遗”部分，我们在其中提请读者关注相关的近期进展。

2 对 [6]中定理39的修正

[6] 中的定理39表述正确，但其证明存在两个缺陷。较严重的缺陷是，要使该定理的证明成立，需要用到 [6] 引理40的一个更强形式；这一更强的结果就是下面的定理3，其中的(b)部分对于证明 [6]中的定理39至关重要。另一个由 Zachiri McKenzie 发现的缺陷，涉及证明中所用版本的 KP（克里普克-普拉特克集合论）公理的量词复杂度：正确的复杂度是 Π_3，而不是Π_2。[1] 为方便读者，下面给出该定理经过修正的完整证明。

定理 1. 如果ZF 是一致的，那么对于每个 $n \in \omega$，以下结论成立：

(a) ZF^{Π_n} 并非坚实。
(b) ZF^{Π_n} 并非紧致。

证明。 我们的证明策略与 [6]中的定理25类似。假设 ZF 一致，根据哥德尔第二不完备定理以及哥德尔关于 $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ 的相对一致性证明，理论 $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{ZF}}$ 是一致的，因此由算术化完备性定理，存在一个可数模型 $\mathcal{M}_0$，使得：

(1) $\mathcal{M}_0 \models \mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{ZF}}$, and

(2) $\mathcal{M}_0$ 的初等图在 $\mathbb{N}$ （算术标准模型）中是可定义的；特别是，存在一个解释 $\mathcal{I}$，使得 $\mathbb{N} \trianglerighteq^{\mathcal{I}} \mathcal{M}_0$.

*哥德堡大学哲学、语言学与科学理论系，瑞典（电子邮件：ali.enayat@gu.se）。研究工作得到波兰国家科学中心（NCN）资助，资助编号 2019/34/A/HS1/00399。

†波兰华沙大学哲学学院（电子邮件：mlelyk@uw.edu.pl）。研究工作得到波兰国家科学中心（NCN）资助，资助编号 2022/46/E/HS1/00452。[1]除 Coll(Δ_0) 外（在采用库拉托夫斯基配对的情况下，它等价于 Coll(Σ_1)），KP 的所有其他公理都可以表示为 Π_2-句；然而，正如 McKenzie 的一项近期结果所示 [13, 定理 4。9], Coll(Δ_0) 甚至不能表示为一组 Σ_3-句。请注意，可以使用针对 Π_3-公式的 Π_3-满足谓词来证明 KP 可由单个 Π_3-句公理化，但这里不需要这一精细化结果。

与算术情形一样，给定 $n \in \omega$，令 $K_n(\mathcal{M}_0)$表示 $\mathcal{M}_0$ 的子模型，其宇宙由 $\mathcal{M}_0$ 中可通过一个 Σ_n公式在 $\mathcal{M}_0$ 中定义的元素组成。定理 1 的证明核心是以下结果，它是 [6]中定理 24 的集合论类比。

Th定理 2. 设 $\mathcal{M}_0$ 和 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 如上所述。以下陈述对每个 $n \geq 3$都成立 :

(a) $\mathbb{N}$ 与 $K_n(\mathcal{M}_0)$双可解释。

(b) $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$与$\mathrm{Th}(K_n(\mathcal{M}_0))$双可解释。

定理 2 (a) 部分的证明基于下面的定理 3，它是算术模型论中一个基本结果的集合论类比（ [6] 的定理 22）。这个集合论类比的证明需要更多努力才能确立，因为在算术情形中，宇宙的良序 $<$ 具有一个 Δ_0-图，但在我们的语境中，我们需要依赖可构造宇宙 L 的良序 $<_{\mathsf{L}}$ 的技术特征。

在下面定理的 (c) 部分中，Coll(Σ_{n+1}) 是集合论中 Σ_{n+1}-公式的收集模式，其实例形式如下:

$$(\forall x \in a\ \exists y\ \sigma(x,y)) \to (\exists b\ \forall x \in a\ \exists y \in b\ \sigma(x,y))\,,$$

其中 σ 是一个 Σ_{n+1}公式，其参数被省略。另请注意，在下文定理的表述中，ZF$^-$ 表示 ZF $\setminus$ {幂集}。众所周知，发展可构造宇宙的基本性质并不需要幂集公理（例如，参见 [2]第二章第五节）。

定理 3. 对于任意模型 $\mathcal{M} \models \mathsf{ZF}^- + \mathsf{V} = \mathsf{L}$，下述结论成立，其中 $n \geq 3$。[2]

(a) $K_n(\mathcal{M}) \prec_{\Pi_n} \mathcal{M}$，因此 $K_n(\mathcal{M}) \models Th^{\Pi_{n+1}}(\mathcal{M})$。*(b)* $K_n(K_n(\mathcal{M})) = K_n(\mathcal{M})$，也就是说，$K_n(\mathcal{M})$中的每个元素都可由某个 Σ_n公式在 $K_n(\mathcal{M})$中定义。[3]*(c)* $K_n(\mathcal{M}) \models ZF_{\Pi_{n+1}} + \neg Coll(\Sigma_{n+1})$。

定理 *3* 的证明。设 $n \geq 3$，且 $\mathcal{M} \models \mathsf{ZF}^- + \mathsf{V} = \mathsf{L}$。另令 $<_{\mathsf{L}}$ 表示可构造宇宙的通常良序；众所周知，它可在理论 ZF$^-$ +V = L 中由一个 Σ_1公式定义。要证明 $K_n(\mathcal{M}) \prec_{\Sigma_n} \mathcal{M}$，根据初等性的塔斯基判别法，并利用可定义的 Δ_0配对函数（例如 Kuratowski 配对函数）将元素的有限元组编码为单个元素，只需证明:

断言（$*$）。若 $c \in K_n(\mathcal{M})$，且对于某个 Σ_n-公式 $\sigma(x,y)$，有 $\mathcal{M} \models \exists x\ \sigma(x,c)$，那么存在某个 $d \in K_n(\mathcal{M})$，使得 $\mathcal{M} \models \sigma(c,d)$。

为验证断言（$*$），假设 $c \in K_n(\mathcal{M})$，且 $\mathcal{M} \models \exists x\ \sigma(x,c)$，其中 $\sigma(x,c) = \exists y\ \pi(x,y,c)$，并且 π是一个 Π_{n-1}-公式。因此我们有:

$$\mathcal{M} \models \exists x\ \exists y\ \pi(x,y,c).$$

利用 Kuratowski 配对函数 $\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$，我们可以将上式写为:

$$\mathcal{M} \models \exists z\ \pi((z)_0\,,(z)_1\,,c),$$

其中 $z = \langle (z)_0\,,(z)_1\rangle$。利用 $<_{\mathsf{L}}$ 在 $\mathcal{M}$中良序宇宙这一事实，我们可以得出，对于某个 $d \in M$，$\mathcal{M} \models \psi(d,c) \wedge \exists! z\ \psi(z,c)$，其中:

$$\psi(z,a) := \overbrace{\pi((z)_1\,,(z)_2\,,c)}^{\psi_1(z,c)} \wedge \overbrace{\forall u <_{\mathsf{L}} z\ \neg\pi((u)_1\,,(u)_2\,,c)}^{\psi_2(z,c)}.$$

[2]正如 Zachiri McKenzie 所指出的，[11], Mathias 在 + V = L 的某些 ZF 片段的模型中，证明了定理 3 的内部版本。[3] 请注意，与 [6], 中的定理 22 不同，这里没有非标准性假设。

• 我们将证明， d 在结构（$\mathcal{M}$， c）中是 Σ_n-可定义的，方法是证明 ψ（z， c）在 $\mathcal{M}$ 中等价于带参数 c 的一个 Σ_n-公式 θ（z， c）。这足以证明断言（$*$），因为这样我们就可以利用 $c \in K_n$（$\mathcal{M}$）这一假设，消去参数 c，从而得到一个无参数的 Σ_n-公式 ψ^*（z），它在 $\mathcal{M}$中定义了 d。具体来说：

$$\psi^*(z) := \exists v \left[\theta(v) \wedge \psi(z, v)\right],$$

其中， $\theta(v)$ 是一个定义 $c$in $\mathcal{M}$ 的 Σ_n 公式。

$\psi(z,\ c)$ 的第一个合取项 $\psi_1(z,\ c)$ 等价于

$$\exists w_1\ \exists w_2\ \left[w = (z)_1 \wedge w = (z)_2 \wedge \pi((z)_1, (z)_2, c)\right],$$

因为 $w = (z)_i$ 是关于 $i \in \{0, 1\}$. 的 Δ_0 公式。根据假设， π 是一个 Π_{n-1} 公式，因此 $\psi_1(z,\ c)$ 在 $\mathcal{M}$ 中等价于一个 Σ_n 公式。因此，只需验证 $\psi(z,\ c)$ 的第二个合取项 $\psi_2(z,\ c)$ 也等价于 $\mathcal{M}$ 中一个 Σ_n 公式（参数为 c），证明便告完成。[4] 事实上，我们将证明得更强： $\psi(z,\ c)$ 等价于 $\mathcal{M}$ 中一个 Σ_{n-1} 公式（参数为 c）。为此，我们需要重新考察哥德尔设计可构造宇宙 L 的典范良序 $<_{\mathsf{L}}$ 时所采用的具体方法。以下两个事实广为人知，详见 Jech 教科书第 188–190 页 [10]:

(1) $\mathsf{L} := \bigcup L_\alpha$，且 $<_{\mathsf{L}} := \bigcup <_\alpha$，其中 $<_\alpha$ 良序 L_α 对每个 α，且映射$_{\alpha\in\text{序数类}}$ $_{\alpha\in\text{序数类}}$

$$\alpha \mapsto L_\alpha \text{ and } \alpha \mapsto <_\alpha$$

均为 $\Delta_1^{\mathsf{ZF}^-}$。

(2) 若 $\alpha \in \beta \in$ 序数类，则 $<_\alpha$ 被末端扩张于 $<_\beta$，即，

(i) $(x <_\alpha y) \to (x <_\beta y)$; and
(ii) $(x \in L_\alpha) \wedge (y \in L_\beta \setminus L_\alpha) \to (x <_\beta y)$.

注意，这表明若 $z \in L_\alpha$ 且 $u <_{\mathsf{L}} z$，则 $u \in L_\alpha$.

事实(1)和(2)蕴含 $\mathcal{M} \models \forall u\ [(u <_{\mathsf{L}} z) \leftrightarrow (u <_\alpha z)]$,，其中 $u <_\alpha z$ 是 $\langle u,\ z\rangle \in <_\alpha$.的简写。由此可见，$\psi_2(z,\ c)$等价于如下公式:

$$\exists\alpha\ \exists r\ \exists w\ \left[\mathsf{Ord}(\alpha) \wedge (r = <_\alpha) \wedge (w = L_\alpha) \wedge (z \in w) \wedge \forall u \in w\ \left((\langle u, z\rangle \in r \to \neg\pi(u, c))\right]\right.$$

经直接检验，上述为 Σ_{n-1} （以参数c计），如下计算所示:

$$\overbrace{\exists\alpha\ \exists r\ \exists w\ \left[\overbrace{\underbrace{\text{序数类}(\alpha)}_{\Delta_0} \wedge \underbrace{(r = <_\alpha)}_{\Delta_1} \wedge \underbrace{(w = L_\alpha)}_{\Delta_1} \wedge \underbrace{(z \in w)}_{\Delta_0} \wedge \forall u \in w \left(\underbrace{\underbrace{(\langle u,\ z\rangle \in r}_{\Sigma_1} \to \underbrace{\neg\pi(u,\ c)}_{\Sigma_{n-1}}}_{\Sigma_{n-1}\text{(依据收集公理 } n\geq 3)}\right)}^{\Sigma_{n-1}\ (n\geq 3)}\right]}^{\Sigma_{n-1}\ (n\geq 3)}.$$

[4]注意， $\psi_2(z,\ c)$ 很容易表示为 Π_n-公式（当 $n \geq 3$ 时），因为 $<_{\mathsf{L}}$ 有一个 Σ_1-定义，但这一事实对我们这里并无帮助。

至此，定理 3 的 (a) 部分得证。注意，(b) 部分是 (a) 部分的直接推论。因此，我们现在转而证明 (c)。

为了证明 Coll(Σ_{n+1}) 在 $K_n(\mathcal{M})$ 中不成立，我们首先需要讨论 Σ_k-满足在 ZF 的 片段中的可定义性问题（自 Levy 的开创性工作以来，人们已经知道，在完整的 ZF 中，对每个 $k \geq 1$ 都存在一个 Σ_k-可定义的 Σ_k-满足类）。通过考察 McKenzie 的 [12], 中 KP 内的定义 2.9 和 2.10 即可看出，对每个 $k \geq 1$ 都存在一个 Σ_k-可定义的 Σ_k-满足类；Mathias 在 [11, 第 156] 页对此构造给出了更多细节。这里 KP 表示克里普克-普拉特克集合论。在我们的表述中（遵循以 Mathias[11] 为代表的近期做法），基础模式仅限于 Π_1-公式（等价地：针对 Σ_1-公式的 $\in$-归纳模式）。因此，与 Barwise 在 [2], 中包含完整基础模式的 KP 不同，我们版本的 KP 由一组 Π_3-语句公理化（如前所述）。

有了上述预备知识，定理 23 的 (a) 部分以及 KP 的 Π_3-可公理化性清楚地表明，对于 $n \geq 3$， $K_n(\mathcal{M}) \models$ KP。这使我们确信，在 $K_n(\mathcal{M})$ 中存在一个针对 Σ_n-公式的 Σ_n-满足谓词。考虑函数 f，它将 $K_n(\mathcal{M})$ 中每个 Σ_n-公式（的编码）映射为 0，如果没有元素满足 $\sigma(x)$；否则映射为满足 $\sigma(x)$ 的最小 $<_{\mathsf{L}}$-元素。由于在 $K_n(\mathcal{M})$ 中存在针对 Σ_n-公式的 Σ_n-可定义满足谓词，以及 $<_{\mathsf{L}}$ 的 Σ_1-可定义性， f 的图像显然可由一个 Σ_{n+1}-公式定义。注意， f 的定义域是 $K_n(\mathcal{M})$ 中的一个集合，但其值域是整个 $K_n(\mathcal{M})$。因此 Coll(Σ_{n+1}) 在 $K_n(\mathcal{M})$ 中不成立。至此完成定理 3 的 (c) 部分的证明。

□

在定理 1 证明的开头，我们看到，我们的模型 $\mathcal{M}_0$ of ZF + V = L 不仅可以在 $\mathbb{N}$中解释，而且具有更强的性质： $\mathcal{M}_0$ 的初等图是算术的。因此，模型 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 也可以在 $\mathbb{N}$中解释。下一个结果表明，反过来，当 $n \geq 3$时，$\mathbb{N}$ 可以在 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 中解释。

引理 4. 标准截段 ω 可在 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 中定义，其中 $n \geq 3$。

证明。 注意， $K_n(\mathcal{M}_0)$ 是 ω-非标准的，因为 $\mathcal{M}_0$ 满足 $\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{ZF}}$，而 $\mathcal{M}$ 中 ZF 的最短矛盾证明有一个 Σ_1-定义，因而属于 $K_n(\mathcal{M}_0)$。因此，类似于 [6], 中定理 23 的证明，并借助定理 3 的 (b) 部分，我们有： i 是 $\omega^{K_n(\mathcal{M}_0)}$ 的一个非标准成员，当且仅当 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 的每个元素都可由一个低于 i的 Σ_n-公式定义。由于 $K_n(\mathcal{M}_0)$ 中的 Σ_n-满足谓词可定义，这一点可以用一阶语言表达。

□

定理 *2* 的证明。 如前所述，我们有一个解释 $\mathcal{I}$，使得 $\mathbb{N} \trianglelefteq^{\mathcal{I}} \mathcal{M}_0$。另一方面，引理 4 给出一个解释 $\mathcal{J}$，使得 $\mathcal{M}_0 \trianglelefteq^{\mathcal{J}} \mathbb{N}$。与 [6] 中定理 24 第 (a) 部分的证明所用的相同推理表明，解释 $\mathcal{I}$与 $\mathcal{J}$见证了 $\mathbb{N}$与 K_n 的双重可解释性（$\mathcal{M}$）。

于是定理 2 的第 (b) 部分随之成立，因为第 (a) 部分中双重可解释性的证明是统一的。

□

有了定理 2，我们终于可以完成定理 1 的证明。根据定理 3，给定$2 \leq n < k$， $\mathbb{N}$ 与 $\mathsf{ZF}_{\Pi_n} + \neg$Coll($\Sigma_{n+1}$) 的一个模型双可解释，并且 $\mathbb{N}$ 也与 ZF^{Π_k} 的一个模型双可解释。容易看出，对所有 n， Coll(Σ_n) 的复杂度至多为 Π_{n+3}。因此，通过选取$k \geq n+3$， Coll(Σ_n) $\in \mathsf{ZF}^{\Pi_k}$，这进而表明 ZF^{Π_n} 不是坚实的。[5] 为了看出 ZF^{Π_n} 不是紧致的，我们使用类似的推理，并利用定理 2 的第 (b) 部分。至此完成定理 1 的证明。

□

注 5. 就定理 1 而言，我们本可以将定理 3 表述为关于 ZF + V = L 模型的定理。我们之所以选择将该定理表述为关于 ZF^- +V = L 模型的定理，是因为要证明 [6]的定理 38，需要这个更一般的版本。

[5]事实上，这里我们甚至可以选择 $k \geq n+2$。这是因为 Coll(Σ_{n+1}) 等价于 Coll(Π_n)（利用合并连续存在量词的技巧），并且正如在 [13, 引理 3.1], 的证明中所验证的， Coll(Π_n) 可以表示为一组 Π_{n+2}-句子。

3 对 [6]定理 77 的更正

[6] 的定理 77 指出，纲领模板 $\tau_{\mathsf{Repl+Tarski}}$ 既是 g-坚实的，又是强内范畴的。

- 我们撤回关于 [6] 定理 77正确性的断言，因为其证明中使用的一个引理（ [6]引理 79）已被证明是错误的，具体情况我们将予以说明。截至本文撰写之时，我们既没有 [6], 定理 77的替代证明，也没有证明其错误性的反例。

- 在 [9] 中已验证，哥德尔–伯奈斯类论 GB 证明了，$\tau_{\mathsf{Repl+Tarski}}$ 的任意两个满模型都是同构的；根据 [9] 中的定义，这相当于确立了$\tau_{\mathsf{Repl+Tarski}}$ 在τ_{Repl}中是范畴的。我们强调，通过在元理论（GB）中假设所有类函数的替代公理，可以避免上述项目符号中所指出的问题。

以下是上述有问题的引理的陈述:

断言 6 (错误)。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是ZF 的模型，使得 $\mathcal{K}$ 的宇宙 K 是 $\mathcal{M}$ 的宇宙 M 的子集（因此 $\mathcal{K}$ 的属于关系 $\in^{\mathcal{K}}$ 是 M^2的子集）。此外，假设对于 M的每个参数可定义子集 D，（$\mathcal{K}$，$D \cap K$） $\models$ ZF（P），其中 $D \cap K$是一个新的一元谓词，由 $\mathcal{M}$解释。那么，以下三个条件中恰有一个成立:

(1) 存在一个$(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-可定义同构，介于 $\mathcal{K}$ 与$(V_\kappa, \in)^{\mathcal{M}}$ 之间，其中κ 是 $\mathcal{M}$的某个强不可达基数。

(2) 存在一个$(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-可定义同构，介于 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{M}$之间。*(3)* 存在一个$(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-可定义嵌入，将 $\mathcal{M}$ 嵌入为 $\mathcal{K}$的一个真秩初始片段。

我们现在给出断言 6 的一个反例。设 $\mathcal{K}$ 是ZFC的一个 ω-标准模型，并设 U 是 $\mathcal{K}$ 的一个元素，使得陈述“U 是 $\mathcal{P}(\omega)$上的非主超滤子”在 $\mathcal{K}$中成立。设 $\mathcal{M}$是 $\mathcal{K}$ 模 U 的内部超幂，其元素形如 $[f]_U$，其中 f 是 $\mathcal{K}$ 中满足$\mathcal{K} \models f\colon\ \omega \to V$的某个元素，且 $[f]_U$是 f的 U-等价类。众所周知，超积的Łoś定理的下述类似结果 [3] 在此情形下成立（这得益于 $\mathcal{K}$中选择公理的可用性）。

定理 7。 对于集合论的一阶语言中的所有 m元公式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{m-1})$，以及所有 m元组$\langle f_i\colon\ i < m\rangle$，其中 $\mathcal{K} \models f_i\colon\ \omega \to V$对每个$i < m$都成立，以下结论成立:

$$\mathcal{M} \models \varphi([f_0]_U, \cdots, [f_{m-1}]_U) \ \ \textit{iff} \ \ \mathcal{K} \models \Big[\{n \in \omega : \varphi\,(f_0(n), \cdots, f_{m-1}(n))\} \in U\Big].$$

对于每个 $k \in \mathcal{K}$，令$\underline{k}$ 为 $\mathcal{K}$ 中定义域为 ω、常值为 k 的常值函数。上述定理保证映射 $j\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$（由 $j(k) = [k]_U$ 给出）是一个初等嵌入，因此，将 $\mathcal{K}$ 与 j 的像等同后，我们可以将 $\underline{\mathcal{M}}$ 看作 $\mathcal{K}$ 的一个初等扩张。[6]

令 id 为从 ω 到其自身的恒等映射（按照 $\mathcal{K}$ 的意义）。由于 U 被选为非主的，U 的每个成员在 $\mathcal{K}$ 看来都是 ω 的无界子集。因此，根据定理 7, $[\,, \mathrm{id}]_U$ 大于所有标准自然数，故 $\mathcal{M}$ 是 ω-非标准的。利用定理 7，以及 U 是 $\mathcal{K}$ 的成员这一事实，也很容易看出，$\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{M}$ 的保守初等扩张；也就是说，$\mathcal{M}$ 的每个参数可定义子集与 $\mathcal{K}$ 的交集，都是 $\mathcal{K}$ 中的参数可定义子集。后一性质保证 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{M}$ 满足断言 6 的假设。然而，由于 $\mathcal{K}$ 是 ω-标准的，而 $\mathcal{M}$ 是 ω-非标准的，断言 6 的三个条件均不满足。

[6]利用斯科特技巧，$\mathcal{M}$ 可通过保恒等解释在 $\mathcal{K}$ 中参数可解释，但这一事实在此处的证明中并不起作用。

4 最新进展

本节简要介绍 [6] 中探讨主题的最新进展。

1. 在 [6], 的定理 16 中，我们证明了两个理论 $\mathsf{Z}_2 + \Pi^1_\infty$-AC 和 $\mathsf{ZF}^- + \forall x\ |x| \leq \aleph_0$ 并非定义等价（尽管它们是双可解释的）。我们的论文发表后，Meadows 和 Chen [4] 给出了这一事实的另一种证明，其优点在于概念上更为简单，而且与我们的证明不同，它不依赖于不可达基数存在这一命题与 ZFC 的相容性。他们的证明基于这样一个洞见：Z_2 的每个模型都带有一个可定义的全局线性序；相比之下，$\mathsf{ZF}^- + \forall x\ |x| \leq \aleph_0$ 被证明在[4] 中具有缺少可定义全局线性序的模型（通过力迫得到）。

2. Gruza、Kołodziejczyk 和 Łełyk 的近期手稿 [8] 包含若干结果，其中构造了皮亚诺算术 PA 的各种真子理论，以展示各种类范畴性概念之间的区分。该论文还证明，对于任意固定的 $n \in \omega$，都存在一个坚实的皮亚诺算术 PA 子理论，它扩张 $\mathrm{I}\Sigma_n$，且皮亚诺算术 PA 在其中不可解释，从而为 $T =$ 皮亚诺算术 PA 的问题 B [6] 给出了有力的肯定回答。

3. Gruza 和 Łełyk 的最新手稿 [9] 进一步发展了 [6] 中关于内部范畴性的各种“类型”的研究。以下概述了该手稿的主要亮点：

(a) 系统研究范畴性结果对元理论以及在理论的图式呈现中纳入参数的依赖性。(b) 形式化“在某一序数高度以内范畴”的概念，并证明：足以确立二阶、三阶、四阶.....算术范畴性的手段，不足以确立 ZF 在某一序数高度以内的范畴性。(c) 证明如果 τ 是一个强内部范畴性图式（按 [6] 的意义），那么 $\tau[\mathcal{L}_\tau]$（即由所有以 $\mathcal{L}_\tau$-公式代入 τ 所得到的实例构成的理论）是坚实的。

4. 在近期的研究中，Meadows [14] 探讨了 Steel 的多宇宙理论的内部范畴性。

5. 范畴性式的紧密性概念已在集合论基础问题的探讨中发挥作用，Barton [1], 和 Meadows [15]近期的研究便是例证。

6. Elliot Glazer [7] 概述了 ZF 的片段 ZCR 的稳固性证明。ZCR 是在 ZC 中加入秩公理（此处记为 R）得到的，其中 ZC 是策梅洛集合论加上选择公理。秩公理指出，宇宙可以写成形如 V_α 的集合之并，其中 α遍历所有序数。ZR 是否为稳固理论仍是一个未决问题。

7. 第一作者近期发布了 [5]，探讨凯利-莫尔斯类理论（及其高阶变体）的稳固性。

参考文献

[1] Neil Barton. 元语义学与连续统假设。审稿中，可在 *PhilPapers* 上获取，2025。[2] Jon Barwise. 容许集与结构。数理逻辑展望。施普林格出版社，柏林-纽约，1975。可定义性理论的一种研究方法。[3] C. C. Chang and H. J. Keisler. 模型论，逻辑与数学基础研究第73卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，第三版，1990。[4] Jason Chen and Toby Meadows. 剖析定义等价。*arXiv*，2025。[5] Ali Enayat. 勘误与补遗：维瑟主题变奏。*arXiv*，2026。

[6] Ali Enayat and Mateusz Łełyk. 一阶领域中的范畴性类性质。《数学哲学杂志》，1:63–98，2024。[7] Elliot Glazer. MathOverflow（https://mathoverflow.net/users/109573/elliot-glazer）。[8] Piotr Gruza、Leszek Aleksander Kołodziejczyk 和 Mateusz Łełyk. 皮亚诺算术片段中的紧密性与稳固性。*arXiv*，2025。[9] Piotr Gruza 和 Mateusz Łełyk. 一阶模式的确定性性质。*arXiv*，2025。[10] Thomas Jech. 集合论。施普林格数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，千禧年版，2003。[11] A. R. D. Mathias. Mac Lane集合论的强度。《纯粹与应用逻辑年刊》，110(1-3):107–234，2001。[12] Zachiri McKenzie. 收集原理片段的相对强度。《数理逻辑季刊》第*65*卷，第80–94页，2019。[13] Zachiri McKenzie. 集合论中的Kaufmann-Clote问题。*arXiv*，2025。[14] Toby Meadows. 内部范畴性与脱殊多重宇宙。*arXiv*，2025。[15] Toby Meadows. 羊与狼：集合论中的等价与分歧。《符号逻辑通报》。*2025*；*31(4)*，第619–685页，2025。