国家—社会互动模型中的近临界内部动力学

Kerime Nur Kavadar[a], Ali Demirci[a], * 和 Furkan EmreIsik[a]

[a]伊斯坦布尔理工大学理学院数学系，土耳其伊斯坦布尔，*34469*

文章信息

关键词：竞争型 Lotka–Volterra 系统 内部平衡点 近临界动力学 暂态行为。

摘 要

我们研究一个描述国家权力与社会力量之间相互作用的归一化二维竞争型 Lotka–Volterra 系统。将注意力限制于正向不变域$[0,1]^2$,，分析聚焦于内部平衡动力学，其中共存作为唯一的长期结果持续存在。我们表明，当相互作用参数接近共存阈值 $a_{12}a_{21} \to 1^-$时，向平衡的收敛变慢，轨迹表现出延长的暂态动力学。在这一近临界机制中，尽管不存在双稳态，轨迹仍围绕平衡流形组织成一条狭窄走廊。走廊结构可通过平衡差距和相互作用阈值进行定量表征。数值模拟说明了非对称调整如何影响这些暂态机制的几何形态与持续性。

1. Introduction

竞争型洛特卡－沃尔泰拉系统源于Volterra [1] 的开创性工作，并构成一类用于研究相互抑制下的相互作用、支配与共存的经典非线性动力学模型。其定性理论在动力系统文献中得到了广泛发展，尤其是针对低维竞争流 [2, 3], ，而归一化表述常被用于分析有界相互作用动力学[4]。

除生物学应用外，竞争动力学也被用于政治经济学，以描述国家能力与社会权力之间的相互作用。Acemoglu 和 Robinson [5]，是一项重要研究，他们区分了弱国家、专制国家和包容性国家，并强调包容性政体——其特点是相互制约与共存——既理想，也内在脆弱。相关研究指出，制度能力、政治激励和集体约束共同塑造长期结果 [6, 7, 8]。

在这类文献中，脆弱性往往与政体转变或双稳态相关联。然而，连续时间竞争系统揭示了一种不同的机制：在单一共存状态内部，吸引力减弱和暂态动力学延长也可能导致脆弱性。在这种情况下，平衡仍然唯一且局部稳定，但轨迹在收敛之前可能会长时间停留在中间状态附近。

受这一视角启发，我们研究定义在正向不变单位正方形上的归一化二维竞争型 Lotka–Volterra 系统。只要满足共存条件 $a_{12}a_{21} < 1$ ，模型就存在唯一的内部平衡点。我们的分析聚焦于相互作用参数趋近阈值 $a_{12}a_{21} \to 1^-$ 时的近临界状态。在此极限下，雅可比矩阵的行列式变小，造成显著的时间尺度分离：轨迹迅速收缩至低维吸引方向，随后缓慢演化至平衡。

这一几何机制会产生延续较长时间的暂态阶段，在此期间，两个状态变量长时间保持彼此接近。我们将相空间中的这一区域称为狭窄走廊。这一现象为国家—社会互动中的脆弱平衡提供了连续时间动力学解释：共存仍是唯一的渐近结果，但在接近共存阈值时，收敛速度可能变得任意缓慢。数值示例展示了互动不对称性和调整率如何影响这类走廊状暂态的持续时间与结构。

*通讯作者kavadar20@itu.edu.tr (K.N. Kavadar); demircial@itu.edu.tr (A. Demirci); isikf17@itu.edu.tr (F.E. Isik) 开放研究者与贡献者身份识别码：0000-0002-9144-5691 (A. Demirci)

2. Model and preliminaries

我们考虑一个二维竞争动力系统，用以描述两个总量之间的互动，分别记为 $L(\tau)$ (国家权力)和 $S(\tau)$ (社会力量)，其中 τ 表示无量纲时间。在本研究中，我们假设两个变量均已归一化，因此

$$0 \le L(\tau) \le 1, \qquad 0 \le S(\tau) \le 1, \tag{1}$$

对于所有可容许的时间 $\tau \ge 0$。

这种归一化体现了一种建模视角：状态变量表示相对水平或强度，而非绝对量值。当关注点在于隐含容量约束下的有界相互作用动力学和相对优势时，这类表述尤其适用 [4]。因此，可容许相空间被限制在紧致域

$$\Omega := [0,1] \times [0,1]. \tag{2}$$

This 这一选择确保动力学始终局限于有限且易于理解的状态空间 e.

在这一归一化框架下，我们研究如下竞争系统

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\tau} &= L(1 - L - a_{12}S), \\ \frac{dS}{d\tau} &= \rho S(1 - S - a_{21}L), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $a_{12}, a_{21} > 0$ 表示交叉相互作用系数。参数 $\rho > 0$ 表示S 相对于 L的相对调整率，从而在系统中引入非对称时间尺度结构。这类模型自然地出现在具有自我限制和非对称适应机制的竞争型洛特卡–沃尔泰拉动力学中 [9]。

系统（3）的一个基本性质是，区域 Ω 是正向不变的。在边界 $L = 0$ 或$S = 0$上，相应的右端项为零，从而阻止轨迹通过坐标轴离开 Ω 。此外，在边界 $L = 1$ 和 $S = 1$上，向量场 fi指向内部。因此，在 Ω 中开始的解在所有未来时刻都保持在 Ω 内，而 Ω 构成分析所需的自然相空间。

系统（3）有三个边界平衡点，

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1), \tag{4}$$

以及一个可能存在的内部平衡点

$$E^* = (L^*, S^*), \tag{5}$$

条件是

$$a_{12}a_{21} < 1. \tag{6}$$

在这种情况下，内部平衡点为

$$L^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \qquad S^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}. \tag{7}$$

内部平衡点 E^* 位于 Ω°，条件是 $0 < a_{12} < 1$ 且 $0 < a_{21} < 1$，这确保了 L^* 和S^* 均严格为正。

尽管竞争型 Lotka–Volterra 系统从全局角度看可能表现出与相互竞争的边界吸引子相关的双稳态动力学 [10], ，但在当前框架中不考虑这类状态。引入归一化区域 Ω正是为了聚焦于内部动力学，在该区域内，两个变量始终严格为正，且远离退化状态。因此，边界平衡点对应的是极限构型，不被视为可接受的长期结果。

在上述参数限制下，内部平衡点 E^* 决定了始于 $\Omega^\circ = (0,1)x(0,1)$ 的轨迹的渐近行为。在 E^* 处计算得到的雅可比矩阵具有负迹和正行列式，这意味着其具有局部渐近稳定性 [9]。具体而言，

$$\det J(E^*) = \rho L^* S^* (1 - a_{12}a_{21}). \tag{8}$$

为量化与共存阈值的接近程度，我们引入小参数

$$\eta := 1 - a_{12}a_{21}. \tag{9}$$

状态 $\eta \ll 1$ 对应于接近共存边界的相互作用参数。在这一极限下，雅可比矩阵的行列式趋近于零，线性化的一个特征值的绝对值也趋近于零，这表明平衡点附近出现了慢动力学。

非对称时间尺度参数 ρ 不会影响平衡点的位置，但会通过控制 S 相对于 L的调整速度来影响暂态行为。这种影响在近临界状态下尤为显著，并将在下一节分析的暂态动力学中发挥重要作用。

3. Near-critical dynamics and corridor formation

现在，我们分析系统（3）在近临界状态下的暂态行为

$$\eta = 1 - a_{12}a_{21} \ll 1.$$

尽管内部平衡点 E^* 对于所有 $\eta > 0$都保持局部渐近稳定，但当 η 变小时，趋近平衡点的过程会发生定性变化。

内部平衡点处的雅可比矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -L^* & -a_{12}L^* \\ -\rho a_{21}S^* & -\rho S^* \end{pmatrix}.$$

其迹和行列式分别为

$$\operatorname{tr} J(E^*) = -(L^* + \rho S^*) < 0, \qquad \det J(E^*) = \rho L^* S^* \eta.$$

因此，特征值 $\lambda_{1,\ 2}$ 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(L^* + \rho S^*), \qquad \lambda_1 \lambda_2 = \rho L^* S^* \eta.$$

当 $\eta \to 0^+$ 时，一个特征值保持为 $O(1)$，而另一个则按 $O(\eta)$ 的尺度变化。这使得 E^* 附近的局部动力学呈现出明显而显著的时间尺度分离。

上述谱结构意味着，趋近平衡点的轨迹会经历两个截然不同的阶段：先快速收缩至一维吸引方向，随后沿该方向缓慢演化并趋近平衡点。

Proposition 3.1. 令 E^* 表示系统（3）的内部平衡点。对于 $\eta = 1 - a_{12}a_{21} \ll 1$，从 Ω° 出发的轨迹沿着 E^* 快方向趋近其邻域，随后在阶为 $O(\eta^{-1})$的慢时间尺度上收敛至平衡点。

这种行为是近临界竞争系统的典型特征：双曲性减弱会产生长暂态阶段，尽管唯一稳定平衡点仍然存在。

时间尺度分离导致相空间中轨迹呈现出几何组织。在初始的快速收缩之后，解会在很长的时间区间内被限制在一个狭窄区域中，在最终趋近平衡之前，两个状态变量始终彼此接近。

我们将这个瞬态区域称为狭窄走廊。重要的是，该走廊并不对应于不变集或另一种吸引子。相反，它源于流的近临界几何，以及与小特征值相关联的慢特征方向。

因此，尽管共存仍是唯一的渐近结果，但当 η 较小时，轨迹可能会在平衡态附近停留很长时间。这一机制为第 5 节数值模拟中观察到的相对平衡长期持续阶段提供了动力学解释。

4. Regime interpretation and political economy implications

本节从政治经济学的角度解读系统（3）的定性状态。尽管分析是在归一化动力学框架内进行的，但这些平衡构型可以从制度平衡与支配的角度作出自然的阐释。

系统（3）有三个边界平衡点， $(0,0)$、 $(1,0)$和 $(0,1)$，此外还可能存在一个内部平衡点$E^* = (L^*, S^*)$。从数学角度看，这些对应于退化的或极限稳态。然而，在政治经济学的解释中，它们代表极端的制度配置。figurations.

平衡点 $(0,0)$ 对应于两个组成部分同时崩溃，可将其解释为互动双方的制度能力或合法性均遭到瓦解。边界平衡点 $(1,0)$ 代表国家的单边支配，而 $(0,1)$ 则对应于社会的支配。这类角点结果通常与排斥性或攫取性制度安排相关，在这些安排中，平衡与相互制约均不存在。

在当前框架中，这些边界配置不被视为具有长期相关性的结果。引入归一化区域 Ω ，正是为了聚焦于双方行动者都保持活跃的内部动力学。因此，分析集中于内部平衡点 E^*，它代表国家与社会共存的制度状态。

重要的是，共存并不意味着对称。平衡水平 L^* 和 S^* 取决于交互系数 a_{12} 和 a_{21}，反映了两个行为者之间的不对称影响。因此，不同的参数值对应着国家倾向或社会倾向的状态，尽管两个组成部分始终严格大于零。

最有趣的动力学出现在接近共存阈值时。如第3节所示，当相互作用参数接近临界条件 $a_{12}a_{21} \to 1^-$ 时，系统进入近临界状态：线性化动力学的一个特征值变小，轨迹呈现出显著的时间尺度分离。解会迅速趋近一个低维吸引方向，随后缓慢演化至平衡。

这一几何机制会产生持续较长的暂态阶段，在此期间，两个组成部分彼此接近，之后才最终趋近平衡。我们将相空间的这一区域解释为平衡交互的 狭窄走廊 。在这条走廊内，共存得以维持，但在动力学上较为脆弱：微小扰动可能导致系统长时间偏离，之后才恢复平衡。

从政治经济学的角度来看，这种状态对应于国家与社会之间的平衡通过持续调整而非强大的恢复力得以维持的情形。由此产生的动力学体现了这样一种观点：包容性制度在长期内可能保持稳定，同时仍会呈现持续而脆弱的短期和中期波动。

5. Numerical illustrations

本节将展示3中的数值模拟，以说明归一化竞争系统的暂态动力学。所有模拟均在正向不变域 $\Omega = [0,1]^2$ 内进行，并采用非负初始条件。参数值经过选择，确保每种情形下都存在唯一的内部平衡点，这与解析结果一致。数值实验旨在直观展示相互作用参数如何影响暂态行为，尤其是在第3节所述的近临界状态下。

所有轨迹均使用 MATLAB 的 ode45 求解器计算，相对容差和绝对容差分别设为 RelTol=10^{-6} 和 AbsTol=10^{-8}。为了展示时间域中的走廊行为，我们引入一个基于两个状态变量之差的简单指标。令 (L^*, S^*) 表示内部平衡点。我们定义基于平衡点的容差

$$\varepsilon := |L^* - S^*|, \tag{10}$$

它衡量平衡点分量之间的内在不对称性。

利用这一量，我们引入归一化偏差

$$\gamma(\tau) = \frac{|L(\tau) - S(\tau)|}{\varepsilon}. \tag{11}$$

满足 $\gamma(\tau) \le 1$ 的时间区间对应于两个变量相对于平衡差距保持接近的阶段。该指标提供了一种便捷的数值方法，用于直观呈现第3节所讨论的近临界动力学所预测的走廊区域。

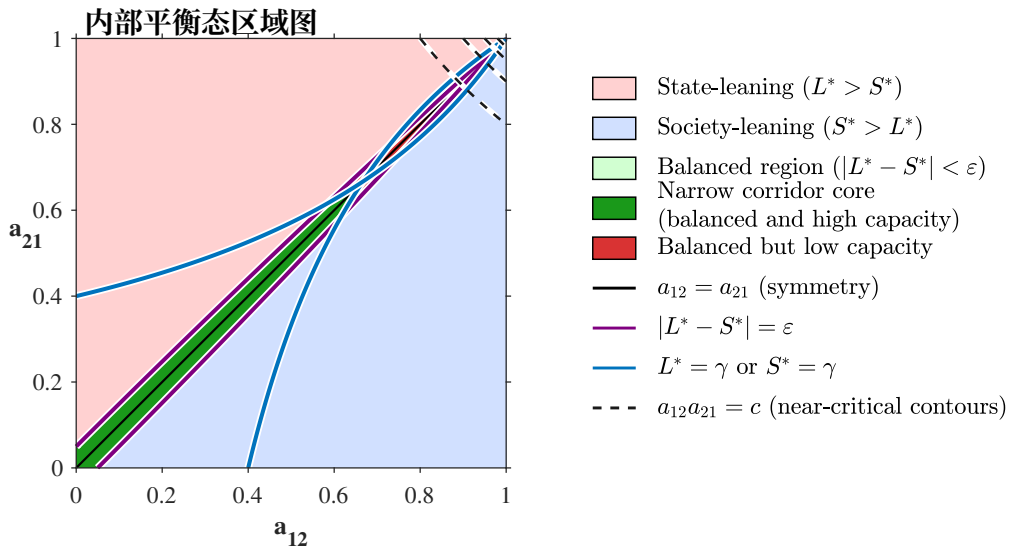


图1：基于系统 (3) 的显式内部平衡点 $E^* = (L^*, S^*)$，在相互作用参数平面 $(a_{12}, a_{21}) \in [0,1]^2$ 上绘制的内部平衡图。颜色表示基于平衡态的分类：偏向国家的区域（$L^* > S^*$）、偏向社会的区域（$S^* > L^*$），以及由 $|L^* - S^*| < \varepsilon$ 定义的平衡区域，其中 ε 表示走廊指标中使用的平衡差距。窄走廊核心区对应满足 $|L^* - S^*| < \varepsilon$ 以及 $\min\{L^*, S^*\} > \gamma$ 的平衡和高容量配置，而平衡低容量区域满足 $|L^* - S^*| < \varepsilon$ 和 $\min\{L^*, S^*\} \le \gamma$。叠加曲线表示对称线 $a_{12} = a_{21}$、平衡差距等值线 $|L^* - S^*| = \varepsilon$，以及容量等值线 $L^* = \gamma$ 和 $S^* = \gamma$，这些曲线划分了相应区域之间的转换。

我们首先概述系统在相互作用参数平面 $[0,1]^2$ 1 $(a_{12}, a_{21}) \in$ 上的平衡水平结构。图中展示了根据显式表达式得到的内部平衡点分布图

$$L^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \qquad S^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}},$$

每当$a_{12}a_{21} < 1$。

分类依据是两个平衡指标：差值 $|L^* - S^*|$ 和最小平衡水平$\min\{L^*, S^*\}$。当满足 $|L^* - S^*| < \varepsilon$时，即判定为平衡区域；而高容量平衡条件则由 $\min\{L^*, S^*\} > \gamma$给出，其中 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$ 是数值构造中选定的阈值。叠加对称线 $a_{12} = a_{21}$ 以及曲线 $|L^* - S^*| = \varepsilon$，并结合 $L^* = \gamma$ 或 $S^* = \gamma$，以标示相应状态之间的转变。

接下来，我们在图2中展示具有代表性的时域行为。首先考虑接近共存阈值的参数，

$$a_{12} = 0.48, \qquad a_{21} = 0.55, \qquad \rho = 1.$$

在这一配置下，内部平衡点严格位于 Ω内部，而相互作用参数仍足够接近共存边界，因此会产生较长的暂态阶段。相应的时间序列显示，在较长时间间隔内，$\gamma(\tau) \le 1$，这表明 $L(\tau)$和 $S(\tau)$ 在最终收敛到平衡之前仍彼此接近。这种行为与第3节所述近临界谱结构所关联的慢收敛机制一致。

我们还考察了有利于某一组成部分而非另一部分的参数配置。Fo r

$$a_{12} = 0.50, \qquad a_{21} = 0.70, \qquad \rho = 1,$$

暂态动力学表现为 $L(\tau)$ 暂时占据支配地位，随后收敛至内部平衡点。反之，当

$$a_{12} = 0.75, \qquad a_{21} = 0.45, \qquad \rho = 1,$$

轨迹呈现出 $S(\tau)$ 的暂态支配。

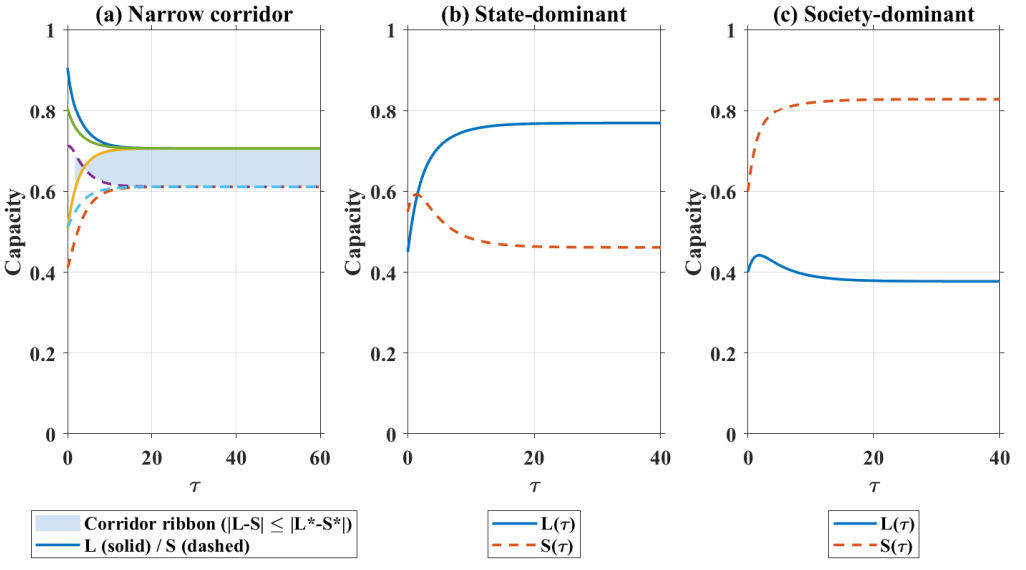


图2： 系统 (3)在不同相互作用结构下的暂态时间序列动力学 $\rho = 1$。面板 (a) 对应参数 $a_{12} = 0.48$ 和 $a_{21} = 0.55$，以及三组不同的初始条件，它们都接近共存阈值。轨迹呈现出较长的时间区间，在此期间走廊指标满足 $\gamma(\tau) \le 1$，这表明 $L(\tau)$和 $S(\tau)$在收敛前长时间保持接近。面板 (b) 和 (c) 展示了非对称相互作用状态。对于 $a_{12} = 0.50$， $a_{21} = 0.70$ 暂态动力学呈现出 $L(\tau)$ 的暂时支配；而对于 $a_{12} = 0.75$， $a_{21} = 0.45$ 轨迹呈现出 $S(\tau)$ 的暂态支配。所有情况下，长期行为均由同一个内部平衡点支配，而差异主要体现在暂态阶段的结构和持续时间上，这与第3节讨论的近临界动力学一致。

这些示例表明，交互系数的变化主要影响动力学的暂态结构。在所有情况下，长期行为仍由同一个内部平衡点决定，而暂态阶段的持续时间和特征则取决于与共存阈值的接近程度以及相互作用非对称性的程度。

Conclusion

我们研究了一个具有非对称调整的归一化竞争动力系统，重点关注正向不变域 $\Omega = [0,1]^2$ 内部平衡点的动力学。当相互作用参数接近共存阈值 $a_{12}a_{21} \to 1^-$ 时，平衡点仍保持局部稳定，但收敛速度会变慢。这种近临界状态会产生持久的暂态动力学，其围绕一个狭窄的近似平衡区域展开。由此形成的走廊状结构并非源于双稳态：共存仍是唯一的渐近结果，而轨迹会在较长时间内保持接近平衡。数值模拟展示了非对称调整如何影响这些暂态走廊的持续性和几何形态。

从政治经济学的视角来看，该模型对狭窄走廊理念作出了连续时间的诠释：即便竞争力量之间的平衡在动力学上仍然脆弱，这种平衡依然可以持续存在。在这一框架中，可以通过平衡差距和相互作用阈值对走廊进行定量刻画，从而提供一种数学判据，用以识别平衡何时变得脆弱却仍能持续。该模型的表述还启发了自然的扩展方式，例如加入更多相互作用的组成部分，以代表权力平衡中的第三个影响中心，

或者让相互作用参数随时间变化。从这个意义上说，简单的竞争性动力系统或可为量化并拓展制度平衡模型中的狭窄走廊概念提供一个易于处理的数学框架。

References

[1] V. Volterra，物种丰度波动的数学考察，《自然》118（1926）558–560。[2] M. Hirsch、S. Smale、R. Devaney，《微分方程、动力系统与混沌导论》（第2版），学术出版社，2004。[3] I. M. Bomze，Lotka–Volterra方程与复制子动力学：二维分类，《生物控制论》48（1983）201–211。[4] J. D. Murray，《数学生物学I：导论》，施普林格，2002。[5] D. Acemoglu、J. A. Robinson，弱国家、专制国家和包容性国家的兴起，美国国家经济研究局（2017），第w23657号。[6] T. Besley、T. Persson，国家能力的起源：产权、税收与政治，《美国经济评论》99（2009）1218–1244。[7] T. Besley、T. Persson，国家能力、冲突与发展，《计量经济学》78（2010）1–34。[8] D. Acemoglu，弱国家与强国家中的政治和经济，《货币经济学杂志》52（2005）1199–1226。[9] L. Perko，《微分方程与动力系统》（第3版），施普林格，2006。[10] J. Hofbauer、K. Sigmund，《演化博弈与种群动力学》，剑桥大学出版社，1998。