量子逻辑的三种固定维度可满足性语义

蕴含关系与一个显式分离子

Joaquim Reizi Higuchi，自然与环境项目，艺术与科学研究生院，日本放送大学，日本千叶1218237360@campus.ouj.ac.jp

arXiv:2603.06736v1 [cs.LO] 6 Mar 2026

2026年3月6日

摘要

我们比较固定有限维希尔伯特空间 $H = \mathbb{F}^d$ 上语言 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中命题公式的三种可满足性概念，其中 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。第一种是子空间格 $L(H)$上的标准希尔伯特格语义，其中交和并是全定义运算。第二种是全局交换投影语义，其中公式中出现的所有原子都由同一个两两对易投影算子族解释。第三种是局部偏布尔语义，其中二元联结词仅对可共测对有定义，并沿语法树逐节点检查定义性。

我们证明，对于每个固定的 $d \geq 1$,

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi)$$

对于每个公式 φ。然后我们给出显式公式

$$\text{SEP-1} := (p \wedge (q \vee r)) \wedge \neg\big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$$

该公式在每个 $d \geq 2$ 下都能在标准语义中满足，但在全局对易语义和部分布尔语义下均不可满足。因此，对于每个 $d \geq 2$，可满足性类满足

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subseteq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}, \qquad \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}},$$

然而，$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}}$ 与 $\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}$ 之间的确切关系仍未解决。本文的重点是语义比较，而非提出新的可行性归约或通用翻译定理。

1 引言

在有限维量子逻辑中，命题联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 至少有三种自然的解释方式。第一种是定义在希尔伯特空间子空间格上的标准希尔伯特格语义。第二种只考虑单个对易投影算子族，因此这些联结词是在一个布尔块内解释的。第三种采用投影算子的偏布尔代数，仅允许在可共测对上使用二元联结词。这三种语义密切相关，但并不相同；将它们混为一谈，会模糊本文实际证明的内容。

这一区分很重要，因为若干相近的既有研究已经涉及类似领域。Herrmann 证明，对于有限高度补模格与正交补模格，在维数至少为三的子空间格情形下，可满足性和等价关系的补与代数可行性多项式时间等价 [3]。因此，笼统地

声称仅凭标准希尔伯特格语义下固定维度的可行性归约便取得了新颖成果，并不恰当。Herrmann 和 Ziegler 为带对合的有限维子空间格发展了丰富的可定义性与转换方法 [4, 5]，因此，笼统声称实现了从域到格的转换，同样不是什么新成果。另一方面，Dawar 和 Shah 最近证明了 Kochen-Specker 部分布尔代数中可满足性的强复杂性定理，其中包括相关实数和复数情形下固定维度的实数存在理论完备性 [2]。该结果讨论的是部分布尔语义，而非标准希尔伯特格语义，因此应将其视为比较对象，而不能作为替代。

本文的贡献范围更窄，也更为简洁。我们对这三种语义进行了精确定式化，并证明了直接的蕴含链

$$\mathrm{COM} \Rightarrow \mathrm{PBA} \Rightarrow \mathrm{STD},$$

随后，我们通过一个显式公式将标准语义与另外两种语义区分开来。尚未解决的比较问题是：局部偏布尔语义是否确实比全局交换语义更宽松。

我们的主要结果如下。

（1）对于每个 $d \geq 1$ 和每个公式 φ，

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi).$$

（2）对于每个 $d \geq 2$，公式

$$\text{SEP-1} := (p \wedge (q \vee r)) \wedge \neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

满足

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\text{SEP-1}), \qquad \neg\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\text{SEP-1}), \qquad \neg\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\text{SEP-1}).$$

(3) 因此，

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}} \qquad \text{and} \qquad \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}$$

对每个 $d \geq 2$ 都成立，而 $\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}}$ 与 $\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}$ 之间的确切关系仍未确定 .

2 语法与三种语义

取域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和整数 $d \geq 1$。记 $H := \mathbb{F}^d$ 为其标准内积。令 $L(H)$ 表示 H 的线性子空间集合，令 $\mathrm{Proj}(H)$ 表示 H 上正交投影算子的集合。

定义 2.1 (公式)。 取一个可数的原子集合

$$\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}.$$

公式集合由以下语法生成

$$\varphi ::= p_i \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi).$$

不假定有常量，也不假定有额外的联结词。

定义 2.2 （标准希尔伯特格语义）。标准赋值是一个映射 L H v $\to$: Var ( )。对于这样的赋值，递归地定义 $[\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v \in L(\,)$ 如下：

$$[\![p_i]\!]^{\mathrm{STD}}_v := v(p_i), \qquad [\![\neg\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v := ([\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v)^{\perp},$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathrm{STD}}_v := [\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v \cap [\![\psi]\!]^{\mathrm{STD}}_v, \qquad [\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathrm{STD}}_v := [\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v + [\![\psi]\!]^{\mathrm{STD}}_v.$$

若存在标准赋值 v 使得，则记作 $\mathsf{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi)$

$$[\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_v \neq \{0\}.$$

注 2.3. 由于 H 是有限维的，每个线性子空间都自动是闭的，且两个子空间之和仍是一个子空间。因此上述并运算条款在$L(H)$内是良定义的。

定义 2.4 （全局交换投影语义）。 一个投影算子赋值 是映射v： $\mathrm{Var} \to \mathrm{Proj}(H)$。给定公式 φ, 这样的赋值*COM* 可容许于 φ，如果对每一对原子 p_i, p_j （出现在 φ 中）都有

$$v(p_i)v(p_j) = v(p_j)v(p_i).$$

若 v 对 φ 是 COM 可容许的，则定义 $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}} \in \mathrm{Proj}(H)$，对 φ 的每一个子公式 θ，定义如下

$$[\![p_i]\!]_v^{\mathrm{COM}} := v(p_i), \qquad [\![\neg\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}} := I - [\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}},$$

$$[\![\alpha \wedge \beta]\!]_v^{\mathrm{COM}} := [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}}\,[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}}, \qquad [\![\alpha \vee \beta]\!]_v^{\mathrm{COM}} := [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}} + [\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}} - [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}}\,[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}}.$$

我们记 $\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi)$，如果存在 COM-可容许赋值 v （对 φ ），使得

$$[\![\varphi]\!]_v^{\mathrm{COM}} \neq 0.$$

定义 2.5 （局部偏布尔语义）。 对于投影算子 P, $Q \in \mathrm{Proj}(H)$，记 $P\#Q$，如果$PQ = QP$。投影算子赋值仍是映射 v: $\mathrm{Var} \to \mathrm{Proj}(H)$。对于公式 φ，我们递归地定义 $[\![\varphi]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义的含义，并在其有定义时按如下方式设定其值:

$[\![p_i]\!]_v^{\mathrm{PBA}} := v(p_i)$, $[\![\neg\theta]\!]_v^{\mathrm{PBA}} := I - [\![\theta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$，若 $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义，$[\![\alpha \wedge \beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}} := [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}}\,[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$，若 $[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$, $[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义且 $[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}} \# [\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$，$[\![\alpha \vee \beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}} := [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}} + [\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}} - [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}}\,[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$，若 $[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$, $[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义且 $[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{PBA}} \# [\![\beta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$.

我们记若存在一个投影算子赋值 v，使得 $[\![\varphi]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义且

$$[\![\varphi]\!]_v^{\mathrm{PBA}} \neq 0.$$

注 2.6. COM 与 PBA 的区别在于结构。在 COM 中，要求整个公式在原子层面全局满足交换性。在 PBA 中，只有实际计算二元联结词时才检查交换性。标准语义则完全不施加交换性限制。

3 容易的蕴含关系

我们先列出从投影语义过渡到子空间语义所需的值域恒等式。

引理 3.1 （交换投影的值域恒等式）。 设 P, $Q \in \mathrm{Proj}(H)$ 满足 $PQ = QP$。那么

$$\mathrm{Ran}(PQ) = \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q), \qquad \mathrm{Ran}(I - P) = \mathrm{Ran}(P)^{\perp},$$

and

$$\mathrm{Ran}(P + Q - PQ) = \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(Q).$$

证明。 对于交集恒等式，令 $x \in \mathrm{Ran}(PQ)$。于是对于某个 $y \in H$，有 $x = PQy$。由于 P与 Q 对易，

$$Px = PPQy = PQy = x, \qquad Qx = QPQy = PQy = x.$$

因此 $x \in \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q)$。反之，若 $x \in \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q)$，则 $Px = x$ 与 $Qx = x$，从而

$$PQx = x,$$

因此 $x \in \mathrm{Ran}(PQ)$。于是 $\mathrm{Ran}(PQ) = \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q)$。

补运算恒等式显然成立： $I - P$ 是投影到 $\mathrm{Ran}(P)^{\perp}$ 上的正交投影算子。对于并运算恒等式，令

$$J := P + Q - PQ = Q + P(I - Q).$$

由于 P 与 Q 可交换，算子 $P(I - Q)$ 是一个正交投影算子。此外，

$$Q\,P(I - Q) = PQ - PQ^2 = PQ - PQ = 0,$$

类似地， $P(I - Q)Q = 0$。因此 Q 和 $P(I - Q)$ 是正交投影，所以 J 是投影到

$$\mathrm{Ran}(Q) \oplus \mathrm{Ran}(P(I - Q)).$$

还需确定 $\mathrm{Ran}(P(I - Q))$。若 $x = P(I - Q)y$，则 $Px = x$ 且

$$Qx = QP(I - Q)y = PQ(I - Q)y = 0,$$

因此 $x \in \mathrm{Ran}(P) \cap \ker(Q)$。反过来，若 $x \in \mathrm{Ran}(P) \cap \ker(Q)$，则 $Px = x$ 且 $Qx = 0$，因此

$$P(I - Q)x = Px - PQx = x.$$

Thus

$$\mathrm{Ran}(P(I - Q)) = \mathrm{Ran}(P) \cap \ker(Q).$$

因此

$$\mathrm{Ran}(J) = \mathrm{Ran}(Q) \oplus \big(\mathrm{Ran}(P) \cap \ker(Q)\big) = \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(Q),$$

如所需。 □

引理 3.2（COM 求值也是 PBA 求值）。设 φ 是一个公式，且 v 对 φ 是 *COM* 可容许的。那么对于 φ 的每个子公式 θ：

(i) $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}}$ 是一个正交投影算子；*(ii)* $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}}$ 属于由 φ 中出现的原子值 $v(p_i)$ 生成的交换代数；*(iii)* $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{PBA}}$ 有定义且

$$[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{PBA}} = [\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}}.$$

证明。 我们对 θ 的结构进行归纳。对于一个原子 p_i，无需证明。

假设该命题对 θ 成立。那么， $[\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}}$ 是由原子值生成的交换代数中的一个投影算子，因此

$$I - [\![\theta]\!]_v^{\mathrm{COM}}$$

再次是同一代数中的一个投影算子。这证明了该命题对 $\neg\theta$ 成立。

现在令 $\theta = (\alpha \wedge \beta)$ 或 $\theta = (\alpha \vee \beta)$，并假设该命题对 α 和 β 成立。根据归纳法， $[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}}$ 和 $[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}}$ 是同一交换代数中的投影算子，因此它们可交换。所以它们的乘积是一个投影算子，并且

$$[\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}} + [\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}} - [\![\alpha]\!]_v^{\mathrm{COM}}\,[\![\beta]\!]_v^{\mathrm{COM}}.$$

两个算子都属于同一交换代数。这就证明了二元情形下的 (i) 和 (ii)。

由于子节点值彼此可交换，相应的 PBA 节点得以定义。在可交换投影算子上，PBA 和 COM 递归子句逐字相同，因此这些值相等。这证明了 (iii)。

□

定理 3.3 (COM $\Rightarrow$ PBA)。 对于每个 $d \geq 1$ 以及每个公式 φ,

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi).$$

证明。 假设 $\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi)$。那么存在一个 COM-可容许赋值 v 使得 $[\![\varphi]\!]^{\mathrm{COM}}_v \neq 0$。根据引理 3.2, PBA 求值有定义，且满足

$$[\![\varphi]\!]^{\mathrm{PBA}}_v = [\![\varphi]\!]^{\mathrm{COM}}_v \neq 0.$$

因此 $\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi)$。 □

定理 3.4 (PBA $\Rightarrow$ STD)。 对于每个 $d \geq 1$ 以及每个公式 φ,

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi).$$

证明。 假设 $\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi)$。那么存在一个投影算子赋值 v，使得 $[\![\varphi]\!]^{\mathrm{PBA}}_v$ 有定义且非零。定义标准赋值 $u : \mathsf{Var} \to L(H)$ 如下:

$$u(p_i) := \mathrm{Ran}(v(p_i)).$$

我们断言，对于 φ 的每个子公式 θ，

$$[\![\theta]\!]^{\mathrm{STD}}_u = \mathrm{Ran}([\![\theta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v).$$

我们通过对 θ进行归纳法来证明这一点。

对于原子 p_i，这是 u的定义。对于否定，使用归纳假设以及恒等式

$$\mathrm{Ran}(I - P) = \mathrm{Ran}(P)^{\perp}$$

来自引理 3.1。

设 $\theta = (\alpha \wedge \beta)$。因为 θ 的 PBA 值已定义，值 $[\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v$ 与 $[\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v$ 对易。因此引理 3.1 给出

$$\mathrm{Ran}([\![\theta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) = \mathrm{Ran}([\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v [\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) = \mathrm{Ran}([\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) \cap \mathrm{Ran}([\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v).$$

根据归纳假设，这等于

$$[\![\alpha]\!]^{\mathrm{STD}}_u \cap [\![\beta]\!]^{\mathrm{STD}}_u = [\![\theta]\!]^{\mathrm{STD}}_u.$$

设 $\theta = (\alpha \vee \beta)$。同样，PBA 值仅在对易的子项值上有定义，故由引理 3.1,

$$\mathrm{Ran}([\![\theta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) = \mathrm{Ran}\Big([\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v + [\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v - [\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v [\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v\Big) = \mathrm{Ran}([\![\alpha]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) + \mathrm{Ran}([\![\beta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v).$$

归纳假设给出

$$\mathrm{Ran}([\![\theta]\!]^{\mathrm{PBA}}_v) = [\![\alpha]\!]^{\mathrm{STD}}_u + [\![\beta]\!]^{\mathrm{STD}}_u = [\![\theta]\!]^{\mathrm{STD}}_u.$$

这证明了该论断。

将该论断应用于 $\theta = \varphi$，得到

$$[\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_u = \mathrm{Ran}([\![\varphi]\!]^{\mathrm{PBA}}_v).$$

由于$[\![\varphi]\!]^{\mathrm{PBA}}_v \neq 0$，其值域非零，因此

$$[\![\varphi]\!]^{\mathrm{STD}}_u \neq \{0\}.$$

因此 $\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi)$。 □

推论 3.5 (蕴含链)。 对于每个 $d \geq 1$ 和每个公式 φ,

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi).$$

特别是,

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi) \Longrightarrow \mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi).$$

证明。 结合定理 3.3和3.4。 □

4 分离子 SEP-1

定义 4.1 （分离公式）。 定义

$$\text{SEP-1} := (p \wedge (q \vee r)) \wedge \neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

SEP-1 的要点很简单。在标准希尔伯特格语义中，分配律的失效可以

$$p \wedge (q \vee r) \quad \text{strictly larger than} \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

相比之下，一旦赋值处于同一个对易布尔块中，两边便相同 e.

定理 4.2 （SEP-1 是 COM 不可满足的）。 对于每个 $d \geq 1$,

$$\neg\text{Sat}^d_{\text{COM}}(\text{SEP-1}).$$

证明。 设 v 对 SEP-1 是 COM 可容许的，并令

$$A := v(p), \qquad B := v(q), \qquad C := v(r).$$

那么， A, B, C 是两两可交换的正交投影算子。在 COM 语义下计算 SEP-1 的两个内部项。首先,

$$[\![p \wedge (q \vee r)]\!]^{\text{COM}}_v = A(B + C - BC) = AB + AC - ABC.$$

其次,

$$[\![(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\!]^{\text{COM}}_v = AB + AC - (AB)(AC).$$

由于 A, B, C 可交换且 $A^2 = A$,

$$(AB)(AC) = A^2BC = ABC.$$

因此

$$[\![p \wedge (q \vee r)]\!]^{\text{COM}}_v = [\![(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\!]^{\text{COM}}_v.$$

将这个公共投影算子记为 X。那么

$$[\![\text{SEP-1}]\!]^{\text{COM}}_v = X(I - X) = 0.$$

因此，没有 COM 可容许赋值能使 SEP-1 非零，所以

$$\neg\text{Sat}^d_{\text{COM}}(\text{SEP-1}).$$

□

引理 4.3 (SEPSEP-1 在 PBA 中有定义会。 设 v 是一个投影算子赋值，且 $[\![\text{SEP-1}]\!]^{\text{PBA}}_v$ 有定义。那么这三个原子值

$$A := v(p), \qquad B := v(q), \qquad C := v(r)$$

两两可交换。

证明。 由于 $q \vee r$ 是 SEP-1 的子公式，其 PBA 值有定义。因此 $B\#C$。由于$p \wedge q$和 $p \wedge r$ 是 SEP-1 的子公式，它们的 PBA 值也有定义。因此 $A\#B$ 且$A\#C$。所以 A， B， C两两可交换。

□

定理 4.4 (SEP-1 是 PBA 不可满足的)。 对于每个 $d \geq 1$,

$$\neg\text{Sat}^d_{\text{PBA}}(\text{SEP-1}).$$

证明。 假设 $[\![\text{SEP-1}]\!]_v^{\text{PBA}}$ 对某个投影算子赋值 v有定义。根据引理 4.3，原子值 $v(p)$ $v(q)$ $v(r)$ 两两对易，因此 v 对于 SEP-1 是 COM 可容许的。根据引理 3.2，PBA 赋值与 COM 赋值在 SEP-1 上相同:

$$[\![\text{SEP-1}]\!]_v^{\text{PBA}} = [\![\text{SEP-1}]\!]_v^{\text{COM}}.$$

定理 4.2 表明，右侧始终为 0。因此，SEP-1 的每个有定义的 PBA 求值都具有值 0。因此

$$\neg\text{Sat}_{\text{PBA}}^d(\text{SEP-1}).$$

□

定理 4.5 （SEP-1 是 STD-可满足的）。 对于每个 $d \geq 2$,

$$\text{Sat}_{\text{STD}}^d(\text{SEP-1}).$$

证明。 令 e_1、e_2、.....、e_d为 H 的标准基。定义子空间

$$P := \text{span}(e_1 + e_2), \qquad Q := \text{span}(e_1), \qquad R := \text{span}(e_2).$$

令 v 为满足以下条件的标准赋值

$$v(p) = P, \qquad v(q) = Q, \qquad v(r) = R,$$

并将所有其他原子映射到 {0}。我们计算 SEP-1 在 v 下的值。首先,

$$Q + R = \text{span}(e_1, e_2),$$

因此 $P \subseteq Q + R$，从而

$$[\![p \wedge (q \vee r)]\!]_v^{\text{STD}} = P \cap (Q + R) = P.$$

接下来我们证明

$$P \cap Q = \{0\}, \qquad P \cap R = \{0\}.$$

设 $x \in P \cap Q$。那么对于某些标量 $a, b \in \mathbb{F}$,

$$x = a(e_1 + e_2) = be_1.$$

比较坐标可得，由 e_2 坐标得到 $a = 0$，再由 e_1 坐标得到 $b = 0$。因此 $x = 0$，所以 $P \cap Q = \{0\}$。证明 $P \cap R = \{0\}$ 的过程完全相同：若

$$x = a(e_1 + e_2) = ce_2,$$

那么比较坐标可得 $a = c = 0$。

因此

$$[\![(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\!]_v^{\text{STD}} = (P \cap Q) + (P \cap R) = \{0\}.$$

取正交补可得

$$[\![\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))]\!]_v^{\text{STD}} = H.$$

因此

$$[\![\text{SEP-1}]\!]_v^{\text{STD}} = [\![p \wedge (q \vee r)]\!]_v^{\text{STD}} \cap [\![\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))]\!]_v^{\text{STD}} = P \cap H = P.$$

由于 $P \neq \{0\}$，我们得出结论:

$$[\![\text{SEP-1}]\!]_v^{\text{STD}} \neq \{0\}.$$

因此 $\text{Sat}_{\text{STD}}^d$(SEP-1)。 □

5 分离定理

定理 5.1 (STD 与 COM的显式分离)。 对于每个 $d \geq 2$ ， 都存在一个公式φ ， 使得

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi) \qquad and \qquad \neg\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\varphi).$$

更准确地说，可以取 $\varphi = \text{SEP-1}$。

证明。 结合定理 4.2 和4.5。 □

定理 5.2 (显式分离 STD 与 PBA)。 对于每个 $d \geq 2$ ， 都存在一个公式φ 使得

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{STD}}(\varphi) \qquad and \qquad \neg\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\varphi).$$

更准确地说，可以取 $\varphi = \text{SEP-1}$。

证明。 结合定理 4.4 和4.5。 □

推论 5.3 (可满足性类的比较)。 对于每个固定的 $d \geq 2$，令

$$\mathsf{SAT}^d_X := \{\varphi : \mathrm{Sat}^d_X(\varphi)\} \qquad (X \in \{\mathrm{COM}, \mathrm{PBA}, \mathrm{STD}\}).$$

Then

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subseteq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}, \qquad \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}.$$

这三个类之间唯一尚未解决的关系是

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}$$

or

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} = \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}.$$

证明。 这些包含关系

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subseteq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}} \subseteq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}$$

由推论 3.5得出。严格性

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}$$

and

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{STD}}$$

分别由定理 5.2 和 5.1得出。本文尚未证明 COM 与 PBA之间存在严格包含关系。

□

6 讨论与开放问题

这里得到的比较图景已经颇为非平凡。标准希尔伯特格语义比全局交换语义和局部偏布尔语义都更加宽松，而见证公式则完全明确。证明之所以简短，是因为分离子隔离出了任何对易布尔块中出现的分配性塌缩，同时利用了标准语义下子空间格真正的非分配性。

尚未解决的是局部可兼容性与全局对易可实现性之间的关系。定义表明，局部偏布尔语义应当比全局交换语义更为宽松，但本文目前尚未证明这一点。任何此类结果都需要一个公式，使其逐节点的交换性约束不会将赋值归结为一个全局对易族。

问题 6.1。 固定 $d \geq 2$。确定是否

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} = \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}$$

or

$$\mathsf{SAT}^d_{\mathrm{COM}} \subsetneq \mathsf{SAT}^d_{\mathrm{PBA}}.$$

等价地，判断是否存在一个公式 ψ 使得

$$\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{PBA}}(\psi) \qquad \text{and} \qquad \neg\mathrm{Sat}^d_{\mathrm{COM}}(\psi).$$

定位。 本文应被视为一篇语义比较说明。本文并未声称提出了将固定维标准量子逻辑可满足性归约为代数可行性的一般新方法；Herrmann 关于模格复杂性结果的研究已经在这一领域取得了大量成果 [3]。本文也未声称提出新的通用域到格的翻译定理；相关翻译与可定义性技术已见于 Herrmann–Ziegler 的工作 [4, 5]。本文也没有将偏布尔语义等同于标准希尔伯特格语义；Dawar–Shah 最近的复杂性结果讨论的是前者，而非后者 [2]。本文的贡献更为有限，也更加明确：它证明了当前正在比较的三种固定维可满足性概念之间精确的单向蕴含关系和明确的严格分离。

参考文献

[1] Garrett Birkhoff 和约翰·冯·诺伊曼，量子力学的逻辑，《数学年刊》**37** (1936年)，823–843。[2] Anuj Dawar 和 Nihil Shah，*Kochen-Specker* 部分布尔代数中的可满足性复杂度，arXiv:2602.24164，2026年。[3] Christian Herrmann，有限高度补格与正交补模格上的方程决策问题的复杂度，《Algebra Universalis》**83** (2022年)，第5篇文章。[4] Christian Herrmann 和 Martin Ziegler，带对合的有限维子空间格中的可定义关系，《Algebra Universalis》**79**(2018年)，第68篇文章。[5] Christian Herrmann 和 Martin Ziegler，带对合的有限维子空间格中的可定义关系。第二部分：无量词且齐次的描述，《Algebra Universalis》**80** (2019年)，第28篇文章。