使用机器学习模型预测多孔介质中的稳态流动

Jinhong Wang[a], 1, Matei C. Ignuta-Ciuncanu[a], 1、RicardoF. Martinez-Botas[a] 和Teng Cao[a], *

[a]伦敦帝国理工学院机械工程系，南肯辛顿校区，伦敦，*SW7 2AZ*，，英国

arXiv:2603.06762v1 [physics.flu-dyn] 6 Mar 2026

文章信息

关键词：深度学习 物理信息神经算子 多孔介质 热设计

摘要

求解多孔介质中的流动，是冷板拓扑优化中的关键步骤，而冷板是现代热管理的重要组成部分。传统的计算流体力学（CFD）方法虽然精确，但对于大型复杂几何结构而言，计算成本往往高得难以承受。相比之下，数据驱动代理模型提供了一种计算效率更高的替代方案，可实现快速且可靠的预测。本研究开发了一个机器学习框架，用于预测由纳维-斯托克斯-布林克曼方程描述的多孔介质稳态流动。我们实现并比较了三种模型架构：卷积自编码器（自编码器）、U-Net 和傅里叶神经算子（FNO），并评估了它们的预测性能。为增强物理一致性，我们引入了物理信息损失函数。结果表明，FNO 的性能优于自编码器和 U-Net，均方误差（MSE）低至 0.0017，且相较于计算流体力学，速度最高可提升 1000 倍。此外，FNO 的网格不变性凸显了其在拓扑优化任务中的适用性，因为这类任务需要采用不同的网格分辨率。本研究彰显了机器学习加速多孔介质流体流动预测的潜力，为传统数值方法提供了一种可扩展的替代方案。

1. 引言

有效的热管理对于现代工程至关重要，可确保从电子设备到能源应用等各种系统的可靠性和效率。随着设备日益紧凑，对高效散热的需求推动了冷板的发展，冷板可将热量从高热流密度热源传递至冷却介质。为进一步提升性能，人们引入了热管，在内部集成更小、更高效的特征结构，以实现被动传热。在此基础上，流动架构的优化促成了设计型多孔介质的诞生 [3], 其中，几何结构可自由适应以实现最大性能，通过控制流体流动并增加表面积来增强传热，从而实现更具针对性的热解决方案。

在新兴的热管理技术中，冷板 [19]和热管 [18]都依赖精确的流体动力学模型来优化其性能。基于密度的拓扑优化常用于提升热性能并减少压力损失 [20, 4, 29] ，其通过调整流动分布和材料布置，并利用敏感性分析计算目标函数相对于设计（密度）变量的梯度。另一方面，生成式构形设计方法可通过进化优化使构型自发形成，其中最优流动路径和几何结构不断演化，以满足热性能目标[6]。监督学习方法已成功应用于设计导热散热器 [6] 和宏观热超材料 [8]。另一方面，无监督学习已被用于识别能够有效满足层级设计目标 [7]的非均匀树枝状结构。

无论采用何种设计方法，该优化过程中的一个关键步骤都是准确计算热和/或流体流动规律。在建模的多孔介质中，由于流体与介质几何结构之间存在复杂的相互作用，且这种相互作用在整个系统中可能显著变化，这一计算出了名地困难。拓扑优化通过数值求解带有Brinkman项的修正Navier-Stokes方程来获取建模多孔介质中的流场，其中Brinkman项表示流体与运动边界的相互作用 [19]。该计算计算成本高且耗时，尤其是对于复杂几何结构。这一通用表述使得能够开发机器学习代理模型，以适用于更广泛类别的多孔

*通讯作者 t.cao@imperial.ac.uk（T. Cao）ORCID（编号）：0000-0002-0012-7218（J. Wang）；0000-0002-3263-8151（R.F.Martinez-Botas）；0009-0000-2594-9157（T. Cao）

介质中的流动，从而有效捕捉复杂流动模式，并适应不同程度的材料各向异性，将应用扩展至达西流之外 [13]。

随着计算能力的快速发展，在求解偏微分方程 [11, 5]时，机器学习方法已成为传统数值方法的一种颇具前景的替代方案。Raissi 等人 [25] 提出了物理信息神经网络（PINN），将物理定律融入学习过程，为求解复杂的高维偏微分方程提供了稳健的框架，同时确保物理一致性。尽管文献中开发的许多神经网络架构已在简化的基准示例上接受测试，但人们对将此类模型应用于现实工程挑战的兴趣日益浓厚，从而能够为复杂系统提供快速可靠的解决方案，例如空气动力学 [12], 、能源系统 [21], 和热管理 [1]。

Wang 等人 [27] 提出了一种用于求解稳态纳维-斯托克斯方程的弱监督机器学习方法，采用物理信息损失以及用于边界和几何条件的多通道输入。Pu 和 Feng [24] 提出了一种基于物理信息神经网络的无网格深度学习方法，用于求解耦合的斯托克斯-达西方程，适用于自由流与多孔介质流动之间边界固定的情况。Niekamp 等人 [22] 提出了一种数据驱动的代理模型，用于预测随机微观非均质材料中的渗透率和层流；该模型使用随机模型生成训练数据，并比较了 UResNet 和全连接神经网络架构。然而，这些研究主要关注达西流，而非能够模拟移动边界的更通用的纳维-斯托克斯-布林克曼方程。此外，文献通常只关注单一模型架构，未比较不同模型的性能表现。

在本研究中，我们提出了一种机器学习框架，用于预测由纳维-斯托克斯-布林克曼方程描述的多孔介质稳态流动，该方程直接考虑了多孔介质流动问题固有的黏性阻力效应。我们评估了三种架构：自编码器 [2], U-Net [26], 和傅里叶神经算子（FNO） [13], ，并着重分析它们在准确性和计算效率方面的优势与权衡。我们引入物理信息损失，并将其与基线模型进行比较，以展示模型性能的提升。本研究展现了神经网络加速并泛化多孔系统中流体流动预测的潜力，为传统数值方法提供了一种可扩展的替代方案。

2. 方法论

为应对求解布林克曼方程所面临的数值挑战和高计算成本，我们探索了一种基于机器学习的方法，以加速多孔介质流动问题的求解过程。作为概念验证，我们考虑牛顿流体在多孔介质中的二维稳态不可压缩流动。具体而言，我们测试并比较了三种机器学习架构：卷积自编码器、U-Net 和傅里叶神经算子（FNO）。这些模型基于采用有限元法（FEM）获得的解数据进行训练，以学习解空间的高效表示，从而实现更快速、更具可扩展性的预测。为提高准确性和物理一致性，我们引入了物理信息损失函数，以强制满足布林克曼方程的关键控制原理。这种融合数据驱动与物理信息的方法，旨在为传统数值求解器提供一种稳健且计算高效的替代方案。

2.1. 物理问题设置

2.1.1. 案例设置

图 1 展示了物理计算域的示意图。假设流体密度 ρ 和动力黏度 μ 均为常数，流动由布林克曼方程（式（3））控制，以同时考虑惯性效应和黏性效应。

该问题的边界条件汇总于表 1。入口速度 U_{in}设定为 0。01m/s，对应的雷诺数为 $Re = 100$，该雷诺数基于流体的特征长度和运动黏度计算。出口边界采用零表压条件，所有固体壁面均施加无滑移边界条件。

2.1.2. 控制方程和物理约束

多孔介质中的流体流动通常采用连续介质框架进行建模，详见 [23]。在这种方法中，达西速度被定义为代表性体积单元（REV）内的平均速度，该单元包含固相与流体相。由此得到质量守恒的标准表达式，即连续性方程。

表1模拟中使用的边界条件

边界条件	方程
入口速度	$\mathbf{U} = (0.01, 0)$　在入口边界上
出口压力	$P = 0$　在出口边界上
壁面（无滑移）	$\mathbf{U} = (0, 0)$　在壁面边界上

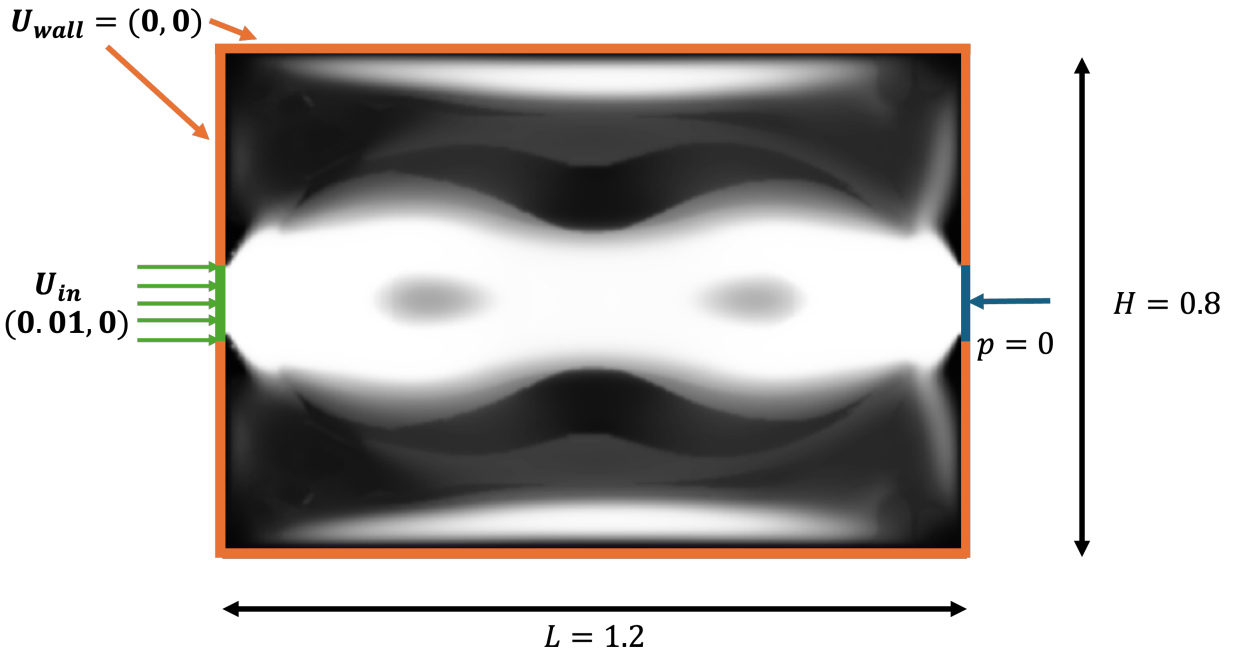


图 1：有限元分析（FEM）所用的计算域，展示了优化过程中采用的边界条件和设计参数。

多孔介质中的动量守恒可用不同模型描述，每种模型都适用于特定条件。其中一种广泛使用的模型是达西定律，

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\mathbf{U} \tag{1}$$

该关系式将流体（$\mathbf{U}$）的渗流速度与压力梯度及多孔介质的渗透率（K）联系起来。渗透率是介质的一种属性，用于量化流体在其孔隙中流动的难易程度。

对于惯性效应变得显著的情况，Wooding 的研究 [28] 为纳入动量方程中的惯性项提供了一个扩展框架。

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right) = -\nabla P - \frac{\mu}{K}\mathbf{U} \tag{2}$$

在处理流动既发生于固体边界附近、又经过清洁流体的情形时，可采用式（3）所示的布林克曼方程，因为渗透率可用于在纳维–斯托克斯（$K \to \infty$）和达西（$K \to 0$）流态之间进行切换 [23]。

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right) = -\nabla P + \tilde{\mu}\nabla^2\mathbf{U} - \alpha\mathbf{U} \tag{3}$$

该方程类比纳维–斯托克斯方程，引入了一个拉普拉斯阻力项（$\nabla^2\mathbf{U}$），并将有效黏度 μ/K 合并到一个几何相关参数 α中。由此得到的纳维–斯托克斯–布林克曼模型能够描述多孔材料中的速度梯度和边界层效应 [23]。作为多孔介质流动最通用的公式，本研究采用布林克曼方程，以全面涵盖广泛的流动条件。此外，正如 [9]所示，该方法还可扩展应用于冷板拓扑优化，以及存在固体障碍物时相变过程中的自然对流。

为收集数据，使用开源 FEniCS 库 [16] 求解描述多孔介质中流体流动的方程组（方程（4）），该库基于有限元法（FEM）实现。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right) = -\nabla P + \tilde{\mu}\nabla^2\mathbf{U} - \alpha\mathbf{U}. \end{cases} \tag{4}$$

将计算域定义为一个矩形区域，并离散为混合有限元网格，以确保速度场与压力场相容 [17]。速度采用二次拉格朗日单元，压力则采用线性拉格朗日单元。将控制方程（方程（4））重新表述为有限元弱形式。

使用设计变量 γ 定义渗透率场，从而实现多孔介质属性的空间变化。方程（$-\alpha\mathbf{U}$）中的阻力项与速度成正比，该项由 Brinkman 项引入，并由渗透率相关系数 $\alpha(\gamma)$ 参数化。使用 RAMP（材料属性的有理近似，$\alpha(\gamma)$）方法定义 [19] 的插值：

$$\alpha(\gamma) = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})\frac{1-\gamma}{1+q_a\gamma}, \tag{5}$$

其中，$\alpha_{\min}$ 和 $\alpha_{\max}$ 分别为最小和最大阻力系数，q_a 为控制过渡锐度的惩罚参数。该公式可确保 $\alpha(\gamma)$ 在高渗透区域和近乎不透水区域之间平滑变化，从而提升数值稳定性和物理真实性。

弱形式会导出一个非线性系统，这主要是由于动量方程中的对流项以及速度与压力之间的耦合所致。该系统在有限元框架中组装，并采用基于牛顿法的方法求解。FEniCS 后端配置为使用 PETSc 的可扩展非线性方程求解器 (SNES)，并利用多重前沿大规模并行稀疏 (MUMPS) 直接求解器求解线性化方程，同时采用 hypre-AMG 预条件器。方程组通过迭代求解速度 (**U**) 和压力 (p) 场。当方程残差满足绝对误差和相对误差均为 10^{-6} 的预设容差时，即认为收敛。

拓扑优化算法从正态分布中采样 100 组不同的参数，每个参数均具有指定的均值和标准差，包括 p_{SIMP}、α_{max}、q_a 和 w。随后，算法使用移动渐近线法（MMA）运行 30 次迭代，在冷板多目标热优化过程中迭代更新设计变量 γ。优化后的设计变量值（γ）、相应的速度（**U**）和压力场（p）被插值到矩形网格的顶点，并保存为一维数组。

表2冷板设计参数

参数	分布
p_{SIMP}	$\mathcal{N}(0.01, 0.001)$
$\alpha_{\max}$	$\mathcal{N}(10000, 1000)$
q_a	$\mathcal{N}(100, 10)$
w	$\mathcal{N}(0.5, 0.1)$

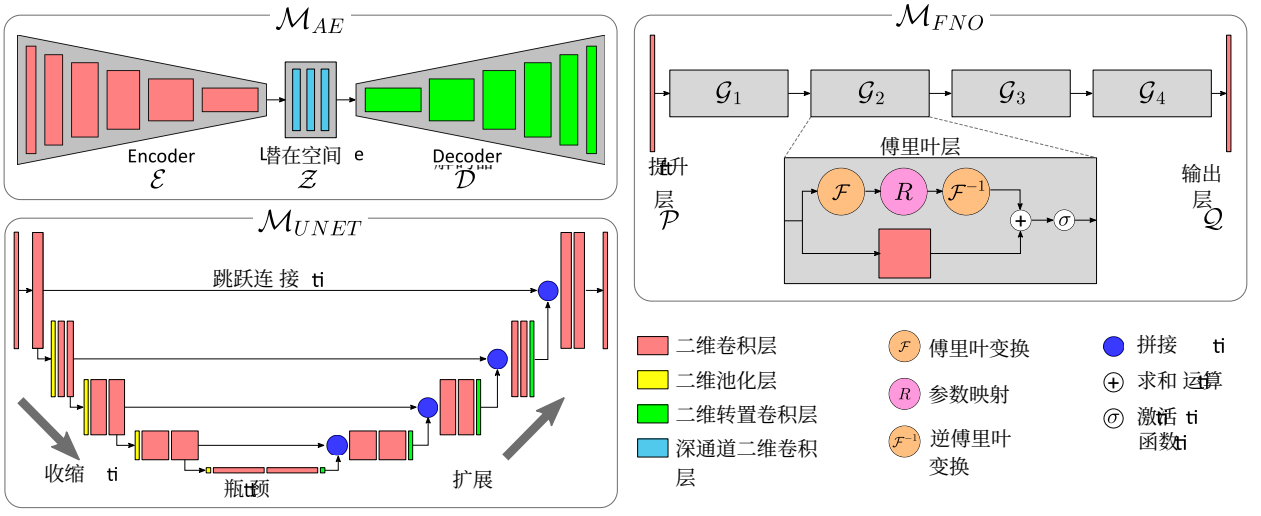


图2： $\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}$、$\mathcal{M}_{\mathrm{UNET}}$和 $\mathcal{M}_{\mathrm{FNO}}$的模型架构示意图

2.2. 机器学习模型架构

本文中的神经网络模型 $\mathcal{M}$ 表示为一个变换 $\mathcal{M}:\mathcal{A}\to\mathcal{U}$ 其中 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{U}$分别表示输入空间和输出空间。模型以单通道二维场 $\alpha(x,y)$, $\hat{}$ 作为输入，该场表示材料孔隙率分布；模型输出三通道场 $\Phi(x,y)$，其中包含式（6）中所述的预测流动特性。

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x,y)&=\left\{\hat{P}(x,y),\hat{U}_x(x,y),\hat{U}_y(x,y)\right\}\\&=\mathcal{M}\left(\alpha(x,y)\right)\\&\text{where}\quad \alpha\in\mathcal{A},\ \hat{\Phi}\in\mathcal{U}\end{aligned}\tag{6}$$

$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$输出 $\Phi(x,y)$ 包括预测的压力场 P以及 x方向和 y方向上的速度分量 U_x 和 U_y。

本文训练并比较了三种模型：卷积自编码器（AE） [2], U-Net [26], 和傅里叶神经算子（FNO）[13]。本文所采用的模型架构示意图总结于图2中。为更公平地比较模型性能，三种架构均经过调整，使其具有相近数量的参数，如表3所列。

表3模型参数信息

模型名称	符号	参数数量
卷积自编码器	$\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}$	30389123
U-Net	$\mathcal{M}_{\mathrm{UNET}}$	31042499
傅里叶神经算子	$\mathcal{M}_{\mathrm{FNO}}$	29516675

2.2.1. 卷积自编码器 $\mathcal{M}_{AE}$

本文构建了一种具有深通道潜在层的对称卷积自编码器，记为 $\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}$。该模型的公式如下：

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}(\alpha)=\mathcal{D}\circ\mathcal{Z}\circ\mathcal{E}(\alpha)\tag{7}$$

其中 $\mathcal{E}$、$\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别表示编码器、潜在空间和解码器层。如图 2所示，编码器$\mathcal{E}$包含六个二维卷积层，每层均采用 ReLU 激活，卷积核大小为 3×3，步长为 2。潜在空间层 $\mathcal{Z}$ 包含三个深通道二维 3×1 卷积层，采用 ReLU 激活，卷积核大小为 1。解码器 $\mathcal{D}$ 由六个转置卷积层组成，用于根据潜在空间特征重建流场，其激活函数、卷积核大小和步长均与 $\mathcal{E}$相同。

2.2.2. U-NET $\mathcal{M}_{UNET}$

本文介绍了一个深度为 4 的 U-Net 模型，如图2所示。与 $\mathcal{M}_{\mathrm{AE}}$类似，U-Net 架构由编码器-解码器（收缩-扩展）结构组成，但增加了跳跃连接，使网络能够同时捕获高级上下文特征和低级细节特征。编码器路径由一系列卷积块组成，每个卷积块后接一个最大池化层，以 2 倍比例（步幅为 2）对输入进行下采样。每个卷积块包含两个 3×3 卷积层，并使用填充来保持空间维度不变，随后采用 ReLU 激活。编码器的每个层级中，通道数都会加倍，从初始的 64 个滤波器开始，以捕获日益复杂的特征。

在网络的瓶颈层，最终的卷积块会在解码器路径之前处理最深层的特征。解码器路径通过使用 3×3 转置卷积（步幅为 2）进行上采样操作，使空间维度加倍，随后通过跳跃连接与编码器中对应的特征图进行拼接。每个解码器块包含两个 3×3 卷积，随后采用 ReLU 激活。最后，输出卷积层将输出映射到所需的通道数。

2.2.3. 傅里叶神经算子 $\mathcal{M}_{FNO}$

如图 2所示，$\mathcal{M}_{\mathrm{FNO}}$ 本文采用了 [14], 基础模型架构，其中包含四个傅里叶层 $\mathcal{G}$，它们位于提升层 $\mathcal{P}$ 与输出层 $\mathcal{Q}$之间：

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FNO}}(\alpha)=\mathcal{Q}\circ\mathcal{G}_4\circ\mathcal{G}_3\circ\mathcal{G}_2\circ\mathcal{G}_1\circ\mathcal{P}(\alpha). \tag{8}$$

提升层 $\mathcal{P}$使用带有 1×1 卷积核的卷积层，将输入 α投影为通道宽度为 64 的张量，该宽度与傅里叶层的宽度相对应。单个傅里叶层的结构如图 2所示，其数学表达式为：

$$\mathcal{G}(\mathcal{X})=\sigma\left(\mathcal{F}^{-1}\circ R\circ\mathcal{F}(\mathcal{X})+\mathcal{W}_{linear}\cdot\mathcal{X}\right). \tag{9}$$

其中，$\mathcal{X}$是输入该层的输入张量，其维度为 (批次大小、傅里叶层宽度 H和 W)。在公式（9）中，$\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换及其逆变换。可学习算子 R 在频域中执行谱滤波和加权；在本研究中，沿每个空间维度保留 30 个傅里叶模态。通过线性权重 $\mathcal{W}_{linear}$参数化的残差连接1×1 2通过一个R 维卷积层引入互补的可学习滤波器。随后，将加权残差与 σ的逆傅里叶变换输出相加，再将其传递给激活函数 $\mathcal{Q}$。最终的输出层（记为 $\mathcal{U}$）将傅里叶层的输出映射到目标输出空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{FNO}}$。

2.3. 物理信息学习与训练策略*2.3.1.* 物理信息损失构造

物理信息损　　失 $\mathcal{L}_{PI}$已在本文模型训练过程中引入。对于一个包含　　h

$\{\alpha_i(x,y),\Phi_i(x,y)\}_{i=1}^{N}$，其中 ϕ 包含流场属性 $\{P,U_x,U_y\}$，空间域离散为 n_x 和n_y 个点，训练损失由数值误差 $\mathcal{L}_{data}$ 和物理误差 $\mathcal{L}_{physics}$ 组成，如式（10）所示。权重系数 w_1 和 w_2 是表示两种误差相对重要性的超参数。

$$\mathcal{L}_{PI}=w_1\mathcal{L}_{data}+w_2\mathcal{L}_{physics} \tag{10}$$

数值误差定义为预测值均方误差的平均值（ L^2 范数的平方），如式11所示。

$$\mathcal{L}_{data}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\Phi_i-\hat{\Phi}_i\right\|_2^2 \tag{11}$$

如式12所示，物理信息损失包含两项，分别来自不可压缩连续性方程和纳维–斯托克斯方程。

$$\mathcal{L}_{physics} = \lambda_1 \mathcal{L}_{continuity} + \lambda_2 \mathcal{L}_{momentum} + \lambda_3 \mathcal{L}_{boundary} \tag{12}$$

参数 λ 是每个方程的缩放因子，用于确保残差的数值处于相近的数量级。 $\mathcal{L}_{continuity}$ 定义为不可压缩连续性方程残差的均方误差（式（4）），如式（13）所示。

$$\mathcal{L}_{continuity} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_i \right\|_2^2 \tag{13}$$

同样，稳态不可压缩纳维–斯托克斯方程（式（2），不含 $\frac{\partial}{\partial t}$ 项）的残差也作为物理信息损失的一部分，记为 $\mathcal{L}_{momentum}$，如式 14

$$\mathcal{L}_{momentum} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \rho \hat{\mathbf{U}}_i \cdot \nabla \hat{\mathbf{U}}_i + \nabla \hat{P}_i - \mu \nabla^2 \hat{\mathbf{U}}_i + \alpha_i \hat{\mathbf{U}}_i \right\|_2^2 \tag{14}$$

该 $\mathcal{L}_{boundary}$ 表示边界条件，包括速度入口、压力出口和无滑移壁面边界条件，如图 1所示。

第2.2 节介绍的全部三种模型架构（$\mathcal{M}_{\text{AE}}$、 $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 和 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$）均采用物理信息损失 $\mathcal{L}_{PI}$ 进行训练，并记为 $\mathcal{M}_{\{\}}$-PI。此外，还使用均方误差损失$\mathcal{L}_{data}$ 训练了另一组模型用于对比，记为 $\mathcal{M}_{\{\}\text{-data}}$。

2.3.2. 数据集生成与预处理

表2中定义的100条独立拓扑优化路径分别由4个参数确定，每条路径生成30个候选方案。这些候选方案呈现出逐步增强的特征，确保数据集具有多样性，其中既包括具有连续过渡的多孔介质流动，也包括固相与流体相之间发生突变的内部通道构型。

所得数据集共包含3000个构型，每个构型的分辨率为 128×128。数据集按8:1:1的比例分别划分为训练、验证和测试子集。训练数据集用于监督学习，验证数据集则用于微调模型的超参数并防止过拟合。测试数据集在训练期间始终完全未被使用，用于评估第3节中各模型的性能。

2.3.3. 训练配置

模型在 NVIDIA A100（80 GB）图形处理器上训练200个训练轮次。使用 Adam优化器 [10]， $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 和 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$ 的学习率为0.001，而 $\mathcal{M}_{\text{AE}}$的学习率分别为0.0005。通过调节参数 w_1、 w_2、 λ_1和 λ_2，使验证数据集误差最小化。训练时使用16的批次大小，每个模型的训练时间约为20分钟。

3. 结果

傅里叶神经算子凭借线性偏置项 $\mathcal{W}_{linear}$，证明适用于学习 [13] 中达西流的非周期边界条件。本文通过研究纳维–斯托克斯–布林克曼模型，将这一结论扩展至多孔介质中的达西流之外；该模型使材料场与压力/速度场中的非线性显著增强。

傅里叶神经算子（FNO）具有网格不变性，因为其傅里叶层直接在傅里叶空间中运算，因此在不同分辨率下均能保持一致的误差。

3.1. 模型性能

3.1.1. 模型误差比较

表4 比较了不同架构和评估指标下模型的误差。比较的模型包括 AE、U-Net 和 FNO，每个模型均使用两种损失函数进行评估：均方误差损失 $\mathcal{L}_{data}$，如式（11），以及物理信息（PI）损失 $\mathcal{L}_{PI}$，如式（12）。比较针对各个单独通道进行： P、 U_x和 U_y，以及

表 4模型误差比较

通道名称	指标	$\mathcal{M}_{\text{AE}}$		$\mathcal{M}_{\text{UNET}}$		$\mathcal{M}_{\text{FNO}}$	
		$\mathcal{L}_{data}$	$\mathcal{L}_{PI}$	$\mathcal{L}_{data}$	$\mathcal{L}_{PI}$	$\mathcal{L}_{data}$	$\mathcal{L}_{PI}$
P	R^2	0.9561719	**0.9719298**	0.8836706	0.9464990	0.9663823	0.9697812
	MSE	0.0412227	0.0264015	0.1094139	0.0503205	0.0316193	**0.0284223**
	相对 L^2	0.2092571	**0.1674784**	0.3409388	0.2312260	0.1832587	0.1737473
U_x	R^2	0.9895563	0.9929830	0.9952475	0.9972704	**0.9982153**	0.9976720
	MSE	0.0103068	0.0069250	0.0046901	0.0026938	**0.0017613**	0.0022975
	相对 L^2	0.1021510	0.0837348	0.0689079	0.0522208	**0.0422318**	0.0482332
U_y	R^2	0.9615440	0.9706253	0.9841518	0.9879774	**0.9900161**	0.9858974
	MSE	0.0416178	0.0317899	0.0171512	0.0130110	**0.0108048**	0.0152621
	相对 L^2	0.1960247	0.1713276	0.1258608	0.1096209	**0.0998976**	0.1187151
综合	R^2	0.9690546	0.9783670	0.9563944	0.9780651	**0.9853207**	0.9847239
	MSE	0.0310491	0.0217055	0.0437518	0.0220084	**0.0147285**	0.0153273
	相对 L^2	0.1760318	0.1472244	0.2089476	0.1482472	**0.1212900**	0.1237444
物理信息损失	$\mathcal{L}_{continuity}$	0.0000454	0.0000005	0.0000075	0.0000008	0.0000059	**0.0000004**
	$\mathcal{L}_{momentum}$	0.0150823	0.0006496	0.0084254	0.0014914	0.0044035	**0.0002250**

所有通道上的组合损失，以及单独的物理损失，定义见上一节。由于所有算例均采用图1所示的相同边界条件，因此边界条件损失 $\mathcal{L}_{boundary}$ 的量级为 10^{-10}，故在表4中予以忽略。

考察表4中给出的相对 L^2 误差时，我们注意到以下特点：• 傅里叶神经算子模型始终表现最佳：$\mathcal{M}$FNO-data 和 $\mathcal{M}$FNO-PI 的所有通道（P、U_x、U_y及综合）的损失均最低，表明与自编码器和 U-Net 模型相比，它们保持了更高的精度。• 物理信息损失提升了卷积模型的性能：对于大多数通道，PI 模型的损失比仅使用数据的模型降低了 12% 至 32%；压力（P）通道的改善最为显著，因为物理信息损失有助于强制满足连续性。相关结果将在第3.1.2节进一步讨论。• 引入 $\mathcal{L}_{PI}$ 不会对谱模型造成不利影响：对于傅里叶神经算子模型，加入物理信息损失使 P通道的损失略微改善了 5.19%，但使 U 通道的损失分别增加了 12.94% 和 18.85%。• 物理信息损失可确保域内一致性：在所有模型中，加入物理信息损失使连续性损失显著降低了 99% 以上，并使动量损失最多降低了 95%，凸显了它在确保预测符合连续性和动量一致性等物理定律方面的有效性。• $\mathcal{M}$在某些情况下，自编码器优于 $\mathcal{M}$U-Net：自编码器结构更简单、参数更少，因此可能具有更好的泛化能力并减少过拟合，尤其是在数据集较小、复杂度较低或无噪声时。自编码器的重建损失函数也与当前任务更加契合。• 模型性能取决于物理特性：$\mathcal{M}$U-Net 在 U_y 通道上的表现更佳，该通道包含更多多尺度特征，需要同时具备低层和高层表示。此外，在采用物理信息损失后，其他通道中模型之间的差距有所缩小，因为它能有效降低与压力通道相关的较高连续性损失。

总之，傅里叶神经算子模型（尤其是 $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 采用物理信息损失训练的模型）的相对 L^2 误差最低，这进一步凸显了其相较于自编码器和 U-Net 模型在准确性方面的优势。

3.1.2. 物理信息误差比较

图3 展示了采用和未采用物理信息损失项训练的各模型的物理残差， $\mathcal{L}_{continuity}$ 和 $\mathcal{L}_{momentum}$。其中，$\mathcal{L}_{physics}$纳入 $\mathcal{L}_{physics}$ 后，模型对控制方程的遵循程度显著提高；如表4所示，连续性和动量项的残差幅值尤其明显地降低。

对于所有模型， $\mathcal{L}_{physics}$ 都能显著减轻噪声和不规则性，尤其是在流动行为复杂的区域。特别是，自编码器和 U-Net 模型在使用$\mathcal{L}_{physics}$进行训练时， $\mathcal{L}_{continuity}$ 显著降低。这表明模型与质量守恒原理的契合度有所提高，而这对准确预测流动至关重要。

此外， $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 总体残差最小，体现了其高保真捕捉全局特征的内在能力。然而，加入 $\mathcal{L}_{physics}$ 可进一步提升傅里叶神经算子的性能，尤其是在局部复杂性占主导的棘手流动状态下。这种提升在 $\mathcal{L}_{momentum}$项中最为显著，如 x 和 y 动量分量的误差均大幅降低所示。

总之，物理信息损失项对所有架构都起到了关键的增强作用，确保模型符合物理定律，并显著提高预测质量，尤其是在复杂且高分辨率的流动场景中。因此，本文其余部分将进一步研究使用物理信息损失训练的模型 $\mathcal{L}_{PI}$ ，并对其性能进行比较。未来工作的一个自然拓展方向是探索具有内在守恒性质的架构，例如不变神经算子（INO） [15], ，以寻求适用于多孔介质对流的基础机器学习模型。该架构通过内置的核函数不变性确保预测具有参考系不变性，并遵循诺特定理以保证线动量和角动量守恒。这种方法将进一步增强模型对物理原理的遵循，尤其适用于具有非均质性质或控制方程未知的系统。

使用机器学习模型预测多孔介质中的稳态流动

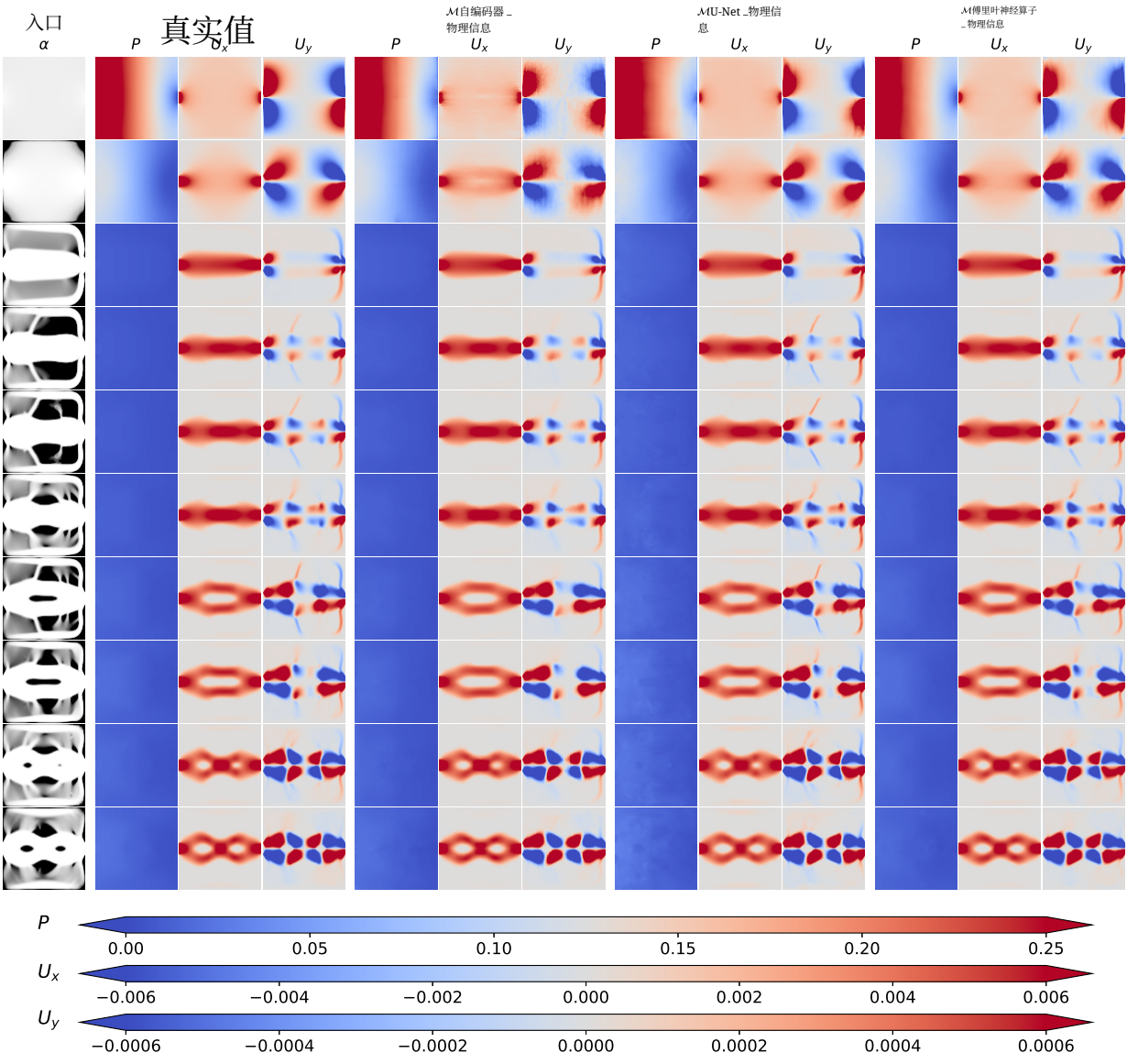


图4： 使用三种物理信息机器学习架构——自编码器（AE）、U-Net 和傅里叶神经算子（FNO）——比较不同材料场输入在 P、U_x 和 U_y 通道中的预测结果。

3.1.3. 模型预测

图 4 补充了表 4中的误差对比，展示了不同输入条件下模型如何捕捉空间特征并保持物理一致性。预测结果中观察到的趋势与表 4中所示的定量误差指标一致：

- 傅里叶神经算子模型在所有通道中的结果始终与真实值高度吻合。其基于傅里叶变换的架构擅长捕捉复杂模式和准线性模式，即使输入的演化复杂度各不相同，也表现出稳健性。
- 自编码器模型在空间特征较简单的情况下表现良好，但对于 U_y 通道中出现的更复杂多尺度模式，其预测效果会下降。
- U-Net 在 U_y 通道中的预测效果尤为出色，这得益于其处理多尺度复杂性的能力；但对于图中最下面两行所示的更复杂材料特征，P 通道则表现出明显的过拟合倾向。

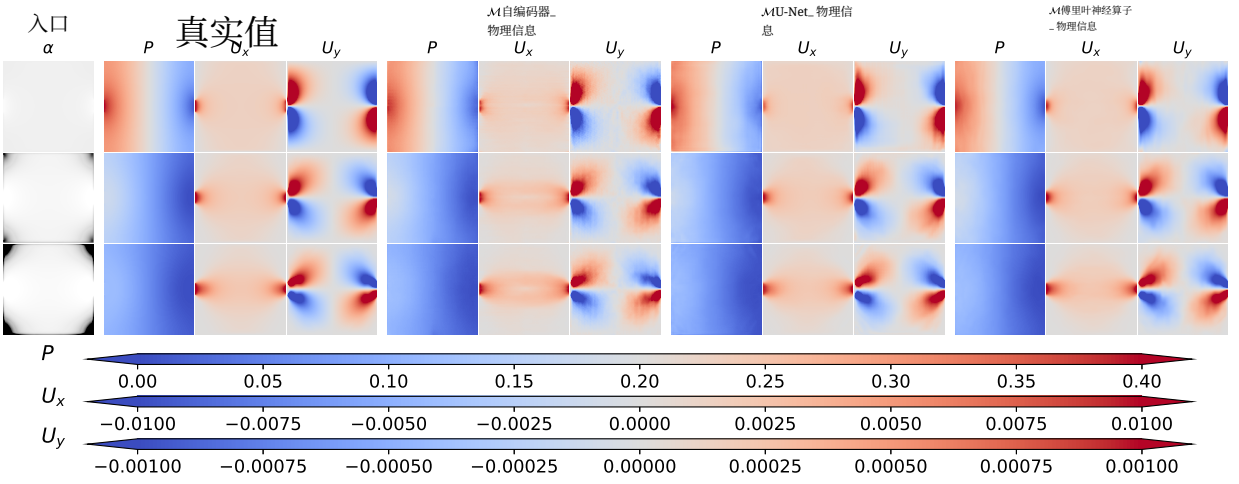


图5： 均匀T　　拓扑结构：大多数均质构型的材料分布变化极小

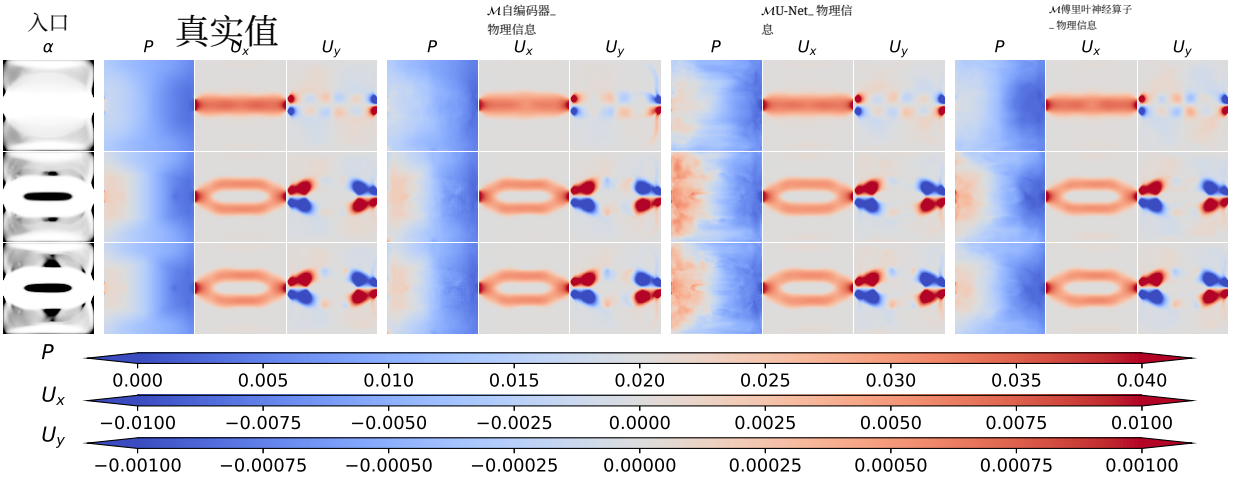


图 6： 渐变材料变化：拓扑结构中存在细微偏差，材料属性之间呈线性过渡，并体现在流动结构中

为进一步了解模型的性能，我们评估了模型在各种流动状态下的表现，这些流动状态对应于数据集中不同类别的材料属性配置。这些构型体现了从均匀拓扑结构到高度演化的通道网络的逐步变化，反映出材料非均质性和流动物理学复杂性的不断增加。

以下类别体现了数据集中构型的多样性：

- 均匀拓扑结构：这些代表材料分布变化极小的均质构型（图5）。
- 渐变材料变化：存在细微偏差且材料属性之间呈线性过渡的拓扑结构，会使流动结构逐渐变化（图 6）。
- 聚类变化：非均质性形成明显簇的构型，会在流动动力学中造成局部复杂性（图 8）。
- 发育中的通道：部分形成的通道的表征，表明存在显著的定向流动通路以及中间阶段的材料演化（图 7）。
- 成熟通道网络：最为演化且复杂的拓扑结构，具有清晰界定、相互连通的通道结构，主导流动行为（图9）

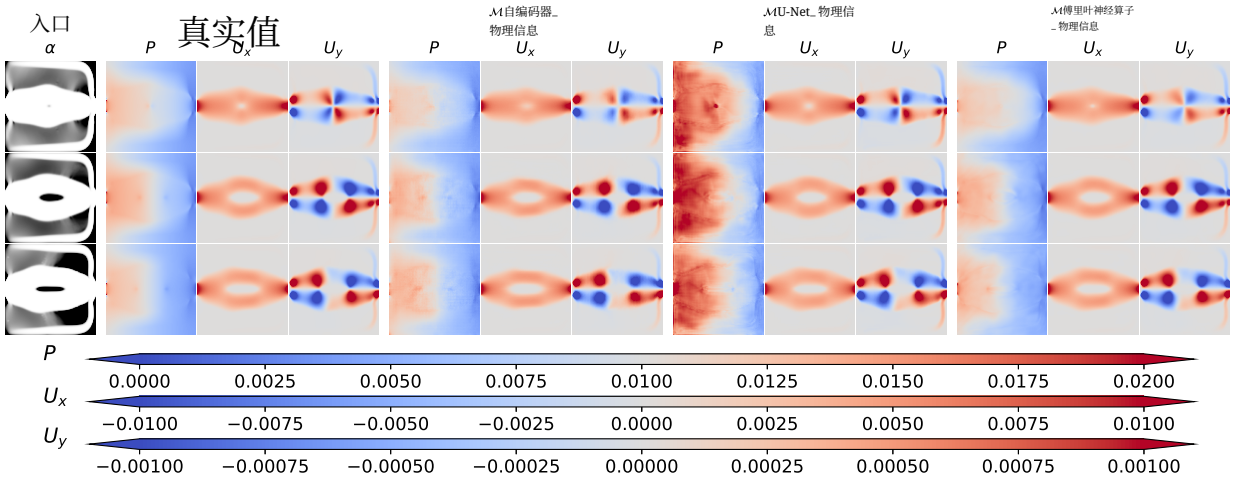


图 7： 发育中的通道：具有部分形成通道的构型，代表显著的定向流动通路

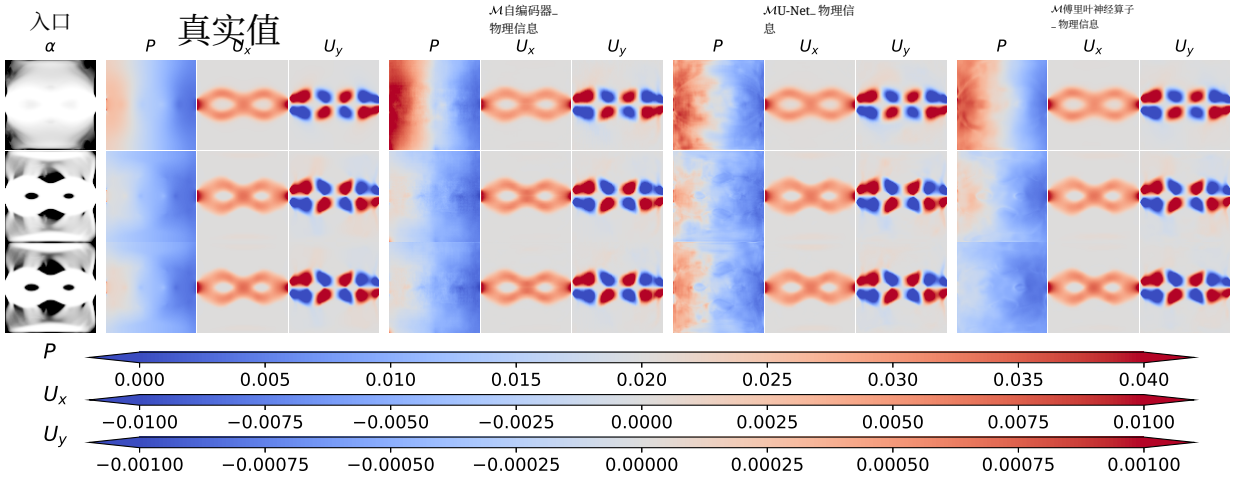


图 8： 聚类变化：非均质性开始形成明显簇的拓扑结构，引入局部复杂性

在描绘均匀拓扑结构的图中（图5），$\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 表现较差，尤其是在 U_x 通道中。这很可能是由于自编码器难以捕捉入口/出口区域与场其余部分之间的突变过渡，而这些正是不具备流动引导（喷嘴）特征的均匀材料场的关键特征。另一方面，$\mathcal{M}_{\text{UNET}}$ 与 $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 表现出相近的性能，表明其架构更适合处理此类过渡，因为它们能更有效地捕捉速度场中的非均匀性。

如图 6所示，所有模型在准确预测抛物线压力分布方面均表现困难，导致出现明显的伪影。尽管 $\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 相较于前一种情况表现有所改善，这得益于更多引导特征的存在，使其能够生成均匀速度场，但其表现仍不及 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$ 和$\mathcal{M}_{\text{FNO}}$。值得注意的是，$\mathcal{M}_{\text{UNet}}$ 由于过拟合，在压力预测方面尤其吃力，引入的噪声会扭曲流动结构。

如图 7所示，流动路径变得更加清晰，压力变化也不再那么突兀，从而使定向流动更加明显。在这种情况下，$\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 优于 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$，后者仍难以避免对压力分布过拟合。$\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 受益于发育中的通道所提供的更完善的结构引导，

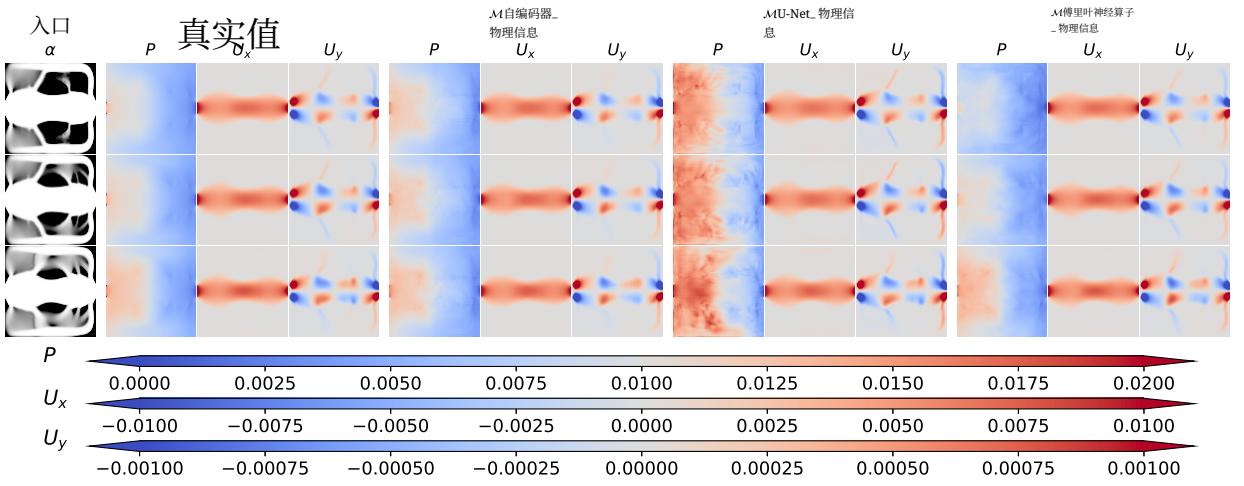


图 9： 成熟通道网络：演化最充分的拓扑结构，其特点是通道结构清晰且彼此连通

从而使流动特征更加简单，预测精度也更高，尤其是在压力场方面。不过，对于这一类构型，$\mathcal{M}_{\text{FNO}}$仍然是最准确的模型。

如图 8所示，具有聚类变化的拓扑结构引入了更多局部复杂性，尤其体现在压力场预测中。因此，包括 $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 在内的所有模型都难以准确预测压力。不过，所有模型仍能可靠地预测速度，而速度预测可以说与准确的对流计算更为相关；对流计算在热设计应用中发挥着至关重要的作用。

如图 9所示，在成熟通道网络中，通道结构清晰且彼此连通。自编码器表现良好，但难以捕捉压力场中更细微的变化，响应相对僵硬。 $\mathcal{M}_{\text{UNet}}$ 仍会对压力分布过拟合，这对于变化较小的分布而言是常见问题。 $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 在这一类情形中表现稳定，恢复了上一幅图中预测精度下滑后的表现。这一改进可归因于高分辨率通道特征所形成的压力分布如今变化更加平缓，使模型能够利用其谱特性，更准确地捕捉复杂模式，尤其是在压力和速度均存在细微周期性变化的区域。

3.2. 模型的网格无关性

对于传统神经网络，例如 $\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 和 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$，网格分辨率会直接影响模型的输入和输出大小，而这两者都与固定的空间网格相关。这些网络在有限维的输入—输出空间中运行，具体如下：

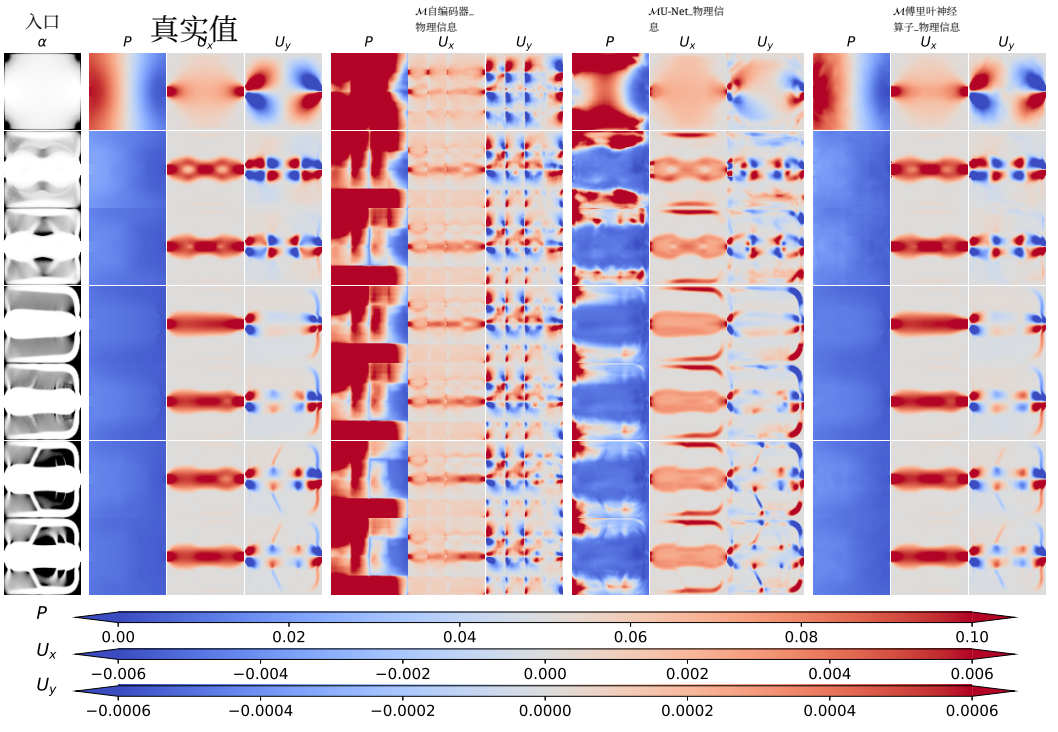
$$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{1\times H\times W} \quad , \quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{3\times H\times W} \tag{15}$$

其中， H和 W分别表示网格的高度和宽度，在训练数据中二者均为 128。因此，输入的空间分辨率发生变化（例如 256×256 和 400×400）时，需要调整输入和输出数据的大小，而且模型性能对分辨率变化非常敏感。如果分辨率与训练数据不同，可能会导致性能下降，或需要重新训练。对网格分辨率的这种敏感性是设计时需要重点考虑的因素，因为采用有限元（FE）方法进行的传统拓扑优化众所周知依赖网格，通常需要经过精细调整的网格才能获得可靠结果。

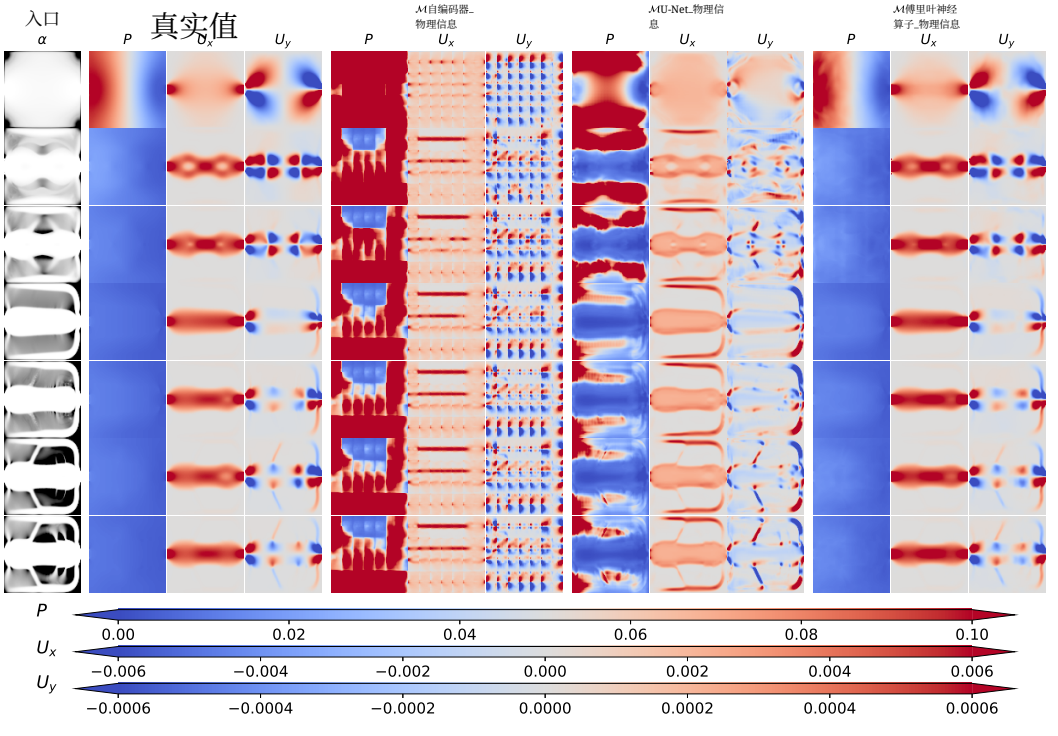
相比之下， $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$作为一种神经算子，在函数空间中运行，其输入域和输出域都是定义在域 Ω上的连续函数空间。具体而言，输入空间和输出空间可描述为：

$$\mathcal{A} \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}) \quad , \quad \mathcal{U} \subset L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \tag{16}$$

因此， $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 本质上具有网格不变性，能够处理分辨率变化而无需重新训练。这是神经算子的一个关键优势，因为它们能够泛化到不同的网格尺寸，而不会出现任何性能



(a) 分辨率为 256×256的结果



（b）不同分辨率 400×400下的结果

图 10： 模型　　针对不同分辨率的测试数据集，$\mathcal{M}_{\text{AE-PI}}$、$\mathcal{M}_{\text{UNET-PI}}$和 $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 的预测结果　　s.

性能下降，如图所示 10。网格无关性是神经算子连续性的直接结果，因此它们能够处理在不同空间网格上表示的数据，而不受特定离散化方式的限制。

图 10展示了模型在分辨率为 $\mathcal{M}_{\text{AE}}$、 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$和 $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 的测试数据集上的预测结果256×256 和 400×400。由于依赖固定的输入尺寸， $\mathcal{M}_{\text{AE}}$ 和 $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$ 的预测结果会随分辨率变化而呈现明显差异，这与预期一致。在两个神经网络模型中， $\mathcal{M}_{\text{UNET}}$ 的网格无关性优于$\mathcal{M}_{\text{AE}}$，这是因为它采用了跳跃连接，使网络能够保留更多细节丰富的空间信息。另一方面， $\mathcal{M}_{\text{FNO}}$ 在两种分辨率下均保持稳定的性能，进一步验证了其网格不变性。这一特性对于热设计尤为有利，因为它省去了传统有限元方法中通常必需的网格细化。

3.3. 预测速度

在本节中，我们通过比较不同分辨率下单个设计拓扑的平均计算时间，评估各模型的计算效率。表5 列出了各方法的耗时（秒）。

我们在中央处理器和图形处理器模式下评估机器学习模型（$\mathcal{M}_{\text{AE-PI}}$、 $\mathcal{M}_{\text{UNET-PI}}$和 $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$），以突出不同硬件构型下的性能差异。作为基准对比，采用 FEniCS 实现的有限元方法求解器在单个中央处理器上运行。与 FEniCS求解器相比， $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 模型实现了显著的加速：在分辨率 128×128 下，速度约提升**100倍**；在图形处理器上运行时，在分辨率 400×400 下，速度约提升**1000 倍**。这凸显了机器学习模型相较于 FEniCS 等传统方法所能带来的显著效率提升，尤其是在利用 GPU加速时。

如表5所示，所有模型的基准运行均在图形处理器上执行。在这一条件下，三个模型的计算时间均处于同一数量级，并且相较于中央处理器的计算时间都有显著提速。对于 $\mathcal{M}_{\text{AE-PI}}$ 和$\mathcal{M}_{\text{UNET-PI}}$而言，切换至中央处理器会导致计算时间明显增加。例如，在分辨率为128×128时， $\mathcal{M}_{\text{MAE-PI}}$ 在图形处理器上的计算时间为0.0010秒，而中央处理器上的计算时间为0.0142秒，后者约比前者慢14倍。同样， $\mathcal{M}_{\text{UNET-PI}}$ 在中央处理器上的计算时间也约增加至图形处理器上的14倍。

相比之下， $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 从中央处理器切换至图形处理器时表现出更为显著的提升。在分辨率为 128×128时，$\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 在图形处理器上的计算时间为0.0020秒，而中央处理器上的计算时间为0.1089秒，后者约比前者慢55倍。尽管从绝对值来看， $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 并不是速度最快的模型，但其受益于GPU加速，相较于使用中央处理器时的性能实现了大幅提速。这表明 $\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$ 具有较高的效率，能够充分利用图形处理器资源，在准确性与速度之间取得出色的平衡。

表5单个设计拓扑的平均计算速度对比（秒）

分辨率	FEniCS求解器	$\mathcal{M}_{\text{AE-PI}}$		$\mathcal{M}_{\text{UNET-PI}}$		$\mathcal{M}_{\text{FNO-PI}}$	
		CPU	GPU	CPU	GPU	CPU	GPU
128	17.8406	0.0142	0.0010	0.0343	0.0025	0.1089	0.0020
256	82.0864	0.0366	0.0011	0.1400	0.0028	0.1338	0.0021
400	212.1420	0.1057	0.0010	0.3125	0.0024	0.2292	0.0021

如图所示。11模型在图形处理器上的计算时间会随批次中拓扑结构的数量而变化。增加批次大小通常会提高图形处理器的利用率并缩短计算时间，但较小的批次往往表现较差。这是因为图形处理器旨在并行处理大量数据，而批次较小时，只有少部分图形处理器核心处于活动状态。因此，图形处理器的并行处理能力未能得到充分利用，导致小批次的执行效率较低。

有趣的是，随着批次大小的增加，图中的曲线几乎保持水平，这表明机器学习模型中的流动求解过程可以高度并行化。与有限差分法或有限元方法等通常逐一求解每种构型的传统求解器不同，机器学习支持批量评估，从而可以同时处理多个拓扑结构。这使得计算负载

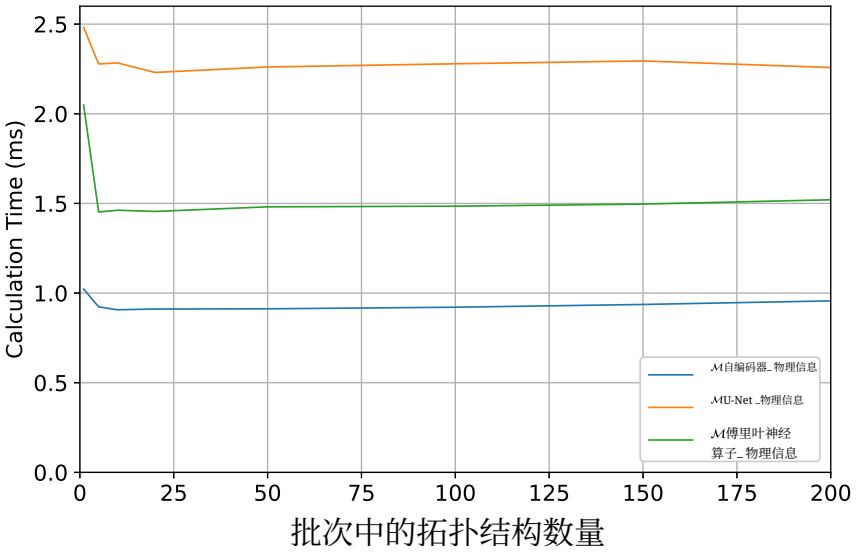


图 11： 图形处理器上各模型的计算速度比较

被有效地分配到图形处理器的各个核心上，从而随着拓扑结构数量的增加，计算时间呈指数级减少。

4. 结论

本文应用了先进的机器学习模型来预测多孔介质流动行为，并通过概念验证展示了这些模型在解决多孔介质中复杂流动问题方面的有效性。我们的工作重点是在多孔介质流体流动预测这一背景下，评估三种机器学习架构——自编码器（$\mathcal{M}_{\text{AE}}$）、U-Net（$\mathcal{M}_{\text{UNET}}$）和傅里叶神经算子（$\mathcal{M}_{\text{FNO}}$）——的性能。本研究采用纳维–斯托克斯–布林克曼模型，超越了传统的基于达西定律的方法，能够捕捉非均质及人工设计多孔介质中常见的更复杂流动行为。

我们在不同流动状态下对这些模型进行了验证和比较，结果表明，傅里叶神经算子的准确性优于自编码器和U-Net。傅里叶神经算子的 R^2 值在所有通道上都始终较高，其中 U_x 通道的结果最佳，R^2 达到 0.998，而 $\mathcal{M}_{\text{AE-data}}$ 为 0.989、$\mathcal{M}_{\text{UNET-data}}$为 0.995。此外，傅里叶神经算子的均方误差（MSE）值介于 0.0017 至 0.042 之间，显著低于文献中用于低雷诺数流动的次优模型。这些发现表明，傅里叶神经算子在捕捉多孔介质中的复杂流动模式方面具有更强的能力。

此外，我们强调了傅里叶神经算子的网格不变性。与对网格分辨率变化敏感的传统方法（包括机器学习方法和物理求解器）不同，傅里叶神经算子在不同分辨率下均表现出稳定的性能，而无需重新训练。这种网格无关性使傅里叶神经算子在实际应用中尤其有用，因为实际应用通常需要采用不同的网格尺寸。

本研究的一项重要发现是机器学习模型的计算效率，尤其是在利用 GPU加速时。傅里叶神经算子的计算速度最高可达到有限元求解器（如 FEniCS）的 1000 倍，特别是在较高空间分辨率下。批量评估的能力进一步提高了计算效率，可对多个拓扑结构进行并行处理，并显著减少热设计过程中的总体计算时间。

总之，本研究表明，机器学习模型，尤其是傅里叶神经算子，为预测多孔介质流动行为提供了一种颇具前景的传统方法替代方案。这些模型不仅速度更快、效率更高，而且具有良好的可扩展性且网格不变，因此非常适用于实际热设计应用。此外，物理信息方法确保预测结果与潜在的物理原理保持一致，进一步提高了其可靠性。这为机器学习在

计算流体力学和多物理场问题中的未来应用打开了大门，相关方法还可扩展到更复杂的情形。

5. 竞争性利益声明

作者声明，他们不存在任何已知的竞争性经济利益或个人关系，这些利益或关系可能会影响本文所报告的研究工作。

6. 数据可用性

支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。本文所用代码可在 GitHub 仓库中找到：https://github.com/milowangjinhong/AI_预测器_用于_流动_穿过_多孔_介质。

7. 致谢

作者谨向巴黎综合理工学院的 Sibo Cheng教授致谢，感谢他为改进本文提出的见解和建议。

参考文献

[1] Al Miaari, A., Ali, H.M., 2023. 电池温度预测与热管理中的机器学习：综述。Energy Reports 10, 2277–2305。[2] Bank, D., Koenigstein, N., Giryes, R., 2023. 自编码器。数据科学机器学习手册：数据挖掘与知识发现手册，353–374。[3] Bejan, A., 2004. 设计型多孔介质，载于：Ingham, D.B., Bejan, A., Mamut, E., Pop, I.（编），多孔介质新兴技术与方法，施普林格·荷兰，多德雷赫特。第337–349页。[4] Boutsikakis, A., Soutter, E., de Troya, M.A.S., Esposito, N., Mukasheva, D., Bouras, H., van Erp, R., 2024. Glacierware：利用拓扑优化为高热设计功耗芯片实现热点感知微流体冷却。网址：https://arxiv.org/abs/2408.15024, arXiv:2408.15024。[5] Brunton, S.L., Noack, B.R., Koumoutsakos, P., 2020. 流体力学中的机器学习。《流体力学年度评论》52, 477–508。doi:10.1146/annurev-fluid-010719-060214，arXiv:1905.11075。[6] Ignuta-Ciuncanu, M.C., Stärk, H., Martinez-Botas, R., 2023. 利用生成式自编码器框架进行导热散热器的仿生设计。网址：https://papers.ssrn.com/abstract=4576761。10.2139/SSRN.4576761。[7] Ignuta-Ciuncanu, M.C., Tabor, P., Martinez-Botas, R.F., 2024a. 生成式人工智能视角下的构形法则、仿生学与拓扑优化。第14届构形法则会议，2024年10月9—11日，罗马尼亚布加勒斯特，2024，41–44。网址：https://journal.iem.pub.ro/clc/article/view/1068，doi:10.59277/CLC.2024.09。[8] Ignuta-Ciuncanu, M.C., Tabor, P., Martinez-Botas, R.F., 2024b. 基于宏观超材料的被动热控制生成式设计框架。《热科学与工程进展》51, 102637。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S2451904924002555，doi:https://doi.org/10.1016/j.tsep.2024.102637。[9] Ignuta-Ciuncanu, M.C., Tabor, P., Martinez-Botas, R.F., 2025. 用于管理瞬态热载荷的多物理场散热器生成式构形设计。美国机械工程师学会2025年夏季传热会议，待刊。[10] Kingma, D.P., 2014. Adam：一种随机优化方法。arXiv预印本 arXiv:1412.6980。[11] LeCun, Y., Bengio, Y., Hinton, G., 2015. 深度学习。《自然》521, 436–444。网址：http://colah.github.io/https://www.nature.com/articles/nature14539，doi:10.1038/nature14539。[12] Li, J., Du, X., Martins, J.R., 2022. 气动外形优化中的机器学习。《航空航天科学进展》134, 100849。[13] Li, Z., Kovachki, N., Azizzadenesheli, K., Liu, B., Bhattacharya, K., Stuart, A., Anandkumar, A., 2020. 用于参数化偏微分方程的傅里叶神经算子。arXiv预印本 arXiv:2010.08895。[14] Li, Z., Zheng, H., Kovachki, N., Jin, D., Chen, H., Liu, B., Azizzadenesheli, K., Anandkumar, A., 2024. 用于学习偏微分方程的物理信息神经算子。ACM/JMS《数据科学杂志》1, 1–27。[15] Liu, N., Yu, Y., You, H., Tatikola, N., 2023. INO：用于学习复杂物理系统并实现动量守恒的不变神经算子。网址：https://arxiv.org/abs/2212.14365，arXiv:2212.14365。[16] Logg, A., Wells, G.N., 2010. DOLFIN：有限元计算自动化。《ACM数学软件汇刊》37。doi:10. 1145/1731022.1731030。[17] Logg, A., Wells, G.N., Hake, J., 2012. DOLFIN：一个 C++/Python 有限元库，载于：Logg, A., Mardal, K., Wells, G.N.（编），《有限元法自动求解微分方程》。施普林格。计算科学与工程讲义第84卷。第10章，第173225页。[18] Lurie, S., Rabinskiy, L., Solyaev, Y., 2019. 平板热管毛细芯几何结构的拓扑优化。International Journal of Heat and Mass Transfer 128, 239–247。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931018338018, doi:https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.08.125。

[19] 电池热管理冷却板的拓扑优化。International Journal of Heat and Mass Transfer 178, 121612。[20] 电池热管理冷却板的拓扑优化。International Journal of Heat and Mass Transfer 178, 121612。doi:10.1016/J.IJHEATMASSTRANSFER.2021.121612。[21] 能源系统机器学习模型的研究现状：系统综述。Energies 12, 1301。[22] 用于预测多孔介质渗透率与流动的代理模型：一种基于随机布朗运动的机器学习方法。Computational Mechanics 71, 563–581。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/s00466-022-02250-2，doi:10.1007/S00466-022-02250-2/FIGURES/16。[23] 多孔介质中的对流，第四版。doi:10.1007/978-1-4614-5541-7。[24] 用于求解耦合斯托克斯-达西方程的物理信息神经网络。Entropy 24。网址：https://www.mdpi.com/1099-4300/24/8/1106，doi:10.3390/e24081106。[25] 物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架。Journal of Computational physics 378, 686–707。[26] U-Net：用于生物医学图像分割的卷积网络，载于：医学图像计算与计算机辅助干预——MICCAI 2015：第18届国际会议，德国慕尼黑，2015年10月5—9日，论文集，第三部分18，施普林格。第234–241页。[27] 用于快速近似求解低雷诺数流动纳维-斯托克斯方程的堆叠深度学习模型。Intelligent computing 3, 0093。[28] 饱和可渗透介质中液体的稳态自由热对流。Journal of Fluid Mechanics 2, 273285。doi:10.1017/S0022112057000129。[29] 非均匀热源下锂离子电池冷板的拓扑优化与热性能。Applied Thermal Engineering 254, 123922。doi:10.1016/J.APPLTHERMALENG.2024.123922。