arXiv:2603.06776v1 [math.AT] 6 Mar 2026

# Beck-Chevalley 纤维化

Thomas H. Surlykke

**摘要**

我们通过证明由函子关联的两个 Beck-Chevalley 纤维化从一个弱双向态射诱导出的范数方形具有交换性，扩展了 M.J. Hopkins 和 J. Lurie 建立的双侧性理论。通过说明 Beck-Chevalley 纤维化在基变换下如何保持双侧性，我们表明这一结果推广了 M.J. Hopkins 和 J. Lurie 所证明的范数自然性。此外，我们还说明这一推广蕴含了 S. Carmeli 、 T. M. Sc hlank 和 L. Yanovski 此前证明的两个具体结果：局部系统所诱导的范数方形以及等变幂所诱导的范数方形都具有交换性。

## 目录

**1 引言** **2**
1.1 背景.2 1.2 概述.5 1.3 约定.5 1.4 致谢.6

**2 预备知识** **7**
2.1 直化定理.7 2.2 Beck-Chevalley 纤维化与双侧性.9

**3 范数方形** **16**
3.1 Beck-Chevalley 变换.16 3.2 范数方形定理.20 3.3 Beck-Chevalley 纤维化的基变换.29

**4 应用** **33**
4.1 范数的自然性.33 4.2 局部系统的范数.36 4.3 等变幂的范数.42

**参考文献** **45**

# 1 引言

## 1.1 背景

### 表示论

给定一个 1-范畴 $\mathcal{C}$，我们可以将群 $G$ 在对象 $X \in \mathcal{C}$ 上的作用视为一个函子$BG \longrightarrow \mathcal{C}$，它从 $G$ 的分类空间映射到 $\mathcal{C}$，并将 $BG$ 的唯一对象映射到 $X$。因此，范畴 $\mathrm{Fun}(BG, \mathcal{C})$ 是由配备了 $G$ 作用的 $\mathcal{C}$ 对象构成的范畴。考虑 $\mathcal{C}$ 为域 $k$ 上向量空间构成的范畴 $\mathrm{Vect}_k$ 的情形。给定一个带有 $G$ 作用的向量空间 $V$，与 $V$ 相关的两个向量空间值得关注： $G$ 的不变元子空间，

$$V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G : gx = x\},$$

以及 $V_G$ 的-余不变元商向量空间，它定义为 $V$ 对由形如 $x - gx$ 的元素（其中 $x \in V$ 且 $g \in G$）生成的子空间取商。若 $G$ 是有限群，则存在一个良定义的自然映射

$$\mathrm{Nm}_G \colon V_G \longrightarrow V^G$$

从余不变元到不变元，由 $x \mapsto \sum_{g \in G} gx$ 给出。我们将此映射称为与 $V$ 相关的范数映射。若 $k$ 的特征为 0，例如 $\mathbb{Q}$，则 $\mathrm{Nm}_G$ 是一个等价。然而，一般而言，这个范数映射并非等价。

为使此构造具有函子性，考虑函子 $\mathrm{Fun}(-, \mathcal{C}) \colon \mathrm{Grpd}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$，它将群胚 $X$ 送到函子范畴 $\mathrm{Fun}(X, \mathcal{C})$。将此函子应用于投影$p \colon BG \longrightarrow *$，得到预复合函子 $p^* \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(BG, \mathcal{C})$，它将 $\mathcal{C}$ 中的一个对象映射为同一对象，并赋予其 $G$ 的平凡作用。若 $\mathcal{C}$ 存在极限和余极限，则由左 Kan 延拓和右 Kan 延拓，$p^*$ 分别有左伴随 $p_!$ 和右伴随 $p_*$。由于沿到一点的投影进行 Kan 延拓，可通过计算（余）极限得到，因此对于每个 $X \in \mathrm{Fun}(BG, \mathcal{C})$，有 $p_!(X) = \mathrm{colim}_{BG} X$ 和 $p_*(X) = \lim_{BG} X$。在 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_k$ 的情形下，对于赋有 $G$ 作用的向量空间 $V$，我们得到 $p_!(X) = V_G$ 和 $p^*(X) = V^G$。

这一构造与*Tate* 上同调有关。若 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，那么 $p_!$ 是一个右正合函子，而 $p_*$ 是一个 左正合函子，这是因为这些函子分别是左伴随和右伴随。这些函子通常并非正合函子，因此自然会考虑 $p_!$的右导出函子

$$H_i(G; -) \colon \mathrm{Fun}(BG, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C},$$

以及 $p_*$的左导出函子

$$H^i(G; -) \colon \mathrm{Fun}(BG, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C},$$

对每个整数 $i \geq 0$。令 Ab 表示阿贝尔群范畴。注意，对于群 $G$，函子范畴 $\mathrm{Fun}(BG,\mathrm{Ab})$ 与 $G$-模范畴自然等价。因此，对于 $\mathcal{C} = \mathrm{Ab}$，这一构造给出了群上同调和群上同调的定义。现在，与之前一样，令 $\mathcal{C}$ 为由 $k$-向量空间构成的范畴 $\mathrm{Vect}_k$。带有 $G$ 作用的向量空间特别是一个 $G$-模，因此在这种情形下，导出函子也定义了群（上）同调。对于任意 $G$-模 $V$，其第 0 阶导出函子由 $H_0(G; V) \cong V_G$ 和 $H^0(G; V) \cong V^G$ 给出；因此，如上所述，当 $G$ 是有限群时，我们有范数映射 $\mathrm{Nm}_G \colon H_0(G; V) \longrightarrow H^0(G; V)$。第 0 阶同调群与上同调群之间的这一关系引出了$Tate$的定义

上同调；对于任意有限群 $G$，其定义为

$$\widehat{H}^i(G;V)=\begin{cases}H^n(G;V) & n\geq 1\\ \operatorname{coker}\mathrm{Nm}_G & n=0\\ \ker\mathrm{Nm}_G & n=-1\\ H_{-(n+1)}(G;V) & n\leq -2\end{cases}.$$

特别地，Tate 上同调群衡量范数映射 $\mathrm{Nm}_G$ 不是等价的程度。

上述所有构造也适用于 $\infty$-范畴情形。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴，并考虑函子 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{C})\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$，它从空间的 $\infty$-范畴 $\mathcal{S}$ 映到 $\infty$-范畴的 $\infty$-范畴。由于群 $G$ 的分类空间 $BG$是一个 Kan 复形，我们同样可以考虑投影 $p\colon BG\longrightarrow *$的像，它就是预复合函子$p^*\colon \mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{Fun}(BG,\mathcal{C})$。与之前一样，$p^*$的左伴随 $p_!$和右伴随 $p_*$（若存在）分别通过计算余极限和极限给出。因此，我们得到 $p_!(X)=X_{hG}$，即 $X$的同伦轨道；以及 $p_*(X)=X^{hG}$，即 $X$的同伦不动点。当 $G$ 是有限群时，我们还有范数映射 $\mathrm{Nm}_G\colon X_{hG}\longrightarrow X^{hG}$。

本文定义了给定基范畴中态射的（弱）双侧性概念，所依据的是取值于 $\mathrm{Cat}_\infty$ 的某些反变函子。当基范畴为 $\mathcal{S}$、空间的 $\infty$-范畴，且函子是 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{C})$（其中 $\mathcal{C}$ 是一个具有极限和余极限的 $\infty$-范畴）时，这些定义具有以下性质：若 $f$ 属于 $\mathcal{S}$ 且是弱双伴随的，则存在一个自然变换 $\mathrm{Nm}_f\colon f_!\longrightarrow f_*$，我们称之为与 $f$ 相关联的范数映射。此外，若 $f$ 是双向伴随的，则该范数映射是一个等价。因此，$\mathrm{Nm}_G\colon V_G\longrightarrow V^G$ 是否存在，取决于 $p\colon BG\longrightarrow *$ 是否弱双伴随；而 $\mathrm{Nm}_G\colon V_G\longrightarrow V^G$ 是否为等价，则取决于 $p$ 是否双侧的。一般而言，对于空间 $X$，我们将 $\infty$-范畴 $\mathrm{Fun}(X,\mathcal{C})$ 中的对象称为 $X$ 上取值于 $\mathcal{C}$ 的局部系统。Yonatan Harpaz 在 [Har17] 中证明，局部系统 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{C})$ 的双侧性可以编码为跨度范畴的作用。

**色谱同伦论**

下文用 Sp 表示谱的 $\infty$-范畴。数学中另一个会出现双向伴随映射的领域是色谱同伦论。色谱同伦论将形式群的高度滤过与谱的高度滤过联系起来。考虑复配边谱 $MU$。一方面，作为一个谱，$MU$表示一种上同调理论——事实上，$MU$表示一种复定向上同调理论。另一方面，$MU$在形式群中也具有普适性：分次环 $\pi_*MU$ 等价于 Lazard 环 $L$。Lazard 环在以下意义下对于形式群具有普适性：形式群律 $f(x,y)\in R[[x]]$ over $R$可以写成和式 $f(x,y)=\sum_{i,j\geq 0}c_{ij}x^iy^j$，其中系数 $c_{ij}$必须满足某些条件。Lazard 环 $L$是由这些系数 $\mathbb{Z}[c_{ij}]$生成的自由环，再模掉系数必须满足的关系。因此，从 $R$ 中选出构成形式群律的系数，等价于选取一个环同态 $L\longrightarrow R$。Quillen 证明了 $\pi_*MU$ 作为分次环同构于 Lazard 环 $L$ （见 [Lur10，第 7 讲，定理 1]）；而根据 [Lur10，第2讲，定理 4]，可知 $L$ 同构于一个由无穷多个生成元构成的多项式环 $\mathbb{Z}[t_1,t_2,\ldots]$，其中每个 $t_i$ 的次数为 $2i$。特别地，我们看到，在 $R$ 上构造一个形式群，等同于从 $R$中选取一个可数序列的元素。

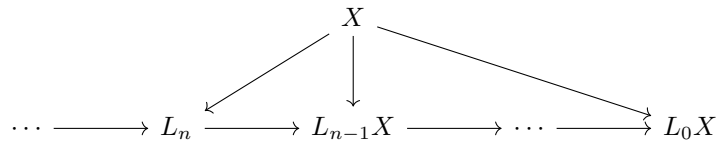
给定一个形式群律 $f(x,y) \in R[[x]]$，我们如下定义 $f$的高度（取定素数 $p$）：首先，递归地对所有 $n \geq 0$ 定义 $f$ 的 $n$-级数 $[n](t) \in R[[t]]$： $[0](t) = 0$，且 $[n+1](t) = f([n](t)\ t)$。考虑素数 $p$对应的 $p$-级数 $[p](t)$，记 $v_n$ 为 $t^{p^n}$的系数。根据 [Lur10，第12讲，定义 13]，，若对于 $i < n$有 $v_i = 0$，则称 $f$ 的高度为 $\geq n$；若 $v_n \in R$ 可逆，则称 $f$ 的高度为 $\leq n$。因此，若 $v_n$ 可逆且对 $i < n$有 $v_i$ 消失，则 $f$ 的高度恰为 $n$。由同构 $\pi_*(MU) \cong L$，我们也可以将这些系数 $v_n$ 视为一列特定的元素 $v_n \in \pi_{2(p^n-1)}(MU)$，对每个 $n \geq 0$皆如此。对任意素数 $p$，都存在一列复定向上同调理论 $K(n)$，每个 $n \geq 0$对应一个理论，称为 Morava $K$-理论。每个 $K(n)$都是一个 $MU$-代数，而这些谱的稳定同伦群为 $\pi_*(K(n)) = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$，其中 $v_n$ 的次数为 $2(p^n-1)$。将这个生成元与形式群的高度相比较，我们可以看到， $K(n)$-s 应当被看作恰好集中在高度 $n$。

望远镜局部化提供了另一种局部化候选方案：在一个谱处进行局部化，该谱是某个类型为 $n$ 的有限谱上的 a $v_n$-自映射的望远镜。对于固定的 $n$，令$T(n)$为这样一个谱，结果表明，在 $T(n)$ 处的局部化与所选对象无关，因此我们得到一个定义良好的 $\infty$-范畴 $\mathrm{Sp}^{T(n)}$，其对象为 $T(n)$-局部谱。令 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 表示 $\infty$-范畴，其对象为 $K(n)$-局部谱，则存在一个 $\infty$-范畴的包含关系 $\mathrm{Sp}_{K(n)} \subseteq \mathrm{Sp}^{T(n)}$。已知当 $n$为 0 或 1 时，此包含关系是等价。对于更大的 $n$，此包含关系是否为真包含的问题称为望远镜猜想。在 $K(n)$ 或 $T(n)$ 处对 $\pi_* MU$ 进行局部化，都可以视为关于 $v_0$、……、$v_{n-1}$ 的完备化，并将 $v_n$ 变为可逆。正如[CSY18]，中所示，$\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 和 $\mathrm{Sp}^{T(n)}$ 恰好分别是这类局部化中最小和最大的例子。

设 $X \in \mathrm{Sp}$ 是一个谱，并对每个 $n \geq 0$记 $X$ 的布斯菲尔德局部化为

在$K(0) \vee K(n)$ 为 $L_n X$。由此，我们得到一个图表

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\cdots \arrow[r] & L_n \arrow[r] & L_{n-1}X \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_0 X
\end{tikzcd}$$



谱之间的映射，它诱导了一个从 $X$ 到 $L_n$-局部化的极限的映射。色度收敛定理， [Lur10，第 32 讲，定理 1]指出，若 $X$ 是一个有限谱，则 $L_n$-局部化的极限就是 $p$-局部化后的 $X$。也就是说，上述图表诱导了一个映射

$$X \longrightarrow X_{(p)}.$$

特别地，若 $X$ 是一个有限的 $p$-局部谱，则 $L_n$-局部化的极限诱导一个等价 $X \simeq X_{(p)}$。再结合这样一个事实：对每个整数 $n \geq 1$，都存在一个交换方块

$$\begin{tikzcd}
L_n X \arrow[r] \arrow[d] & L_{K(n)} X \arrow[d] \\
L_{n-1} X \arrow[r] & L_{n-1} L_{K(n)} X
\end{tikzcd},$$

这意味着，理论上，一个有限的 $p$-局部谱 $X$ 可以由其中间的 $K(n)$-局部化计算得到。实际上，这些计算往往并不容易，但高度局部化的理论价值依然成立。在 [HL13]，中，Hopkins 和 Lurie 证明了以下结果：

**定理** (Hopkins-Lurie)。 设 $A$ 为一个 ***Kan*** 复形。假设对于每个顶点 $x \in A$，对于每个整数 $n$，集合$\pi_n(A, x)$都是有限的，并且当 $n \gg 0$时是平凡的。设 $\rho\colon A \longrightarrow \mathrm{Sp}^{K(n)}$ 为一个以 $A$为指标、由$K(n)$-局部谱构成的图表。在此情形下，存在一个典范等价

$$\mathrm{Nm}_A\colon \operatorname*{colim}_A \rho \xrightarrow{\simeq} \lim_A \rho.$$

回顾上述讨论，考虑函子 $\mathbf{Fun}(-, \mathrm{Sp}^{K(n)})\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}_\infty$，该陈述可改述如下：对于 $A$ 一个所有同伦群均为有限群的截断***Kan***复形，投影 $p\colon A \longrightarrow *$ 在 $\mathcal{S}$ 中相对于函子$\mathrm{Fun}(-, \mathrm{Sp}^{K(n)}$是双向伴随的。令 $A = BG$，可得以下结果，该结果也见于 [HL13],，由 Greenlees、Hovey 和 Sadofsky 独立（且更早）证明:

**定理**(Greenlees-Hovey-Sadofsky)。设 $G$ 是一个有限群，且 $X \in \mathrm{Sp}^{K(n)}$ 是一个 $K(n)$-局部谱，并配备了 $G$的作用。在此情形下， $K(n)$-局部化范数映射

$$\mathrm{Nm}_G\colon X_{hG} \longrightarrow X^{hG}$$

是 $\infty$-范畴的 $K(n)$-局部谱$\mathrm{Sp}^{K(n)}$中的一个等价。

## 1.2 概述

本文定义并引入了关于某些反变函子、取值于 $\infty$-范畴的 $\infty$-范畴的态射的（弱）双侧性概念。

在第 2 节中，我们首先陈述 Lurie直化定理 [Lur09，定理 3.2.0。1] 及其关键性质。这使我们能够研究笛卡尔纤维化 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$，而不是函子$\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow$**Cat**。随后，我们介绍本文涉及的相关定义，即 ***Beck-Chevalley*** 纤维化、（弱）双侧性，以及由弱双手灵巧映射诱导的范数映射，并陈述和证明与这些定义相关的重要性质。

在第 3 节中，我们证明主要定理，即定理 3.7。接着，我们说明沿保拉回函子对 Beck-Chevalley 纤维化进行基变换会产生 Beck-Chevalley 纤维化，以及双侧性在此基变换下如何保持。

在第 4 节中，我们展示定理 3.7的应用。首先，我们说明它如何推出 [HL13，命题 4.2.1 (1)], ，而定理 3.7 的证明正是以此为基础。接着，我们说明它如何推出 [CSY18，定理 3.2。3] 以及 [CSY18，命题 3.4。7]。

## 1.3 约定

我们使用 $\infty$-范畴，即拟范畴，采用 Lurie 在 [Lur09] 和[Lur17]中发展的理论。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴。我们采用以下约定:

- 我们称 $\mathcal{C}$ 中的图表可交换，当且仅当该图表在同伦范畴 $h\mathcal{C}$中严格可交换。这就是 [Lur09] 和[HL13]中所说的“在同伦意义下可交换”。

- 我们称 $\mathcal{C}$ 中的一个态射是等价，如果它在同伦范畴 $h\mathcal{C}$中是一个同构。这就是 [HL13]中所称的“同伦等价”。我们用符号 $\simeq$表示一个等价。

- 给定一个映射 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 上的 $\infty$-范畴态射，我们将拉回 $q^{-1}\{X\} = \mathcal{C} \times_{\mathcal{X}} \{X\}$ 称为 $q$ 在 $X$ 上的纤维，而不是同伦纤维。当 $q$ 的含义可由上下文明确时，我们将 $q$ 在 $X$ 上的纤维记作 $\mathcal{C}_X$。

- 我们令 $\mathcal{S}$ 表示 $\infty$空间范畴，并令 $\mathrm{Cat}_\infty$ 表示由 $\infty$-范畴构成的 $(\infty, 2)$-范畴。

## 1.4 致谢

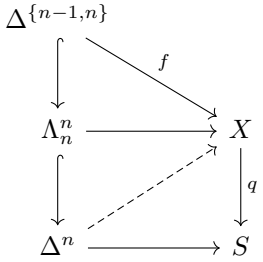
感谢Shachar Carmeli提出并指导本项目。你一直非常有帮助，与你共事令人愉快。

# 2 预备知识

## 2.1 直化定理

高阶范畴论中的一个基本结果是Lurie直化定理， [Lur09，定理3.2.0。1]。我们首先陈述以下来自 [Lur09]:

**定义 2.1** ([Lur09，注 2.4.1。4])。 设 $q\colon X \longrightarrow S$ 是单纯集合的一个内纤维化，并设 $f\colon \Delta^1 \longrightarrow X$ 是 $X$中的一条边。我们称 $f$ 是 $q$-笛卡尔的，若对于每个 $n \geq 2$ 以及每个交换图




存在如图所示的虚线箭头，使该图交换。对偶地，我们称$f$ 是 $q$-余笛卡尔的，如果 $f$ 相对于对偶映射 $q^{\mathrm{op}}\colon X^{\mathrm{op}} \longrightarrow S^{\mathrm{op}}$是笛卡尔的。

**注 2.2**。 假设 $X$ 和 $S$ 是 $\infty$-范畴，并设态射 $f$ 在 $X$ 中是 $q$-笛卡尔的。在 $n = 2$的情形下，上述性质可表述如下：若 $g$ 是 $X$ 中的一个态射，其目标与 $f$相同，并且 $q(g)$在 $S$中经由 $q(f)$分解，那么该分解可提升为 $X$中的一个分解，且在等价意义下唯一。

**定义 2.3** ([Lur09，定义 2.4.2。1])。 设 $q\colon X \longrightarrow S$ 是单纯集合之间的一个映射。若满足以下条件，我们称 $q$ 为笛卡尔纤维化：

(1) 映射 $q$ 是内纤维化

(2) 对于 $S$ 中的每条边 $f\colon x \longrightarrow y$ 以及 $X$ 中满足 $q(\widetilde{y}) = y$的每个顶点 $\widetilde{y}$，都存在一条 $q$-笛卡尔边 $f\colon \widetilde{x} \longrightarrow \widetilde{y}$，满足 $q(f) = f$。

若对偶映射 $q^{\mathrm{op}}\colon X^{\mathrm{op}} \longrightarrow S^{\mathrm{op}}$ 是笛卡尔纤维化，我们就称 $q$ 为余笛卡尔纤维化。如果 $q$ 既是笛卡尔纤维化，也是余笛卡尔纤维化，我们便简称 $q$ 为笛卡尔与余笛卡尔纤维化。

设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是 $\infty$-范畴之间的一个笛卡尔纤维化，并将 $q$ 视为单纯集合之间的一个映射。条件 (1) 表明，对于任意对象 $X \in \mathcal{X}$，纤维 $\mathcal{C}_X$ 是一个 $\infty$-范畴。条件 (2) 则确保这一赋值具有函子性。非正式地说，正如 [HHR21], 所述，直化定理表明，对于任意 $\infty$-范畴 $\mathcal{X}$，都存在一个直化等价，它由一对互逆函子组成

$$\mathrm{Str} : \mathrm{Cart}(\mathcal{X}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{X}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Cat}_\infty) : \mathrm{Un} \ ,$$

其中，$\mathsf{Cart}(\mathcal{X})$ 表示以 $\mathcal{X}$ 为底的笛卡尔纤维化范畴。应用 Str 被称为对笛卡尔纤维化进行直化，而应用 Un 被称为对 $\infty$- 范畴的函子进行反直化。一般而言， $\infty$- 范畴的函子包含大量相干数据，使得函子

在 $\infty$-范畴之间难以显式构造。直化定理允许我们通过考察单纯集合的某些映射，来定义 $\infty$-范畴之间的函子。我们列出直化等价的一些基本性质：

- 笛卡尔纤维化的直化 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是函子 $\mathcal{C}_{(-)}\colon \mathcal{X}_{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$。在对象上，$\mathcal{C}_{(-)}$ </style}由 $q$ 的纤维给出，即：

$$X \longmapsto \mathcal{C}_X.$$

  对于态射，给定任意映射 $f\colon Y \longrightarrow X$ 在 $\mathcal{X}$ 中，函子 $f^*\colon \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{C}_Y$ 按如下方式诱导：对于每个 $X \in \mathcal{C}_X$，存在一个 $q$-笛卡尔边 $f\colon X \longrightarrow Y$ 在 $\mathcal{C}$ 中，因为 $q$ 是一个 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 笛卡尔纤维化。因此，$f^*$ 在对象上定义为 $f^*(X) = Y$，并且该定义也延拓到高阶单纯形。$f$ 是 $q$-笛卡尔的这一事实确保了该定义是良定义的。反过来，函子 $F\colon \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$ 的反直化是元素范畴的一个 $\infty$-范畴类比，即 ***Grothendieck*** 构造。因此，非正式地说，所得笛卡尔纤维化 $\mathsf{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{X}$ 的定义域的对象是成对的 $(X, x)$，其中 $X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个对象，而 $x$ 是 $F(X)$ 中的一个对象。

- 假设笛卡尔纤维化 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 同时也是余笛卡尔纤维化。采用类似的步骤，$q$ 会诱导出一个协变函子 $\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$，其在对象上的取值仍由 $\mathcal{X} \longmapsto \mathcal{C}_X$ 给出，但会将态射 $f\colon Y \longrightarrow X$（位于 $\mathcal{X}$ 中）映为提升 $f_!\colon \mathcal{C}_Y \longrightarrow \mathcal{C}_X$。函子 $f_!$ 具有这样的性质：它是 $f^*$ 的左伴随（按照 [Lur09，定义 5.2.2.1]的含义）。更一般地，直化等价表明，一个同时是笛卡尔纤维化和余笛卡尔纤维化的函子 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$，等价于给出一个 $\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$ 上的函子，它既协变又逆变，并且对于 $\mathcal{X}$ 中的任意态射 $f$，其协变像 $f_!$ 是 $f$ 的左伴随，而后者是该态射的逆变像 $f^*$（参见 [Lur09，推论 5.2.2.5]）。

- 假设我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{C} \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{X} \end{array}$$

  其中 $q$ 有一个笛卡尔纤维化。沿 $\alpha$ 拉回可得到另一个笛卡尔纤维化 $p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$，并且对于任意 $Y \in \mathcal{Y}$，纤维之间都存在典范等价 $(\mathcal{C}_\alpha)_Y \simeq \mathcal{C}_{\alpha(Y)}$，这可由拉回的复合粘贴得到

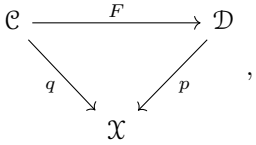
$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{C}_\alpha)_Y & \longrightarrow & \mathcal{C}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q}, \\ \{Y\} & \hookrightarrow & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{X} \end{array}$$

  结合拉回的粘贴定律，即 [Lur09，引理 4.4.2 的对偶。1]同样，将笛卡尔纤维化 $q$ 直化后，我们可以考虑图表

$$\mathcal{Y}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\alpha^{\mathrm{op}}} \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{C}_{(-)}} \mathsf{Cat}_\infty,$$

我们看到，使用 $\alpha^{\mathrm{op}}$ 预复合具有相同的性质：它将来自 $\mathcal{Y}^{\mathrm{op}}$ 的函子与来自 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}$ 、限制在 $\alpha$ 的像上的函子识别起来。直化等价说明了这种对应关系。此外，如果 $q$ 也是余笛卡尔纤维化，那么 $q$的任意拉回也都是余笛卡尔纤维化，因为 $\mathcal{C}_{(-)} \circ \alpha^{\mathrm{op}}$ 的像包含在 $\mathcal{C}_{(-)}$的像中。

- 假设我们有一个如下形式的交换图表




其中 $q$ 和 $p$ 是笛卡尔纤维化。由交换性可知， $F$ 对每个 $X \in \mathcal{X}$都诱导出一个函子 $F_X$: $\mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{D}_X$。若进一步要求 $F$ 保持 $\mathcal{C}$中的笛卡尔态射，则 $F$确定了函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{X}^{\mathrm{op}},\mathsf{Cat}_\infty)$中函子之间的一个自然变换 $F\colon \mathcal{C}_{(-)} \Longrightarrow \mathcal{D}_{(-)}$。换言之，给出一个保持笛卡尔边的函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ，等价于给出一个函子 $F\colon \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \Delta^1 \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$ ，使得 $F$限制在 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \{0\}$ 上是 $\mathcal{C}_{(-)}$， $F$限制在 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \{1\}$ 上是 $\mathcal{D}_{(-)}$，且对于任意$X \in \mathcal{X}$， $F$限制在 $\{X\} \times \Delta^1$ 上是 $F_X\colon \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{D}_X$。

我们给出 [HL13] 中构造 4.3.1 的一种改述。

例 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴。赋值 $A \mapsto \mathsf{Fun}(A,\mathcal{C})$ 确定了一个函子 $\mathsf{Fun}(-,\mathcal{C})\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$。因此，通过反直化，我们得到一个在 $\mathcal{S}$上的笛卡尔纤维化。将该笛卡尔纤维化记作 $q\colon \mathsf{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$，并将其定义域 $\mathsf{LocSys}(\mathcal{C})$称为$\infty$-范畴，亦即取值于 $\mathcal{C}$的局部系统的范畴。非正式地说，$\mathsf{LocSys}(\mathcal{C})$中的对象是形如 $(A,\mathcal{L})$ 的对，其中$A$ 是一个空间，而 $\mathcal{L}$ 是 $\mathsf{Fun}(A,\mathcal{C})$中的一个对象，即定义在 $A$上的 $\mathcal{C}$-值局部系统。对任意 $A \in \mathcal{S}$，都有典范等价 $\mathsf{LocSys}(\mathcal{C})_A \simeq \mathsf{Fun}(A,\mathcal{C})$；而对于 $\mathcal{S}$中的任意态射 $f\colon B \longrightarrow A$，诱导出的函子 $f^*\colon \mathsf{LocSys}(\mathcal{C})_A \longrightarrow \mathsf{LocSys}(\mathcal{C})_B$可典范地识别为预复合函子 $f^*\colon \mathsf{Fun}(A,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(B,\mathcal{C})$。

设 $f\colon B \longrightarrow A$ 是 $\mathcal{S}$中的一个态射。若 $\mathcal{C}$ 存在余极限，则 $f^*\colon \mathsf{Fun}(A,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(B,\mathcal{C})$ 存在左伴随 $f_!$，由左 Kan 延拓给出。因此，若 $\mathcal{C}$ 存在余极限，则笛卡尔纤维化 $q\colon \mathsf{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ 也是余笛卡尔纤维化。

## 2.2 Beck-Chevalley 纤维化与双侧性

我们陈述相关定义和结果，其中大多数取自 [HL13]。

定义 2.5。如 [CSY18]，中所述，我们将函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ （介于 $\infty$ 类之间）的左伴随定义为一对 $(L,\eta)$，其中 $L\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个函子，且 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \longrightarrow FL$ 是 [Lur09，定义 5.2.2.7] 意义下的单位变换。类似地， $F$ 的右伴随是一对 $(R,\varepsilon)$，其中 $R\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个函子，且 $\varepsilon\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow RF$ 是余单位变换，即[Lur09，定义 5.2.2.7] 的对偶。 [Lur09，命题 5.2.2.8] 表明，该定义等价于 [Lur09，定义 5.2.2.1] 给出的伴随定义。

**注记 2.6.** 根据 [Lur09，命题 5.2.2.9]，任意伴随 $L \dashv R$ （介于函子之间，这些函子属于） $\infty$-范畴，在过渡到同伦范畴时会诱导一个 1-范畴的伴随。此外，单位变换与余单位变换被送到相应的单位与余单位，即

1-范畴的伴随。由此可知，每当我们有一个伴随 $L \dashv R$，介于 $\infty$-范畴的函子之间，并带有单位变换 $\eta$: $\mathrm{id} \longrightarrow RL$ 以及余单位变换 $\varepsilon$: $LR \longrightarrow \mathrm{id}$，这些自然变换满足三角恒等式。也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varepsilon_L} & LRL \\ & \searrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle L\eta} \\ & & L \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{R\varepsilon} & RLR \\ & \searrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle \eta_R} \\ & & R \end{array}$$

可交换。

记号 2.7。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{X}$ 是 $\infty$-范畴，且 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个笛卡尔纤维化。给定一个态射 $f\colon Y \longrightarrow X$，我们将其诱导的纤维函子称为 $f$ 经由$q$的笛卡尔提升，并记作 $f^*\colon \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{C}_Y$。在任何 $f^*$存在左伴随的情形下，我们将此函子记作 $f_!\colon \mathcal{C}_Y \longrightarrow \mathcal{C}_X$。同样，若 $f^*$存在右伴随，我们将此函子记作 $f_*\colon \mathcal{C}_Y \longrightarrow \mathcal{C}_X$。若 $q$同时也是余笛卡尔纤维化，则如第 2.1 节所述， $f^*$总存在左伴随 $f_!$。在这种情况下，我们将 $f_!$ 称为 $f$ 经由 $q$的余笛卡尔提升。

**记号 2.8**。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{X}$ 是 $\infty$-范畴，且 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个笛卡尔与余笛卡尔纤维化。如第 2.1 节所述，对于任意态射 $f\colon Y \longrightarrow X$ （位于） $\mathcal{X}$ 中，我们诱导出一个伴随

$$\mathcal{C}_Y \underset{f^*}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}_X \ .$$

我们分别用以下符号表示这个伴随的单位 和余单位

$$\eta_f\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y} \longrightarrow f^* f_! \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_f\colon f_! f^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_X}$$

。

假设 $f^*$ 除了左伴随 $f_!$之外，还存在右伴随 $f_*$。在这种情况下，我们用以下符号分别表示伴随 $f^* \dashv f_*$ 的单位 和余单位

$$\eta_{*f}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y} \longrightarrow f^* f_* \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_{*f}\colon f_* f^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_X}$$

。

**定义 2.9**。设 $\sigma$ 是 $\infty$-范畴之间的函子交换方形，如下图所示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{i^*} & \mathcal{D} \\ \uparrow{\scriptstyle h^*} & \sigma & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathcal{E} & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C} \end{array} .$$

由图表的交换性，我们得到一个典范自然等价 $h^* f^* \simeq i^* g^*$。假设函子 $f^*$ 和 $i^*$ 分别存在左伴随 $f_!$ 和 $i_!$。用 $BC[\sigma]$ 表示复合自然变换

$$BC[\sigma]\colon i_! h^* \xrightarrow{i_! h^* \eta_f} i_! h^* f^* f_! \simeq i_! i^* g^* f_! \xrightarrow{\varepsilon_i g^* f_!} g^* f_!.$$

我们将 $BC[\sigma]$ 称为与 $\sigma$相关联的***Beck-Chevalley*** 变换。若自然变换 $BC[\sigma]$是等价，则称 $\sigma$ 满足 ***Beck-Chevalley*** 条件。

**注记 2.10**。 在定理 2.9的情形中，改为假设 $f^*$ 与 $i^*$ 分别具有右伴随$f_*$ 与 $i_*$ 。在此情形下，存在右伴随的 Beck-Chevalley 变换，由复合自然变换给出

$$BC_*[\sigma]\colon g^*f_* \xrightarrow{\eta_{*i}g^*f_*} i_*i^*g^*f_* \simeq i_*h^*f^*f_* \xrightarrow{i_*h^*\varepsilon_*f} i_*h^*.$$

如果需要区分，我们将左伴随的 Beck-Chevalley 变换记为 $BC_!{}[\sigma]$ ，将右伴随的 Beck-Chevalley 变换记为 $BC_*[\sigma]$。如果我们不带下标地写 $BC[\sigma]$，则始终指左伴随的 Beck-Chevalley 变换，即 $BC[\sigma] = BC_!{}[\sigma]$。注意， $\sigma$ 满足 Beck-Chevalley 条件始终意味着 $BC_!{}[\sigma]$是一个等价。

**构造 2.11**。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{X}$ 为 $\infty$-范畴，且设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 为一个笛卡尔且余笛卡尔纤维化。给定 $\mathcal{X}$ 中的一个交换图 $\sigma$ ，如下所示：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & \sigma & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}.$$

如 2.1 节所述，任意笛卡尔纤维化都会诱导一个函子 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$ ，其在对象上的定义为$X \mapsto \mathcal{C}_X$ ，在态射上的定义为 $f \mapsto f^*$ 。因此，根据 $q$ ，我们得到一个交换图 $\sigma^*$，它位于 $\mathsf{Cat}_\infty$ 中，如下所示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\widetilde{Y}} & \xleftarrow{h^*} & \mathcal{C}_{\widetilde{X}} \\ \uparrow{\scriptstyle g_Y^*} & \sigma^* & \uparrow{\scriptstyle g_X^*} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}_X \end{array}.$$

由于 $q$ 除是笛卡尔纤维化外还是余笛卡尔纤维化，因此函子 $h^*$和 $f^*$ 分别有左伴随 $h_!$ 和 $f_!$。由此，我们得到一个 Beck-Chevalley 变换$BC[\sigma^*]\colon h_!g_Y^* \longrightarrow g_X^*f_!$。稍微滥用一下记号，我们也将这个变换称为与 $\sigma$ 相关联的***Beck-Chevalley*** 变换，并记作 $BC[\sigma]$; 若 $BC[\sigma]$ 是等价，则称 $\sigma$ 满足 ***Beck-Chevalley*** 条件。

**定义 2.12**。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{X}$ 为 $\infty$-范畴。给定单纯集合的映射 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ ，若 $q$ 满足以下条件，则称其为***Beck-Chevalley*** 纤维化：

(1) 映射 $q$ 是笛卡尔与余笛卡尔纤维化。

(2) $\mathcal{X}$有拉回。

(3) $\mathcal{X}$ 中的每个拉回方块都满足 Beck-Chevalley 条件。也就是说，对于 $\mathcal{X}$ 中由下图表示的每个拉回方块 $\sigma$：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & \sigma & \downarrow{\scriptstyle g_Y} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array},$$

与 $\sigma$ 相关联的 Beck-Chevalley 变换 $BC[\sigma]\colon h_! g_Y^* \longrightarrow g_Y^* f_!$ 是从 $\mathcal{C}_Y$到 $\mathcal{C}_{\widetilde{X}}$的函子等价。

**例 2.13**。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴，且存在余极限。定理 $q$: 局部系统$(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ 中 $\mathcal{C}$值局部系统的笛卡尔与余笛卡尔纤维化，在定理 2.4 中有所描述，它是一个 Beck-Chevalley 纤维化——参见定理 4.4。

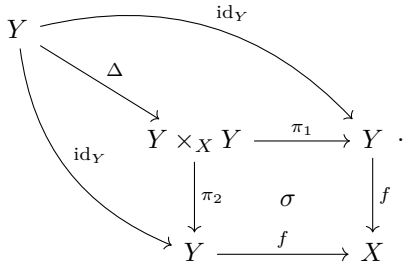
给定一个 Beck-Chevalley 纤维化 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 以及一个态射 $f\colon Y \longrightarrow X$（位于 $\mathcal{X}$中），我们关注这样的情形： $f_!$ 除了是 $f^*$的左伴随之外，也是其右伴随。我们定义 $\mathcal{X}$ 中满足这一条件的一类态射，即 $\mathcal{X}$的双向伴随 态射。该定义按照态射的截断层级归纳给出。

**构造 2.14**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化。对于每个 $n \geq -2$，我们定义以下数据：

- $\mathcal{X}$中的一类态射称为弱 $n$-双向伴随态射。
- 对于每个弱 $n$-双向伴随态射 $f\colon Y \longrightarrow X$ 在 $\mathcal{X}$ 中，都有一个自然变换$\nu_f^n\colon f^* f_! \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y}$，我们将其称为 $f$ 的反向余单位（尽管一般而言，这个变换并不是某个伴随的余单位）。
- 我们将 $\mathcal{X}$中的一类态射称为 $n$-双向伴随态射，其中包括所有弱$n$-双向伴随态射。
- 对于每个 $n$-双向伴随态射 $f\colon Y \longrightarrow X$ 在 $\mathcal{X}$ 中，反向余单位实际上是伴随$f^* \dashv f$的余单位! 因此，我们得到一个反向单位 $\mu_f^n\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}_X} \longrightarrow f_! f^*$，它表明$f_!$ 是 $f^*$的右伴随。

这些类是归纳定义的。设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射。若 $f$ 是一个等价，我们就称 $f$为（$-2$）-双向伴随的（在这种情况下，我们也称 $f$ 为弱（$-2$）-双向伴随）。因此，由 $f$ 得到的诱导伴随 $f_!$ 和 $f^*$ 互为逆等价，且单位 $\eta_f$和余单位 $\varepsilon_f$都是等价。我们将$f$的反向余单位 $\nu_f^{-2}\colon f^* f_! \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y}$定义为 $\eta_f$的逆，并将 $f$的反向单位 $\mu_f^{-2}$定义为 $\varepsilon_f$的逆。

现在，假设已对某个 $n \geq -2$定义了 $n$-双向态射的概念，并且已为所有 $n$-双向态射定义了反向单位。再次设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射，并将 $f$沿自身的拉回方块记为 $\sigma$。设 $\Delta\colon Y \longrightarrow Y \times_X Y$为对角映射，其定义为使其嵌入交换图中的映射



如果 $\Delta$ 是 $n$-双向伴随，我们就称 $f$ 是弱 $(n+1)$<style id='5'}-双向伴随 。由于假设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是 Beck-Chevalley 纤维化， $\sigma$ 满足 Beck-Chevalley 条件，因此 $BC[\sigma]$是一个等价。于是，我们可以将自然变换 $\nu_f^{n+1}\colon f^*f_! \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y}$ 定义为以下复合

$$\nu_f^{n+1}\colon f^*f_! \xrightarrow{BC[\sigma]^{-1}} \pi_{1!}\pi_2^* \xrightarrow{\pi_{1!}\mu_\Delta^n\pi_2^*} \pi_{1!}\Delta_!\Delta^*\pi_2^* \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y},$$

利用 $\pi_i\Delta \simeq \mathrm{id}_Y$，并且对两者都应用 $(-)_!$ 和 $(-)^*$ 具有函子性（参见第 2.1 节）。我们将 $\nu_f^{n+1}$ 称为 $f$ 的反向余单位映射 $f$ （请注意，这种说法并不严谨，因为只有当 $\nu_f^{n+1}$ 是 $f$-双向伴随时，才保证它是余单位）。$n+1$

我们称 $f$ 是 $(n+1)$-双向伴随，如果满足以下条件：对于任意拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{X}$ 中，态射 $h$ 是弱 $(n+1)$-双向伴随的，并且自然变换 $\nu_h^{n+1}$ 是伴随 $h^* \dashv h_!$ 的余单位。我们将 $h$ 的反向单位 $\mu_h^{n+1}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}_{\widetilde{Y}}} \longrightarrow h^*h_!$ 定义为由 $\nu_h^{n+1}$ 确定的伴随的相容单位。

如果所讨论的 Beck-Chevalley 纤维化 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 存在歧义，我们将改称 $f$ 相对于 $q$ 是*(弱)* $n$-双向伴随的，并将 $\nu_f^n$ 和 $\mu_f^n$ 称为 $f$ 相对于 $q$ 的反向（余）单位。

**注 2.15**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，并设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射。我们从定理 2.14中得到以下观察：

(1) 若 $f$ 是 $n$-双向伴随的，则 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的。事实上，对于 $n=-2$ ，这是由定义得到的；而对于 $n \geq -1$，该交换方块

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

是一个拉回方块。

(2) 上述同一个拉回方块还表明，若 $f$ 是 $n$-双向伴随的，则逆向余单位映射 $\nu_f^n$ 确定一个伴随 $f^* \dashv f_!$。

(3) 若 $f$ 是 $n$-双向伴随的，则 $f$ 的任意拉回都是 $n$-双向伴随的。事实上，若 $h$ 是 $f$的一个拉回，则根据拉回方块的粘贴定律， $h$的任意拉回也是 $f$的一个拉回（这是 [Lur09，引理 4.4.2 的对偶）。1]因此，对 $h$的拉回需要验证的条件，可由 $n$-双向伴随性 $f$推出。

（4）如果 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的，那么 $f$ 的任意拉回都是弱 $n$-双向伴随的。对于 $n=-2$~ ~，这是因为拉回保持等价。对于 $n \geq -1$，如果 $h\colon Y \longrightarrow X$ 是以下对象的拉回

$f$，将 $f$ 的对角映射记为 $\Delta_f\colon\ Y \longrightarrow Y \times_X Y$，并将 $h$ 的对角映射记为 $\Delta_h\colon\ \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$。在这种情况下，我们可以构造如下形式的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\Delta_h} & \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}.$$

由于 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的，$\Delta_f$ 是 $(n-1)$-双向伴随的，因此根据前面的注记，$\Delta_h$ 是 $(n-1)$-双向伴随的；按定义，这意味着 $h$ 是弱 $n$-双向伴随的。

回顾一下，在任意 $f\colon\ Y \longrightarrow X$ -范畴 $\infty$中，态射 $\mathcal{X}$ 称为 $n$-截断的（相对于 $n \geq -2$），如果对于每个 $Z \in \mathcal{X}$，由后复合 $\mathcal{X}(Z,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(Z,X)$诱导的映射 Map $f$具有$n$-截断的同伦纤维（[Lur09，定义 5.5.6。8]）。

**命题 2.16**。设 $q\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，且设 $f\colon\ Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射。如果 $f$ 是（弱） $n$-双向伴随的，那么 $f$ 是 $n$-截断的。

证明。对于 $n = -2$ 这显然成立。对于 $n \geq -1$，这由 [Lur09，引理 5.5.6 得出。15] 该引理指出，态射 $f\colon\ Y \longrightarrow X$ 在 $\mathcal{X}$ 中 $n$关于 $n \geq -1$ 是截断的，当且仅当对角线 $\Delta\colon\ Y \longrightarrow Y \times_X Y$ 是（$n-1$）- 截断的。□

我们将 需要确立不同程度的（弱）双侧性之间的某种相容性。

**命题 2.17**。设 $q\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，$f\colon\ Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射，并给定整数 $-2 \leq m \leq n$。

*(1)* 若 $f$ 是弱 $m$-双向伴随的，则 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的，且反向余单位映射 $\nu_f^m$与 $\nu_f^n$ 等价。*(2)* 若 $f$ 是 $m$-双向伴随的，则 $f$ 是 $n$-双向伴随的，且逆向单位映射 $\mu_f^m$与 $\mu_f^m$等价。*(3)* 若 $f$ 是（弱） $n$-双向伴随的，则 $f$ 是（弱） $m$-双向伴随的，当且仅当 $f$ 是 $m$-截断的。

证明。略。参见 [HL13，命题 4.1.10 (4)-(6)]。□

**定义 2.18**。设 $q\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，并设 $f$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射 .

(1) 我们称 $f$ 为弱双伴随，如果 $f$ 是弱 $n$-双向伴随，其中 $n \geq -2$是某个整数。在这种情况下，我们将反向余单位 $\nu_f^n$ 称为 $f$ 的 $\nu_f$，根据定理 2.17(1)，它在等价意义下是良定义的。(2) 我们称 $f$ 为双向伴随，如果 $f$ 是 $n$-双向伴随，其中 $n \geq -2$是某个整数。在这种情况下，我们将反向单位 $\mu_f^n$ 称为 $f$ 的 $\mu_f$，根据定理 2.17 (2)，它在等价意义下是良定义的。

如果所讨论的 Beck-Chevalley 纤维化 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 存在歧义，我们将改称 $f$ 相对于 $q$ 是（弱）双向伴随，并将 $\nu_f$ 和 $\mu_f$ 称为相对于 的反向（余）单位。

**定义 2.19**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，且 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个态射。假设 $f$ 是弱双伴随的，且 $f^*$ 有右伴随 $f_*$。在这种情况下，我们将与 $f$ 关联的范数映射 Nm$_f$ 定义为以下复合

$$\mathrm{Nm}_f\colon f_! \xrightarrow{\eta_* f_!} f_* f^* f_! \xrightarrow{f_* \nu_f} f_*.$$

也就是说，Nm$_f$ 是 $\nu_f\colon f^* f_! \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y}$ 在伴随 $f^* \dashv f_*$ 下的伴。

**注 2.20**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，$f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个弱双伴随态射，并假设 $f^*$ 有右伴随 $f_*$。在这种情况下，Nm$_f$ 在伴随 $f^* \dashv f_*$ 下唯一确定 $\nu_f$，反之亦然。特别地，Nm$_f$ 等价于恒等映射，当且仅当 $\nu_f$ 等价于该伴随的余单位。

**注 2.21**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，且 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$中的一个态射。若 $f$ 是双向伴随的，则反向余单位 $\nu_f\colon f^* f_! \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y}$ 表明 $f_!$ 是$f^*$的右伴随。特别地，范数映射 Nm$_f$ 存在且是一个等价。

例 2.22. 设 $\mathcal{C}$ 是一个存在余极限和极限的 $\infty$-范畴。定理 2.4 和定理 2.13 中描述的、取值于 $\mathcal{C}$ 的局部系统的 Beck-Chevalley 纤维化 $q$: LocSys($\mathcal{C}$) $\longrightarrow \mathcal{S}$ 具有如下性质：对于任意空间映射 $f$: $B \longrightarrow A$，诱导的预复合函子 $f^*$: Fun($A, \mathcal{C}$) $\longrightarrow$ Fun($B, \mathcal{C}$) 同时存在左伴随 $f_!$ 和右伴随 $f_*$。因此，对于这类局部系统，当 $f$ 弱双伴随时，范数映射 Nm$_f$: $f_! \longrightarrow f_*$ 总是存在。

# 3 范数方形

## 3.1 Beck-Chevalley 变换

在本节中，我们将证明 Beck-Chevalley 变换和范数映射的性质，这些性质将在定理 3.7的证明中用到。

**注记 3.1.** 我们先对自然变换作一个简单的观察。考虑~ ~四个 $\infty$-范畴之间的函子， $F, F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 以及 $G, G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$，它们之间的自然变换 $\alpha, \beta$如下所示：

$$\mathcal{C} \underset{\widetilde{F}}{\overset{F}{\underset{\alpha \Downarrow}{\overset{}{}}}} \mathcal{D} \underset{\widetilde{G}}{\overset{G}{\underset{\beta \Downarrow}{\overset{}{}}}} \mathcal{E} \ .$$

~ ~在这种情况下，将 $\alpha$ 和 $\beta$ 复合为一个对应于图表中两条路径的变换 $GF \Rightarrow GF$有两种方式

$$\begin{array}{ccc} GF & \xrightarrow{G\alpha} & G\widetilde{F} \\ \downarrow{\scriptstyle \beta F} & & \downarrow{\scriptstyle \beta \widetilde{F}} \\ G\widetilde{F} & \xrightarrow{\widetilde{G}\alpha} & \widetilde{G}\widetilde{F} \end{array} .$$

由于 $\beta$ 是一个自然变换，这个图表交换，因此两个复合可以视为相同。由此可知，只要我们有一个图表，其中变换的复合对应于不同函子的变换，就可以交换这些变换的顺序。

**记号 3.2.** 在下文的定理 3.3、定理 3.4和定理 3.5 中，即使 $f^*$并非由态射 $\infty$的笛卡尔提升诱导而来，我们仍将使用这个富有启发性的记号 $f^*$来表示 $f$-范畴之间的函子。此外，对于伴随的单位（余单位），我们将采用与定理 2.8 中相同的记号，例如将伴随 $\eta_f$ 的单位记作 $f_! \dashv f^*$，而非 $\eta_{f^*}$

We 现在说明 Beck-Chevalley 变换在图表粘贴下的表现。

**Lemma 3.3.** 设给定一个 $\infty$-范畴之间由函子构成的交换图，其形式为 $m$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & \xleftarrow{k^*} & \mathcal{F} & \xleftarrow{i^*} & \mathcal{D} \\ \uparrow{\scriptstyle l^*} & \sigma & \uparrow{\scriptstyle h^*} & \tau & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathcal{G} & \xleftarrow{j^*} & \mathcal{E} & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C} \end{array} . \tag{3.1}$$

*(1)* 假设所有水平函子都有左伴随（记作 $(-)_!$）。在这种情况下，复合变换

$$i_! k_! l^* \xrightarrow{i_! BC_![\sigma]} i_! h^* j_! \xrightarrow{BC_![\tau] j_!} g^* f_! j_!$$

等价于与外方形相关联的左伴随的 *Beck-Chevalley* 变换。

(*2*) 假设所有水平函子都有右伴随（记作$(-)_*$）。在这种情形下，复合变换

$$g^*f_*j_* \xrightarrow{BC_*[\tau]j_*} i_*h^*j_* \xrightarrow{i_*BC_*[\sigma]} i_*k_*l^*$$

等价于与外方形相关联的右伴随的 *Beck-Chevalley* 变换。

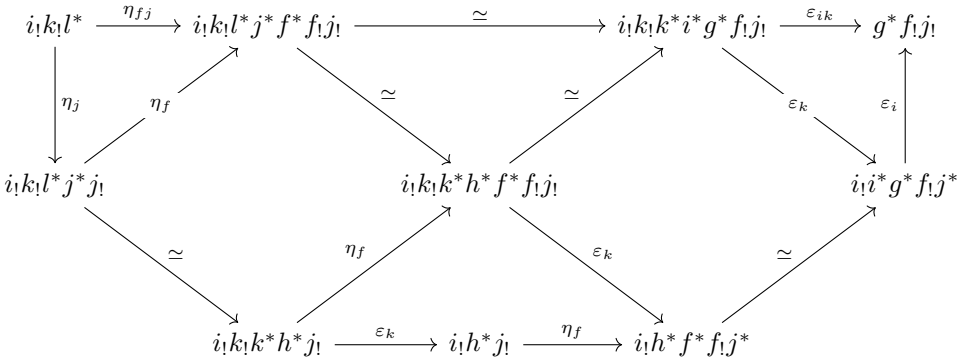
证明。 我们证明 (1)，(2) 的证明可用类似的论证完成。由于伴随的复合仍产生伴随，可见函子 $k^*i^*$ 与 $j^*f^*$ 的左伴随存在，并且分别典范等价于 $i_!k_!$ 与 $f_!j_!$ 。记 $\eta_{fj}$ 为伴随$f_!j_! \dashv j^*f^*$ 的单位，并记 $\varepsilon_{ik}$ 为伴随 $i_!k_! \dashv k^*i^*$的余单位。由此可知， $\eta_{fj}$ 可典范地等同于复合

$$\mathrm{id}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\eta_j} j^*j_! \xrightarrow{j^*\eta_f j_!} j^*f^*f_!j_!$$

并且 $\varepsilon_{ik}$ 可典范地等同于复合

$$i_!k_!k^*i^* \xrightarrow{i_!\varepsilon_k i^*} i_!i^* \xrightarrow{\varepsilon_i} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

考虑如下图表

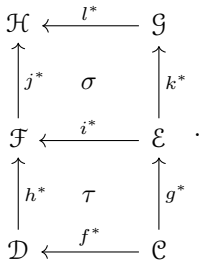



其中两个外层复合分别是图表（3.1）的拼接方形的 Beck-Chevalley 变换，以及 $BC_!{}[\sigma]$ 与 $BC_!{}[\tau]$ 的复合。右上三角形与左上三角形根据前述讨论而交换，上方中间的图表交换，因为见证图表（3.1）的拼接方形之交换性的等价典范等价于见证 $\sigma$ 与 $\tau$之交换性的等价的复合。其余三个图表根据定理 3.1而交换。因此，整个图表交换，即为所求。

□

定理的类似结果3.3 对于垂直粘贴也成立。该陈述可见于[CSY18，引理 2.1。6]。

**引理 3　.4.** 给定一个 $\infty$-范畴之间由函子构成的交换图，其形式如下：



*(1)* 假设所有水平函子都存在左伴随（记作$(-)_!$）。在这种情况下，复合变换

$$l_!j^*h^* \xrightarrow{BC_![\sigma]h^*} k^*i_!h^* \xrightarrow{k^*BC_![\tau]} k^*g^*f_!$$

等价于与外方形相关联的左伴随的 *Beck-Chevalley* 变换。

*(2)* 假设所有水平函子都存在右伴随（记作$(-)_*$）。在这种情况下，复合变换

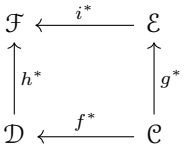
$$k^*g^*f_* \xrightarrow{k^*BC_*[\tau]} k^*i_*h^* \xrightarrow{BC_*[\sigma]h^*} l_*j^*h^*$$

等价于与外方形相关联的右伴随的 *Beck-Chevalley* 变换。

$P$顶角。省略。证明可采用与定理 3.3 的证明类似的论证　　. □

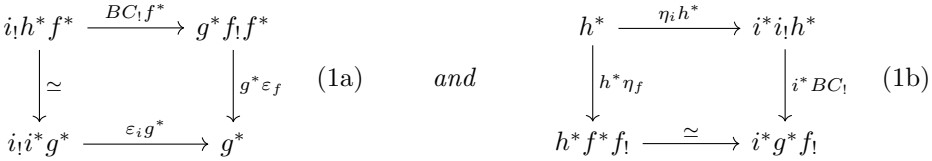
以下 Beck-Chevalley 变换与伴随的单位（余单位）之间的交换性，将在定理 3.7 的证明中至关重要。

**引理 3.5.** 设有一个交换方形



的函子，并令 $BC_!$ 和 $BC_*$ 表示该图表的两个 *Beck-Chevalley* 变换（若它们存在）。

*(1)* 若 $i^*$ 和 $f^*$ 分别有左伴随 $i_!$ 和 $f_!$，则 $BC_!$ 存在，且图表



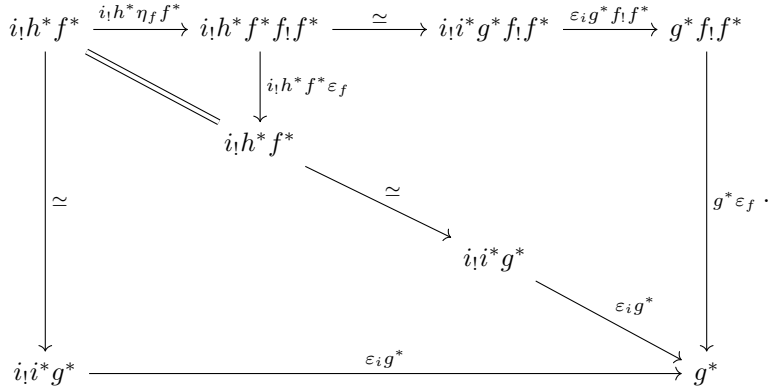
可交换。

*(2)* 若 $i^*$ 并且 $f^*$ 分别存在右伴随 $i_*$ 和 $f_*$，那么 $BC_*$ 存在，且图表

$$\begin{array}{ccc} i^*g^*f_* & \xrightarrow{i^*BC_*} & i^*i_*h^* \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{*i}h^*} \\ h^*f^*f_* & \xrightarrow{h^*\varepsilon_{*f}} & h^* \end{array} \quad (2a) \qquad \textit{and} \qquad \begin{array}{ccc} g^* & \xrightarrow{g^*\eta_{*f}} & g^*f_*f^* \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{*i}g^*} & & \downarrow{\scriptstyle BC_*f^*} \\ i_*i^*g^* & \xrightarrow{\simeq} & i_*h^*f^* \end{array} \quad (2b)$$

交换。

证明。 我们证明 (1a) 交换。其他图表的交换性可以用类似的证明来说明。展开 $BC_!$ 的定义并添加中间映射，可得图表

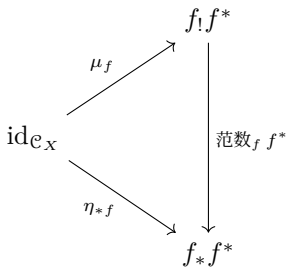



左下三角形严格交换，右上图表根据定理 3.1交换，因为$\varepsilon_f$ 将不同的函子从 $\simeq$和 $\varepsilon_i$变换而来，而左上三角形根据伴随的三角恒等式交换。因此，整个图表交换。

□

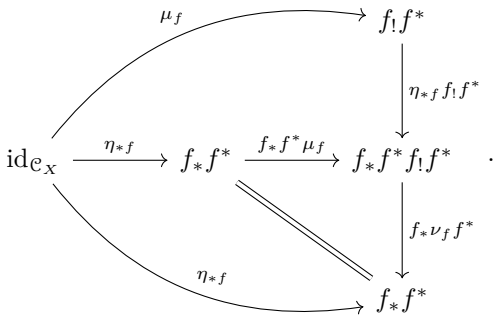
在定理 3.7 的证明中，我们还需要以下结果，它将双向态射的范数映射与反向单位联系起来：

**引理 3.6**。 设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，且设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个态射。若 $f$ 是双向伴随，则图表




交换。

证明。 反向单位 $\mu_f$ 和右伴随 $f_*$ 的存在性源于 $f$ 具有双向伴随性质。展开 $\mathrm{Nm}_f$ 的定义并添加中间映射后，得到图表

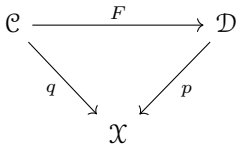



上方的图表由 $\eta_{*f}$ 的自然性保证交换，左下方的三角形严格交换，右下方的三角形则由伴随的三角恒等式保证交换，因为 $f$ 的双侧性意味着 $\mu_f$ 和 $\nu_f$ 分别是伴随 $f^* \dashv f_!$ 的单位和余单位。 □

## 3.2 范数方形定理

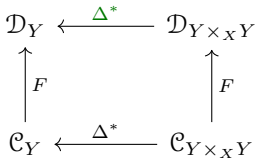
现在我们转向主定理的证明，即给定两个 Beck-Chevalley 纤维化 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 和 $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$，以及一个函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，它保持笛卡尔边，则由此得到的范数方形交换。我们的证明受到 [HL13，命题 4.1.1 (1)]的证明启发。

**定理 3.7**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 和 $p\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是 *Beck-Chevalley* 纤维化，并设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是一个 $\infty$-范畴之间的函子，它将 $\mathcal{C}$ 中的 $q$-笛卡尔边映至 $\mathcal{D}$ 中的 $p$-笛卡尔边。假设图表




可交换。令 $f\colon Y \longrightarrow X$ 为 $\mathcal{X}$中的一个态射，将 $f$的笛卡尔提升记为 $f^*\colon \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{C}_Y$和 $f^*\colon \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}_Y$，将 $f$的余笛卡尔提升记为 $f_!\colon \mathcal{C}_Y \longrightarrow \mathcal{C}_X$和 $f_!\colon \mathcal{D}_Y \longrightarrow \mathcal{D}_X$。此外，令 $\Delta\colon Y \longrightarrow Y \times_X Y$表示由 $f$诱导的对角映射，将 $\Delta$ 的笛卡尔提升记为 $\Delta^*\colon \mathcal{C}_{Y\times_X Y} \longrightarrow \mathcal{C}_Y$和 $\Delta^*\colon \mathcal{D}_{Y\times_X Y} \longrightarrow \mathcal{D}_Y$。假设以下条件成立：

- $f^*$和 $f^*$分别有右伴随 $f_*$和 $f_*$。
- $f$ 相对于 $q$ 和 $p$是弱双伴随的。
- 交换方块




  满足 *Beck-Chevalley* 条件。

在这种情况下，图表

$$\begin{array}{ccc} f_!F & \xrightarrow{BC_!} & Ff_! \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_f F} & & \downarrow{\scriptstyle F\,\mathrm{Nm}_f} \\ f_*F & \xleftarrow{BC_*} & Ff_* \end{array} \tag{3.2}$$

函子之间的自然变换在函子$(\mathcal{C}_Y, \mathcal{D}_X)$ 中交换，其中 $BC_!$ 和 $BC_*$ 是由图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{D}_X \\ \uparrow{\scriptstyle F} & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}_X \end{array}$$

$F$诱导的。

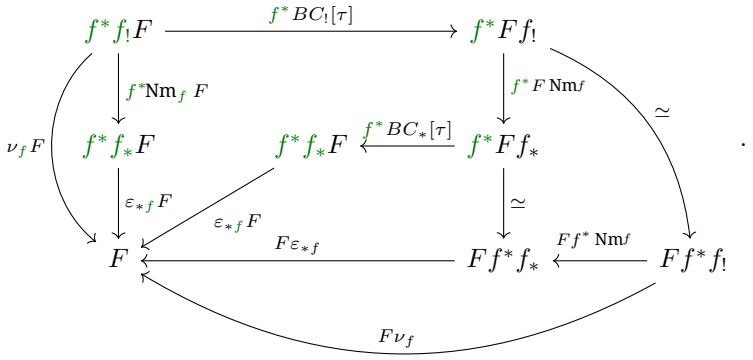
证明。 将图表记为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{D}_X \\ \uparrow{\scriptstyle F} & \tau & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}_X \end{array}$$

由 $\tau$。如第 2.1 节所述，函子 $F$ 诱导出一个自然变换 $F\colon\ \mathcal{C}_{(-)} \Longrightarrow \mathcal{D}_{(-)}$，因此 $\tau$ 交换。因此，Beck-Chevalley 变换 $BC_! = BC_![\tau]$ 和 $BC_* = BC_*[\tau]$ 均存在。下文中，我们将在下标中标示由态射 $\mathcal{D}$ 诱导的自然变换 $g$，其中 $\mathfrak{X}$记作 $g$。例如， $f$ 在 $\mathcal{D}$ 中的反向余单位记作 $\nu_f$。根据伴随 $f^* \dashv f_*$，图表（3.2）的交换性等价于下列图表的交换性

$$\begin{array}{ccccc} f^*f_!F & & \xrightarrow{f^*BC_![\tau]} & & f^*Ff_! \\ \downarrow{\scriptstyle f^*\,\mathrm{Nm}_f F} & & & & \downarrow{\scriptstyle f^*F\,\mathrm{Nm}_f} \\ f^*f_*F & & f^*f_*F & \xleftarrow{f^*BC_*[\tau]} & f^*Ff_* \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{*f}F} & \swarrow{\scriptstyle \varepsilon_{*f}F} & & & \\ F & & & & \end{array} .$$

通过添加一些额外的自然变换，我们可以考虑如下图表




所有新子图都自动交换：左侧图表交换，因为 $\mathrm{Nm}f$ 是 $\nu_f$的伴，底部图表交换，因为 $\mathrm{Nm}f$ 是 $\nu_f$ 的伴，右侧图表根据等价 $\simeq$的自然性而交换，中间图表则根据定理 3.5 (2a) 而交换。因此，图表（3.2）交换等价于图表

$$\begin{array}{ccc} f^*f_!F & \xrightarrow{f^*BC[\tau]} & f^*Ff_! \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_f F} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ F & \xleftarrow{F\nu_f} & Ff^*f_! \end{array} \quad . \tag{3.3}$$

由于 $f$ 是弱双伴随的， $f$ 对于某个整数 $n$是弱 $n \geq -2$-双伴随。我们通过对进行归纳，证明图表（3.3）交换。 $n$。

首先假设 $f$ 是弱（$-2$）-双伴随的。在这种情况下， $f$ 是一个等价，且$\nu_f$ 定义为 $\eta_f$的逆。因而，证明图表（3.3）交换等价于证明图表

$$\begin{array}{ccc} f^*f_!F & \xrightarrow{f^*BC[\tau]} & f^*Ff_! \\ \uparrow{\scriptstyle \eta_f F} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ F & \xrightarrow{F\eta_f} & Ff^*f_! \end{array}$$

可交换。根据定理 3.5 (1b)。

现在，设 $n \geq -1$，假设 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的，并假设我们已经证明，对于任意弱 $n-1$-双向伴随映射，图表（3.2）具有交换性。考虑拉回方块

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \xrightarrow{\pi_1} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{X}$中。将此交换方块分别提升到 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中，记为 $\sigma$ 和 $\sigma$ 。也就是说，令 $\sigma$ 和 $\sigma$表示以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{Y\times_X Y} & \xleftarrow{\pi_1^*} & \mathcal{C}_Y \\ \uparrow{\scriptstyle \pi_2^*} & \sigma & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}_X \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{Y\times_X Y} & \xleftarrow{\pi_1^*} & \mathcal{D}_Y \\ \uparrow{\scriptstyle \pi_2^*} & \sigma & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{D}_X \end{array}.$$

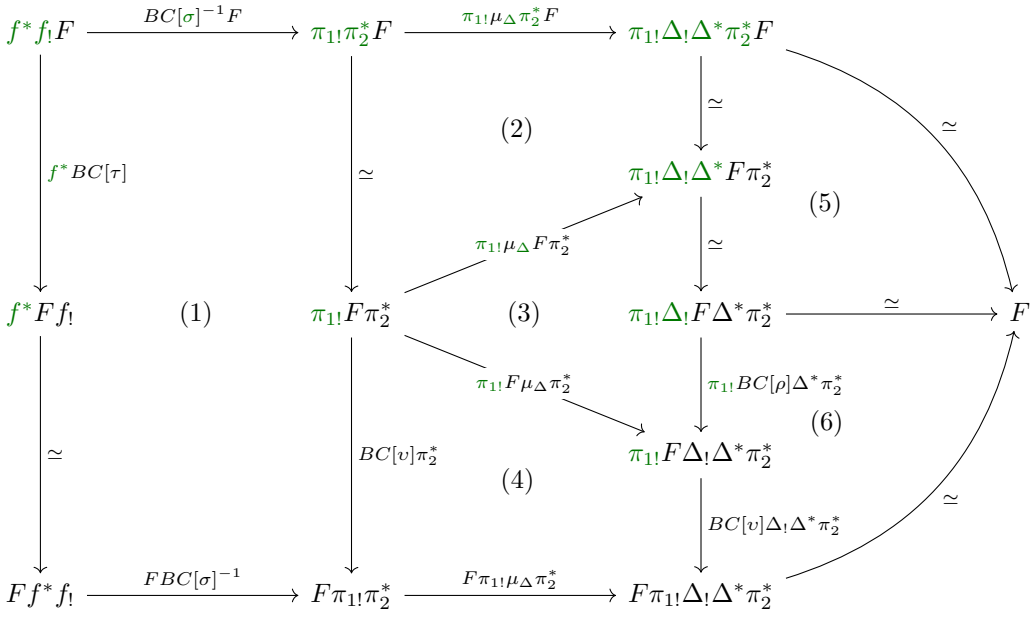
由于这些交换方块是由 Beck-Chevalley 纤维化作用于一个拉回方块而诱导出的，Beck-Chevalley 变换 $BC[\sigma]$ 和 $BC[\sigma]$ 都是等价。由于 $F$ 保持笛卡尔边，我们由对角映射 $\Delta$ 和 $\pi_1$ 分别诱导出交换方块 $\rho$ 和 $\upsilon$，如图所示:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{\Delta^*} & \mathcal{D}_{Y\times_X Y} \\ \uparrow{\scriptstyle F} & \rho & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{\Delta^*} & \mathcal{C}_{Y\times_X Y} \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{Y\times_X Y} & \xleftarrow{\pi_1^*} & \mathcal{D}_Y \\ \uparrow{\scriptstyle F} & \upsilon & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_{Y\times_X Y} & \xleftarrow{\pi_1^*} & \mathcal{C}_Y \end{array}.$$

此外，根据定义，由于 $f$ 弱 $n$-双向伴随， $\Delta$ 是 $(n-1)$-双向伴随。特别地，我们有逆向单位映射 $\mu_\Delta$ 和 $\mu_\Delta$。回忆一下， $f$ 的反向余单位 $\nu_f$ 由以下复合给出:

$$\nu_f \colon f^* f_! \xrightarrow{BC[\sigma]^{-1}} \pi_{1!}\pi_2^* \xrightarrow{\pi_{1!}\mu_\Delta \pi_2^*} \pi_{1!}\Delta_!\Delta^*\pi_2^* \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}_Y},$$

对于 $\nu_f$也同理。展开 $\nu_f$ 和 $\nu_f$ 的定义后，我们可以通过证明下图交换来说明图表 (3.3) 交换:



我们通过证明每个子图 (1)-(6) 都交换，来证明该图表交换：(2)：图表 (2) 的交换性可由该图表的交换性推出

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^* F & \xrightarrow{\mu_\Delta \pi_2^* F} & \Delta_! \Delta^* \pi_2^* F \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ F\pi_2^* & \xrightarrow{\mu_\Delta F \pi_2^*} & \Delta_! \Delta^* F \pi_2^* \end{array} ,$$

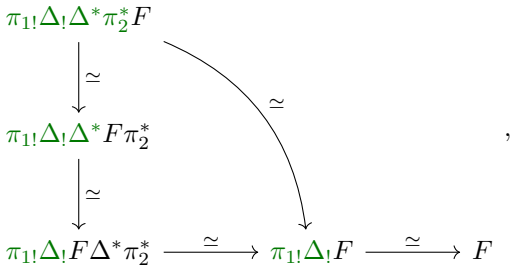
它根据 $\mu_\Delta$的自然性交换。

(4)：图表 (4) 的交换性由该图表的交换性推出

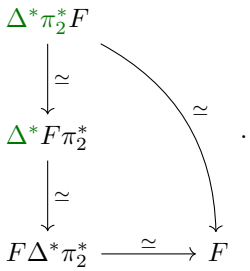
$$\begin{array}{ccc} \pi_{1!} F & \xrightarrow{\pi_{1!} F \mu_\Delta} & \pi_{1!} F \Delta_! \Delta^* \\ \downarrow BC[\upsilon] & & \downarrow BC[\upsilon]\Delta_! \Delta^* \\ F\pi_{1!} & \xrightarrow{F\pi_{1!}\mu_\Delta} & F\pi_{1!}\Delta_!\Delta^* \end{array} ,$$

它根据 $BC[\upsilon]$的自然性交换。

(5)：我们可以将图表 (5) 写成

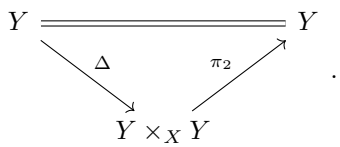



因此，只需证明该图表的交换性

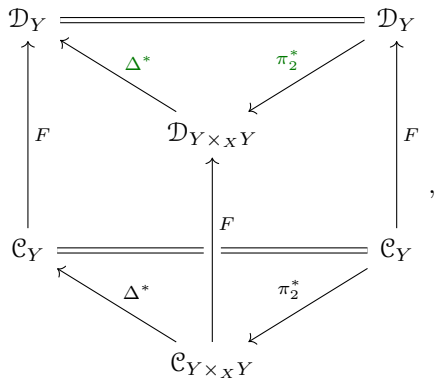



(3.4)

$\pi_2\Delta \simeq \mathrm{id}_Y$在 $\mathcal{X}$ 中的等价可以表示为一个 2-单形 $\Delta^2 \longrightarrow \mathcal{X}$，如图所示



由于 $F$ 在 $\mathcal{C}$中保持笛卡尔边，我们得到一个交换棱柱

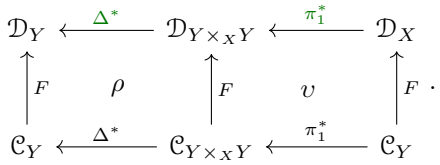



也就是说，一个映射 $\Delta^2 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$，它在书面给出的顶点和边上的限制如上。图表 (3.4) 的每个顶点都对应于此棱柱中从 $\mathcal{C}_Y$ 到 $\mathcal{D}_Y$ 的一条路径，而图表 (3.4) 的边则是由该棱柱见证的等价。因此，图表 (3.4) 交换，这表明图表 (5) 交换。

(6)：对于此图表中的左侧竖直复合，根据定理 3.3 (1)，复合变换

$$\pi_{1!}\Delta_! F \xrightarrow{\pi_{1!}BC[\rho]} \pi_{1!}F\Delta_! \xrightarrow{BC[\upsilon]\Delta_!} F\pi_{1!}\Delta_!$$

可以视为拼接方形的 Beck-Chevalley 变换




由于 $\pi_1\Delta \simeq \mathrm{id}_X$ 在 $\mathcal{X}$ 中成立，因此顶部和底部的水平复合都等价于恒等变换。因此，拼接方形的 Beck-Chevalley 变换等价于恒等变换 $F \simeq F$。这说明 (6) 具有交换性。

(1)：对于 (1)，只需证明

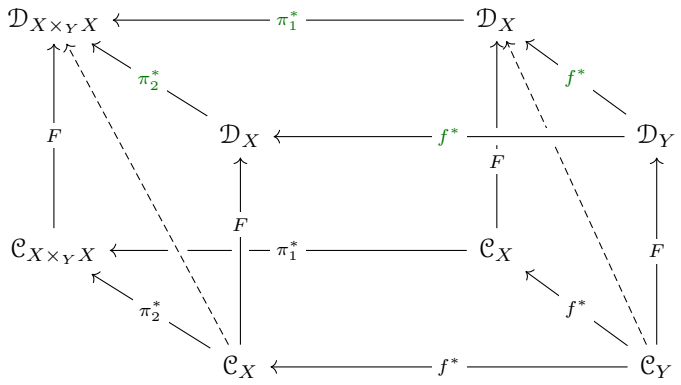
$$\pi_{1!}\pi_2^* F \xrightarrow{BC[\sigma]F} f^* f_! F \xrightarrow{f^* BC[\tau]} f^* F f_! \simeq F f^* f_!$$

and

$$\pi_{1!}\pi_2^* F \simeq \pi_{1!}F\pi_2^* \xrightarrow{BC[\upsilon]\pi_2^*} F\pi_{1!}\pi_2^* \xrightarrow{FBC[\sigma]} F f^* f_!$$

是等价的 函子。由于 $F$ 保留笛卡尔边，我们得到一个交换立方体，其面为 $\sigma$ 和 $\sigma$

o分别位于顶部和底部，而 $\nu$ 和 $\tau$ 各在侧面出现两次，如下图所示 s:



由于该立方体交换，也就是说，它表示一个图表 $\Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathsf{Cat}_\infty$，我们得到一个由虚线标出的对角图表。将此图表记为 $\vartheta$。粘贴前面与顶面，或粘贴底面与后面，都会得到一个等价于 $\vartheta$ 的交换方块。由定理 3.4 (1)，我们因此看到二者

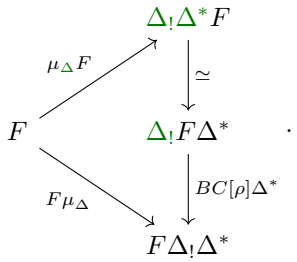
$$\pi_{1!}\pi_2^* F \xrightarrow{BC[\sigma]F} f^* f_! F \xrightarrow{f^* BC[\tau]} f^* F f_! \simeq F f^* f_!$$

and

$$\pi_{1!}\pi_2^* F \simeq \pi_{1!} F \pi_2^* \xrightarrow{BC[\upsilon]\pi_2^*} F \pi_{1!}\pi_2^* \xrightarrow{FBC[\sigma]} F f^* f_!,$$

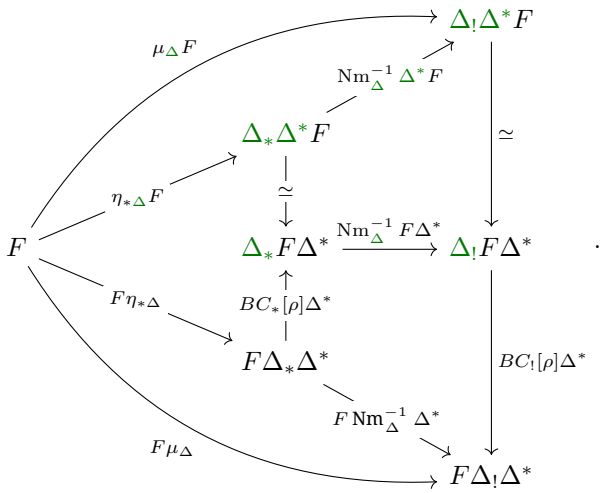
都等价于 $BC[\vartheta]$，这表明 (1) 交换。

(3)：要证明 (3) 的交换性，只需证明以下图表的交换性

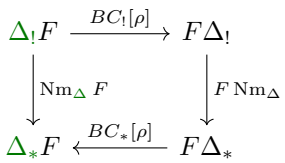


由于 $f$ 是弱双向伴随的，因此对角映射 $\Delta$ 是双向伴随的，所以范数映射 $\mathrm{Nm}_\Delta$ 和 $\mathrm{Nm}_\Delta$ 是等价。由此，我们可以添加中间变换，得到以下

图表




所有子图都交换：左上和左下三角形都根据定理 3.6交换，中间三角形根据定理 3.5（2b）交换，右上图表则根据 Nm 的自然性交换$^{-1}_{\Delta}$。对于右下图表，根据归纳假设，该图表

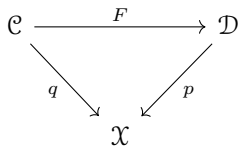



交换。由于我们假设 $BC_![\rho]$ 是一个等价，并且由于 $\Delta$ 是双向伴随的，这意味着两个范数映射都是等价，因此可知 $BC_*[\rho]$ 必须也是一个等价。这意味着 $F\,\mathrm{Nm}_\Delta$ 是复合映射 $(BC_![\rho])(\mathrm{Nm}^{-1}_\Delta F)(BC_*[\rho])$ 的逆，因此右下图表交换。由此，图表（3）交换。

这证明了图表（3.3）的交换性，从而也证明了图表（3.2）的交换性。 □

在我们感兴趣的大多数应用情形中，也就是会使用这一结果的情形，$f^*$ 确实存在一个右伴随$f_*$。不过，在 $f^*$ 不存在右伴随的情况下，也有一个类似的结果。

**推论 3.8**。设 $q\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{X}$ 和 $p\colon \mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{X}$ 是 *Beck-Chevalley* 纤维化，并设 $F\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ 是一个 $\infty$-范畴之间的函子，它将 $\mathcal{C}$ 中的 $q$-笛卡尔边映射到 $\mathcal{D}$ 中的 $p$-笛卡尔边。假设图表




可交换。令 $f\colon\ Y\longrightarrow X$ 为 $\mathcal{X}$中的一个态射，记 $f$的笛卡尔提升为 $f^*\colon\ \mathcal{C}_X\longrightarrow\mathcal{C}_Y$以及 $f^*\colon\ \mathcal{D}_X\longrightarrow\mathcal{D}_Y$，并记 $f$的余笛卡尔提升为 $f_!\colon\ \mathcal{C}_Y\longrightarrow\mathcal{C}_X$以及 $f_!\colon\ \mathcal{D}_Y\longrightarrow\mathcal{D}_X$。

此外，令 $\Delta\colon\ Y \longrightarrow Y \times_X Y$表示由 $f$诱导的对角映射，记 $\Delta$ 的笛卡尔提升为 $\Delta^*\colon$ $\mathcal{C}_{Y\times_X Y} \longrightarrow \mathcal{C}_Y$以及 $\Delta^*\colon\ \mathcal{D}_{Y\times_X Y} \longrightarrow \mathcal{D}_Y$。假设以下条件成立：

- $f$ 相对于 $q$ 和 $p$是弱双伴随的。
- 这个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{\Delta^*} & \mathcal{D}_{Y\times_X Y} \\ \uparrow{\scriptstyle F} & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{\Delta^*} & \mathcal{C}_{Y\times_X Y} \end{array}$$

  满足 *Beck-Chevalley* 条件。

在这种情况下，自然变换图

$$\begin{array}{ccc} f^*f_!F & \xrightarrow{f^*BC_!} & f^*Ff_! \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_f} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ F & \xleftarrow{\nu_f} & Ff^*f_! \end{array}$$

在函子$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}_Y, \mathcal{D}_Y)$ 中交换，其中 $BC_!$ 是该图表的左伴随的 *Beck-Chevalley* 变换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{D}_X \\ \uparrow{\scriptstyle F} & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{C}_Y & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}_X \end{array}$$

由 $F$诱导。

证明。 在定理 3.7的证明中，我们证明了图表 (3.3) 具有交换性，这正是我们要证明的内容。在证明过程中，我们从未用到 $f^*$和 $f^*$存在右伴随。 □

**注 3.9**。 在定理3.7 和定理 3.8的证明中， $q$和 $p$是 Beck-Chevalley 纤维化这一假设比实际所需的更强——我们只需要 某些 笛卡尔提升存在左伴随，并且 某些 图表满足 Beck-Chevalley 条件，这一条件分别相对于 $q$和 $p$而言。更准确地说，我们需要的是以下内容：

- 在 $f$的弱双伴随定义中，需要 $f$ 沿自身拉回后满足 Beck-Chevalley 条件，才能定义 $\nu_f$。此外，还需要 $\Delta$ 的对角映射 $f$ 具有双侧性，因此 $\Delta$ 沿自身拉回后也满足 Beck-Chevalley 条件。因此，我们需要 $f$ 沿自身拉回、$\Delta$ 沿自身拉回、 $\Delta$ 的对角线沿自身拉回，等等，都满足 Beck-Chevalley 条件。不过，由于 $f$ 是弱双伴随的意味着 $f$ 是截断的，因此这些图表在等价意义下只有有限多个。这组 Beck-Chevalley 变换包括 $BC[\sigma]$ 和 $BC[\sigma]$；在定理 3.7的证明中，我们也直接需要它们是等价。

- 在定理 $q$ 和 $p$ 的证明以及 $f$ 的（弱）双侧性定义中，$\pi_1$、$\Delta$、$\Delta$ 的对角线，等等，相对于 的笛卡尔提升都需要存在左伴随。同样，这组态射在等价意义下也只有有限多个。

因此，若这些条件对于 $q$ 和 $p$ 均成立，则可以假定映射 $q$ 和 $p$ 是笛卡尔纤维化，而非 Beck-Chevalley 纤维化。

## 3.3 Beck-Chevalley 纤维化的基变换

我们将展示一种利用已知的 Beck-Chevalley 纤维化构造新的此类纤维化的实用方法。首先，设 $q$ 是一个笛卡尔与余笛卡尔纤维化，并给定一个图表

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{C} \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{X} \end{array}$$

由 $\infty$-范畴构成。如第 2.1 节所述，将 $q$ 沿 $\alpha$ 拉回会得到另一个笛卡尔与余笛卡尔纤维化，记作 $p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$。对于任意 $Y \in \mathcal{Y}$，纤维 $(\mathcal{C}_\alpha)_Y \simeq \mathcal{C}_{\alpha(Y)}$ 存在一个典范等价，并且 $p$ 的直化等价于由将 $\mathcal{C}_{(-)}$ 与 $\alpha^{\mathrm{op}}$ 复合而诱导的函子 $\mathcal{Y}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}_\infty$。因此，对于 $\mathcal{Y}$ 中的任意图表 $\sigma$，$\sigma$ 经 $p$ 的提升可计算为 $\alpha(\sigma)$ 经 $q$ 的提升。

**引理3.10**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，$\mathcal{Y}$ 是一个存在拉回的 $\infty$-范畴，$\alpha\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个函子，且 $p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$ 是沿 $\alpha$ 拉回 $q$ 所诱导的笛卡尔与余笛卡尔纤维化。若 $\alpha$ 保拉回，则 $p$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化。

证明。我们需要证明，对于任意拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & \sigma & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

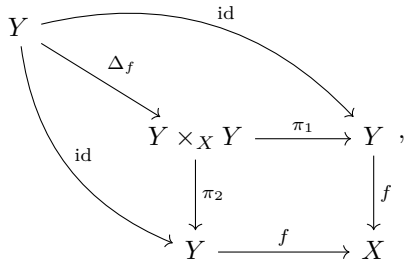
在 $\mathcal{Y}$ 中，由 $p$ 诱导的 Beck-Chevalley 变换 $BC[\sigma]$ 是一个等价。可是，$\sigma$ 到 $\mathcal{C}_\alpha$ 的笛卡尔提升等价于 $\alpha(\sigma)$ 到 $\mathcal{C}$ 的笛卡尔提升。由于 $\alpha$ 保拉回，且 $q$是一个 Beck-Chevalley 纤维化，因此 $BC[\sigma]$ 是一个等价。 □

**定义3.11**。设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，设 $\mathcal{Y}$ 是一个 $\infty$-范畴，且存在拉回，并设 $\alpha\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个保拉回函子。根据定理 3.10，设 $p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$ 是由沿 $q$ 拉回 $\alpha$ 所诱导的 Beck-Chevalley 纤维化。我们将 $p$ 称为沿 $q$ 的基变换 $\alpha$。

We s以下两个结果说明双侧性如何在基变换下保持 s.

**引理 3.12.** 设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，$\mathcal{Y}$ 是一个具有拉回的 $\infty$-范畴，$\alpha\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个保拉回函子，$p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$ 是 $q$ 沿着 $\alpha$ 的基变换，并且 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的一个态射。若 $f$ 是 $n$-截断的，且 $\alpha f$ 是（弱）$n$-双向伴随的，则 $f$ 是（弱）$n$-双向伴随的，并且 $\nu_f^n$ 与 $\nu_{\alpha f}^n$ 典范等价。

证明。我们对 $n$ 作归纳。若 $f$ 是 $(-2)$-截断的，则 $f$ 是等价，因此（弱）双向伴随。现在，设 $n \geq -1$，并假设该命题对任意 $(n-1)$-截断映射均成立。首先，假设 $\alpha f$ 是弱 $n$-双向伴随的。由 $f$ 诱导的对角映射 $\Delta_f$ 是满足下图的唯一映射




其中交换方块是 $f$ 沿其自身的拉回。由于 $\alpha$ 保持拉回，对该图应用 $\alpha$ 后，我们看到 $\alpha(\Delta_f)$ 等价于由 $\alpha f$ 诱导的对角映射 $\Delta_{\alpha f}$。由于 $\alpha f$ 是弱 $n$-双向伴随的，$\Delta_{\alpha f}$ 是 $(n-1)$-双向伴随的。根据归纳假设，$\Delta_f$ 是 $(n-1)$-双向伴随的，因此 $f$ 是弱 $n$-双向伴随的。

现在我们证明 $\nu_f^n$ 与 $\nu_{\alpha f}^n$ 是规范等价的。首先，注意到拉回方块$\sigma$,

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \xrightarrow{\pi_1} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & \sigma & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array},$$

在 $\mathcal{Y}$ 中，通过沿自身拉回 $f$ 得到的方块，根据 $\alpha$ 被映射到方块 $\alpha(\sigma)$，也就是说，

$$\begin{array}{ccc} \alpha(Y \times_X Y) & \xrightarrow{\alpha\pi_1} & \alpha(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha\pi_2} & \alpha(\sigma) & \downarrow{\scriptstyle \alpha f} \\ \alpha(Y) & \xrightarrow{\alpha f} & \alpha(X) \end{array}.$$

由于 $\alpha$ 保持拉回，$\alpha(\sigma)$必然与 $\mathcal{X}$ 中沿自身拉回 $\alpha f$ 所得到的拉回方块规范等价。结合反向余单位的定义，这表明 $\nu_{\alpha f}^n$ 由以下复合给出

$$\nu_{\alpha f}^n\colon (\alpha f)^*(\alpha_f)_! \xrightarrow{BC[\alpha(\sigma)]^{-1}} (\alpha\pi_1)_!(\alpha\pi_2)^* \xrightarrow{(\alpha\pi_1)_!\mu_{\alpha\Delta}^{n-1}(\alpha\pi_2)^*} (\alpha\pi_1)_!(\alpha\Delta)_!(\alpha\Delta)^*(\alpha\pi_2)^* \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}_{\alpha(Y)}}.$$

但这等价于关于 $p$ 的 $\nu_f^n$ 的定义，因为沿着 $p$ 的任意提升，都可以通过 $q$ 对 $\alpha$ 下的像进行提升来计算。因此，$\nu_{\alpha f}^n$ 和 $\nu_f^n$ 是典范等价的。

Now，假设 $\alpha f$ 是 $n$-双向伴随。我们需要证明，对于任意拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{Y}$ 中，态射 $h$ 是弱 $n$-双伴随的，并且具有性质： $\nu_h^n$ 是伴随 $h^* \dashv h_!$ 的余单位。此交换方块在 $\alpha$ 下的像是交换方块

$$\begin{array}{ccc} \alpha\widetilde{Y} & \xrightarrow{\alpha h} & \alpha\widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha g_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha g_X} \\ \alpha Y & \xrightarrow{\alpha f} & \alpha X \end{array},$$

由于 $\alpha$ 保拉回，因此这是一个拉回方块。由于 $\alpha f$ 是 $n$-双向伴随的，由此可知 $\alpha h$ 是弱双伴随的，且 $\nu_{\alpha f}^n$ 是伴随 $(\alpha f)^* \dashv (\alpha f)_!$ 的余单位。我们已经证明， $\alpha$ 反映弱 $n$-双侧性，且 $\nu_{\alpha h}^n$ 与 $\nu_h^n$ 典范等价。由此可知， $h$ 是弱 $n$- 双伴随的，且 $\nu_h^n$ 是伴随 $h^* \dashv h_!$ 的余单位，因此 $f$ 是 $n$- 双向伴随的。

□

**命题 3.13.** 设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化， $\mathcal{Y}$ 是一个具有拉回的 $\infty$-范畴， $\alpha\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个保拉回函子，而 $p\colon \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{Y}$ 是沿着 $\alpha$ 对 $q$ 作基变换所得。设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的一个态射，并假设 $f$ 是截断的。以下结论成立：

*(1)* 如果 $\alpha f$ 是（弱）双向伴随的，那么 $f$ 也是（弱）双向伴随的，并且 $\nu_f$ 与 $\nu_{\alpha f}$ 具有规范等价性。*(2)* 如果 $\alpha f$ 是弱双向伴随的，并且 $(\alpha f)^*$ 有一个右伴随 $(\alpha f)_*$，那么 $f^*$ 有一个右伴随 $f_*$，且范数映射 $\mathrm{Nm}_f$ 和 $\mathrm{Nm}_{\alpha f}$ 具有规范等价性。

证明。 对于 (1)：对于满足 $m$ 和 $n$ 的整数 $-2 \leq m \leq n$，是 $m$-截断的蕴含是 $n$-截断的；根据定理 2.17（1）和（2），是（弱） $m$-双向伴随的蕴含是（弱） $n$-双向伴随的。因此，我们可以找到某个整数 $n \geq (-2)$，使得 $f$ 是 $n$-截断的，并且 $\alpha f$ 是（弱） $n$-双向伴随的。结论现由定理 3.12。

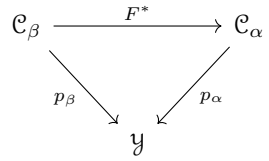
(2)：根据 (1)，态射 $f$是弱双伴随的。由于 $f^*$在规范意义下等价于 $(\alpha f)^*$，因此 $f^*$ 有右伴随 $f_*$。根据定义，范数映射 $\mathrm{Nm}_f$ 和 $\mathrm{Nm}_{\alpha f}$ 分别是 $\nu_f$和 $\nu_{\alpha f}$在伴随 $f^* \dashv f_*$和 $(\alpha f)^* \dashv (\alpha f)_*$下的伴。反向余单位映射和伴随在相同的识别下均等价，因此范数映射 $\mathrm{Nm}_f$ 和 $\mathrm{Nm}_{\alpha f}$ 也必定等价。

□

**注 3.14.** $f$ 是截断的这一条件是必要的——常值映射 $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 将 $\mathcal{Y}$ 的每个对象映到指定对象 $x \in \mathcal{X}$，并将每个态射映到恒等态射，因此显然保留拉回。但常值映射未必能反映双侧性，因为 $\mathcal{Y}$ 的态射不一定都是截断的。

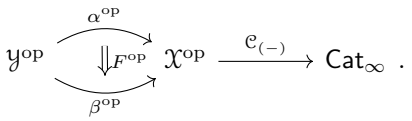
最后，我们将说明函子的自然变换与 Beck-Chevalley 纤维化的基变换之间的关系。

**命题 3.15**。 设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化， $\mathcal{Y}$ 是一个存在拉回的 $\infty$-范畴， $\alpha, \beta\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是保拉回函子，且 $F\colon \alpha \Longrightarrow \beta$ 是一个自然变换。在这种情况下， $F$ 会诱导出一个函子 $F^*$ ，该函子保持笛卡尔边，并且满足以下交换图




其中 $p_\alpha$ 和 $p_\beta$ 分别是 $q$ 沿 $\alpha$ 和 $\beta$ 的基变换。

*P*屋顶。 通过对 $p_\alpha$ 和 $p_\beta$进行直化，我们可以用以下图表概括所给数据




将 $F^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathcal{C}_{(-)}$ 的恒等变换进行水平复合，可得到自然变换 $F^*\colon\ \mathcal{C}_{\beta(-)} \Longrightarrow \mathcal{C}_{\alpha(-)}$。如第2.1节所述，对此自然变换进行反直化，可得到函子 $F^*\colon\ \mathcal{C}_\beta \longrightarrow \mathcal{C}_\alpha$，它保留笛卡尔边，并构成上图所示的图表，正如所需。

□

# 4 应用

我们将说明定理3.7 如何推出命题 4.2.1(1) [HL13]中的命题，并结合 [CSY18]中的定理 3.2.3 和命题 3.4.7。

## 4.1 范数的自然性

我们已经证明了定理 3.7，该定理说明了比较不同 Beck-Chevalley 纤维化上的提升时，范数映射具有某种自然性。现在我们说明，该定理如何推出[HL13，命题 4.2.1 (1)]，，该命题说明了沿单个 Beck-Chevalley 纤维化提升时，范数映射具有类似的自然性。我们首先证明这一结果的一个版本，如 [HL13，备注 4.23], 所述；也就是说，弱双伴随映射的提升也具有右伴随的情形。

**命题 4.1** ([HL13，备注 4.23])。 设 $q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化，并给定一个交换图 $\tau$，其形式如下 $\mathcal{X}$:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & \tau & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}.$$

假设满足以下条件:

- 笛卡尔提升 $f^*$ 和 $h^*$ 具有右伴随 $f_*$ 和 $h_*$
- $f$ 和 $h$是弱双伴随的。
- 交换方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\Delta_h} & \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

  由对角映射 $\Delta_f$ 和 $\Delta_h$ 诱导的交换方块满足 *Beck-Chevalley* 条件。

在这种情况下，自然变换图

$$\begin{array}{ccc} h_! g_X^* & \xrightarrow{BC_![\tau]} & g_Y^* f_! \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_f} \\ h_* g_X^* & \xleftarrow{BC_*[\tau]} & g_Y^* f_* \end{array}$$

可交换。

证明。考虑 $\infty$-范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$，其对象为 $\mathcal{X}$ 中的态射。该范畴带有两个映射 $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1 \colon \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$，分别由在初始顶点和终末顶点处求值给出，并带有自然变换 $F \colon \mathrm{ev}_0 \longrightarrow \mathrm{ev}_1$，由 $F_g = g$ 给出，其中 $g \in \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$ 任意。由于函子的极限是逐点计算的，$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$ 存在拉回，且函子 $\mathrm{ev}_0$ 和 $\mathrm{ev}_1$ 保持拉回。分别记 $p_0 \colon \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_0} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$ 和 $p_1 \colon \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_1} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$ 为沿 $\mathrm{ev}_0$ 和 $\mathrm{ev}_1$ 对 $q$ 作出的基变换。由定理 3.15，我们得到如下可交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_1} & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_0} \\ & {\scriptstyle p_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle p_0} & \\ & \text{函子}(\Delta^1, \mathcal{X}) & \end{array}$$

其中 $F^*$ 保留笛卡尔边，并且对于任意态射 $g \in \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$，限制函子 $F_g^* \colon (\mathcal{C}_{\mathrm{ev}_1})_g \longrightarrow (\mathcal{C}_{\mathrm{ev}_0})_g$ 与 $g$ 在 $q$ 下的笛卡尔提升 $g^* \colon \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_1}(g) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{ev}_0}(g)$ 自然等价。注意，$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$中的态射就是一个交换方块 $\Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{X}$。因此，我们可以将交换方块 $\tau$视为 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X})$ 中的态射 $\tau \colon g_X \longrightarrow g_Y$，其中 $\mathrm{ev}_0(\tau) = h$ 且 $\mathrm{ev}_1(\tau) = f$。由于 $h$和 $f$都是弱双伴随的，根据定理 2.16，这些映射都是截断的，故 $\tau$ 也是截断的。因此，根据定理 3.13 (1)，$\tau$ 相对于 $p_0$ 和 $p_1$都是弱双伴随的。此外，根据定理 3.13 (2)，相对于 $p_1$ 的范数映射 $\mathrm{Nm}_\tau$ 存在，且等价于 $\mathrm{Nm}_f$；相对于 $p_0$ 的范数映射 $\mathrm{Nm}_\tau$ 也存在，且等价于 $\mathrm{Nm}_h$。最后，由对角映射 $\Delta_\tau$ 的提升所诱导的交换方块（为了应用定理 3.7，我们要求它满足 Beck-Chevalley 条件）等价于该方块的提升

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\Delta_h} & \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

沿着 $q$。结论现在由定理 3.7 得出。 □

的实际版本HL13，命题 4.2.1 (1)], 其中 $f^*$ 和 $h^*$ 不假设存在右伴随，内容如下：

**命题 4.2** ([HL13，命题 4.2.1 (1)])。设 $q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ 为 *Beck-Chevalley* 纤维化，并设拉回方块 $\tau$ 在 $\mathcal{X}$ 中给定，如图所示

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & \tau & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}.$$

若 $f$ 是弱双伴随的，则自然变换图

$$\begin{array}{ccc} h^*h_!g_X^* & \xrightarrow{BC[\tau]} & h^*g_Y^*f_! \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_h} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ g_X^* & \xleftarrow{\nu_f} & g_X^*f^*f_! \end{array}$$

是交换的。

证明。 首先注意到 $h$ 根据定理 2.15 (4) 是弱双伴随的。此外，正如定理 2.15 (4) 中所述，由于 $\tau$ 是一个拉回方块，方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\Delta_h} & \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle g_Y} & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

也是一个拉回方块，因此满足 Beck-Chevalley 条件。现在的证明与定理 4.1的证明相同，只是在最后我们调用定理 3.8 而不是定理 3.7。 □

**注 4.3**。 定理 4.1 确实部分蕴含定理 3.7。为此，设有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

给定的 $\infty$-范畴，如定理 3.7中所述，即 $q$ 和 $p$ 是 Beck-Chevalley 纤维化，并且 $F$ 是一个保持笛卡尔边的函子。此外，设有一个态射 $f\colon\ Y \longrightarrow X$ 位于 $\mathcal{X}$ 中，该态射相对于 $q$和 $p$均为弱双伴随，且 $f^*$在 $\mathcal{C}$中以及 $f^*$在 $\mathcal{D}$中都存在右伴随。根据第 2.1节所述的直化，这些数据也可以等价地描述为如下图表

$$\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \;\overset{\mathcal{C}_{(-)}}{\underset{\mathcal{D}_{(-)}}{\Downarrow F}}\; \mathsf{Cat}_\infty$$

取值于 $\mathsf{Cat}_\infty$ 的函子及其间的自然变换。这些信息可以编码为一个函子

$$(\mathcal{X} \times \Delta^1)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H} \mathsf{Cat}_\infty$$

其在 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \{1\}$ 上的限制为 $\mathcal{C}_{(-)}$，在 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \{0\}$ 上的限制为 $\mathcal{D}_{(-)}$，并将任何形如 $(X,1) \longrightarrow (X,0)$ 的态射映射为由自然变换$F$给出的函子 $F_X\colon\ \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{D}_Y$。因此，通过反直化，我们得到一个位于 $\mathcal{X} \times \Delta^1$ 上的笛卡尔纤维化。通过检查

必要的交换方块满足 Beck-Chevalley 条件后，我们可以借助定理 3.9 的类似结果，应用定理4.1于该拉回方块

$$\begin{array}{ccc} (Y,1) & \xrightarrow{(f,1)} & (X,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y,0) & \xrightarrow{(f,0)} & (X,0) \end{array}$$

在 $\mathcal{X} \times \Delta^1$ 以得到定理 3.7。

## 4.2 局部系统的范数

我们说明定理 3.7 如何推出 [CSY18，定理 3.2，3], 展示范数映射相对于局部系统的 Beck-Chevalley 纤维化的自然性。回顾定理 2.4，对于一个 $\mathcal{C}$ $\infty$-范畴，存在一个笛卡尔纤维化 $q$: 局部系统 $(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ ，它从 $\infty$- 范畴的 $\mathcal{C}$- 值局部系统映到空间的 $\infty$- 范畴。该笛卡尔纤维化是通过对函子 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{C}) : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$ 进行反直化得到的，因此，任意纤维 局部系统$(\mathcal{C})_A$ 都典范地等价于函子范畴 $\mathrm{Fun}(A,\mathcal{C})$，而 $\mathcal{S}$ 中态射 $f: B \longrightarrow A$ 的任意笛卡尔提升都可以认作前复合函子 $f^*: \mathrm{Fun}(A,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{C})$。此外，如果 $\mathcal{C}$ 存在余极限，那么 $q$ 也是一个余笛卡尔纤维化，因为前复合函子有一个由左 Kan 延拓给出的左伴随。我们有如下结论：

**命题 4.4** (4.3.3Lurie)。 设 $\mathcal{C}$ 是一个存在余极限的 $\infty$-范畴。在此情形下，遗忘函子

$$\mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$$

是一个 *Beck-Chevalley* 纤维化。

证明。 这见 [HL13，命题 4.3。3] ——我们将在下文证明定理4.9，这是一个更一般的陈述。 □

给定一个函子 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，我们得到一个函子 $F_*$: 局部系统$(\mathcal{C}) \longrightarrow$ 局部系统$(\mathcal{D})$，它由自然变换 $\mathrm{Fun}(-,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(-,\mathcal{D})$ 诱导，该自然变换由与 $F$后复合给出。由于后复合与前复合可交换，因此 $F_*$ 保持笛卡尔边。我们先证明 [CSY18定理 3.2 的以下较弱版本3]:

命题 *4.5*。设 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是存在余极限的 $\infty$-范畴之间的一个函子，并记 $q$和 $p$ 为 *Beck-Chevalley* 纤维化 $q$: 局部系统$(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$和 $p$: 局部系统$(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{S}$。设 $f: B \longrightarrow A$ 是一个空间映射，将 $f$的笛卡尔提升分别记为 $f^*$: $\mathrm{Fun}(A,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{C})$ 和 $f^*$: $\mathrm{Fun}(A,\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{D})$，并将 $f$的笛卡尔提升分别记为 $f_!$: $\mathrm{Fun}(B,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(A,\mathcal{C})$ 和 $f_!$: $\mathrm{Fun}(B,\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(A,\mathcal{D})$。此外，设 $\Delta: B \longrightarrow B \times_A B$表示由 $f$诱导的对角映射，将 $\Delta$的笛卡尔提升记为 $\Delta^*$: $\mathrm{Fun}(B \times_A B,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{C})$ 和 $\Delta^*$: $\mathrm{Fun}(B \times_A B,\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{D})$。假设以下条件成立：

- $f^*$和 $f^*$分别具有右伴随 $f_*$和 $f_*$。
- $f$ 相对于 $q$ 和 $p$是弱双伴随。

- 交换方块

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}(B,\mathcal{D}) & \mathrm{Fun}(B\times_A B,\mathcal{D}) \arrow[l, "\Delta^*"'] \\
\mathrm{Fun}(B,\mathcal{C}) \arrow[u, "F_*"'] & \mathrm{Fun}(B\times_A B,\mathcal{C}) \arrow[l, "\Delta^*"'] \arrow[u, "F_*"']
\end{tikzcd}$$

满足 *Beck-Chevalley* 条件。

在这种情况下，图表

$$\begin{tikzcd}
f_!F_* \arrow[r, "BC_!"] \arrow[d, "\mathrm{Nm}_f"] & F_*f_! \arrow[d, "\mathrm{Nm}_f"] \\
f_*F_* & F_*f_* \arrow[l, "BC_*"']
\end{tikzcd}$$

可交换，其中 $BC_!$ 和 $BC_*$ 是该图表的两个 *Beck-Chevalley* 变换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}(B,\mathcal{D}) & \mathrm{Fun}(A,\mathcal{D}) \arrow[l, "f^*"'] \\
\mathrm{Fun}(B,\mathcal{C}) \arrow[u, "F_*"'] & \mathrm{Fun}(A,\mathcal{C}) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[u, "F_*"']
\end{tikzcd}.$$

证明。 映射 $q$: 局部系统($\mathcal{C}$) $\longrightarrow \mathcal{X}$和 $p$: 局部系统($\mathcal{D}$) $\longrightarrow \mathcal{X}$实际上是 Beck-Chevalley 纤维化，依据定理 4.4。应用定理3.7，结论即得。 □

我们感兴趣的是这个陈述的一个稍强版本，其中 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 不假设具有所有余极限，因此局部系统($\mathcal{C}$) $\longrightarrow \mathcal{S}$ 和局部系统($\mathcal{D}$) $\longrightarrow \mathcal{S}$) 可能不是 Beck-Chevalley 纤维化。一种做法是考察定理 3.9 ，并追踪我们需要哪些极限$\tilde{}$和余极限。我们将采取另一种做法，构造一个全忠实函子 $j$ $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ : 到一个 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 中，该范畴具有$\tilde{}$所有余极限，因此局部系统($\mathcal{C}$) $\longrightarrow \mathcal{S}$ 是$\tilde{}$ Beck-Chevalley 纤维化。首先，我们引入以下来自 [CSY18]的术语:

**定义4.6.** 设 $f$: $B \longrightarrow A$ 是一个空间映射，且 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴。若对于所有 $a \in A$, $\mathcal{C}$都存在形状为 $f^{-1}\{a\}$的极限（分别为余极限），则称 $\mathcal{C}$存在 $f$-极限（分别为 $f$-余极限）。

这一术语的意义如下:

**引理4.7.** 设 $f$: $B \longrightarrow A$ 是一个空间映射，设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴，并设 $f^*$ : $\mathrm{Fun}(A,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,\mathcal{C})$ 是诱导的前复合函子。若 $\mathcal{C}$存在 $f$-余极限，则 $f^*$存在一个左伴随 $f_!$。同样，若 $\mathcal{C}$存在 $f$-极限，则 $f^*$存在一个右伴随 $f_*$。

证明。 如果 $\mathcal{C}$ 具有足够的余极限，那么我们可以通过左 Kan 延拓逐点计算 $f^*$ 的左伴随 $f_!$ : 给定函子 $F \in \mathrm{Fun}(B,\mathcal{C})$ 来计算余极限

$$f_!F(a) \simeq \operatorname*{colim}_{A_{/a}\times_A B} F,$$

对于每个 $a \in A$ 计算 $f_!F$，其中 $F\colon\ A_{/a} \times_A B \longrightarrow \mathcal{C}$ 是由 $(f(b) \longrightarrow a) \mapsto F(b)$ 给出的图表。由于 $A$ 是一个空间，$A$ 是一个 $\infty$-群胚，因此空间 $A_{/a}$ 是可缩的。因此，该图表与图表 $F_{|f^{-1}\{a\}}\colon\ f^{-1}\{a\} \longrightarrow \mathcal{C}$ 规范等价，后者由 $F$ 的限制给出。由此可知，如果 $\mathcal{C}$ 具有 $f$-余极限，则左 Kan 延拓会产生 $f^*$ 的左伴随 $f_!$。类似地，使用右 Kan 延拓而非左 Kan 延拓的论证表明，如果 $\mathcal{C}$ 具有 $f$-极限，则 $f^*$ 具有右伴随 $f_*$。 □

**注 4.8.** 给定一个空间映射 $f\colon\ B \longrightarrow A$，考虑由拉回图拼接而成的图表，

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2^{-1}\{b\} & \longrightarrow & B \times_A B & \xrightarrow{\pi_1} & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \{b\} & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}.$$

由此可知，投影映射 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的纤维与 $f$的非空纤维典范等价。因此，如果 $\mathcal{C}$分别具有 $f$-余极限和 $f$-极限，那么 $\pi_1^*$和 $\pi_2^*$也具有左伴随和右伴随。

定理 4.7 导出了定理 4.4的以下推广。我们的证明受到[Lur17，引理 6.1.6。3]的启发：

**命题 4.9.** 设 $\mathcal{C}$为一个 $\infty$-范畴，并设有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & \xrightarrow{h} & \widetilde{A} \\ \downarrow{\scriptstyle g_B} & & \downarrow{\scriptstyle g_A} \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

给定于 $\mathcal{S}$中。令 $\sigma$ 表示所诱导的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\widetilde{B}, \mathcal{C}) & \xleftarrow{h^*} & \mathrm{Fun}(\widetilde{A}, \mathcal{C}) \\ \uparrow{\scriptstyle g_B^*} & \sigma & \uparrow{\scriptstyle g_A^*} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \end{array}$$

局部系统。在这种情况下，有以下结论：

*(1)* 如果 $\mathcal{C}$ 存在 $f$-余极限，则 *Beck-Chevalley* 变换 $BC_!{}[\sigma]\colon\ h_!g_B^* \longrightarrow g_A^*f_!$存在且为等价，也就是说，$\sigma$ 满足 *Beck-Chevalley* 条件。*(2)* 如果 $\mathcal{C}$ 存在 $f$-极限，则 *Beck-Chevalley* 变换 $BC_*[\sigma]\colon\ \widetilde{g}_A^*f_* \longrightarrow f_*g_B^*$存在且为等价。

证明。 我们证明 (1)。(2) 可以用类似的论证证明，只需将左 Kan 延拓换成右 Kan 延拓。左伴随 $f_!$ 到 $f^*$ 的存在性由定理 4.7 得出。此外，由于 $h$ 是 $f$的拉回，$h^*$ 也有一个左伴随 $f_!$。因此，Beck-Chevalley 变换

$BC_![\sigma]$: $h_!g_B^* \longrightarrow g_A^* f_!$ 存在。由于我们已经有一个自然变换，只需证明它逐点是一个等价。也就是说，对于每个 $F \in$ $B$ $\mathcal{C}$ $BC_![\sigma]_F$ $h_!g_B^*F \longrightarrow$ Fun(,)，我们必须证明 : $g_A^* f_! F$ 是 Fun$(A, \mathcal{C})$ 中函子的一个等价。函子之间的自然变换是等价，意味着它在每一点上都是等价。因此，我们可以归结为如下情形~：其中 $A = \{*\}$ 是终端空间。也就是说，对于拉回图，我们必须证明

$$\begin{array}{ccc} B_a & \xrightarrow{p} & \{a\} \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array},$$

Beck-Chevalley 变换 $p_!j^* \longrightarrow i^* f_!$ 是一个等价。给定函子 $F \in$ Fun$(B,\ \mathcal{C})$，左 Kan 延拓 $p_!F$ 可通过计算 $F$的余极限得到，因为 $p$ 是到一个点的投影。因此，

$$p_!j^*(F)(a) \simeq p_!(Fj)(a) \simeq \operatorname*{colim}_{B_a} F_{|B_a}.$$

对于另一个复合，我们有

$$i^* f_!(F)(a) \simeq (f_!F)(a) \simeq \operatorname*{colim}_{A_{/a} \times_A B} F,$$

根据逐点左 Kan 延拓的公式。这两个余极限都存在，且具有典范等价，正如定理 4.7 的证明中所述。因此， $BC_![\sigma]$ 是一个等价。 □

我们需要以下引理来证明 [CSY18，定理 3.2。3]:

**引理 4.10**。设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是一个 $\infty$-范畴间的函子，且 $f\colon B \longrightarrow A$ 是一个空间映射。若$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 存在，且 $F$ 保留所有 $f$-余极限，则该交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(B, \mathcal{D}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{D}) \\ \uparrow{\scriptstyle F_*} & & \uparrow{\scriptstyle F_*} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \end{array}$$

满足 *Beck-Chevalley* 条件。

证明。 参见 [CSY18，命题 3.2。2] – 证明由左 Kan 延拓的逐点公式得出。

□

现在我们陈述空间映射的双侧性的定义，该定义见于 [CSY18，定义 3.1。5]。注意，在这一构造中需要用到定理 4.9 ，这与定理 2.14中需要某些交换方块满足 Beck-Chevalley 条件的情形相同。

**定义 4.11**。令 $\mathcal{C}$ 为一个 $\infty$-范畴， $n \geq -2$ 为一个整数。空间映射 $f\colon B \longrightarrow A$ 称为

(1) 弱 $n$-$\mathcal{C}$-双向伴随，若 $f$ 是 $n$-截断的， $\mathcal{C}$ 具有 $f$-极限与 $f$-余极限，且以下二者之一成立:

- $n=-2$，此时 $f^*$的逆既是 $f^*$的左伴随，也是其右伴随。我们将 $f^*$ 上的典范范数映射定义为 $f^*$的某个逆的恒等映射。
- $n\geq -1$，且对角线 $\Delta\colon\ B\longrightarrow B\times_A B$之于 $f$是（$n-1$）-$\mathcal{C}$-双向伴随。在此情形下，我们定义 规范范数 在 $f^*$ 上为沿对角线诱导得到者，它来自 $\Delta$ 的规范范数（在定理2.14的意义下）。

(2) $n$-$\mathcal{C}$-双向伴随，若 $f$ 是弱 $n$-$\mathcal{C}$-双向伴随，且其规范范数映射是等价。

空间映射 $f\colon\ B\longrightarrow A$ 称为（弱） $\mathcal{C}$-双向伴随，若它对某个 $n\geq -2$ 是（弱） $n$-$\mathcal{C}$-双向伴随。

**注记 4.12.** 对于空间映射 $f\colon\ B\longrightarrow A$，定理 4.11 与定理 2.18 相对于 Beck-Chevalley 纤维化局部系统$(\mathcal{C})\longrightarrow \mathcal{S}$ 的差异如下：

- 在定理 2.18中，我们没有假设 $f^*$ 存在右伴随——在定理 4.11中， $f$弱双伴随意味着 $\mathcal{C}$ 存在 $f$- 极限，而根据定理 4.7 这意味着 $f^*$ 存在右伴随 $f_*$。

- 在定理 2.18 中，我们需要 LocSys$(\mathcal{C})\longrightarrow \mathcal{S}$ 是一个 Beck-Chevalley 纤维化，这在 $\mathcal{C}$ 存在所有余极限时成立。在定理 4.11中， $\mathcal{C}$ 只假设存在 $f$-余极限，因此 LocSys$(\mathcal{C})\longrightarrow \mathcal{S}$ 不一定是 Beck-Chevalley 纤维化。

如果 $\mathcal{C}$存在 所有极限和余极限，那么关于 LocSys(2.18 ，定理 $\mathcal{C})\longrightarrow \mathcal{S}$ 以及定理 定理4.1上述成立。

下面的引理展示了如何将仅允许某些余极限的情形推广到 LocSys$(\mathcal{C})\longrightarrow \mathcal{S}$ 是 Beck-Chevalley 纤维化的情形。

**引理 4.13.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\infty$-范畴，且 $f\colon\ B\longrightarrow A$ 是空间的一个弱双向伴随映射。在这种情况下，存在一个 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$ 和一个全忠实函子 $j\colon\ \mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{C}$，满足以下性质：

*(1)* 诱导映射 $q$*: LocSys(*$\mathcal{C}$*)* $\longrightarrow \mathcal{S}$ 是 *Beck-Chevalley* 纤维化，且 $f$ 相对于 $q$ 是弱双向伴随的。*(2) LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 中 $f$ 的笛卡尔提升 $f^*$ 除了左伴随 $f_!$ 外，还存在一个右伴随 $f_*$。*(3)* 设 $j_*$*: LocSys(*$\mathcal{C}$*)* $\longrightarrow$ *LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 表示由后复合诱导的函子，则函子 $j_*$ 将 *LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 中的三元组 $f_!\dashv f^*\dashv f_*$ 映射为 *LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 中的三元组 $f_!\dashv f^*\dashv f_*$。*(4)* 函子 $j_*$ 将 *LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 中的反向余单位 $\nu_f$ 和范数映射 $Nm_f$ 映射为 *LocSys(*$\mathcal{C}$*)* 中的反向余单位 $\nu_f$ 和范数映射 $Nm_f$。

证明。根据 [Lur09, 命题 5.3.6.2] 可知，对于 $\mathcal{C}$ 中任意一组余极限图 $\mathcal{R}$，存在一个全忠实函子 $j\colon\ \mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$，它保持 $\mathcal{R}$ 中的余极限，且 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 存在所有余极限。此外，函子 $j$ 保持 $\mathcal{C}$ 中存在的所有极限： $\infty$-范畴$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ 定义为 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 的满子范畴，其中的图表 $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ 被映为极限图 $\mathcal{S}$。

包含映射 $i\colon \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 因而保持极限，因为它的定义要求某些图表被映为极限图，而极限与极限可交换。Yoneda嵌入 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 也保持极限，根据 [Lur09，命题 5.1.3。2], 所以 $j$ 保持极限。

令 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{C}$ 中由小截断空间索引的所有余极限图的集合，并定义$\widetilde{\mathcal{C}} := \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$。特别地，对于任意弱 $\mathcal{C}$-双伴随映射 $f$， $\mathcal{R}$ 包含由 $f$ 的纤维索引的所有余极限图，因为根据定理 2.16， $f$ 弱双伴随意味着 $f$ 是截断的。因此，对于任意弱双伴随映射 $f$，函子 $j$ 保持所有 $f$-余极限。因此，由$\widetilde{\ }$ 诱导的后复合函子 $j_*\colon \mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{LocSys}(\mathcal{C})$ 将三元组 $f_! \dashv f^* \dashv f_*$ 送到$f_! \dashv f^* \dashv f_*$，对 $\Delta$ 和 $\pi$ 也同样如此。这确保了 $f$ 关于$\widetilde{\ }\mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ 是弱双伴随的，并且反向余单位 $\nu_f$ 和范数映射 $\mathrm{Nm}f$ 分别被送到 $\nu_f$ 和 $\mathrm{Nm}\widetilde{f}$。由于 $j$ 是全忠实的，我们对 $f$ 提升到 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{C})$ 中所得的任何性质，通过将函子范畴 $\mathrm{Fun}(X, \mathcal{C})$ 限制为那些经由 $j$ 分解的函子，也同样适用于提升到 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{C})$ 中的情形。因此，(1)-(4) 成立。

□

我们现在可以证明 [CSY18，定理3.2。3]:

推论*4.14*（[*CSY18*，定理*3.2.3*]）。设 $f\colon B \longrightarrow A$ 是一个空间映射，并以$\Delta\colon B \longrightarrow B \times_A B$ 表示其诱导的对角映射。设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是一个 $\infty$-范畴之间的函子，它保留 $\Delta$-余极限，并以 $F_*$ 表示诱导的后复合函子 $F_*\colon \mathit{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathit{LocSys}(\mathcal{D})$。若 $f$ 是弱 $\mathcal{C}$-双向伴随的，且弱 $\mathcal{D}$-双向伴随的，则图表

$$\begin{array}{ccc} f_!F_* & \xrightarrow{BC_!} & F_*f_! \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_f} \\ f_*F_* & \xleftarrow{BC_*} & F_*f_* \end{array}$$

交换，其中 $BC_!$ 和 $BC_*$ 分别是图表的左伴随和右伴随的 *Beck-Chevalley* 变换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(B, \mathcal{D}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{D}) \\ \uparrow{\scriptstyle F_*} & & \uparrow{\scriptstyle F_*} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \end{array}.$$

证明。 由定理 4.13，我们得到 $\infty$-范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$它们都存在所有余极限，且全忠实$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$包含 $j_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ 和 $j_{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}$。沿着 $j_{\mathcal{D}} \circ F$ 对 $j_{\mathcal{C}}$ 作左 Kan 延拓；由于$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\mathcal{D}$ 存在余极限，我们得到一个函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 它适配于交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{D}}} \\ \widetilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{\mathcal{D}} \end{array}.$$

应用定理 4.10 于 $\Delta$，结果现在可由定理 4.5通过将 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{C})$ 替换为$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\mathrm{LocSys}(\mathcal{C})$，将 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{D})$ 替换为 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{D})$，并将 $F$ 替换为 $F$得出。 □

注记 4.15. 如 [CSY18, 定理 3.2.3], 所述，其假设与定理 4.14 有两点不同：假设 $F$ 保持 $(m-1)$-有限余极限，而非 $\Delta$-余极限；并且假设 $f$ 是一个 $m$-有限空间映射，此外还要求它是弱双伴随。[Lur09, 引理 5.5.6.15] 的推广表明， $f$ 为 $m$-有限蕴含 $\Delta$ 为 $(m-1)$-有限。因此，在这种情况下， $F$ 也保持 $\Delta$-余极限，所以 [CSY18, 定理 3.2.3] 确实可由定理 4.14 推出。

## 4.3 等变幂的范数

我们将说明定理 3.7 如何推出 [CSY18], 中的另一项结果，即 [CSY18，命题 3.4.7]。我们先介绍相关术语。下文中，对于 $p$ 素数，我们将 $p$ 次对称群记为 $\Sigma_p$，将 $p$ 阶循环群记为 $C_p$；后者是 $\Sigma_p$ 的一个子群。设 $\mathcal{C}$ 为一个对称幺半 $\infty$-范畴，且 $p$ 为素数。在这种情况下，存在一个函子$\Theta^p\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(BC_p, \mathcal{C})$，其中 $BC_p$ 是 $C_p$ 的分类空间。该函子具有如下性质：将 $\Theta^p$ 与 $e\colon \{*\} \longrightarrow BC_p$ 作复合，与 $p$ 次幂函子 $(-)^{\otimes p}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 同伦；后者在态射上的作用是将 $f\colon Y \longrightarrow X$ 映至 $f^{\otimes p}\colon Y^{\otimes p} \longrightarrow X^{\otimes p}$。

给定一个空间 $A \in \mathcal{S}$，我们将 $A$ 的 $C_p$-等变 $p$-次幂定义为如下空间： $A^p_{hC_p} = (A^p \times EC_p)/C_p$。这个范畴是 $A^p$ 按 $C_p$ 取 $\infty$-范畴商的一个模型。我们将这个商记为 $(A^p)^{hC_p}$，其中 $A \wr C_p$。

我们首先陈述 [CSY18，引理 3.4。1]:

**引理 4.16**。 函子 $(-) \wr C_p\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ 保持拉回。

证明。 令 $e\colon \{*\} \longrightarrow BC_p$ 表示选定的基点，则函子 $(-) \wr C_p$ 可以识别为以下复合

$$\mathcal{S} \xrightarrow{e_*} \mathrm{Fun}(BC_p, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}_{/BC_p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}.$$

函子 $e_*$ 是前复合函子 $e^*$ 的右伴随，因此保持所有极限。典范投影 $\pi$ 由 [Lur09，推论 2.1.2。2]的对偶可知是右纤维化。因此，由 [Lur09，命题 4.4.2。9] 的对偶可知，它保持可缩形状的极限，其中包括拉回。

□

**定义 4.17**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 $\infty$-范畴。对于每个空间 $A \in \mathcal{S}$，我们定义函子

$$\Theta^p_A\colon \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(A \wr C_p, \mathcal{C})$$

为 $(-)^p_{hC_p}$ 与以下函子的复合

$$(\mathcal{C}^p)_{hC_p} \longrightarrow (\mathcal{C}^p)_{h\Sigma_p} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}.$$

如果上下文中已明确空间 $A$，我们便省略下标 $A$。注意，该定义关于 $A$是自然的，也就是说，$\Theta^p$ 是从 $\mathrm{Fun}(-, \mathcal{C})$ 到 $\mathrm{Fun}((-) \wr C_p, \mathcal{C})$ 的自然变换。

为了证明定理 4.19，我们需要以下引理。

**引理 4.18**。设 $f\colon\ B \longrightarrow A$ 是空间映射，并设 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个承认所有 $f$-余极限的对称幺范畴。如果 $\otimes$ 对所有 $f$-余极限都满足分配律，则交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(B \wr C_p, \mathcal{C}) & \xleftarrow{(f \wr C_p)^*} & \mathrm{Fun}(A \wr \mathcal{C}_p, \mathcal{C}) \\ \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} & & \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \end{array}$$

满足 *Beck-Chevallley* 条件。

证明。略，见 [CSY18，引理 3.4。6]。 □

现在我们可以证明 [CSY18，命题 3.4。7]。

**命题 4.19** ([CSY18，命题 3.4。7])。给定一个对称幺半 $\infty$-范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$，并设 $f\colon\ B \longrightarrow A$ 是一个空间映射。若 $f$ 是弱 $\mathcal{C}$-双向伴随的，且 $\otimes$ 对 $\Delta$-余极限分配，则图表

$$\begin{array}{ccc} (f \wr C_p)_! \Theta^p & \xrightarrow{BC_!} & \Theta^p f_! \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_{(f \wr C_p)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}_f} \\ (f \wr C_p)_* \Theta^p & \xleftarrow{BC_*} & f_* \Theta^p \end{array}$$

交换，其中 $BC_!$ 和 $BC_*$ 分别是该图表中左伴随和右伴随的 *Beck-Chevalley* 变换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(B \wr C_p, \mathcal{C}) & \xleftarrow{(f \wr C_p)^*} & \mathrm{Fun}(A \wr C_p, \mathcal{C}) \\ \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} & & \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f^*} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \end{array} .$$

证明。由定理4.13，我们可以假设 $\mathcal{C}$ 存在所有余极限，因此 $q\colon \mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ 是 Beck-Chevalley 纤维化，并且相对于 $q$，$f$ 是弱双伴随的。由定理 4.16，函子 $(-) \wr C_p\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ 保持拉回。记 $p\colon \mathrm{LocSys}(\mathcal{C})_{(-)\wr C_p} \longrightarrow \mathcal{S}$ 为 $\mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}$ 沿 $(-) \wr C_p$ 的基变换，因此 $p$ 具有如下性质：$p$ 对 $f$ 的（余）笛卡尔提升，与 $q$ 对其像 $f \wr C_p$ 的（余）笛卡尔提升典范等价。由于 $f$ 是截断的，根据定理 3.13 (1)，$f$ 相对于 $p$ 是弱双伴随的。如第 2.1 节所述，通过反直化，自然变换 $\Theta^p\colon \mathrm{Fun}(-, \mathcal{C}) \Longrightarrow \mathrm{Fun}((-) \wr C_p, \mathcal{C})$ 对应于函子 $\Theta^p\colon \mathrm{LocSys}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{LocSys}(\mathcal{C})^{(-)\wr C_p}$，该函子保持笛卡尔边。将定理 4.18 应用于由 $f$ 诱导的对角映射 $\Delta\colon\ B \longrightarrow B \times_A B$，我们得到交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(B \wr C_p, \mathcal{C}) & \xleftarrow{(\Delta \wr C_p)^*} & \mathrm{Fun}((B \times_A B) \wr C_p, \mathcal{C}) \\ \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} & & \uparrow{\scriptstyle \Theta^p} \\ \mathrm{Fun}(B, \mathcal{C}) & \xleftarrow{\Delta^*} & \mathrm{Fun}(B \times_A B, \mathcal{C}) \end{array}$$

满足 Beck-Chevalley 条件。结论现由定理 3.7 得出。 □

注释 4.20。正如 [CSY18, 命题 3.4.7], 中所述，假设与定理 4.19 有两处不同：假设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 是一个 $m$-半加性对称幺半 $\infty$-范畴，也就是说，所有 $m$-有限映射都是弱 $\mathcal{C}$-双向伴随，且 $\otimes$ 在 $m$-有限余极限下分配；并假设 $f\colon B \longrightarrow A$ 是一个空间之间的 $m$-有限映射。由于 $f$ 是 $m$-有限的蕴含对角线 $\Delta$ 是 $(m-1)$-有限的（这可由 [Lur09，引理 5.5.6.15] 得出），事实上 $\otimes$ 确实在 $\Delta$-余极限下分配，因此 [CSY18, 命题 3.4.7] 可由定理 4.19 推出。

# 参考文献

[CSY18] Shachar Carmeli、Tomer M. Schlank 和 Lior Yanovski。《色性同伦论中的双向性》。2018年。doi: 10.48550/ARXIV.1811.02057。网址：https://arxiv.org/abs/1811.02057。[Har17] Yonatan Harpaz。《双向性与有限跨张量的泛性质》。2017年。doi: 10.48550/ARXIV.1703.09764。网址：https://arxiv.org/abs/1703.09764。[HHR21] Fabian Hebestreit、Gijs Heuts 和 Jaco Ruit。《直化定理的一个简短证明》。2021年。doi: 10.48550/ARXIV.2111.00069。网址：https://arxiv.org/abs/2111.00069。[HL13] Michael Hopkins 和 Jacob Lurie。《$K(n)$-局部稳定同伦论中的双向性》。2013年。网址：https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/Ambidexterity.pdf。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶托扑斯理论》。数学年刊研究丛书。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2009年。网址：https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/highertopoi.pdf。[Lur10] Jacob Lurie。《色性同伦论讲义》。2010年。网址：https://people.math.harvard.edu/~lurie/252x.html。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。2017年。网址：https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf。