arXiv:2603.06808v1 [math.AP] 6 Mar 2026

# 非匀速移动栖息地中的速率诱导临界转变及临界速率的确定

Blake Barker*[1]、Emmanuel Fleurantin†[2]、Matt Holzer‡[3]、Christopher K.R.T. Jones§[4]和 Sebastian Wieczorek¶[5]

[1]杨百翰大学数学系，美国犹他州普罗沃，邮编 84604[2,3,4]乔治·梅森大学数学系，美国弗吉尼亚州费尔法克斯，邮编 22030[5]科克大学学院数学科学学院，爱尔兰科克，邮编 T12 XF62

**摘要**

环境变化导致栖息地移动时，如果移动速率过快，可能会导致种群倾覆至灭绝。我们以一个标量反应扩散方程为背景研究这一现象，该方程含有非自治反应项，描述一个空间局域栖息地从一个渐近位置移动到另一个渐近位置。栖息地的移动由位移 $d$ 和速率参数 $r$表征。在栖息地的两个渐近位置，系统均存在三个稳态：稳定的灭绝态 $u_0^* = 0$、不稳定脉冲（即所谓的边缘态） $u_1^*(x) > 0$，它引发阿利效应；以及稳定脉冲（种群基态） $u_2^*(x) > u_1^*(x)$，对应于达到环境容纳量、蓬勃发展的种群。针对一个特定模型的数值模拟确定了临界位移 $d^*$ ，并在 $d > d^*$时展示了临界速率的存在：当速率诱导临界转变发生时，初始繁盛的种群会因栖息地移动过快而灭绝。我们给出了两种极限情形下的解析结果。当 $r \ll 1$时，解以误差 $O(r)$跟踪移动基态。当 $r \gg 1$时，只要 $d$ 足够大，解就会收敛到灭绝态。当 $d$ 过小时，无论 $r$如何，都不会发生倾覆。数值模拟补充并拓展了这些解析结果。在临界速率 $r = r_c(d)$处，我们确定了栖息地过去渐近位置处基态与未来渐近位置处边缘态之间的脉冲到脉冲异宿连接。我们还证明了该临界速率的唯一性，以及随着 $r$ 变化时异宿连接的非退化性。

**关键词：** 速率诱导临界转变、反应扩散方程、栖息地迁移、临界转变、环境变化、物种存续

**MSC分类**：35K57, 37N25, 34C60, 35B32, 92D25

## 1 引言

栖息地位置的移动可能受到温度或降水变化的驱动，例如气候变暖时发生的变化。栖息地可能向北移动（在北半球）或沿山坡向上移动 [5, 11]。我们在此探讨的问题是，移动速度如何

*电子邮箱：blake@mathematics.byu.edu
†电子邮箱：efleuran@gmu.edu
‡电子邮箱：mholzer@gmu.edu§电子邮箱：ckrtj@renci.org
¶电子邮件：sebastian.wieczorek@ucc.ie

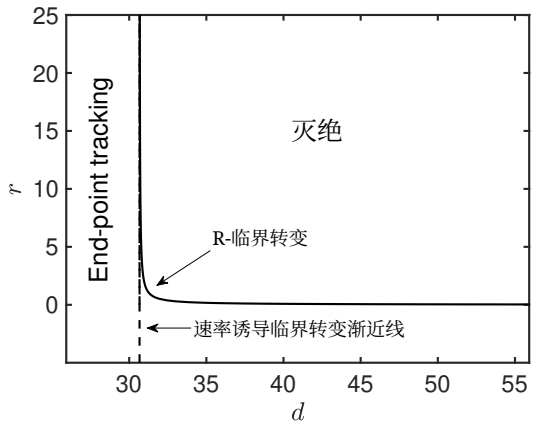



图1：反应-扩散模型（1）的速率诱导临界转变（R-临界转变）示意图，其中 $f$ 定义如（8）所示，参数为 $\beta = 0.15$，$\lambda = 4\beta$ 和 $L = 25$，展示了栖息地位移 $d$ 与栖息地迁移速率 $r$ 之间的关系。速率诱导临界转变曲线将物种得以存续（终点跟踪）的参数区域与灭绝区域分隔开来。对于小位移（$d \lesssim 30$），无论速率如何都不会发生灭绝；而位移较大时，速率超过某个临界速率后就会导致灭绝。

栖息地的这种移动速度可能导致物种灭绝，即使栖息地本身在新位置仍然是有利于该物种存活的环境。

这自然可以用速率诱导临界转变 [1, 19, 14]来描述。在这种情况下，当外部条件变化的速度超过某个临界速率并导致系统偏离表面上稳定的状态时，就会发生倾覆；而外部条件以较慢速度发生同等幅度的变化，则不会触发这种转变。气候变化的一大隐忧在于，地球当前的基础条件正以远超历史上任何时期的速度发生变化[6, 10]。因此，速率诱导临界转变与气候驱动系统密切相关。

我们在此探讨的情形是栖息地从一个地点迁移到另一个地点。我们设想，栖息地最初稳定地位于某一地点，随后迁移至另一地点，并在新的外部条件下稳定下来。此前的研究已探讨移动栖息地的影响，最早可追溯至 Berestycki等人 对单稳态栖息地的研究，见 [3]。我们考虑的情形则基于 Hasan 等人 针对双稳态栖息地所建立的模型，见 [7]。在这两项研究中，作者都假设栖息地匀速移动，并用栖息地位置的线性斜坡表示。因此，他们的研究未考虑栖息地迁移过程中的加速和减速阶段。尽管匀速移动阶段是栖息地迁移的关键部分，但要全面理解栖息地迁移所引发的动力学，还需考虑迁移速度的变化。因此，我们建立的模型采用非线性斜坡来描述栖息地位置从一个渐近静止位置迁移至另一个渐近静止位置。

在这一背景下对栖息地迁移问题的表述，引出了新的现象和新的挑战。直观而言，栖息地必须迁移一定距离，才会对某个物种的存活造成问题。我们预计，如果位置变化相对于栖息地的大小而言较小，那么无论变化发生得多快，物种都能存活。我们证明，速率诱导临界转变确实存在一个位移阈值。图1对此作了说明，其中栖息地的位移用 $d$ 表示，其移动速率用 $r$ 表示。位移阈值线恰好位于 $d = 30$ 的右侧。

在平稳平移下，该问题可表述为一个常微分方程（ODE），并可采用低维动力系统的技术（[3] 和 [7]）。然而，当平移随时间变化时，便无法进行这种简化。此时，必须将该问题作为

一个完整的偏微分方程（PDE）来分析。在 [1], 的研究中，首次引入了用拉回吸引子刻画速率诱导临界转变的方法，我们在此基础上进一步研究。我们证明，时变平移系统存在一个拉回吸引子。我们从无限维空间上的半流轨道推导出该拉回吸引子。

在这一生态学背景下，倾覆是指种群由于无法跟上移动栖息地而灭绝。速率诱导临界转变分析的一个关键环节是确定临界速率，以区分跟踪与倾覆：跟踪时，解始终接近移动基态；倾覆时，则转向灭绝态。在 [1], 中证明了，在临界速率下，拉回吸引子在正向时间中渐近于一个边缘态，该边缘态通常是具有一个不稳定方向的鞍态。我们采用紧化框架 [20]，在这一框架下，栖息地过去渐近位置处的基态（倾覆由此发生）与栖息地未来渐近位置处的边缘态之间存在异宿连接，且这一连接发生在临界速率下。这个脉冲到脉冲的异宿连接对我们而言位于无限维空间中，不应与点间异宿连接混淆；后者正是行波脉冲 [7],本身，是常微分方程的一条轨迹。

本文的组织结构如下。第2 节建立数学框架，包括具有移动栖息地的反应扩散方程、紧化系统、关键假设，并陈述主要定理：在相当一般的假设下，如果位移 $d$ 太小，则不会发生速率诱导临界转变；而我们证明，位移足够大时则会发生这种转变。第3节证明，速率较小时，解会跟随移动栖息地（$r \ll 1$），从而确保物种存活；而速率较大时（$r \gg 1$），则会导致灭绝。这表明存在一个精确的位移阈值。虽然我们没有证明这一结论在一般情况下成立，但对于 [7]中的一个特定模型，可以发现位移阈值是唯一的。此外，还证明了对于该例子，当位移超过这一阈值时，临界速率也是唯一的。第4节介绍了通过特定模型中的脉冲到脉冲的异宿连接计算临界速率 $r_c(d)$的数值方法。第5节总结研究结果，并讨论其对快速环境变化下物种存活的影响。

## 2 数学框架

### 2.1 一般设定

假设物种动力学由一维空间维度中的反应扩散方程 $x$ 控制。物种的栖息地记为 $H(x)$，并假设其非负。非线性反应项 $f(u, H(x))$ 依赖于 $H(x)$，因此栖息地内外的动力学有所不同：物种在栖息地内能够繁盛，而在栖息地外则无法存活。我们作出以下一般假设：函数 $f$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上是 $C^2$，并且对于所有 $H \in \mathbb{R}$，$f(0, H) = 0$。假设函数 $H(x)$ 本身是 $C^\infty$，并且当 $x \to \pm\infty$ 时呈指数衰减。栖息地$H(x)$ 将随时间移动，其运动由一个使栖息地中心位于特定位置的函数描述。我们将此函数记为 $\gamma(t)$。

将物种种群密度记为 $u$，控制方程为

$$u_t = u_{xx} + f\left(u, H(x - \gamma(t))\right). \tag{1}$$

扩散项用于描述迁移，为方便起见，将扩散系数设为 1。注意，偏微分方程（1）关于 $x$ 和 $t$均为非自治方程。它可以自然地在移动坐标系中表示，其中 $z = x - \gamma\ (t)$ 。以 $z$为自变量，则（1）变为

$$u_t = u_{zz} + \gamma_t(t)\, u_z + f\left(u, H(z)\right). \tag{2}$$

实际上，我们将指定位移函数 $\gamma(t)$ 的速度，并显式引入速率参数$r > 0$ 。我们令该位移函数本身为一个自治微分方程的解：$\gamma_t = r\, g(\gamma)$。附加上关于 $\gamma$ 的方程后，便可将控制系统写成

$$\begin{aligned} u_t =& u_{zz} + r\, g(\gamma)\, u_z + f\left(u, H(z)\right), \\ \gamma_t =& r\, g(\gamma), \end{aligned} \tag{3}$$

该系统关于 $z$是非自治的，但关于 $t$则不再是非自治的。固定栖息地位置取为$x = \pm a$，因此有 $d = 2a$。为反映栖息地从 $-a$ （过去的渐近位置）迁移至 $+a$ （未来的渐近位置）这一事实，我们要求 $g(\pm a) = 0$ 且 $g(\gamma) > 0$ ，若 $\gamma \in (-a,\ +a)$。除非另有明确说明，我们将假设 $\gamma(t)$的参数化方式满足 $\gamma(0) = 0$。

我们将研究由（3）确定的一个（半）动力系统。在此语境下，我们更倾向于采用该系统，因为它关于时间是自治的。（2）的增广导致了（3），这类似于将 $t$ 作为因变量加入，从而将非自治系统变为自治系统。但与 $t$ 相比，使用 $\gamma$ 作为额外变量更具优势，因为 $\gamma$ 取值于一个紧致域。这是渐近自治系统紧化的一个特例 [20]。

**引理 2.1**。 方程 (3) 在 $t \geq 0$ 上生成一个半流（动力系统） $H^1(\mathbb{R}) \times [-a, +a]$。

证明。 算子 $\frac{d^2}{dz^2}$ 生成一个 $C^0$ 半群，作用于 $H^1(\mathbb{R})$，例如参见 [12]。由于平移在 $H^1(\mathbb{R})$ 上是连续的， $L = \frac{d^2}{dz^2} + rg(\gamma)\ \frac{d}{dz}$ 也生成一个 $C^0$ 半群。

利用 $f(u,\ H)$ 关于其自变量的光滑性，以及 $H^1(\mathbb{R})$ 连续嵌入 $L^\infty(\mathbb{R})$ 这一事实，可以证明 $f(*,\ H(z))$ 在 $H^1(\mathbb{R})$ 上局部利普希茨连续。根据 Pazy 的定理 1.4 [12], ，在一个（局部）时间区间上将存在温和解。随后，对积分方程表述应用通常的格朗沃尔估计，即可得到半流所需的全部性质，参见[2]。 □

**注 1**。 对于这种半群表述，有两种不同的方法。相关算子实际上生成了比 $C^0$ 半群更强的结构，即解析半群。Henry [8] 采用了这种表述，其优点是可以在理论框架中同时得到解的正则性。该方法基于空间 $X = L^2(\mathbb{R})$，而 $H^1(\mathbb{R})$ 则作为分数幂空间 $X^{\frac{1}{2}}$ 出现。随后可以证明半流性质在 $X^{\frac{1}{2}} = H^1(\mathbb{R})$ 上成立，参见 [8]。这里我们更倾向于采用$C^0$ 半群方法，因为在这一框架下不变流形定理更为清晰，参见 [2]。

$\gamma = \pm a$ 的两个极限情形均为不变的，并承载静态栖息地中反应扩散方程的半流：

$$u_t = u_{zz} + f\left(u, H(z)\right). \tag{4}$$

我们考虑阿利效应情形，其中（4）是一个双稳系统，具有一个稳定脉冲 $u_2^*(z) > 0$、一个稳定的平凡解 $u_0^*(z) = 0$以及一个中间的不稳定脉冲 $0 < u_1^*(z) < u_2^*(z)$ 。不稳定脉冲 $u_1^*(z)$ 通常称为阈值态，但在 R-临界转变文献中，它逐渐被称为边缘态 [19], ，本文也将采用这一术语。具体假设将在下文第3.1节中给出。

借助这一框架，我们可以对速率诱导临界转变给出清晰的定义和判据。紧化使我们能够围绕这样一条轨道的行为来表述主要判据：该轨道在反向时间下渐近于过去渐近栖息地所在位置的稳定基态。按照 [9]的含义，这条轨道是一个（局部）拉回吸引子。拉回吸引子是一族关于 $z$ 的函数曲线，由 $t$ 参数化，定义在 $H^1(\mathbf{R})$ 中。请注意，在该引理的证明中，紧化系统（3）发挥的核心作用便显现出来。

**引理 2.2.** 假设第 3.1 节的假设（*H1-5*）成立。对于每个 $r > 0$，非自治方程 (1) 都存在一个（局部）拉回吸引子。

$$\mathcal{U} = \{U(t) \in H^1(\mathbf{R}) : U(t) = u^*(z,t), -\infty < t < +\infty\}, \tag{5}$$

趋于 $u_2^*$ 当 $t \to -\infty$时。特别地，$u^*(z,\ t)$ 满足方程 (3)的第一式。等价地，$u^*(x-\gamma(t)\ t)$ 满足 (1)。

证明。对稳态处的方程（3）进行线性化，得到系统（$u_2^*,\ -a$）：

$$\begin{aligned} u_t &= u_{zz} + f_u(u_2^*, H(z))u + rg'(-a)\left(\partial_z u_2^*\right)\gamma, \\ \gamma_t &= rg'(-a)\gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

该系统呈斜积形式，且线性化为对角形式，这意味着其谱是与稳定稳态 $u_2^*$相关的严格稳定谱与不稳定特征值 $rg'(-a)$ 的并集；后者源于对平移速度函数 $g(\gamma)$所作的假设，见下文（H5）。

由此可知，对于任意 $r > 0$，方程（$u_2^*,\ -a$）的稳态有一个（局部）一维不稳定流形 $W^u_{\mathrm{loc}}(u_2^*, -a)$，尽管它处于一个无限维空间中：

$$W^u_{\mathrm{loc}}(u_2^*, -a) = \{(u,\gamma) \mid u = \phi(\gamma; r),\ |\gamma + a| < \delta\},$$

对于某个 $\delta > 0$，函数 $\phi$ 满足

$$\|\phi(\gamma; r) - u_2^*\|_{H^1} \le Cr(\gamma + a), \tag{7}$$

对于某个 $C > 0$ 且 $|\gamma + a| < \delta$。对于任意非负 $r$ 值的闭区间，常数 $C$和 $\delta$ 均可独立于 $r$选取，参见 [2]。

由于 $W^u_{\mathrm{loc}}(u_2^*, -a)$ 是一维的，因此这里给出的局部不稳定流形中满足 $\gamma > -a$的分支，是 (3) 的一条轨道。因此，它可以在 (3) 的半流作用下向前传播；经过适当参数化后，将其投影到第一变量 $u \in H^1(\mathbf{R})$ 上，便得到所需的拉回吸引子。根据 [9] 的意义，它是一个（局部）拉回吸引子，因为它是 $W^u(u_2^*, -a)$ 的一部分。由于$W^u(u_2^*, -a)$ 是一维的，其唯一性很容易得出。

□

引理证明中的构造 2.2 与 [19] 中的构造相似，但背景为偏微分方程。拉回吸引子可用于给出速率诱导倾覆的直接条件。

**判据 2.3.** 速率诱导临界转变（*R*-临界转变）将发生，如果由引理 2.2给出的拉回吸引子，$\mathcal{U} = \{U(t) : -\infty < t < +\infty\}$同时满足以下两个条件：

（*c1*）对于充分大的 $r$，$U(t) \to u_0^* = 0$，随着 $t \to +\infty$，并且，

（*c2*）对于充分小的 $r$，$U(t) \to u_2^*$，随着 $t \to +\infty$。

前一种情形由判据 2.3 中的 (c1) 描述，简称为倾覆；对于 (c2)，当拉回吸引子趋近于移动基态的端点时，我们使用术语端点跟踪 $u_2^*$ [19]。以这种意义发生 R-临界转变的一个结果是：对于在很大的负时间处接近基态 $u_2^*$ 的初始状态，如果 $r$ 足够大，这些状态将倾覆至灭绝；如果 $r$ 足够小，则会跟踪移动基态。这验证了判据2.3意味着会以 Wieczorek 等人所定义的意义发生不可逆速率诱导 tipping。 [19]

**注释 2.** 我们将在非自治方程 (2) 及其自治对应方程 (3) 之间来回切换。从 (3) 转到 (2) 只需投影到第一个变量，但需要注意确保对 $\gamma(t)$ 的参数化选择恰当，正如引理 2.2 的证明中所示。从引理 2.2 的证明可知，拉回吸引子 $\mathcal{U}$与不稳定流形 $W^u(u_2^*, -a)$ 本质上相同，区别在于 $\mathcal{U}$是方程 (2) 的一条轨道，而 $W^u(u_2^*, -a)$ 是方程 (3) 的一个不变流形，同时也是一条轨道。

## 2.2 主要定理

在关于栖息地和位移函数的相当一般的假设下，我们证明速率诱导临界转变会发生，其意义见准则2.3，前提是位移足够大。回想$d = 2a$。

**定理 2.4.** 存在一个位移 $d^*$ ，使得对任意位移 $d > d^*$，都会发生*R*-临界转变。

我们认为在一定普遍性下成立的图景是：随着 $r$ 增大，拉回吸引子在正向时间中从基态 $u_2^*(z)$ 下跳至灭绝态 $u_0^*(z)$。速率将存在一个临界值 $r = r_c$ ，我们预期在该处拉回吸引子在正向时间中既不渐近于灭绝态，也不渐近于基态。预期在 $r = r_c$ 处，拉回吸引子将趋于不稳定边缘态，即

$$\mathcal{U}(t) \to u_1^*(z) \text{ as } t \to +\infty.$$

这样一条轨道将由（2）的一条轨道导出，该轨道在$t \to -\infty$ 时趋近稳定（基）态，并在 $t \to +\infty$ 时趋近不稳定（边缘）态。证明这样一条轨道的存在并非易事，尤其是因为它所在的相空间是无穷维的。另一个问题是临界速率是否唯一。若是如此，则将存在一个把灭绝与存活分隔开来的孤立速率。确定在何种条件下，这一从存活到灭绝、且具有唯一临界速率的单一转变图景成立，是一个有趣的挑战。

为了更全面地刻画其几何结构，我们将考虑紧化系统（3）以及边缘态的稳定流形（$u_1^*$（$z$） $a$），在 $\gamma = a$处。由 [2], 可知，这是一个无穷维流形，位于 $H^1$（$\mathbb{R}$） $\times [-a, +a]$之中，且余维为一。它自然地被视为阈值，用以界定R-临界转变事件 [19], ，并在局部将相空间分成两部分，分别对应于导致灭绝与存活的初始状态。当 $r$ 穿过 $r_c$时，拉回吸引子与阈值的位置都会改变，从而发生交叉。一个自然的问题是该交叉是否非退化。由于拉回吸引子包含于（$u_2^*$（$z$） $-a$）的不稳定流形之中，因此这是一个稳态解的不稳定流形与另一个稳态解的稳定流形之间的交叉，从而在紧化相空间中形成真正的异宿连接。非退化性意味着这是参数 $r$中的横截。

## 2.3 特定模型

我们针对特定的非线性《非线性》 $f$、栖息地 $H$ 和平移速度场 $g$，仔细推导这一图景的细节。该非线性反应项 $f$ 的显式形式为

$$f(u, H(x)) = -\beta^2 u + \lambda H(x) u^2 - u^3, \tag{8}$$

其中 $\beta \geq 0$ 和 是 $\lambda \geq 0$ 参数。我们令 $\lambda = 4\beta$，这对应于 [7]中描述的重缩放系统，该系统刻画了栖息地中的阿利效应（双稳态）。未缩放的栖息地

函数 [7] 具有一个参数 $a > 0$，用于衡量其从不适宜栖息地过渡到适宜栖息地时的陡峭程度，而 $L > 0$ 则估计了过渡足够陡峭时适宜栖息地的空间范围。在本研究中，我们采用了以下重缩放栖息地函数： [7] 该函数仅取决于 $L$：

$$H(x) = \frac{\tanh\left(x + \frac{L}{2}\right) - \tanh\left(x - \frac{L}{2}\right)}{2\tanh\left(\frac{L}{2}\right)}. \tag{9}$$

关于该特定模型的假设 (H1-4) 的验证，见下文第 3.1 节；4.4节将对此进行说明；请注意，在 [7], 中，作者实际上通过结合分析与计算验证了这些解析假设。我们还将在 4.4节通过细致的计算证明，存在一条临界速率异宿轨道。我们还将验证临界速率的唯一性，以及拉回吸引子从存活转变为灭绝的过程是非退化的。

一般问题的主要定理表明，存在一个临界速率 $r_c$，且它取决于栖息地位移 $d = 2a$。我们不知道，针对非线性项和位移函数所设的假设 (H1-5)，是否足以保证一般问题中的临界速率唯一。特定模型完全有可能随着 $r$ 变化，在倾覆与跟踪之间多次来回切换。

# 3 解析结果：跟踪与倾覆

## 3.1 假设

现在回到一般情形，并假设栖息地函数 $H(x)$在 $x = 0$处有一个局部最大值，且随着 $|x| \to \infty$单调递减。

对于具有静态栖息地的反应扩散方程，关键假设如下：

$$u_t = u_{xx} + f(u, H(x)). \tag{10}$$

(H1) 方程 (10) 恰有三个稳态（与时间无关的解）：平凡稳态 $u_0^* = 0$ （对应于灭绝），以及另外两个稳态，它们均为正，记为 $u_1^*(x)$ 和 $u_2^*(x)$，其中 $u_2^*(x) > u_1^*(x)$ 对所有 $x$ 均成立。假设 $u_1^*(x)$ 和$u_2^*(x)$ 均光滑，且当 $x \to \pm\infty$ 时呈指数衰减。

(H2) 在 10 的 $u_0^* = 0$ 处，线性化的谱位于负实轴上。

(H3) 在稳态（脉冲）10 $u_1^*(x) > 0$ 处，线性化有一个正特征值，其余谱位于负实轴上。

(H4) 稳态（脉冲）10处的线性化算子 $u_2^*(x) > 0$ 的谱位于负实轴上。

注意，10在任意稳态处的线性化算子的谱均为实数，因为线性化算子是自伴的。在静态栖息地问题中，每个稳态都有其物理意义：$u_0^* = 0$ 是灭绝态，$u_1^*(x)$ 是边缘态，而 $u_2^*(x)$ 表示种群以环境容纳量存活且处于稳定状态。边缘态 $u_1^*(x)$ 的余维一稳定流形即为阿利效应阈值，它将存活与灭绝区分开来。

我们还对平移速度场作出一项假设。

(H5) 平移速度函数 $g(\gamma)$ 光滑且满足

$$g(\pm a) = 0,\ g'(\pm a) \neq 0,\ \text{and}\ g(\gamma) > 0\ \text{for}\ \gamma \in (-a, a).$$

### 3.2 低速率跟踪

我们的首个结果表明，对于固定的平移速度函数 $g(\gamma)$，当速率 $r$ 足够小时，不会发生倾覆。

**命题 1.** [对于 $r \ll 1$] 固定平移速度函数 $g(\gamma)$，使其满足 *(H5)*。那么存在一个 $r_0 > 0$，使得对于任意 $0 < r < r_0$，拉回吸引子 $\mathcal{U}(t)$ 都收敛到稳定脉冲 $u_2^*$，当 $t \to +\infty$ 时。此外，存在一个 $C > 0$，使得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathcal{U}(t) - u_2^*(z)| < Cr, \tag{11}$$

对于任意 $t$。换言之，当 $r$ 足够小时，不会发生倾覆，且解会跟踪冻结的稳定脉冲剖面流形。

证明。令 $u(z, t) = u_2^*(z) + p(z, t)$ 并得到关于扰动 $p(z, t)$ 的如下偏微分方程：

$$p_t = p_{zz} + rg(\gamma(t))p_z + f_u(u_2^*(z), H(z))p + rg(\gamma)\frac{\partial}{\partial z}(u_2^*(z)) + N(z, p), \tag{12}$$

其中 $N$ 表示 $p$中的非线性项。

考虑 $0 < r < r_0$，其中 $r_0$ 充分小。则存在一个 $T_0(r)$，使得 $\gamma(T_0) = \gamma_0$，其中 $-a < \gamma_0 < -a+\delta$为某个固定值。我们考虑位于$W^u(u_2^*, -a)$内的初始数据 $p(z, T_0) = \phi(z, \gamma_0; r) - u_2^*(z)$。另注意，根据（7），$\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1} \le Cr$。

（12）的线性部分生成一族 $C^0$ 半群，记作 $\Phi(t, t_0)$，并满足

$$\|\Phi(t, t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \le Ke^{-\omega(t-t_0)},$$

其中 $0 < \omega < \rho$ 和 $K \ge 1$为某些值。该估计对任意 $0 < r < r_0$ 均成立，其中 $K$ 和 $\omega$与 $r$无关。

若 $p \in B_\kappa(0)$（$\kappa$ 在 $H^1(\mathbb{R}$中的半径为 $\kappa$ 的球）中存在常数 $C(\kappa)$，使得 $\|N(\cdot, p)\|_{H^1} \le C(\kappa)\|p\|_{H^1}^2$。考虑（12）的积分形式：

$$p(z, t) = \Phi(t, T_0)p(z, T_0) + r\int_{T_0}^{t} \Phi(t, s)\left[g(\gamma(s))\frac{\partial}{\partial z}u_2^*(z)\right] \mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t} \Phi(t, s)N(p(z, s), z)\mathrm{d}s. \tag{13}$$

由于剖面 $u_2^*(z)$ 是作为关于 $z$ 的非自治常微分方程的解得到的，且 $f(u, H(z))$ 对两个自变量均光滑，因此剖面 $u_2^*$ 继承了相同程度的正则性，从而 $\partial_z u_2^*$ 是 $H^1(\mathbb{R})$ 中的元素。设

$$\Theta(t) = \sup_{T_0\le\tau\le t} \|p(\cdot, \tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

由（13）可得

$$\begin{aligned}\|p(\cdot, \tau)\|_{H^1} \le Ke^{-\omega(\tau-T_0)}\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1} + r\int_{T_0}^{\tau} Ke^{-\omega(\tau-s)}|g(\gamma(s))|\|\partial_z u_2^*\|_{H^1}\mathrm{d}s \\ + C(\kappa)\int_{T_0}^{\tau} Ke^{-\omega(\tau-s)}\|p(\cdot, s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{14}$$

从而存在一个与 $t$无关的常数 $C_2$，使得

$$\Theta(t) \le \Gamma(t) + C_2\Theta(t)^2, \tag{15}$$

其中

$$\Gamma(t) = K\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1} + r \sup_{T_0 \le \tau \le t} \left\{ \int_{T_0}^{\tau} K e^{-\omega(\tau - s)} |g(\gamma(s))| \|\partial_z u_2^*\|_{H^1} \mathrm{d}s \right\}.$$

注意到 $\Gamma(T_0) = K\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1}$，并且对于某个常数 $C$ 和任意 $t \ge T_0$，有 $0 < \Gamma(t) < Cr$。此外，注意到 $\Theta(T_0) = \|p(\cdot, T_0)\|_{H^1}$。综合这些事实可得

$$C_2\Theta(T_0)^2 - \Theta(T_0) + \Gamma(T_0) > 0.$$

现在固定 $r_0$ 为足够小，使得多项式 $C_2\Theta^2 - \Theta + \Gamma(t)$（见（15））有实根

$$\Theta_-(t) = \frac{1}{2C_2}\left(1 - \sqrt{1 - 4C_2\Gamma(t)}\right),$$

对所有 $t \ge T_0$，并且 $\Theta_-(t) < \kappa$。偏微分方程适定，因此 $\Theta(t)$ 连续。不等式（15）蕴含

$$\Theta(t) \le \Theta_-(t)$$

对所有 $t > T_0$。由于 $\Gamma(t) \le C_1 r$，这个界对某个 $C > 0$成立，从而得到（11）。最后，当 $t$ 足够大时，轨道进入稳态（$u_2^*$, $a$）的一个邻域。该稳态的渐近稳定性进而保证，当 $t \to \infty$在 $H^1$ 范数下时，极限收敛。这意味着在 $L^\infty$下收敛，引理得证。

□

### 3.3 小位移

如上文所述，在我们的情形中，一个有趣的结果是，如果位移过小，则无论速率如何都不会发生倾覆。这一效应只会出现在我们所考虑的这种情形中，即栖息地从一个位置移动到另一个位置；对于无界线性漂移的情形则无法观察到这一效应，正如 [3]和 [7]中所示。

**定理 3.1。** **[最小位移要求]** 如果位移 $d = 2a \ll 1$，则拉回吸引子 $\mathcal{U} = U(t)$ 收敛到 $u_2^*$，当 $t \to \infty$ 时，对于任意 $r > 0$ 均成立，并且不会发生 *R*-临界转变。

证明。 证明仿照命题 1。从方程（1）出发，令 $z = x - a$（注意，这与之前使用的 $z$ 不同，因为现在时变平移将占主导地位），从而得到偏微分方程

$$u_t = u_{zz} + f\left(u, H(z - \gamma(t) + a)\right). \tag{16}$$

令 $u(z, t) = u_2^*(z) + p(z, t)$。则扰动 $p(z, t)$ 满足方程

$$p_t = \mathcal{L}p + R(z, p) + N(z, p), \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_z^2 + f_u(u_2^*(z), H(z)), \\ R(z, p, t) &= f(u_2^* + p, H\left(z - \gamma(t) + a\right)) - f(u_2^* + p, H(z)), \\ N(z, p) &= f(u_2^* + p, H(z)) - f(u_2^*, H(z)) - f_u(u_2^*, H(z))p. \end{aligned}$$

如果 $p \in B_\kappa(0) \subset H^1(\mathbb{R})$，那么，如命题 1 的证明中所述，存在一个 $C(\kappa)$，使得 $\|N(\cdot, p)\|_{H^1(\mathbb{R}} \le C(\kappa)\|p\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$。定义

$$\Delta H(z, t) = H\left(z - \gamma(t) + a\right)) - H(z).$$

由于 $H$ 光滑，存在一个与 $r$ 无关的常数 $C > 0$，使得 at

$$\|\Delta H(\cdot, t)\|_{L^\infty} < Ca, \tag{18}$$

而 $\gamma(t) \to a$ 当 $t \to \infty$ 时收敛，意味着

$$\|\Delta H(\cdot, t)\|_{L^\infty} \to 0$$

，当 $t \to \infty$时。假设 $p \in B_\kappa(0) \subset H^1(\mathbb{R})$。由于函数 $f$ 关于其每个自变量都是光滑的，因此在局部满足利普希茨条件，存在一个常数 $L(\kappa)$，使得

$$\|R(z, p, t)\|_{H^1} \le L(\kappa)\|\Delta H(z, t)\|_{L^\infty} \le M(\kappa)a,$$

其中第二个不等式由（18）得出。接着，我们将偏微分方程（17）写成积分形式

$$p(z, t) = e^{\mathcal{L}(t-T_0)}p(z, T_0) + \int_{T_0}^{t} e^{\mathcal{L}(t-s)}R(z, p, s)\mathrm{d}s + \int_{T_0}^{t} e^{\mathcal{L}(t-s)}N(z, p)\mathrm{d}s.$$

因此，对于任意 $T_0 \le \tau \le t$,

$$\begin{aligned}\|p(\cdot, \tau)\|_{H^1} \le Ke^{-\rho(\tau-T_0)}\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1} &+ KM(\kappa)a\int_{T_0}^{\tau} e^{-\rho(\tau-s)}\mathrm{d}s \\ &+ KC(\kappa)\int_{T_0}^{\tau} e^{-\rho(\tau-s)}\|p(\cdot, s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{19}$$

De足够 $\Theta(t)$，如命题1的证明中所示。于是 $\Theta(t)$ 必须满足不等式 y

$$\Theta(t) \le K\Theta(T_0) + K_0 a + K_2\Theta(t)^2. \tag{20}$$

由于偏微分方程（16）适定， $\Theta(t)$ 关于 $t$连续。因此，对于所有满足 $t > T_0$的 $\Theta(t)$，（$< \kappa$成立。如果 $\|p(\cdot, T_0)\|_{H^1} = \Theta(T_0) \le \frac{1}{4K} - \frac{K_0}{K}a$，那么实际上 $\Theta(t) \le \Theta_-$ 对所有 $t$ 都成立，其中

$$\Theta_- = \frac{1}{2K_2}\left(1 - \sqrt{1 - 4K_0 a - 4K\Theta(T_0)}\right).$$

为完成证明，对于任意 $r > 0$，我们可以通过将 $T_0$ 取得足够小，从而选取局部不稳定流形 $W^u(u_2^*, a)$ 上的初始数据，使得 $-a < \gamma(T_0) < -a + \delta$；见引理 2.2。将 $T_0$ 取得更小，可以确保 $\Theta(T_0) < \Theta_-(T_0) < \kappa$。事实 $\|R(z, p, t)\|_{H^1} \to 0\,\mathrm{as} t \to \infty$，结合状态 $(u_2^*, a)$ 的局部渐近稳定性，意味着当 $t \to \infty$ 时收敛到 $u_2^*$。

□

### 3.4 大位移：定理证明2.4

为证明定理 2.4，我们需要在 $r$ 足够小时跟踪移动基态的端点，并在 $r$ 足够大时倾覆至灭绝。如命题 1 所示，对于 $r \ll 1$，无论位移 $d$ 如何，端点跟踪均成立。因此，我们需要证明，当位移足够大时，快速位移会导致倾覆至灭绝

作为分析快速迁移（$r \gg 1$）情形的前置步骤，我们考虑栖息地瞬时迁移的情况，即适宜栖息地的中心从

$x=-a$ 瞬时迁移至 $x=a$。在原始 $x$ 坐标系中分析该系统更为方便，在此我们考虑以下初值问题：

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u, H(x-a)) \\ u(x,0) &= u_2^*(x+a). \end{aligned} \tag{21}$$

事实上，由于我们计划将栖息地位移用作参数，我们将实际考虑该方程

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u, H(x)) \\ u(x,0) &= u_2^*(x+2a), \end{aligned} \tag{22}$$

其中，我们实际上已将（21）中的空间区域平移了 $a$ 个单位，从而使稳定脉冲以 $x=0$ 为中心，当 $t\to\infty$时。为避免记号过于繁琐，我们继续使用 $x$ 作为空间坐标。

**引理 3.2.** [**瞬时栖息地转移导致的灭绝**] 设 $d=2a>0$ 充分大。则初值问题（22）的解满足

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x,t)| = u_0^* = 0.$$

证明。该证明在构造一个适当的上解之后，由标量反应扩散方程的比较原理得出。回顾人均增长率的定义：$\tilde{f}(u,H(x)) = f_{(u,H(x))}u$。我们利用以下事实构造上解。首先，当 $x$充分大时，种群的人均增长率对所有正的种群密度均严格为负。其次，对任意 $x$ ，人均增长率对所有充分小的种群密度均严格为负。

关于第一点，由于 $H(x)\to 0$ as $x\to\pm\infty$ ，存在一个值 $x^*<0$ ，使得对于所有正的 $u$，人均增长率严格为负。这意味着，对于 $x<x^*$ ，我们有 $f(u,H(x))<-\kappa u$，其中某个 $\kappa>0$。关于第二点，存在一个 $\zeta>0$，使得对于所有 $x\in\mathbb{R}$， $f(u,H(x))<0$。我们声称存在一个单调递减函数 $\psi_{K,\delta}(x):\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}$ ，使得

$$\psi_{K,\delta}(x)\to K \text{ as } x\to-\infty,$$

且 $\psi_{K,\delta}(0)=\psi'_{K,\delta}(0)=\psi''_{K,\delta}(0)=0$ ，而 $|\psi''_{K,\delta}(x)|\le\delta$ 对所有 $x<0$ 都成立。定义 e

$$\overline{u}_{K,\delta,\epsilon}(x,t) = \begin{cases} \zeta & x\ge x^* \\ \zeta+\psi_{K,\delta}(x-x^*)e^{-\epsilon t} & x<x^* \end{cases},$$

其中 $\zeta$ 如上所定义。

我们需要 $\epsilon>0$，并且固定 $K$，使其满足 $K+\zeta>u_2^*(0)=\max_{z\in\mathbb{R}}u_2^*(z)$。因此，我们令 $K$ 和 $x^*$ 固定，并将证明存在一个 $\delta$ ，以及充分小的 $\epsilon$，使得 $u_{K,\delta,\epsilon}$ 是一个上解。

Let

$$\mathcal{N}(u(x,t)) = u_t - u_{xx} - f(u,H(x)).$$

函数 $u$ 是经典上解，当且仅当 $u\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ 且 $\mathcal{N}(u)\ge 0$ 对所有 $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$均成立。由于 $u_{K,\delta,\epsilon}\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$，我们将重点考察 $\mathcal{N}(u_{K,\delta,\epsilon})$ 的符号。

对于 $x>x^*$ ，候选上解为常数，因此我们可以直接得到 t

$$\mathcal{N}(\overline{u}_{K,\delta,\epsilon}) = -f(\zeta,x)\ge 0.$$

现在考虑 $x < x^*$，其中 $f(u,\ H(x)) < -\kappa u$，并计算

$$\mathcal{N}\left(\zeta + \psi_{K,\delta}(x)e^{-\epsilon t}\right) > e^{-\epsilon t}\left[(\kappa-\epsilon)\,\psi_{K,\delta}(x) - \psi''_{K,\delta}(x)\right] + \kappa\zeta.$$

由于 $\kappa$是固定的，我们选取足够小的 $\delta$ 和 $\epsilon$，使得上述表达式右端对所有 $x < x^*$均为正。

现在我们利用这个上解证明该引理。由于 $\lim_{x\to-\infty} u_{K,\ \delta,\ \epsilon}(x) = K^- + \zeta > u_2^*(0)$，因此存在一个足够大的 $d = 2a$，使得对所有 $x \in \mathbb{R},\ 0 < u_2^*(x+2a) < u_{K,\ \delta,\ \epsilon}(x,\ 0)$。随后由比较原理可知，对所有 $t > 0$ 和所有$x \in \mathbb{R},\ u(x,\ t) < u_{K,\ \delta,\ \epsilon}(x,\ t)$。

由 $f$的连续性，存在一个 $\zeta_1 > \zeta$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$和所有$0 \le u \le \zeta_1,\ f(\zeta_1, H(x)) < 0$。$u_K$、$\delta$、$\epsilon(x,t)$ 随时间一致收敛到 $\zeta$，这意味着存在一个时刻 $t_1$，使得对所有 $x,\ u(t_1,x) < \zeta_1$。随后我们采用次级上解 $u_1(x,t) = \zeta_1 e^{-\kappa_1(t-t_1)}$。与该上解比较可知，方程(22)的解一致指数收敛到零灭绝态。

□

**引理 3.3。** **[栖息地迁移导致灭绝，其中** $r \gg 1$] 设 $d$ 充分大。则存在一个 $r^+(d) > 0$，使得对任意 $r > r^+$，拉回吸引子 $\mathcal{U}(t)$ 在 $t \to \infty$时收敛至灭绝态 $u_0^* = 0$。

证明。首先考虑斜坡函数 $\gamma' = rg(\gamma)$对应的微分方程。通过平移时间，我们可以假设 $\gamma(0) = 0$。令 $\alpha > 0$。定义

$$T_- = -\frac{1}{r}\int_{-a+\alpha}^{0} \frac{1}{g(\gamma)}\mathrm{d}\gamma, \quad T_+ = \frac{1}{r}\int_{0}^{a-\alpha} \frac{1}{g(\gamma)}\mathrm{d}\gamma.$$

于是 $\gamma(T_-) = -a + \alpha$ 且 $\gamma(T_+) = a - \alpha$。当 $r$ 较大时，斜坡函数会从 $-a$ 快速过渡到 $a$。从 $-a+\alpha$ 到 $a-\alpha$ 的过渡时间为 $\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$，当 $r \to \infty$时。我们的证明分为以下三个步骤：

1. 在时间区间 $(-\infty, T_-)$ 内，斜坡函数 $\gamma(t)$ 与 $-a$的偏差很小。我们基本沿用定理3.1证明中的论证，得到对这一演化后剖面的 $L^\infty$ 控制。2. 在时间区间 $(T_-, T_+)$ 内，栖息地斜坡函数迅速演化，使适宜栖息地从 $x = -a$附近迁移至 $x = +a$附近。然而，这一迁移发生在一个 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$时间区间内。因此，当 $r$ 充分大时，解剖面在这段时间内只能发生很小的变化。3. 在区间 $(T_+, \infty)$ 上，斜坡函数接近 $+a$。因此，我们将对 $t = T_+$ 处拉回吸引子正向演化的逐点控制，与引理3.2 中构造的超解结合起来，证明解逐点一致收敛至零。

步骤 1 取任意固定的 $r > 0$。令 $\gamma_0$满足 $-a < \gamma_0 < -a+\delta$，并定义 $T_0$，使得 $\gamma(T_0) = \gamma_0$。若 $T_0 < T_-$，则我们需要控制解直到时刻 $t = T_-$的演化。为此，我们基本上重复定理 3.1 的证明。从坐标 $z = x - \gamma(t)$ 变回 $x$，我们写作 $u_1(x,t) = u_2^*(x+a) + p_1(x,t)$，其中扰动 $p_1(x,t)$ 是以下方程的一个解

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = p_{1,xx} + f_u(u_2^*(x+a), H(x+a))p_1 + R_1(p_1,x,t) + N_1(p_1,x),$$

其中

$$\begin{aligned} R_1(p_1,x,t) &= f\left(u_2^*(x+a)+p_1, H(x-\gamma(t))\right) - f\left(u_2^*(x+a)+p_1, H(x+a)\right) \\ N_1(p_1,x) &= f\left(u_2^*(x+a)+p_1, H(x+a)\right) - f_u\left(u_2^*(x+a), H(x+a)\right) p_1 \\ &- f\left(u_2^*(x+a), H(x+a)\right), \end{aligned} \tag{23}$$

具有初始数据

$$p_1(x,T_0) = \phi(x-\gamma_0,\gamma_0,r) - u_2^*(x+a),$$

回顾引理 2.2。利用 $0<\gamma(t)+a<\alpha$并重复定理 3.1 中的分析，我们得到——当 $\alpha$ 足够小时——

$$\|p_1(\cdot,T_-)\|_{H^1} \le C_\alpha \alpha + C_1 \|p_1(\cdot,T_0)\|_{H^1},$$

对于某些常数 $C_\alpha$ 和 $C_1$，它们与 $r$无关。

**步骤 2** 现在考虑区间 $t\in[T_-,T_+]$。将此区间内的解记为 $u_2(x,t)$，并将 $u_2(x,t)=u_2^*(x+a)$ $+p_2(x,t)$ 在初始数据 $p_2(x,T_-)=p_1(x,T_-)$ 下展开。注意， $p_2$ 此时满足偏微分方程

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = p_{2,xx} + f\left(u_2^*(x+a)+p_2, H(x-\gamma(t))\right) - f\left(u_2^*(x+a), H(x+a)\right).$$

将解写成积分形式如下

$$p_2(x,t) = e^{\partial_x^2 t} p_2(x,T_-) + \int_{T_-}^t e^{\partial_x^2(t-\tau)} R_2(x,\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{T_-}^t e^{\partial_x^2(t-\tau)} N_2(p_2,x,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\begin{aligned} R_2(x,t) &= f\left(u_2^*(x+a), H(x-\gamma(t))\right) - f\left(u_2^*(x+a), H(x+a)\right) \\ N_2(p_2,x,t) &= f\left(u_2^*(x+a)+p_2, H(x-\gamma(t))\right) - f\left(u_2^*(x+a), H(x-\gamma(t))\right). \end{aligned}$$

对于 $p\in B_\kappa(0)$，我们利用界 $\|N_2(p_2,x,t)\|_{H^1}\le M\|p_2\|_{H^1}$ 和 $\|R_2(x,t)\|_{H^1}\le L$，得到

$$\|p_2(\cdot,t)\|_{H^1} \le \|p_2(\cdot,T_-)\|_{H^1} + (t-T_-)L + M\int_{T_-}^t \|p_2(\cdot,\tau)\|_{H^1}\mathrm{d}\tau.$$

随后应用 Gr¨onwall 不等式可得

$$\|p_2(\cdot,T_+)\|_{H^1} \le \left(\|p_2(\cdot,T_-)\|_{H^1} + L(T_+-T_-)\right) e^{M(T_+-T_-)}.$$

I特别地，对于任意 $C>1$，存在充分大的 $r_+(C,\alpha)$，使得

$$\|p_2(\cdot,T_+)\|_{H^1} \le C\|p_2(\cdot,T_-)\|_{H^1},$$

对于所有 $r>r_+(C,\alpha)$。

**步骤 3** 为便于说明，取前述方程中的 $C=2$ 。因此，我们已经证明，在时刻 $t=T_+$， $\mathcal{U}(t)$ 的正向演化具有如下形式： $u_2^*(x+a)+p_2(x,T_+)$，其中

$$\|p_2(x,T_+)\|_{H^1} \le 2C_\alpha\alpha + 2C_1\|p_1(\cdot,T_0)\|_{H^1}.$$

此估计对任意 $r>r_+(2,\alpha)$ 均成立，其中 $C_\alpha$ ，且 $C_1$ 与 $r$ 无关。由于 $L^\infty(\mathbb{R})$ 连续嵌入于 $H^1(\mathbb{R})$，我们可以通过适当增大 $T_0<0$ 或减小 $\alpha$ ，对 $\mathcal{U}(t)$ 的正向演化进行逐点控制。

在时间区间 $[T_+, \infty)$ 上，我们有 $a - \alpha < \gamma(t) < a$。现在我们修改引理 3.2 中的论证，以完成证明。对于固定的 $\alpha$，存在 $x_*$ 和一个 $\kappa > 0$，使得对于任意 $x < x_*$ 和任意 $t \geq T_+$，$f(u, H(x - \gamma(t))) < -\kappa u$。我们还可得，存在一个 $\zeta > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \geq T_+$，$f(\zeta, H(x - \gamma(t)) < 0$。现在，按照引理 3.2 的证明，定义函数

$$\overline{u}_{K,\delta,\epsilon}(x,t) = \begin{cases} \zeta & x \geq -x_* \\ \zeta + \psi_{K,\delta}(x - x_*)e^{-\epsilon(t-T_+)} & x < -x_* \end{cases},$$

这是一个上解，其中 $\epsilon$ 和 $\delta$ 取足够小的值。

**结论** $\mathcal{U}(t)$的正向演化现在是如下形式的剖面

$$u_2^*(x + a) + p_2(x, T_+).$$

通过令 $a$ 足够大且 $\alpha$ 足够小，我们可以获得充分的控制，从而保证

$$u_2^*(x + a) + p_2(x, T_+) < \overline{u}_{K,\delta,\epsilon}(x, T_+).$$

我们按照引理 3.2中的结论：应用比较原理可知，最终$u(t, x) < \zeta_1$对于某个 $\zeta_1$ 满足 $f(\zeta_1, H(x - \gamma(t))) < 0$对所有 $x$均成立。于是可得到逐点指数衰减至零，从而证明该结果。

□

# 4 确定 临界速率的确定：唯一性与非退化性 y

核心问题是确定临界速率：高于该速率时会倾覆至灭绝，而低于该速率时则会跟踪移动稳定基态。此时，我们尚不知道这样的临界速率是否唯一，并且它将取决于非线性项的具体结构。我们的目标是针对第2.3节中的特定模型问题证明这一点，其中非线性项 $f(u, H(z))$ 由（8）给出，而栖息地函数 $H(z)$ 由（9）给出。

## 4.1 脉冲的计算

在栖息地过渡的开始和结束阶段，当其可视为静止时，系统的动力学由空间非齐次系统（4）所支配。每个脉冲满足：

$$u_{zz} - \beta^2 u + \lambda H(z)u^2 - u^3 = 0, \quad \lim_{z \to \pm\infty} u(z) =: u_\pm = 0.$$

我们将这个非自治常微分方程写成一阶系统：

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= -f(u, H(z)), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $' := \frac{d}{dz}$ 以及 $f(u, H(z)) = -\beta^2 u + \lambda H(z)u^2 - u^3$。该偏微分方程的脉冲解，是非自治常微分方程（24）在原点不动点处的一个非平凡同宿轨道。通过求解一个边值问题，可以数值求得这条同宿轨道。我们将问题设为一个维数加倍、但定义在半直线上的系统 $(-\infty, 0]$。增加的维度对应于经过坐标变换 $z \to -z$后的常微分方程。新变量组为 $(u, v, \tilde{u}, \tilde{v})$，系统如下：

$$u' = v, \quad v' = -f(u, H(z)), \quad \tilde{u}' = -\tilde{v}', \quad \tilde{v}' = f(\tilde{u}, H(-z)).$$

为了数值近似求解这个常微分方程组，我们将定义域截断为有限区间 $[-Z, 0]$；我们使用 $Z = 150$。我们选择的边界条件要求解在正向和反向时间 $T$ 中均衰减至不动点 (0, 0) $z \to \pm\infty$，如下所述。为方便起见，我们引入一个自由参数 $\xi$，它只出现在边界条件中。边界条件包括：(1) 匹配条件 $u(0) = \tilde{u}(0)$，$v(0) = \tilde{v}(0)$；(2) 射影边界条件 $\Pi_S(u(Z)\ v(Z))^T = 0$ 和 $\Pi_U(\tilde{u}(Z)\ \tilde{v}(Z))^T = 0$，其中 $\Pi_S = (1, \frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2})$ 是对常微分方程 (24) 的不动点 $(0, 0)^T$ 的稳定子空间的投影，$\Pi_U = (1, -\frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2})$ 是对 $(0, 0)^T$ 的不稳定子空间的投影；以及 (3) 边界条件 $u(0) - \xi = 0$。最后这个条件使自由变量对应于脉冲的最大值，并且可以通过为 $\xi$选取合适且相当一般的初始猜测，来选出所需的脉冲解。若没有这个边界条件，常微分方程解的初始猜测必须非常接近不稳定脉冲，边值问题求解器才能收敛到该解。引入自由参数后，对于所选参数集，我们无需使用延拓，因而更加方便。

我们使用 MatLab 中的 BVP5c 函数求解这个有限区间边值问题，该函数采用四阶段 Lobatto IIIa 公式。此方法会自适应地选择求解所用的网格，并使用局部多项式表示解，从而得到具有 fith 阶精度的 $C^1$- 连续近似。在内部，BVP5c 将自由参数视为一个附加的常微分方程，$\xi' = 0$。为了给出解的初始猜测，我们设置自由参数 $\xi = 0.56$以求得稳定脉冲，并设置 $\xi = 0.15$ 以求得不稳定脉冲。对于我们考察的所有 $L$ 值，这些初始猜测都适用。解的初始猜测通过对以下表达式求导并翻转定义域构造而成：求不稳定脉冲时使用 $u(z) = \xi$双曲正割$(z)$；求稳定脉冲时使用 $u(z) = \frac{1}{2}\xi$(双曲正切$(z + L/2)$ − 双曲正切$(z - L/2)$)。

求解该解时所采用的节点在后文中将很重要。事实上，在逼近（3）的拉回吸引子时，我们沿空间方向对（3）进行离散，所用节点与 BVP5c 求解稳定脉冲时所用的节点相对应，换言之，即寻找（24）中极大值最大的同宿轨道。

更明确地说：使用均匀网格沿空间方向对（3）进行离散，会导致导数近似的离散误差差异显著，这是因为解在原点附近变化迅速，而在较大的 $z$ 处几乎平坦。若使用切比雪夫节点，则必须取很多节点才能充分分辨 $z = 0$ 附近的解。直观上，这是合理的，因为切比雪夫节点在解变化最小的地方最为密集。我们发现，使用与 BVP5c 求解稳定脉冲时相同的节点来离散（3），效果非常好。直观上，这也是合理的，因为 BVP5c 所选节点是自适应选取的，用以最小化脉冲解误差，而该误差又取决于解在其整个定义域上的变化。事实上，在极限 $t \to -\infty$ 下，我们所关注的（3）的解就是稳定脉冲，因此针对稳定脉冲的空间离散对（3）非常合适，并且在实践中于整个时间区间上都表现良好。

我们在图2中绘制了脉冲解。我们直观地看到（并通过数值验证），这些脉冲满足(H1)，即 $u_2^*(z) > u_1^*(z)$对所有 $z$。

请注意，Hasan 等人 [7] 提出了一种替代方法，可将静态栖息地中的脉冲解计算为经过适当紧化的自治常微分方程中两个不动点之间的异宿轨道。他们的方法也适用于线性漂移生境，此时脉冲解并非严格意义上的稳态，而是行波。

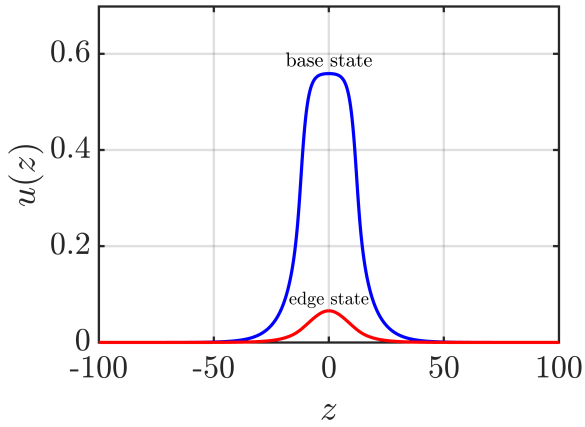



图2：脉冲剖面的对比，展示了振幅较大的稳定脉冲（$u_2^*$，蓝色实线）和振幅较小的不稳定脉冲（$u_1^*$，红色实线）。两个剖面均针对 $\beta = 0.15$，$\lambda = 4\beta$ 以及 $L = 25$，使用第 4.1 节所述的边值问题计算得到。

### 4.2 定常脉冲的谱稳定性

对按 $u^*(z)$ 4.1所述方法得到的脉冲解进行线性化，可得特征值问题

$$\lambda p = p_{zz} - \beta^2 p + 8\beta H(z) u^*(z) p - 3u^{*2}(z) p, \tag{25}$$

其中，$u^*$ 是稳定脉冲 $u_2^*$ 或不稳定脉冲 $u_1^*$。

为求出特征值，我们采用标准的斯图姆–刘维尔方法，并使用方程（25）对应的角方程，将其写成一个系统。令 $\theta = \arctan\left(\frac{p_z}{p}\right)$，则 $\theta(z)$ 满足

$$\theta' = \lambda \cos^2\theta - f_u(u^*(z), H(z)) \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\lambda - f_u(u^*(z), H(z))) \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{26}$$

其中 $'$ 表示 $\frac{d}{dz}$。方程（26）确定了与线性化特征模态相关的相平面旋转。我们将 $\theta$ 视为取值于 $\mathbb{R}$，这对应于对 arctan 取未缠绕版本。

自然的做法是再次进行紧化，但这次是在空间中，而不是在时间中。为此，令 $s = h(z) =$双曲正切$\left(\frac{z}{2}\right)$，并令 $\tilde{H}(s) := H\left(h^{-1}(s)\right)$。系统（26）随后变换为自治形式

$$\begin{aligned} \theta' &= \left(\lambda - f_u\left(u^*(h^{-1}(s)), \tilde{H}(s)\right)\right) \cos^2\theta - \sin^2\theta, \\ s' &= 1 - s^2. \end{aligned} \tag{27}$$

平衡点位于 $s = \pm 1$，对应于 $z \to \pm\infty$。在这些极限下，$H(z) \to 0$ 和$u^*(z) \to 0$，因此 $f_u(z, H(z)) \to -\beta^2$，角方程化简为

$$\theta' = (\lambda - (-\beta^2)) \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\lambda + \beta^2) \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

求解　不动点，令 $\theta' = 0$，可得 $(\lambda + \beta^2) \cos^2\theta = \sin^2\theta$，因此 $\tan^2\theta = \lambda + \beta^2$。

当存在异宿连接时，便会出现特征值，该连接位于 (27) 中，连接了 $s = -1$ 中一个具有吸引性的（因此对应于系统的不稳定解子空间 $z \to -\infty$）不动点与 $s = +1$ 中一个具有排斥性的不动点。请注意，吸引性和排斥性分别针对 $s = \pm 1$ 内的系统而言。它们在完整相空间中分别具有一维稳定流形和不稳定流形。

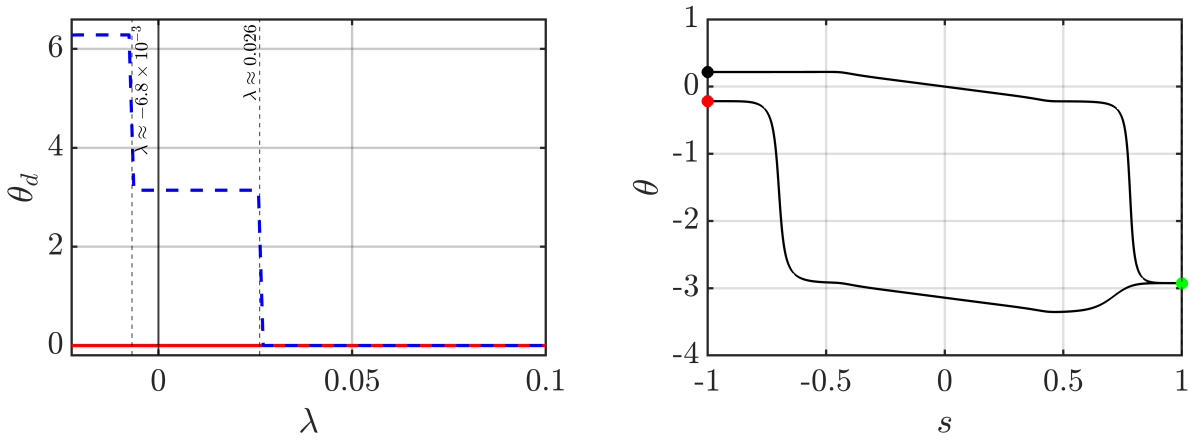



图 3：脉冲解的稳定性分析。左：通过 $\theta$-差分进行谱诊断，红色实线表示稳定脉冲，蓝色虚线表示不稳定脉冲；竖线标出检测到的特征值。右：相图显示了在（$s$，$\theta$）相平面中连接不动点的稳定与不稳定流形相交，参数为 $\lambda \approx 0.026$。两个面板均采用（27）中的参数 $\beta = 0.15$ 和 $L = 25$ 。27。

出现特征值时，也就是说，存在异宿连接时，异宿轨道累积的总角旋转量是 $\pi$ 的整数倍。我们将这个 $\pi$ 的倍数记为 $\theta_d(\lambda)$，它对应于特征值指标。

我们考察两组具有代表性的参数:

1. 对于 $\beta = 0.15$， $L = 25$， $\alpha = \beta/2$，且 $\max(u_1^*) \approx 0.0657$ （图 2中的红色曲线），我们检测到特征值位于 $\lambda \approx -6.8 \times 10^{-3}$ 和 $\lambda \approx 0.026$ ，高于本质谱阈值 $-\beta^2$（图 3左图中的蓝色虚线）。这些特征值表明，相应的驻定脉冲不稳定，从而验证了（H3）。

2. 对于相同的参数，$\max(u_2^*) \approx 0.5588$ (图 2中的蓝色曲线)，特征值曲线（图 3左图中的红色曲线）始终沿水平轴分布，且完全位于 $-\beta^2$左侧，这证实了谱稳定性和（H4）。

这些结果确定了构成（1）中速率诱导临界转变现象基础的非稳定（边缘态）脉冲和稳定（基态）脉冲。

### 4.3 拉回吸引子的计算

拉回吸引子 $\mathcal{U}$的数值计算取决于速率 $r$，其步骤是从不稳定流形 $W^u(u_2^*, -a)$上取初值并向前迭代。这一流形位于（3）的相空间中。为此，我们将偏微分方程的时间域截断为有限区间 $[T_L, T_R]$，其中 $T_L \ll 0 \ll T_R$，并将空间区域截断为 $[-Z, Z]$，其中 $Z$是求解脉冲时使用的截断值。随后，我们采用线法，将偏微分方程的解从时刻 $t = T_L$向前推进。对于这个有限时间的偏微分方程问题，初始数据通过对不稳定流形 $W^u(u_2^*, -a)$进行一阶近似得到。

线法的设置如下：在有限的时间和空间区域内，我们对偏微分方程进行离散化

$$\begin{aligned} u_t &= u_{zz} + rg(\gamma)u_z + f\left(u, H(z)\right), \\ \gamma_t &= rg(\gamma). \end{aligned} \tag{28}$$

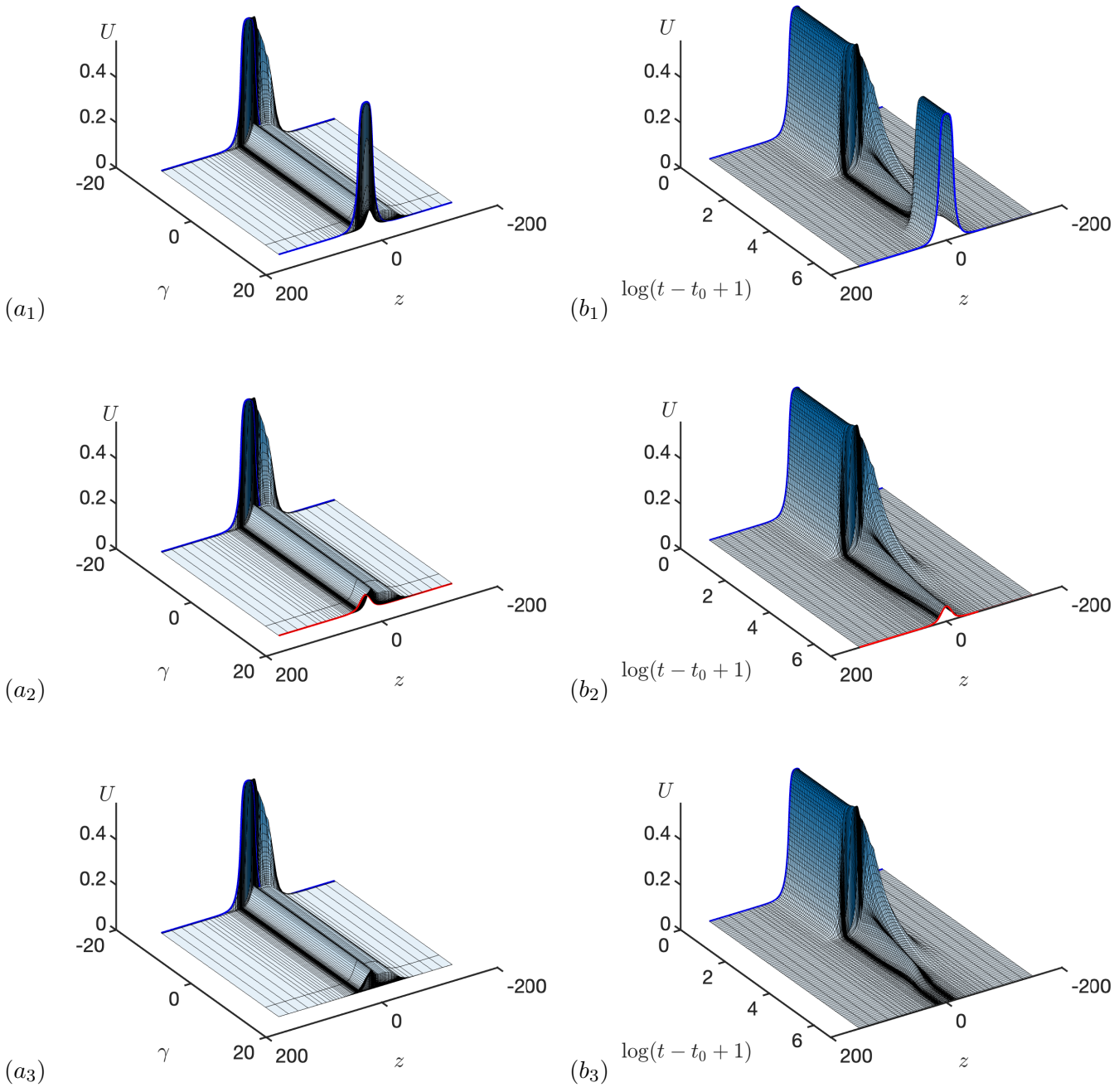



图4：（左列）使用射击法计算拉回吸引子的图，展示 $U$与 $z$和 $\gamma$的关系；（右列）展示 $U$与 $z$和 $\log(t-t_0+1)$ 的关系，其中 $(a_1, b_1)$ $r = r_c - 0.01$、$(a_2, b_2)$ $r = r_c$、$(a_3, b_3)$ $r = r_c + 0.01$，$r_c \approx 0.9670$ 是系统发生 R-临界转变时的临界值。其他参数为 $a = 15.65$、$\beta = 0.15$ $\lambda = 4\beta$ $L = 25$ 、和 。

我们选择空间网格 $\{z_j\}$为第4.1节所述、用于在BVP5c中求解稳定脉冲的配置点集合。令 $V_j(t)$ 近似 $u(z_j,t)$，其中 $u$ 求解(28)，且$z_j$为第j个空间节点。具体而言，要求 $V=(V_1,...,V_n)$满足该常微分方程，此处我们使用特定的位移函数 $\gamma(t)=a$双曲正切$rt$，因此 $g(\gamma)=a-\gamma^2/a$,

$$\begin{aligned} V_t &= D_{zz}V + r(a-\gamma^2/a)D_zV + f(V_j,H(z_j)),\\ \gamma_t &= r(a-\gamma^2/a). \end{aligned} \tag{29}$$

微分矩阵 $D_z$ 和 $D_{zz}$ 是使用5次多项式进行局部插值的导数矩阵。因此，这些矩阵是带宽为5的带状矩阵。例如，若$p_j$是插值这些点的多项式

$$\{(z_{j-2},V_{j-2}),(z_{j-1},V_{j-1}),(z_j,V_j),(z_{j+1},V_{j+1}),(z_{j+2},V_{j+2})\},$$

则 $D_z$的第 $j$行乘以$(V_1,...,V_n)^T$给出插值多项式$p_j$ 在$z_j$处的一阶导数。该多项式插值函数使用最近的五个网格点进行插值，这意味着对于最靠近边界的两个网格点，插值点并不居中。

常微分方程组的初值 (29) 必须对应于定义在整条实线上的偏微分方程 (28) 的不稳定流形 $W^u(u_2^*,-a)$。为此，我们在 (29) 的不动点的不稳定流形上对其进行初始化，该不动点近似于 $u,\gamma=(u_2^*,-a)$。具体而言，我们使用雅可比矩阵的一个适当特征向量，对不稳定流形（常微分方程）作一阶近似，并以此进行初始化。为此，我们注意到，(29) 的雅可比矩阵为

$$J(V,\gamma)=\begin{pmatrix} D_{zz}+r(a-\gamma^2/a)D_z+Df(V,H(z)) & -(2r\gamma/a)D_zV \\ 0 & -2r\gamma/a \end{pmatrix} \tag{30}$$

其中

$$Df(V,H(z)):=\begin{pmatrix} f_u(V_1,H(z_1)) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_u(V_2,H(z_2)) & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_u(V_n,H(z_n)) \end{pmatrix}.$$

我们在 $(V_s,-a)$ 处计算雅可比矩阵；该点是 (29) 中对应于位置 $z=-a$ 处稳定脉冲的不动点。随后，我们求出对应于实部为正的特征值的特征向量 $X$。接着，将常微分方程组初始化于 $(V_s,-a)^T+\varepsilon X$，并取 $\varepsilon=1e-8$。也就是说，常微分方程组以不动点的不稳定流形的一阶近似进行初始化，该不动点对应于以 $z=-a$ 为中心的稳定脉冲。因此，线法以近似稳定脉冲的不动点的不稳定流形（常微分方程）的一阶近似进行初始化，而这又给出了偏微分方程 (28) 的不稳定流形的近似。

我们求解常微分方程组（29），时间区间为 $[-50,800]$，采用 MatLab 例程 ODE15s。拉回吸引子的数值近似如图 4 所示，针对若干参数值，分别展示存活、灭绝以及临界速率情形。请注意，这些结果绘制于移动坐标系中；在原坐标系中，$x$ 会随 $\gamma$ 的增大而发生偏移。另请注意，在图4 （$b_1$）-（$b_3$）中，我们将时间绘制在对数尺度上，以便更清晰地观察拉回吸引子在其时间渐近状态之间的过渡行为。图4（$b_2$）展示了对应于临界速率 $r=r_c$的拉回吸引子，在该速率下，拉回吸引子在栖息地过去的渐近位置处的基态与未来的渐近位置处的边缘态之间形成异宿连接。

### 4.4 临界速率与异宿连接

为了证明存在唯一的临界速率，用以区分端点跟踪与灭绝，我们计算与一组有代表性的速率 $r$ 相对应的拉回吸引子。为突出对 $r$ 的依赖性，我们将采用记号 $\mathcal{U}(r) = \{U(t,\ r)| -\infty < t < +\infty\}$。我们判断对于给定速率 $r$，拉回吸引子对应于端点跟踪还是灭绝。具体做法是近似拉回吸引子的大时间极限，然后计算该极限与稳定脉冲 $u_2^*$ 之差的范数，以及与平凡解 $u_0^*$ 之差的范数。

具体而言，我们针对覆盖区间 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 的 $N$ 速率均匀网格计算拉回吸引子。根据初步模拟选择区间端点，以确保其涵盖临界速率。对于每个速率 $r_i$，我们在 $t = 1000$ 处评估解；我们已验证此值足够大，使拉回吸引子趋近其极限行为。随后，我们计算两个关键指标： $L^2$ 范数 $\|U(1000)\|_2$，用于衡量总种群密度；以及到稳定脉冲的距离 $\|U(1000) - u_2^*\|_2$，用于量化与跟踪状态的偏差。

端点跟踪与灭绝状态的分类基于阈值准则。若对于某个较小的容差 $\delta_1$， $\|U(1000) - u_2^*\|_2 < \delta_1$，则将其行为归类为端点跟踪。相反，若对于某个较小的容差 $\delta_2$， $\|U(1000)\|_2 < \delta_2$，则将其行为归类为灭绝。在实践中，只要模拟时间足够长，我们观察到这两种状态之间界限分明，不存在模棱两可的中间情况。

从图 5 中可以看到，只有一个临界速率 $r$，它对应于颜色的跳变，并将端点跟踪行为与灭绝区分开来。黑色曲线表示 $\|U(1000)\|_2$，其数值从接近 $\|u_2^*\|_2$过渡到接近零；蓝色曲线表示 $\|U(1000) - u_2^*\|_2$，则呈现相反的变化，即从接近零过渡到与 $\|u_2^*\|_2$相当的数值。这种转变的 abrupt 性质以及不存在多个此类转变，支持了我们关于临界速率唯一性的猜想。这些数值证据强烈表明，系统会在一个明确的临界速率下发生倾覆，而非呈现多个临界速率。

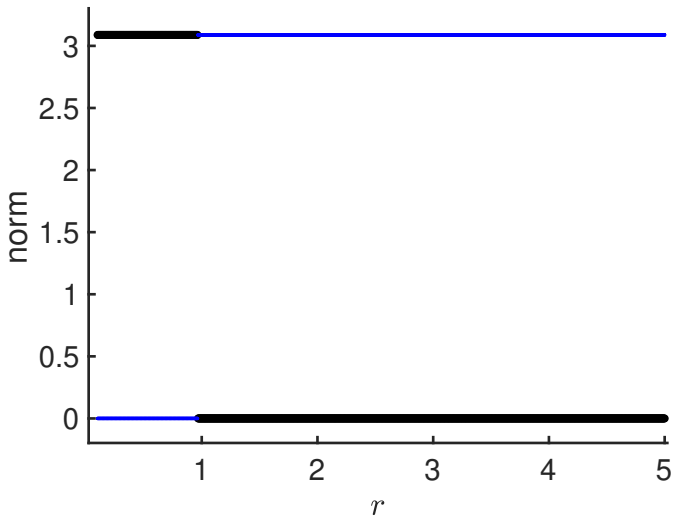



图 5：当（$U(t,\ r)\ \gamma(t)$）为（28）的解时，黑色曲线绘出了 $\|U(1000)\|_2$ 的近似值，蓝色曲线绘出了 $\|U(1000) - u_2^*\|_2$，其中 $u_2^*$ 是在空间节点处取值的稳定脉冲。

在临界　　速率下，拉回吸引子在基态之间形成异宿连接　　e

即栖息地过去渐近位置处的状态与未来渐近位置处的边缘态。我们将这一异宿连接计算为一个边界/内部值问题（BIVP）。了解临界速率的近似值是关键的起点，因为异宿轨道正是在该参数值下存在。鉴于相空间是无限维的，要通过数值方法求得异宿连接是一项重要的数学挑战。但这也具有实际意义，因为它能更精确地确定临界速率。

我们首先使用二分法近似临界速率。也就是说，我们验证：对于速率 $r_1$，按照第 4.3 节所述计算得到的拉回吸引子对应于跟踪；对于速率 $r_2$，则对应于灭绝。然后计算 $r_3 := (r_1 + r_2)/2$，并确定该速率对应的拉回吸引子是跟踪还是灭绝。接着，我们用 $r_3$ 替换 $r_1$ 或 $r_2$，从而再次得到两个速率，一个对应跟踪，另一个对应灭绝。如此反复，直到两个速率 $r_1$ 和 $r_2$非常接近。

然后，我们将 $r_1$ 作为临界速率的初步近似，并用相应的拉回吸引子近似异宿连接。为了更精确地近似临界速率 $r_c$及其对应的异宿连接，我们构造一个边界值型问题，其中还包含定义域区间内部关于解的条件。具体而言，我们将 (29) 作为边界/内部值问题求解，并施加相应条件，使解在 $t = -\infty$处位于不动点 $(V_1^s, ..., V_N^s, -a)$ 的不稳定流形上；在 $t = +\infty$处位于不动点 $(V_1^u, ..., V_N^u, a)$ 的稳定流形上，该不动点对应于不稳定脉冲。

边界条件和内部条件如下。令 $P^s_{-\infty}$ 为投影到 $J(V_1^s, ..., V_N^s, -a)$ 的稳定子空间上的投影，并令 $P^u_{+\infty}$ 为投影到 $J(V_1^u, ..., V_N^u, a)$ 的不稳定子空间上的投影。关于如何数值计算这些子空间的详细信息，见 [18]。于是，边界条件和内部条件为

$$0 = P^u_{+\infty}\left(\begin{bmatrix} V_1(+\infty) \\ \vdots \\ V_N(+\infty) \\ \gamma(+\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1^u \\ \vdots \\ V_N^u \\ a \end{bmatrix}\right), \quad 0 = P^s_{-\infty}\left(\begin{bmatrix} V_1(-\infty) \\ \vdots \\ V_N(-\infty) \\ \gamma(-\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1^s \\ \vdots \\ V_N^s \\ -a \end{bmatrix}\right), \quad 0 = \gamma(0).$$

我们在与二分法相同的区间上求解这个边界/内部值问题，并将二分法得到的解用作初始猜测。图 6展示了用此方法求得的异宿轨道图像。用此方法求出的精确临界速率，让我们能够精确了解这个典型例子中何时会发生 R-临界转变。图 $d(= 2a)$ 对 $r$ 的函数关系绘出了该临界速率，见图 1。

如第 2.2 节所述，异宿连接是 $W^u(u_2^*, -a)$ 的交集；后者是拉回吸引子 $\mathcal{U}$在自治系统（3）中的提升；它与 $W^s(u_1^*, +a)$ 在 $r = r_c$处相交。自然会问这一交集是否横截。值得关注的是，该流形是否按预期方向穿过，这对应于在 $r < r_c$ 时存活，而在 $r > r_c$时灭绝。横截性表明这种划分是明确的，且存活与灭绝的区别在任意接近 $r_c$时仍然成立。

T为证明横截性，我们先用参数 $r$ 扩展系统（3） ，

$$\begin{aligned} u_t &= u_{zz} + r\, g(\gamma)\, u_z + f\,(u, H(z))\,, \\ \gamma_t &= r\, g(\gamma), \\ r_t &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

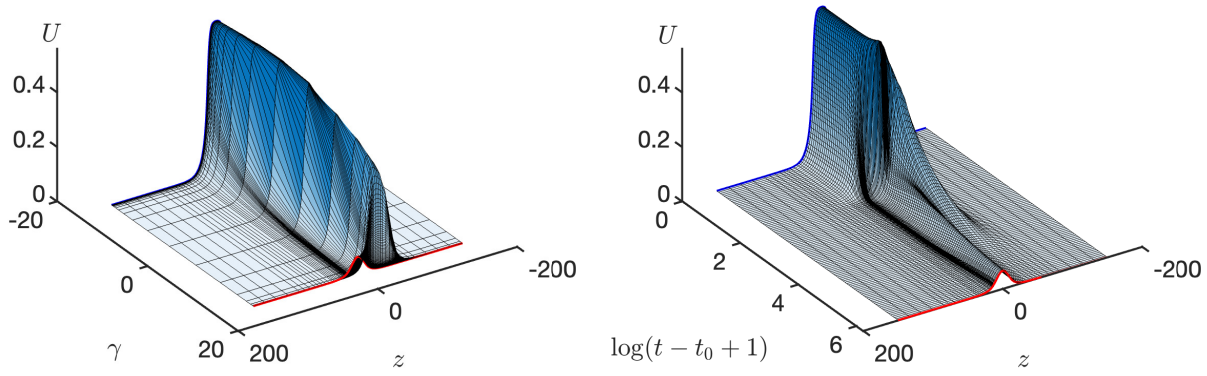



图 6：左列为使用边界/内部值方法（BIVP）计算异宿连接的图，展示了 $U$ 与 $z$ 和 $\gamma$ 的关系；右列为 $U$ 与 $z$ 以及 $\log(t-t_0+1)$的关系图，其中 $r=r_c$， $r_c\approx 0.9670$ 是系统发生 R-临界转变时的临界值。其他参数为 $a=15.65$、$\beta=0.15$、 $\lambda=4\beta$和 $L=25$。

对异宿解（$\bar{u}$， $\gamma_c$， $r_c$）进行线性化，得到（31）的线性化为

$$\begin{aligned} u_t &= u_{zz} + r(a-\gamma_c^2/a)\bar{u}_z - 2r_c\gamma_c\,\bar{u}_z\gamma/a + r_c(a-\gamma_c^2/a)u_z + \frac{df}{du}(\bar{u},H(z))u \\ \gamma_t &= -2r_c\gamma_c\gamma/a + (a-\gamma_c^2/a)r \\ r_t &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

利用线性化系统，我们计算出

$$\{(W^u(u_2^*,-a,r),r) : r_c-\delta<r<r_c+\delta, 0<\delta\ll 1\}, \tag{33}$$

它垂直于 $W^u(u_2^*,-a,r_c)$。随后，我们将此切向量与稳定流形的法向量 $W^s(u_1^*,a,r)$ 做内积，并证明该内积非零。请注意，由（33）给出的流形可视为点（$u_2^*,-a,r_c$）的中心不稳定流形，这表明它是一个流形，见 [2]。

将（32）转化为常微分方程组并离散化，我们得到

$$\begin{aligned} V_t &= D_{zz}V + r(a-\gamma_c^2/a)D_z\bar{V} - 2r_c\gamma_c\gamma D_z\bar{V}/a + r_c(a-\gamma_c^2/a)D_zV + \left[\frac{df}{du}(\bar{V}_j,H(z_j))V_j\right] \\ \gamma_t &= -2r_c\gamma_c\gamma/a + (a-\gamma_c^2/a)r \\ r_t &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

右端项的雅可比矩阵（34）由下式给出

$$J(V,\gamma,r) = \begin{pmatrix} D_{zz} + r_c(a-\gamma_c^2/a)D_z + \operatorname{diag}\left(\left[\frac{df}{du}(\bar{V}_j,H(z_j))\right]\right) & -\frac{2r_c\gamma_c}{a}D_z\bar{V} & (a-\gamma_c^2/a)D_z\bar{V} \\ 0 & -2r_c\gamma_c/a & a-\gamma_c^2/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意，在 $t=+\infty, a-\gamma_c^2/a=0$。我们求解以 $(V,\gamma,r)|_{t=-T}=(0,0,1)^T$为初始条件的线性化系统，并在 $t=+T$ 处求值，得到 $(V(T)\ \gamma(T)\ r(T)$。随后，我们将该向量归一化，得到不稳定流形 $W^u(u_2^*,-a,r)$ 的单位切向量，其中 $r$ 变化。

我们利用这一设置来说明，随着 $r$ 变化，不稳定流形 $W^u(u_2^*, -a, r)$ 与稳定流形 $W^s(u_1^*, a, r_c)$ 在 $r = r_c$ 处横截相交。不稳定流形 $W^u(u_1^*, a, r_c)$ 的切向量垂直于稳定流形 $W^s(u_1, a, r_c)$，这是因为线性化系统的特征函数由于其自伴性而彼此正交。我们通过计算 $J(u_1^*, a, r_c)$ 中对应于增长特征值的特征向量来近似该法向量。为确保该特征向量指向从 $u_1^*$ 到 $u_2^*$ 的流方向，我们在必要时将特征向量取反，使其最大分量为正。我们还将该向量归一化。

$W^{cu}(u_2^*, -a, r)$的单位切向量与 $W^u(u_2^*, -a, r_c)$正交，并且在 $r = r_c$ 处与 $W^u(u_1^*, a, r)$的单位切向量的内积非零，这证实了当 $r$ 变化时， $W^u(u_2^*, -a, r)$与 $W^s(u_1^*, a, r)$在 $r = r_c$处的交集是横截的。根据隐函数定理，这表明 $r_c$ 是一个尖锐阈值：异宿连接仅在 $r = r_c$处存在，将灭绝（$r > r_c$）与存活（$r < r_c$）分隔开来。还可以看出其符号是正确的，即与 $r$ 增大时从存活转向灭绝相一致。沿用上述取值，当 $L = 25$ 和 $r = 1$ （$a \approx 15.65$）时，计算得到内积为 -0.0037。这表明，拉回吸引子 $W^u(u_2^*, -a, r)$的族（当 $r$ 变化时）的切向量指向与法向量 $W^u(u_1^*, a, r)$相反的方向，而该法向量指向流的方向；该流使系统从 $u_1^*$ 附近移动到 $u_2^*$附近。

## 5 结论与讨论

我们分析了反应-扩散模型中的速率诱导临界转变（R-临界转变）现象，该模型描述了栖息地条件非均匀迁移时的物种动力学。研究揭示了种群面对快速环境变化时动力学的一些关键特征。具体而言，我们通过数值方法证明，当位移 $d > d^*$ 足够大时，存在一个临界速率 $r_c(d)$，在该速率下系统会发生突变。这一发现强调，考察环境变化时，不仅要关注变化幅度，也要关注变化速度。确定这一临界阈值，为评估种群对栖息地快速迁移的脆弱性提供了定量框架。

在快速栖息地迁移极限下，我们证明，位移足够大时会发生 R-临界转变。这一结果凸显了当环境变化速度超过物种适应或迁移能力时，种群可能突然崩溃。它也为保护工作敲响警钟，强调面对日益加速的环境变化，需要采取积极主动的措施。相反，我们对慢转移极限的分析表明，解可以跟随移动的适宜栖息地带而不发生倾覆。这一发现为物种在渐进式环境变化下的存续带来了希望，也表明减缓栖息地改变的速度可能是保护工作的一项重要策略。

我们的数值模拟揭示了临界转变的复杂结构及其对系统参数的依赖。这一发现为预测具有不同生活史特征和环境敏感性的物种可能如何响应栖息地变化奠定了基础。本研究开发的分析技术，尤其是对快、慢极限的处理，拓展了动力系统的理论框架，特别是在真正的非自治不稳定性和速率诱导现象方面。这些方法或可用于分析生态学以外其他领域中的速率诱导现象。

虽然我们的模型是理论性的，但其预测的定性行为与物种对栖息地变化的实证观测结果一致 [13, 4, 15]。这种一致性表明，我们的框架可作为解读和预测现实世界生态动态的有力工具。临界速率的存在以及 R-临界转变阈值的几何特征具有重要意义

对环境政策和保护策略而言，这意味着即使栖息地改变的总量不变，放缓改变进程也可能对防止生物多样性突然损失至关重要。

因此，这些结果有助于我们理解物种可能如何应对快速的环境变化，例如气候变化引起的变化。未来研究还可以探索以下方向：

1. 多物种相互作用：扩展模型以纳入多个相互作用的物种，探究竞争或捕食如何影响速率诱导临界转变现象。 2. 随机效应：纳入环境噪声或人口随机性，研究随机波动如何影响临界转变动力学。近期研究 [17, 16] 表明，随机扩展或可揭示速率诱导倾覆与噪声诱导倾覆现象之间的重要相互作用。3. 高空间维度：将分析扩展到二维或三维空间，以揭示一维情形中不存在的新模式和现象。4. 周期性强迫：分析季节性或其他周期性环境变化对临界转变动力学的影响。5. 早期预警信号：开发并检验统计指标，以便在模型和真实生态系统中对即将发生的R-临界转变发出早期预警。

面对前所未有的全球变化速度，预见并可能防止此类临界转变的能力，对于维护生物多样性和生态系统功能而言日益至关重要。我们的工作为未来研究奠定了基础，有望进一步弥合数学理论与生态实践之间的鸿沟，最终助力制定更有效的策略，以管理和保护快速变化世界中的生态系统。

## 致谢

B.B.、E.F.、M.H. 和 C.J. 谨向 AIM 举办的 非线性波行波稳定性分析的计算机辅助证明研讨会致以谢意。他们在会上建立了合作联系，并开始探讨与行波及相关问题有关的项目构想。E.F. 获美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2137947），部分经费由此提供。M.H. 获美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2406623），部分经费由此提供。C.J. 获美国海军研究办公室资助（项目编号 N00014-24-1-2198）。SW 部分获得爱尔兰研究委员会（Research Ireland，项目编号 FFP-A/12066）的资助。

## 参考文献

[1] P. Ashwin、C. Perryman 和 S. Wieczorek。低维非自治系统的参数变化：分岔与速率诱导临界转变。《非线性》，30(6):2185，2017年。[2] P. W. Bates 和 C. K. R. T. Jones。半线性偏微分方程的不变流形。载于《动力学报告》第*2*卷，第2卷《动力学报告丛书：动力系统应用》，第1–38页。威利出版社，奇切斯特，1989年。[3] H. Berestycki、O. Diekmann、C. J. Nagelkerke 和 P. A. Zegeling。物种能跟上变化中的气候吗？《数学生物学通报》，71:399–429，2009年。

[4] M. T. Burrows、D. S. Schoeman、A. J. Richardson、J. G. Molinos、A. Hoffmann、L. B. Buckley、P. J. Moore、C. J. Brown、J. F. Bruno、C. M. Duarte 等。气候速度表明物种分布范围迁移存在地理界限。《自然》，507(7493):492–495，2014年。[5] I.-C. Chen、J. K. Hill、R. Ohlem¨uller、D. B. Roy 和 C. D. Thomas。与高水平气候变暖相关的物种快速分布范围迁移。《科学》，333(6045):1024–1026，2011年。[6] N. S. Diffenbaugh 和 C. B. Field。生态学关键陆地气候条件的变化。《科学》，341(6145):486–492，2013年。[7] C. R. Hasan、R. M. C´arthaigh 和 S. Wieczorek。异质反应扩散系统中的速率诱导临界转变：不变流形框架与地理迁移生态系统。《*SIAM*应用动力系统杂志》，22(4):2991–3024，2023年。[8] D. B. Henry。半线性抛物方程的几何理论，《数学讲义》第840卷。Springer，柏林，1981年。[9] P. E. Kloeden 和 M. Rasmussen。非自治动力系统。第176号。美国数学学会，2011年。[10] S. R. Loarie、P. B. Duffy、H. Hamilton、G. P. Asner、C. B. Field 和 D. D. Ackerly。气候变化速度。《自然》，462(7276):1052–1055，2009年。[11] C. Parmesan 和 G. Yohe。自然系统中气候变化影响的全球一致指纹。《自然》，421(6918):37–42，2003年。[12] A. Pazy。线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，《应用数学科学》第44卷。Springer-Verlag，纽约，1983年。[13] M. L. Pinsky、B. Worm、M. J. Fogarty、J. L. Sarmiento 和 S. A. Levin。海洋类群追踪局地气候速度。《科学》，341(6151):1239–1242，2013年。[14] P. D. Ritchie、H. Alkhayuon、P. M. Cox 和 S. Wieczorek。自然与人类系统中的速率诱导临界转变。《地球系统动力学》，14(3):669–683，2023年。[15] C. A. Schloss、T. A. Nu˜nez 和 J. J. Lawler。扩散将限制哺乳动物在西半球追踪气候变化的能力。《美国国家科学院院刊》，109(22):8606–8611，2012年。[16] K. Slyman、E. Fleurantin 和 C. K. Jones。碳循环模型中的临界转变机制。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，35(5)，2025年。[17] K. Slyman 和 C. K. Jones。速率与噪声诱导临界转变协同作用。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，33(1)，2023年。[18] L. N. Trefethen 和 D. Bau。数值线性代数。SIAM，1997年。[19] S. Wieczorek、C. Xie 和 P. Ashwin。速率诱导临界转变：阈值、边缘状态与连接轨道。《非线性》，36(6):3238，2023年。[20] S. Wieczorek、C. Xie 和 C. K. Jones。渐近自治动力系统的紧化：理论、应用与不变流形。《非线性》，34(5):2970，2021年。