arXiv:2603.06853v1 [cs.CV] 6 Mar 2026

高对比度光流的扩展拓扑模型

Brad Turow，Jose A. Perea *

2026年3月10日

摘要

本文为从 Sintel 数据集中采样的 3×3 高对比度光流图像块空间中的稠密核心子集确定了低维模型。具体而言，我们运用近似与离散圆丛理论，确定了一个三维流形，其边界是先前提出的光流环面，此外还包含若干互不相交的圆，分别对应成对的二值阶跃边缘范围图像块。我们提出的三维流形模型解释了为何先前提出的环面模型无法通过直接方法（例如，简单的持久同调计算）得到验证。我们还表明，按对比度范数排名前 1% 的光流图像块中，几乎全部都位于上述二值阶跃边缘圆族附近，而非光流环面附近；这些频繁出现的图像块集中在运动边界附近（运动边界对于目标分割和跟踪等计算机视觉任务尤为重要）。我们的研究结果揭示了视觉数据推断中拓扑与几何之间微妙的相互作用。

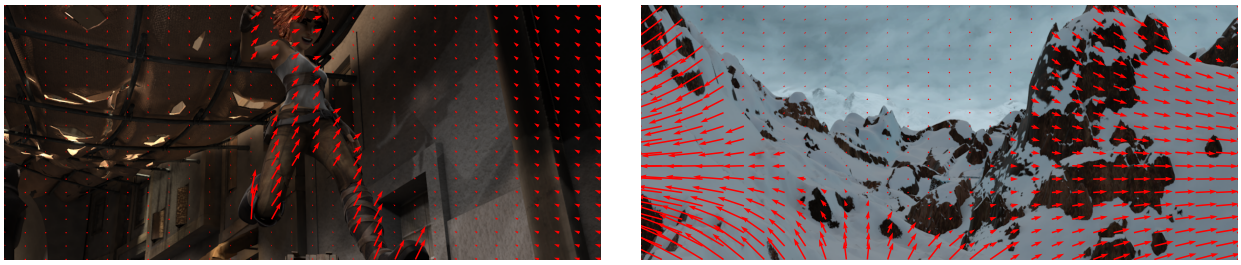


图 1：来自 Sintel 视频的帧，标注有示例（缩放后的）光流向量

1 动机与背景

光流描述了物体在视频连续帧之间的感知运动 [HS81]。这种运动可以用一个二维向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 在每个像素位置表示，表明坐标（x，y）处的像素值在第 t 帧中出现于第 $t+1$帧的位置。准确估计光流是众多计算机视觉应用中的基础步骤，例如跟踪运动物体、分割场景以及压缩视频数据 [MG15；Zha+21]。

然而，要准确地建模和分析光流数据的结构，仍然是一项重大挑战 [Alf+24]。一个根本性的困难在于，由于固有的歧义，例如“孔径问题”——局部运动可能与多个不同的全局运动相一致——我们并不总能从视频数据中直接恢复光流。此外，现实世界的视频往往存在遮挡、运动模糊和非刚性形变等复杂情况，这进一步增加了光流估计的难度 [Bak+11；Wul+12]。

*本工作部分得到美国国家科学基金会通过 CAREER 奖 # DMS-2415445 的资助。

为应对这些挑战，人们投入了大量精力来建模光流图像块的统计分布 [AMH22；Luo+22；Ada+20]。这些工作的一个指导原则是流形假设，它认为高维数据并非均匀分布于其环境空间中，而是集中在由低维流形良好刻画的稠密子空间附近 [NM10]。当这些流形呈现非平凡拓扑时，拓扑数据分析（TDA）中的工具（如持久同调）能够提供极有价值的指导性见解 [Car09]。

Sintel 数据集 [But+12]源自 Blender Foundation 的开源动画短片“Sintel”，为测试和训练光流模型提供了高质量基准（见图1）。其丰富多样的运动模式，加之光流真值的可用性，使其非常适合研究光流数据的统计与几何性质 [Wul+12]。2020年，Adams等人提出理论并提供证据，表明 3×3来自 Sintel 数据集的高对比度光流图像块集合包含一个稠密核心子集，该子集可被具有二维环面拓扑的空间很好地逼近，从而为18维数据有效地提供了一个二维模型 [Ada+20]。

在本文中，我们确认所提出的环面模型并为其导出坐标，将其作为更大的三维流形结构的一部分，并识别出高对比度 3×3 光流块空间中的另一关键族稠密核心子集，它们来自 [But+12]。我们表明，这些新的子集对应于集中在运动边界附近的图像块，它们对运动分割、目标跟踪和边界检测等计算机视觉应用具有特殊意义 [Wei+15;Yin+18]。

2 先前工作

过去二十年来，为研究非线性统计，人们对光学图像、测距和光流图像块空间中的稠密核心子集进行了大量分析。本节简要回顾与我们工作直接相关的发展。

在一篇开创性论文中 [LPM03], Lee 等人研究了从 van Hateren 自然图像数据集中采样的高对比度 3×3 光学测距图像块和灰度图像块的分布 [HS98]。他们表明，经过均值中心化和对比度归一化后，频繁出现的图像块集中在一个由线性阶跃边缘构成的非线性二维流形附近，该流形与环带同胚（见图2）。另一方面，测距图像块则集中在 $\mathcal{M}$中的二值图像块周围，形成若干彼此分离的簇。

在随后的一系列论文中 [AC09；AAC15；Car+08；Ada+20]，研究者采用持久同调等具有拓扑色彩的工具 [Car09] ，对高对比度图像、测距和光流图像块空间中的稠密核心子集进行建模。在 [AC09], 中，他们表明，[LPM03] 中所指出的两种分布表面上的根本差异会随着尺度增大而消失——具体而言， 5×5和 7×7来自[HLM00] 的测距图像块与光学图像块十分相似，均沿具有圆形拓扑的连续流形分布。

在 [Car+08]中，作者利用持久同调，在 3×3 来自 [HLM00]的光学图像块空间中识别出具有圆形拓扑的稠密核心子集。他们将这个空间称为主圆，它是 [LPM03], 中所描述的环带模型的变形收缩，由那些边缘穿过图像块中心的线性阶跃边缘图像块组成。使用更精细的密度估计器，作者还识别出一个具有克莱因瓶拓扑的光学图像块核心子集，其中包含主圆作为子集。在 [PC14], 中，Perea 和 Carlsson 利用 [LPM03]中描述的克莱因瓶模型开发了一种纹理分类算法。

在 [AAC15], 中，作者使用弹性带微调法识别出一个具有圆形

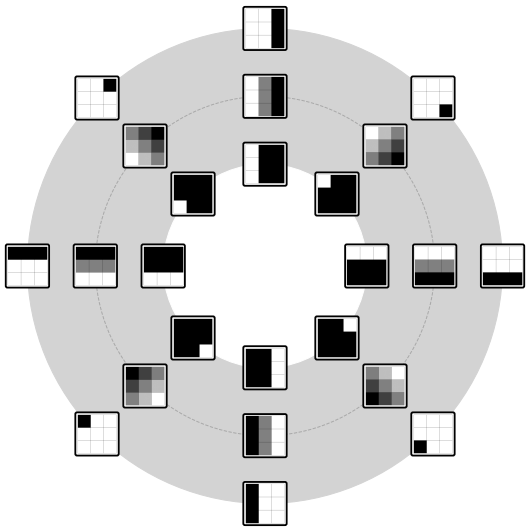


图 2：用于高对比度光学 3×3 图像块的线性阶跃边缘环带模型，取自 [LPM03]。部分二值阶跃边缘块显示在边界圆上。中心圆是 [Car+08]中所述的主圆。

拓扑结构的子集，该子集位于 3×3 来自 [But+12]的高对比度光流图像块空间中。他们将这个空间称为水平流圆，它是通过对 [Car+08]中的主圆模型的每个图像块施加均匀水平相机运动而得到的。在 [Ada+20]中，作者提出，高对比度光流图像块实际上占据了一个完整的环面，其中每个可能的相机运动方向都对应一个水平流圆的副本（见第6节）。

3 我们的贡献

本文运用代数拓扑和拓扑数据分析中的工具，具体而言，采用近似与离散圆丛理论 [TP25], ，以验证并扩展 [AAC15；Ada+20]针对 3×3 从 Sintel 数据集中采样的高对比度光流图像块空间所提出的模型 [But+12]。我们从以下几个方面开展工作：

在第6.2节中，我们指出， [Ada+20] 中用于支持环面模型的特征映射具有高度非利普希茨性（且定义不良），对于稠密核心子集中的相当一部分而言，该模型无法解释这部分数据。“额外数据”由没有明显主要流动轴的高对比度图像块构成。在第7节中，我们提出一个模型，将 [Ada+20]中识别出的稠密核心子集扩展为一个三维流形，其边界是光流环面。我们在第7.1 节使用稀疏圆坐标算法 [Per21] 对数据进行局部参数化，并采用 [TP25] 中的圆丛推断技术来构建全局结构。正如 [Ada+20] 的作者所指出的，扩展模型解释了为什么无法通过直接计算持久同调来认证环面模型。

在第 8 节中，我们使用更精细的密度估计器，在来自 Sintel 数据集的 3×3 高对比度光流图像块 [但是+12] 中识别出另一类重要的稠密核心子集。这些子集与 [LPM03] 中研究的二值阶跃边缘范围块密切相关。在第 8.1 节中，我们证明， [Ada+20] 的特征映射在这些子集中的图像块上定义良好。随后，我们应用类似 Mapper 的流程 [SMC07]来解析

数据划分为不同的圆形分量，并使用 [Per21] 中的稀疏圆坐标算法证明，每个分量都对应一对二值阶跃边缘范围图像块。

在第 8.2节中，我们展示了：按对比度范数排名前 1% 的光流图像块，几乎全部出现在二值阶跃边缘圆附近，而非光流环面附近。我们通过实证表明，这些特殊图像块出现在运动边界处；相比之下，排名前 20% 的其他图像块（ [Ada+20]中所选取的高对比度阈值）往往也会出现在带纹理的运动物体内部，例如头发。类比于 [AC09], ，我们自然地假设，对于尺寸更大的光流图像块，环面和二值阶跃边缘圆会产生一个单一的连通流形结构——一个线性阶跃边缘环带的参数化族，如图 2 所示；该结构可变形收缩到光流环面上。

4 方法

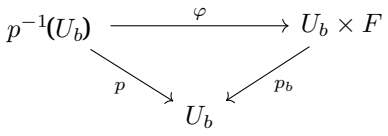
我们对稠密核心子集进行建模的方法依赖于拓扑数据分析（TDA）中的工具和思想，简要概述如下：

持久同调： TDA 中的主要计算工具是持久同调 [Per19]。粗略地说，给定度量空间 X 的一个子集 M （例如 $\mathbb{R}^D$），可以考虑 X 的加厚集，其形式为$X^{(s)} = \bigcup B_s(x)$，其中 $B_s(x)$ 表示半径为 $s \geq 0$ 的 M 中以 $x \in X$为中心的开球。对于任意$x \in X$
$s \geq 0$，人们可以计算空间 $X^{(s)}$ 的拓扑不变量——例如其在不同域系数下的同调与上同调 [Hat02] ——这些不变量可由各点之间的距离所编码的有限组合数据得到，而这些点位于 X。随后，人们可以度量拓扑不变量如何随尺度 s 变化；若某一拓扑特征在很大的尺度范围内保持稳定，则将其解释为反映了被假定作为采样之基础的拓扑空间的一个特征，该采样为 X。

持久（上）同调计算的结果汇总于所谓的持久图 dgm $\subseteq [0, \infty] \times [0, \infty]$。dgm 中的每一个点表示某个特定维数的持久（上）同调类， x 坐标和 y 坐标则指示相应类存活的尺度范围。0 维持久类大致对应于聚类（连通分支），1 维类对应于一维的环或洞，2 维类对应于空腔。

稀疏圆坐标：设 X 是度量空间 M的一个子集。稀疏圆坐标算法 [Per21] 利用 X 持久上同调中的一个一维类，生成映射f： $X^{(s)} \to \mathbb{S}^1$ 该映射尊重（表示）与该类相关联的持久圆形特征。除了圆坐标之外，理论方面还有其他进展、推广以及在计算机视觉和信号处理中的应用 [PP19] [Sco+23]， [SP23]。可在 DREiMac 库中找到相关实现，该库用于拓扑可视化、坐标化和降维 [PST23]。

离散近似圆丛：在拓扑学中，以 F 为纤维的纤维丛是拓扑空间之间的连续满射p： $E \to B$ ，并满足以下性质：对于每个 $b \in B$，都存在 b 的一个开邻域 $U_b \subseteq B$ 以及一个同胚 φ： $p^{-1}(U_b) \to U_b \times F$，使得若 p_b： $U_b \times F \to U_b$ 是到第一因子的投影，则下图交换：



在最近的一篇论文中 [T 在25], 中，我们引入了一种纤维为 $\mathbb{S}^1$ （我们称之为

）的离散近似圆丛，并提供了用于对这些对象进行分类和坐标化的算法。在本文中，我们应用其中的理论和算法，确认了 [Ada+20]提出的光流环面模型是更大三维流形结构的一部分。有关圆丛及其离散近似对应形式的更多理论细节，请参阅 [TP25]。

5 预处理

为了获得与 [AAC15相Ada+20]当的结果，我们采用了相同的预处理步骤，概述如下：

步骤 1： 从 Sintel 视频的每一帧中随机采集 4,000 个大小为 3×3 的图像块（总计 4.164×10^6 个）。每个 3×3 图像块最初是一个有序对矩阵，表示每个像素处流向量的水平和垂直分量：

$$\begin{pmatrix} (u_1, v_1) & (u_4, v_4) & (u_7, v_7) \\ (u_2, v_2) & (u_5, v_5) & (u_8, v_8) \\ (u_3, v_3) & (u_6, v_6) & (u_9, v_9) \end{pmatrix}$$

随后可将该矩阵展平为列向量（u_1，……，u_9，v_1，……，v_9）$^T \in \mathbb{R}^{18}$。

步骤 2： 计算样本中每个图像块的**对比度范数** $||x||_D$。这里，对比度范数定义为水平或垂直相邻像素处流向量分量之间平方差的总和（$i \sim j$）：

$$\|x\|_D^2 = \sum_{i \sim j} (u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2$$

光流块的这种对比度概念受到 [LPM03], [Car+08] 中用于范围图像块和光学图像块的类似定义，以及 [AC09]（这只是上述公式的 u 或 v 部分）的启发。可以将这个距离视为狄利克雷半范数的离散化

$$\|f\|_D^2 = \iint_{[-1,1]^2} \|\nabla f(x, y)\|^2 \, dx \, dy$$

这是像上唯一的尺度不变范数 f： $[-1, 1]^2 \to \mathbb{R}$。对比度范数的组合结构由一个 9×9 对称矩阵 D 刻画，其意义在于 $\|x\|_D^2 = u^T D u + v^T D v$ 对所有 $x =$（u，v）$^T \in \mathbb{R}^{18}$（详见 [LPM03]）。

步骤 3： 仅保留对比度范数位于前 20% 的图像块。将这些图像块归一化，使其对比度范数为 1、平均流为 0。请注意，只要给定其平均流和对比度范数，就总能由其归一化版本恢复该图像块。

步骤 4： 下采样至 2.5×10^5 个图像块，以保证计算可行性，并将该样本记为 X。请注意，X 是 [AAC15], [Ada+20]中所用样本的五倍。

步骤 5： 限制为稠密核心子集。具体而言，对于 $x \in X$，令 $\rho_k(x)$ 表示从x 到其在样本中的第 k^{th} 个最近邻的距离（以 $\mathbb{R}^{18}$ 计）。令 $X(k, q)$ 表示 X 中按密度排名前 q % 的图像块，并使用 $1/\rho_k(x)$ 作为密度估计器。我们将主要考虑稠密核心子集 $X(1500, 50)$ 和 $X(50, 60)$

（大致对应 对应于 $X(300,50)$ 和 $X(10,60)$，针对在 [AAC15] 和 [Ada+20]中使用的较小样本）.

请注意， $\mathbb{R}^{18}$ 中均值居中且对比度归一化的图像块构成一个与$\mathbb{S}^{15}$同胚的椭球体 S 。因此，我们没有理由先验地认为 X 中的很大一部分集中在一个二维或三维流形附近。

6 环面模型

在本节中，我们回顾环面模型的相关方面，以及 [Ada+20] 中的研究结果。这些内容与我们后续的研究和发现直接相关。我们指出了模型似乎与实验结果不符之处，并以此说明扩展模型的必要性。

在 [LPM03], 中，作者使用离散余弦变换（DCT）基底来对高对比度光学像和测距图像块建模：

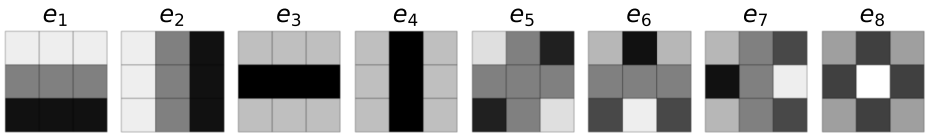


图3： 3×3 图像块的均值中心化、对比度归一化的DCT基

这些图像块构成了用于计算对比度范数的 D 矩阵的特征基。注意，常数图像块 $(1,...,1)^T \in \mathbb{R}^9$ 也是 D的一个特征向量，尽管其对比度范数为 0。根据定义，均值中心化数据位于其他特征向量张成的空间中。

用这个基来表示，针对 3×3 高对比度范围和 [Car+08] 中所描述的光学图像块的主圆模型，恰好就是由 e_1 和 e_2 张成的圆——见图2。
分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 的相应特征向量为均值中心化的光流图像块构成了一个自然基：

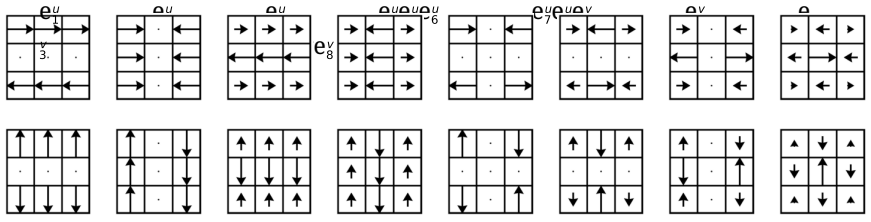


图4：光流DCT基。

使用 5×10^4 个图像块的样本量， [AAC15] 提供了证据，表明 $X(300,30)$ 在水平流圆 周围分布密集。该圆是将水平相机运动应用于主圆中的图像块后得到的。从光流DCT基的角度来看，水平流圆恰好是由 e_1^u 和 e_2^u 张成的圆。作者假设，对场景中前景与背景之间的边界施加相机平移（即高对比度测距图像块），会产生高对比度光流图像块，并且

水平平移只不过是最常见的一种。

在 [Ada+20]中，作者断言 $X(300,30)$ 实际上包含了 $\mathbb{R}^2$ 的每个一维子空间所对应的一个方向流圆，并且这些圆首尾相接形成一个环面。直观地说，每个圆对应于沿某一特定轴的相机平移（见图5）。他们提出的模型是由 e_1^u、 e_2^u、 e_1^v和 e_2^v所张成的三维球面中的一个子流形，由映射 $F\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^{18}$定义如下：

$$F(\alpha,\theta) = \cos(\theta)\left(\cos(\alpha)e_1^u + \sin(\alpha)e_2^u\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\alpha)e_1^u + \sin(\alpha)e_2^u\right) \tag{1}$$

我们将 F的像记为 $\mathcal{T}$。注意， F实际上是 $\mathcal{T}$的二重覆盖，其中 $F(\alpha+\pi,\ \theta+\pi) = F(\alpha,\ \theta)$。通过定义 $\mathbb{T}^2$到 $\mathbb{R}^{18}$的嵌入 $G(\omega,\ \theta) = F(\omega-\theta,\ \theta)$（见图 15）。

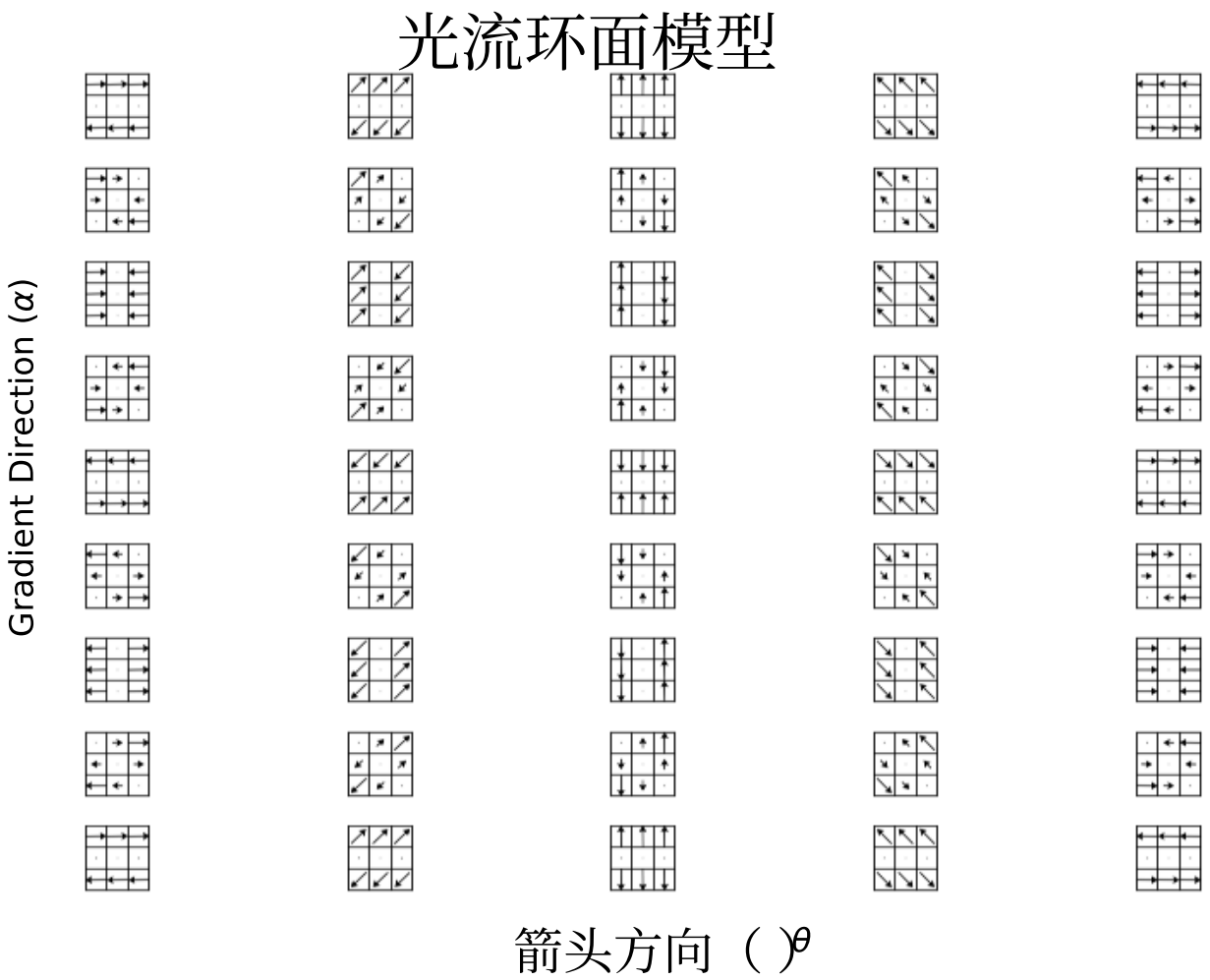


图5：所提出的光流环面模型。每一列都包含具有相同流方向的图像块。第一列和最后一列显示了水平流圆；但请注意，这两列相差 π。这反映出（θ、 α）并非 $\mathcal{T}$的全局坐标系。请与 [Ada+20]中的图7进行比较。

6.1 环面模型的证据

直接对 $X(1500,\ 30)$ 或 $X(1500,\ 50)$ 进行持久同调计算，并不能为环面的存在提供有力证据。事实上，图 6 展示了从 $X(1500,\ 30)$ 和 $X(1500,\ 50)$ 中随机抽取的 500 个点的持久图，以及从不同高斯噪声水平下的模型环面生成的若干合成样本的持久图（我们发现，在这种降采样下，结果仍然具有稳健性）。请注意，对于任一真实样本，都不存在使其贝蒂数特征呈现环面特征的显著尺度范围（即 $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 1$）。特别是，真实样本的持久图与任何含噪合成样本（即来自 $\mathcal{T}$）的持久图都不相似。

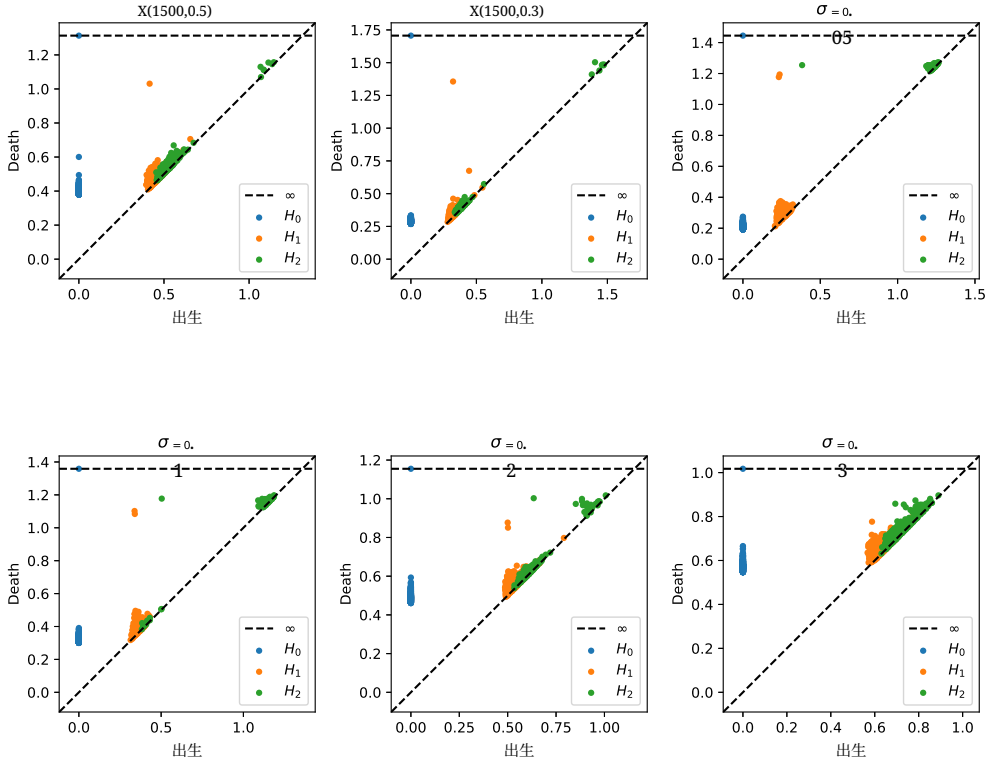


图6： X(1500,50)、 X(1500,30)以及环面模型的若干样本的持久图 $\mathcal{T}$，这些样本包含不同程度的高斯噪声

为了提供支持环面模型的证据，Adams等人引入了一个特征映射 p，它将一维线性子空间 $\mathbb{R}^2$, $p(x) \in \mathbb{RP}^1$（称为主导方向）分配给模型环面 $\mathcal{T}$ 邻域中的每个图像块 x。粗略地说， p 找出与光流图像块的箭头最共线的 $\mathbb{R}^2$ 线性子空间。具体而言， p 在 $\mathcal{T}$ 上的限制是一个纤维为 $\mathbb{S}^1$ 的纤维丛（见方法）。

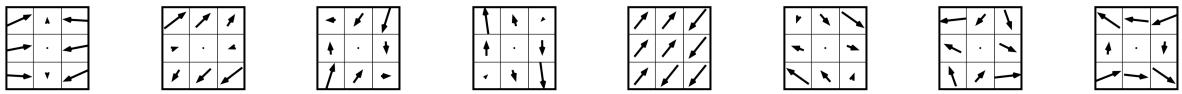


图7：一组按主导光流方向标注的高对比度光流图像块

按照 [Ada+20] 的做法，我们将 X(1500，50) 划分为六个形如 X_θ(1500，50) $= p|_{X\ (1500,\ 50)}^{-1}\left(B_{\frac{\pi}{12}}(\theta)\right)$的子集，分别对应 $\theta = \frac{k\pi}{6}$， $k = 1$，……，6；随后计算每个集合在由向量 (cos(θ)e_1^u +sin(θ)e_1^v) 和 (cos(θ) e_2^u +sin(θ)e_2^v) 张成的平面上的正交投影（取 θ 的相应值）：

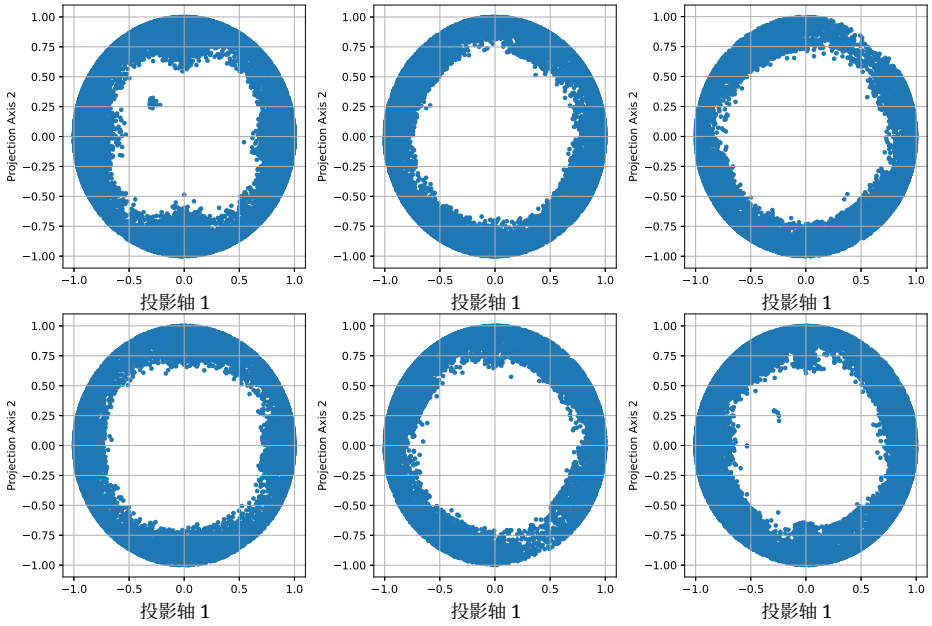


图 8：集合 $\{X_{\frac{k\pi}{6}}(1500,\ 50)\}_{k=1}^{6}$ 的平面投影

请注意，数据已进行对比度归一化，使其落在由光流DCT基张成的椭球体 $S \cong \mathbb{S}^{15}$ 上。上述投影有力地表明，每个 $X_\theta(1500,\ 50)$ 中的数据都集中在圆形 $p^{-1}(\theta$附近。 [Ada+20] 的作者还提供了之字形持久同调计算 [CS10] 作为证据，表明不同纤维中的圆形特征能够彼此兼容地拼接起来，形成纤维丛结构。然而，正如作者指出的，这一计算不足以区分环面和克莱因瓶（纤维丛全空间的两种可能整体拓扑，其底空间为 $\mathbb{RP}^1$，纤维为 $\mathbb{S}^1$），因为它没有标记或追踪局部同调生成元的相对定向。

6.2 主导方向映射 p

给定一点 $x \in S \subset \mathbb{R}^{18}$， x 的主导方向在 [Ada+20] 中被正式定义为直线$p(x) \in \mathbb{RP}^1$，该直线由矩阵 9×2 A_x 的第一个奇异向量张成；矩阵的各行是构成 x 的分量流向量 $\{(x_i, x_{i+9})\}_{i=1}^{9}$。特别地，映射 $x \mapsto p(x)$ 在 $\mathcal{T}$ 的某个邻域上连续且满射，并且对所有 $(\theta, \alpha) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 都满足 $p(F(\theta, \alpha)) = \theta$(模 π)（其中 F 是方程 (1) 中所示的 $\mathcal{T}$ 的二重覆盖）。

请注意， p（x）在 A_x 的奇异值相等时没有明确定义；当 x 的分量箭头指向不同方向时，就会出现这种情况。如果数据集中在环面模型附近（正如 [Ada+20] 中所提出的那样），那么主导方向对于任意图像块 $x \in X$（1500，50）都是有意义的测量值。然而，对于很大一部分数据，这一结论并不成立。事实上，在 S 中有许多区域的主导方向未定义。即使与某个流场图像块相关的奇异值只是近似相等，为其指定主导方向也没有明确的意义：

为了评估在 $X(1500,\ 50)$ 中，主导方向在图像块上的定义有多明确，我们用以下公式定义图像块 $x \in S$ 的**方向性**：

$$r(x) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\max(\lambda_1, \lambda_2)} \tag{2}$$



图9：来自 X(1500,50)的高对比度光流图像块样本，其主导方向基本上是任意的

其中， λ_1 和 λ_2 是 $A_x^T A_x$ 的特征值（等价地说，是 A_x的奇异值的平方）。请注意，当特征值相等时， $r(x) = 0$ ；随着特征值之差增大（或其中一个特征值为 0）， $r(x)$趋近于 1。特别地，对于 $\mathcal{T}$中的所有图像块， $r(x) = 1$ 。由于 $0 \notin S$， r 对所有 $x \in S$均定义良好且连续。

图10 展示了数据集的方向性分布 X 以及各个核心子集。可以看到，每种分布都偏向1，不过相当一部分数据的方向性明显较低。

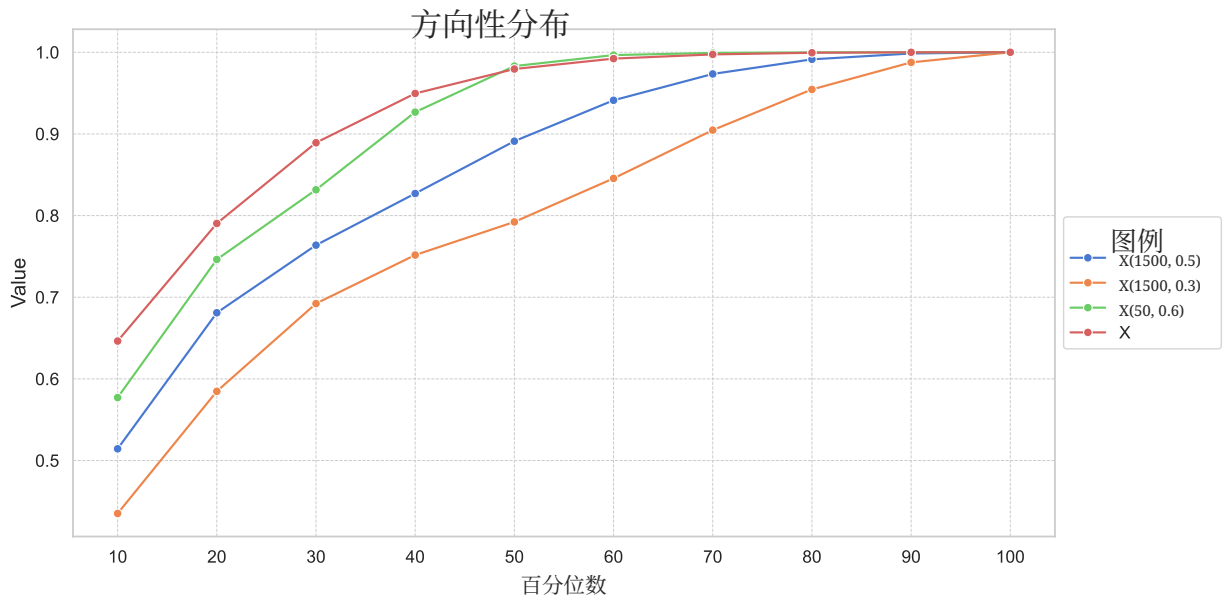


图10

尤其要注意， r 针对 X(1500,30)的百分位数图严格低于 X(1500,50)的相应图。我们得出结论：方向性较低的图像块是稠密核心子集不可或缺的组成部分，不能被忽略。

7 扩展模型

在本节中，我们为稠密核心子集提出一个扩展模型 $X(1500,\ 50)$，其中包含低方向性区域。我们证明，改进后的模型在拓扑和几何上都更忠实于数据的真实结构，并解释了为何无法通过直接的持久性计算验证环面模型（图6）。

回想一下，光流环面定义为映射 $F\colon\ \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\to\mathcal{T}\subset\mathbb{R}^{18}$ 的像（见公式（1））。我们为 $X(1500,\ 50)$提出的扩展模型包含方向性较低的图像块，是映射 $\tilde{F}\colon\ (\mathbb{D}^2/\{0\})\times\mathbb{S}^1\to\tilde{\mathcal{T}}\subset\mathbb{R}^{18}$ 的像，该映射定义为

$$\tilde{F}(r,\alpha,\theta)=\cos\left(\tau(r)\right)F(\alpha,\theta)+\sin\left(\tau(r)\right)F^{\perp}(\alpha,\theta) \tag{3}$$

其中

$$F^{\perp}(\alpha,\theta)=F\left(\alpha+\frac{\pi}{2},\theta-\frac{\pi}{2}\right),\qquad\qquad \tau(r)=\cos^{-1}\left((2-r)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

对于所有 $r\in(0,1]$ 和 $\theta,\ \alpha\in\mathbb{S}^1$。

˜命题 1： 映射 F 具有以下关键性质：

˜1. 对于所有 $r,\ \alpha,\ \theta$，图像块 $F(r,\ \alpha,\ \theta)$ 的均值为 0，对比度范数为 1，主导方向为 θ（模 π），方向性为 r。

˜ ˜2. $F(1,\ \alpha,\ \theta)=F(\alpha,\ \theta)$ 对所有 $\alpha,\ \theta$ 均成立，因此 $F|_{\mathbb{T}^2}=F$。

3. $\tilde{F}$ $\tilde{\mathcal{T}}$ $\tilde{F}\ r\ \alpha+\pi\ \theta+\pi\ =\tilde{F}\ r\ \alpha\ \theta$ $\tilde{G}$ $\mathbb{RP}^1\times\ 0\ 1]\times$是其像的二重覆盖，其中(, ,)(, ,)。因此，映射 $\mathbb{S}^1\to\tilde{\mathcal{T}}$ $\tilde{G}\ r\ \omega\ \theta\ =\tilde{F}\ r\ \omega-\theta\ \theta$: (, 由(, ,)(, ,)定义，是一个同胚。

4. $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 是在 $F(\alpha,\ \theta)$ 处相对于由$\{e_1^u,e_2^u,e_1^v,e_2^v\}$张成的三维球面的超曲面 $\mathcal{T}$ 的内向单位法向量。

5. 对于所有 $\alpha,\ \theta$，我们有

$$\lim_{r\to0}\tilde{F}(r,\alpha,\theta)=\cos(\alpha+\theta)\left(\frac{e_1^u-e_2^v}{\sqrt{2}}\right)+\sin(\alpha+\theta)\left(\frac{e_2^u+e_1^v}{\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

证明。 见附录A.1。 □

直观地说，我们的模型将高对比度光流图像块的真值流形刻画为一个去除了中心圆的实心环面，其边界为 $\mathcal{T}$。特别地，方向性在几何上表现为垂直于 $\mathcal{T}$ 的径向自由度，而该自由度被主导方向映射 p 压缩。因此，纤维丛 $p\colon\ \tilde{\mathcal{T}}\to\mathbb{RP}^1$ 的纤维同胚于圆柱而非圆；从依赖环境度量的持久同调角度来看，全空间呈现为圆而非环面。

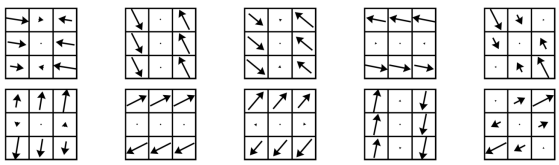
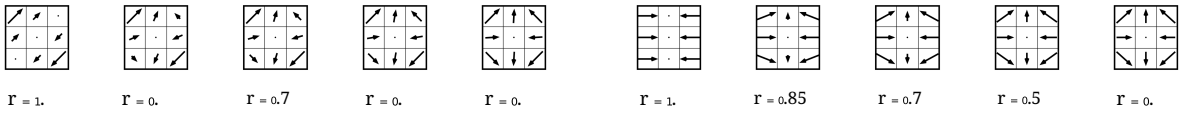


图 11：各种 $(\alpha,\ \theta)$ 对对应的 $F(\alpha,\ \theta)$（上）和 $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$（下）。

请注意， $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 是在 $\mathcal{T}$中通过将主导方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，并将梯度方向向相反方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，从 $F(\alpha,\ \theta)$ 得到的图像块（只要旋转方向相反，最终结果就相同）。

方向性较低的图像块可通过按不同比例混合光流环面图块 $F(\alpha,\ \theta)$ 及其垂直对应项 $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 得到。如果将 $F(\alpha,\ \theta)$ 和$F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 按相同比例混合，我们便得到一个方向性为零的图像块：



(a) $\alpha_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$　　(b) $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = 0$

图12：当 r 取值递减时，形如 $F(r,\ \alpha_0,\ \theta_0)$ 的模型光流图像块。注意，$F(1,\ \alpha_0,\ \theta_0) = F(\alpha_0,\ \theta_0)$ 是一个光流环面图像块，而当 $r \to 0$ 时，其极限图像块仅取决于 α_0 与 θ_0 之和。

命题 1 的性质 5 表明，低方向性的图像块集中在单个圆周附近。事实上，当限制到方向性越来越低的图像块时，p 的每个纤维都会收缩到这个圆周：

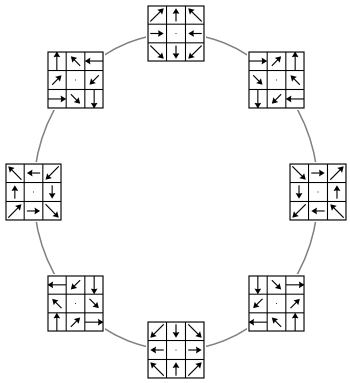


图13：所提出的扩展模型中低方向性图像块的极限圆周

7.1 扩展模型的证据

为验证我们的模型，我们采用了 [TP25] 中提出的流程，以证明 $X(1500,\ 50)$ 中数据所依据的丛结构具有整体平凡性，并构造整体参数化。我们对该流程进行调整以适用于当前情境，具体总结如下：

1. **建立一个开覆盖：**选择 N 个等间距的地标点

$$\left\{l_j = \left[e^{\frac{\pi i}{N} j}\right]\right\}_{j=1}^{N} \subset \mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1/z \sim -z$$

并用开球 $\mathcal{U} = \{U_j = B_r(l_j)\}_{j=1}^{N}$覆盖 $\mathbb{RP}^1$（即长度为 $\arcsin(r)$ 的圆弧），其中$r = \sin\left(\frac{\pi}{2N}(1+c)\right)$，其中某个常数为 $0 < c \leq \frac{1}{2}$。令

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \left\{\sigma \subseteq \{1,\ldots,N\} \ :\ \bigcap_{j\in\sigma} U_j \neq \emptyset\right\}$$

为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的神经——注意$c \leq \frac{1}{2}$ 蕴含 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$不含2-单形。

2. **构造离散近似局部平凡化：** 计算 $X_j = X \cap p^{-1}(U_j),\ j = 1, \ldots, N$的一维持久上同调，并使用来自 [Per21] 的稀疏圆坐标算法构造映射 $\{f_j : X_j \to \mathbb{S}^1\}_{j=1}^N$，以刻画每个 X_j最显著的一维持久上同调类。

3. **计算离散近似转移映射：** 对于每个 $(jk) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$，使用普罗克鲁斯特对齐 [Sch66] 计算矩阵 $\Omega_{jk} \in O(2)$，使 $\sum_{x \in X_j \cap X_k} |f_j(x) - \Omega_{jk} f_k(x)|^2$最小。该族 $\Omega = \{\Omega_{jk}\}_{(jk)\in\mathcal{N}(\mathcal{U})}$ 可解释为局部常值的 Čech $O(2)$-余循环 $\Omega \in \check{Z}^1\left(\mathcal{U};\ O(2)\right)$ 它表示 $\mathbb{RP}^1$ 上的一个圆丛（每个余链都是余循环，因为 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 不含 2-单形）。相关定义见[TP25]。

4. 检验可定向性：计算方向（即 Stiefel-Whitney）类代表元$\omega = \{\omega_{jk} = \det(\Omega_{jk})\}_{(jk)\in\mathcal{N}(\mathcal{U})} \in Z^1(\mathcal{N}(\mathcal{U}); \mathbb{Z}_2)$，其中 $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ 视为一个乘法群。根据 [TP25]，中的命题 2.13，由 Ω 表示的 $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ 上的圆丛同构于环面或克莱因瓶，并且 Ω 表示环面当且仅当 ω 是单纯余边界。也就是说，存在一个集合 $\tau = \{\tau_j\}_{j=1}^N, \tau_j \in \mathbb{Z}_2$，使得对于所有 $(jk) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ 均有 $\omega_{jk} = \tau_j \tau_k$。如果存在 τ，则称其为 ω的势。

5. 同步局部坐标：如果 ω 是余边界（正如我们预期的那样），那么 Ω 也必定是近似余边界，因此我们可以对齐局部坐标系，构造全局环面坐标系。事实上，我们使用 Singer 方法 [WS13] 构造 Ω 的离散近似势函数 $\mu = \{\mu_j \in O(2)\}_{j=1}^N$ ——也就是说，使得 $\Omega_{jk} \approx \mu_j^T \mu_k$ ——并选取一个从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解 $\{\phi_j : U_j \to \mathbb{R}\}_{j=1}^N$。对于 $1 \le j \le N$ 和 $x \in X_j$，令 $\tilde{f}_j(x) \in \mathbb{S}^1$ 为 $\{\mu_j f_k(x)\}_{k=1}^N \subset \mathbb{S}^1$ 的加权 Karcher 均值 [Kar77]，权重为 $\{\phi_k \circ p(x)\}_{k=1}^N$（注意，当 $x \notin X_k$ 时，$\mu_k f_k(x)$ 的权重设为 0）。由于各个 f_j 在交集 $X_j \cap X_k$ 上一致，它们便组合成全局平凡化映射 $F: X \to \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{S}^1$，其定义为：当某个 j 满足 $x \in X_j$ 时，$F(x) = (p(x),\ \tilde{f}_j(x))$。

有关上述过程背后数学理论的详细信息，请参阅我们关于离散近似圆丛的配套论文 [TP25]。

7.2 结果

对于我们的开覆盖，我们选择了 $N = 16$，以确保每个 U_j 足够小，使得 $X_j = X \cap p^{-1}(U_j)$ 可以被视为一个“纤维”，同时又足够大，使每个这样的集合都包含足够多的元素以供分析。同样，我们选择了 $c = \frac{1}{2}$，以确保开集之间的双重交集尽可能大，同时不产生三重交集。

图 14 展示了开覆盖 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 的神经的可视化图像 $\mathcal{U}$。正如预期的那样，我们发现 $\omega = \det_*(\Omega)$ 是一个余边界。

图15和16 展示了低方向性与高方向性的坐标化补丁样本。请注意，低方向性补丁图的每一列都与图13中的圆相同，符合预期。高方向性补丁图类似于图5，但纤维坐标 f 与$\alpha - \theta$（模 2π）相关，而非与 α相关，因此沿底空间遍历时，流圆会发生旋转。这是合理的预期，因为我们知道 α 不能全局用作纤维坐标（见图5）。

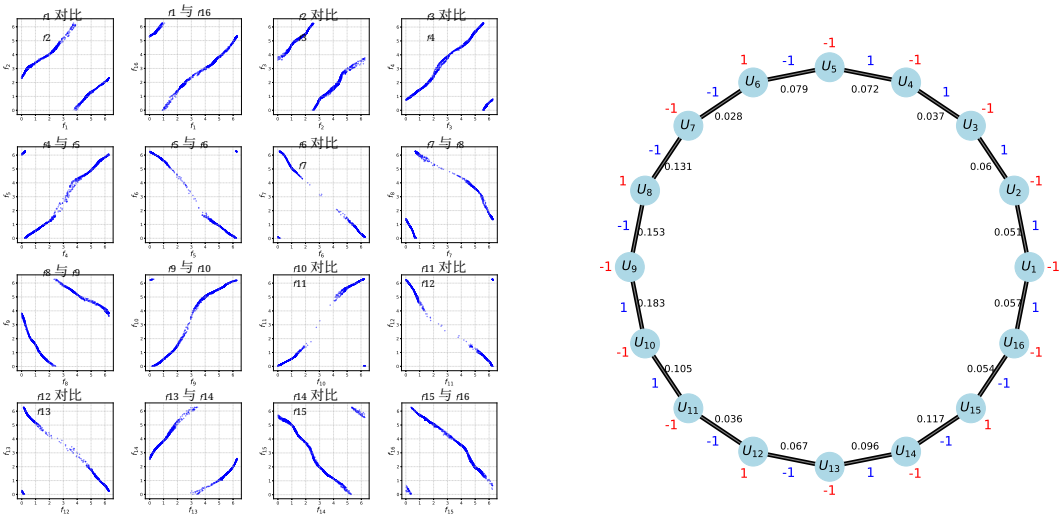


图14：左：数据计算得到的离散近似局部平凡化 $\{f_j$ 在交集 $X_j \cap X_k$ 上的相关性： $X_j \to \mathbb{S}^1\}_{j=1}^{16}$。右：$\mathbb{RP}^1$ 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1}^{16}$ 的神经。每条边（jk） $\in \mathcal{N}$（$\mathcal{U}$）均标注了平均角度对齐误差 $\frac{1}{\#(X_j \cap X_k)} \sum_{x \in X_j \cap X_k} |f_j(x) - \Omega_{jk} f_k(x)|^2$ of 对应交集上的局部平凡化。斯蒂费尔-惠特尼类代表元 $\omega = \det_*(\Omega)$的连通分量 ω_{jk} 以蓝色显示， ω 的势 $\tau = \{\tau_j\}_{j=1}^{N}$ 以红色显示。

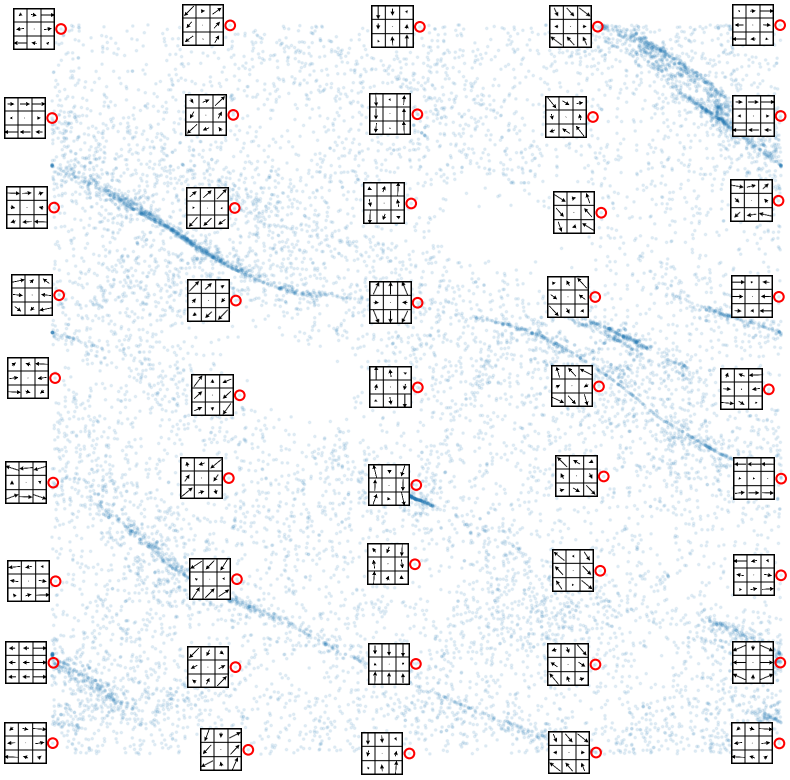


图15：来自 $X(1500,\ 50)$ 的一组坐标化光流图像块，具有高方向性，按主导方向（x轴）和指定纤维坐标（y轴）排列。请注意，指定纤维坐标与 $\theta - \alpha$ 在图 5 中的相关性很强。

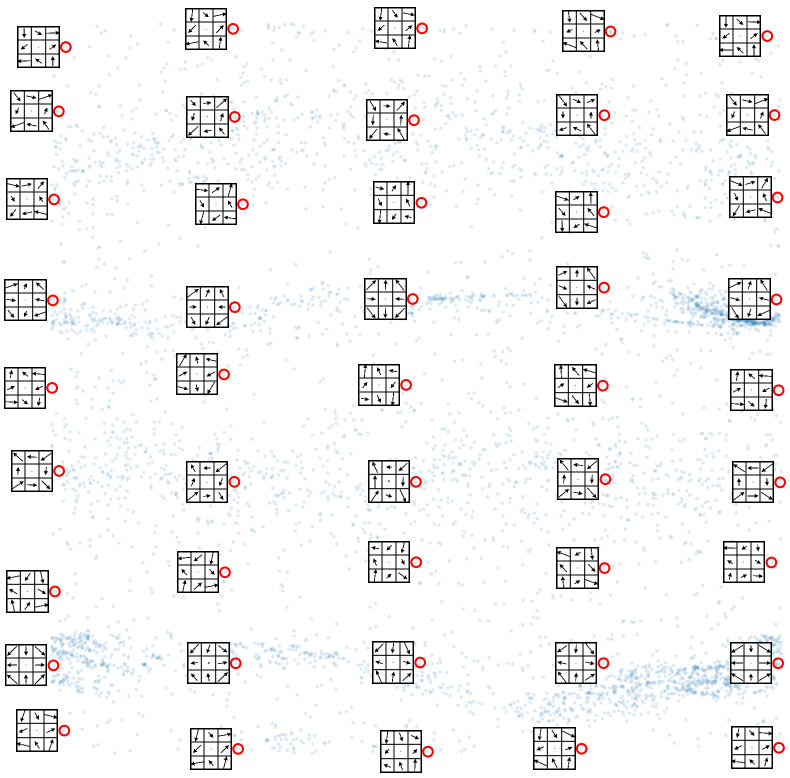


图16：来自 $X(1500,\ 50)$ 的一组坐标化光流块，方向性为 $r < 0.7$，按照主导方向（x 轴）和指定纤维坐标（y 轴）排列。可以看到，每一列大致都是图13所示低方向性圆的一个副本。13。

7.3 解释

我们将 [Ada+20] 中的光流环面模型加以扩展，以反映稠密核心子集 $X(1500,\ 50)$ 的几何与拓扑，并捕捉种类更丰富且频繁出现的图像块。然而，高对比度数据中低方向性图像块占比较高，究竟是预处理选择不当造成的假象，还是一种有意义的现象，目前尚不清楚。事实上，光流块的对比度范数不像光学范围和图像块的对比度范数那样容易解释。下一节将说明这些不同的高对比度图像块往往出现在 Sintel 视频中的哪些位置。

8 BinaryStepEdge圆

在本节中，我们使用更精细的密度估计器，在高对比度 3×3 光流图像块中识别出一组丰富的额外稠密核心子集，这些图像块来自 [但+12]。围绕这组结构集中的图像块几乎涵盖了按对比度范数排名前 1% 的全部数据，这表明它们对于计算机视觉任务可能具有核心重要性。此外，这些额外结构的存在表明，更大的光流图像块空间可能沿着一种连通流形结构分布，而这种结构并未被 3×3 图像块完全编码。

使用相同的样本 $2.5 \cdot 10^5$ 高对比度图像块，我们考虑稠密核心子集 $X(50,\ 60)$（大致相当于较小样本量下的 $X(10,\ 60)$，该样本量用于 [Ada+20]）。图10 显示， $X(50,\ 60)$的方向性分布明显高于 $X(1500,\ 30)$和 $X(1500,\ 50)$的分布（并且更接近全部 X的分布）。此后我们采用相同的主导方向

将映射作为 特征映射用于我们的分析，并采用相同的开覆盖 $\mathcal{U}$， $\mathbb{RP}^1$ 与第7.2节中使用的相同 .

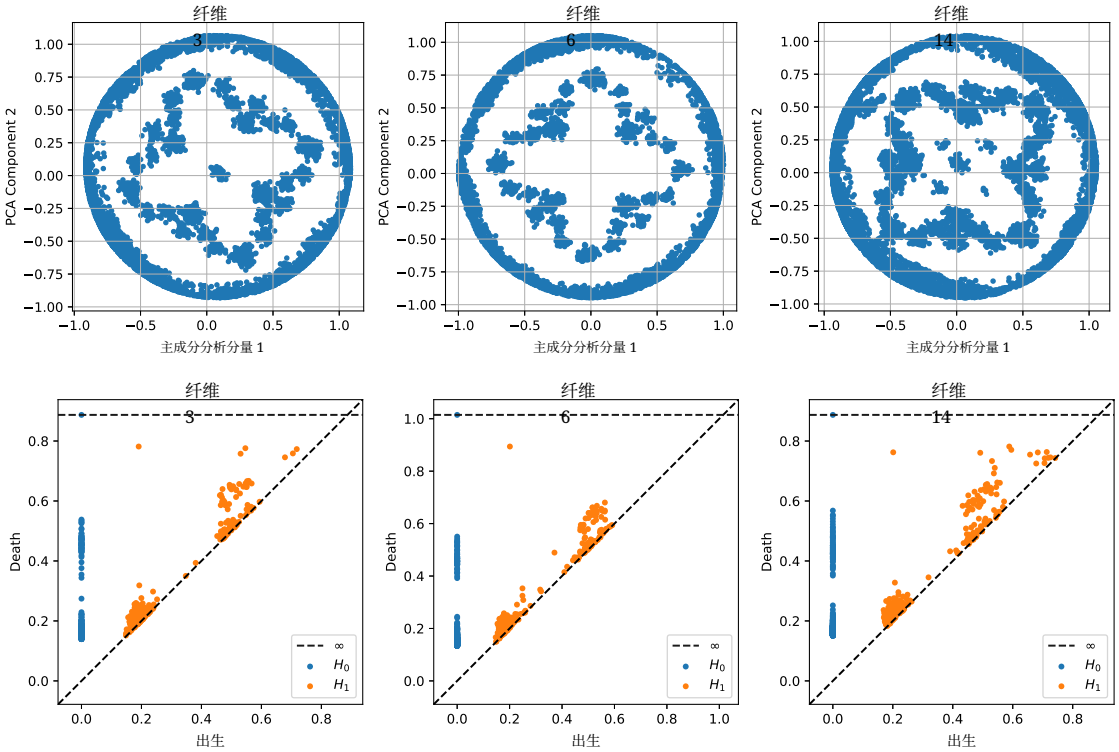


图17：(a) $X(50, 60)$ 的若干纤维的主成分分析投影，以及(b) 这些纤维的持久图。

图17 展示了若干纤维的主成分分析投影 $X_j = X \cap p^{-1}(U_j)$及其持久图。除了共同的圆形特征外，这些投影还表明，每个 X_j 都包含一系列彼此分离的丝状簇，它们大致按照相同的显著模式排列。持久图显示，在一个长度尺度区间 $\alpha = 0.3$ 内，每个 $X_j^{(\alpha)}$ 中的连通分支数量保持稳定，这表明在该区间之后仍然存在的零维类对应于有意义的簇。为进一步探究，我们进行了以下实验：

1. **对每个 X_j运行聚类：使用** DBSCAN [估计+96]，以及 $\varepsilon = 0.3$ 和最小邻域大小 5，得到映射 $\{c_j : X_j \to \mathbb{Z}\}_{j=1}^{16}$，这些映射为每个 X_j中的点分配簇标签。令$X_j^s = c_j^{-1}(s)$表示每个 $s \in \mathbb{Z}$ 和 $1 \le j \le 16$。
2. **根据局部簇构建图：** 当且仅当 $X_j^s \cap X_k^t \neq \emptyset$ 时定义 $X_j^s \sim X_k^t$（特别地，$X_j^s \sim X_k^t$ 意味着 $U_j \cap U_k \neq \emptyset$），并令 G 为顶点集$\{X_j^s\}_{j,\ s}$ 上的（无向）图，其边由该关系定义。3. **计算全局簇：** 计算 G的连通分支，并令 $c : X \to \mathbb{Z}$ 为一个映射，它将每个 $x \in X$ 映射到 G 的连通分支，该连通分支包含包含 x的集合。我们将 c的水平集解释为数据集 X的全局簇。

8.1 结果与解释

图 18 展示了我们的分析结果概要。请注意，每个纤维所分配的局部簇数量大致相同，众数为 57。对齐后，这些簇组织成总计 38 个全局分量，其中一个包含了绝大多数数据。我们将 G 的相关分量记为 G_0。在其余分量中，有 23 个次级分量，各自恰好由 32 个局部簇组成——是我们的覆盖中开集数量的两倍。这些分量包含了最大分量未涵盖的数据中超过 90%。其中，按基数计最大的四个分量大小大致相同，其余分量的大小约为它们的三分之一。

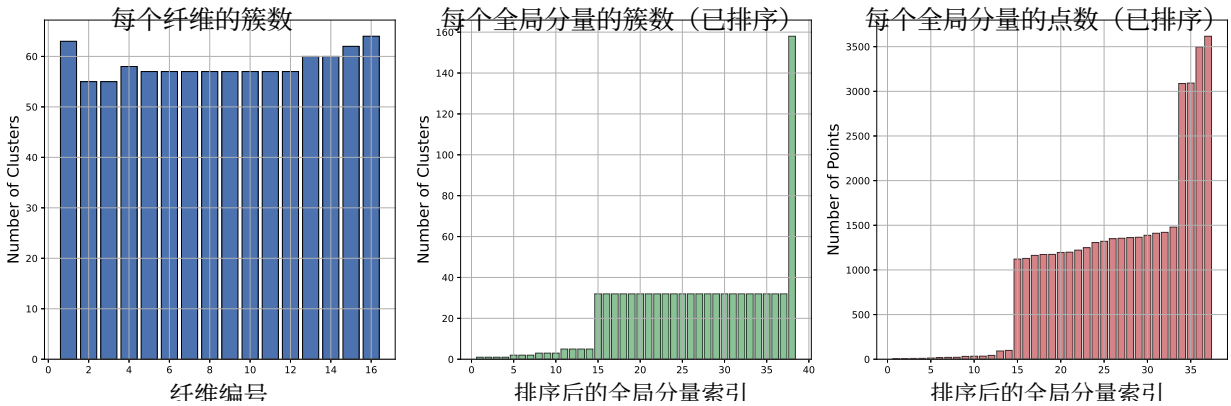


图 18：上述聚类实验的结果。注：为便于阅读，最右侧图中省略了最大连通分量的基数 G_0 of G 。

纤维结构： 图 19 展示了若干 X_j 的二维投影，颜色表示 DBSCAN 分配的簇标签。请注意，二维投影中的每个表观“丝状结构”实际上由两个不同的簇组成，它们以对跖点为中心，位于 $\mathbb{S}^{15}$ （见图 29）。

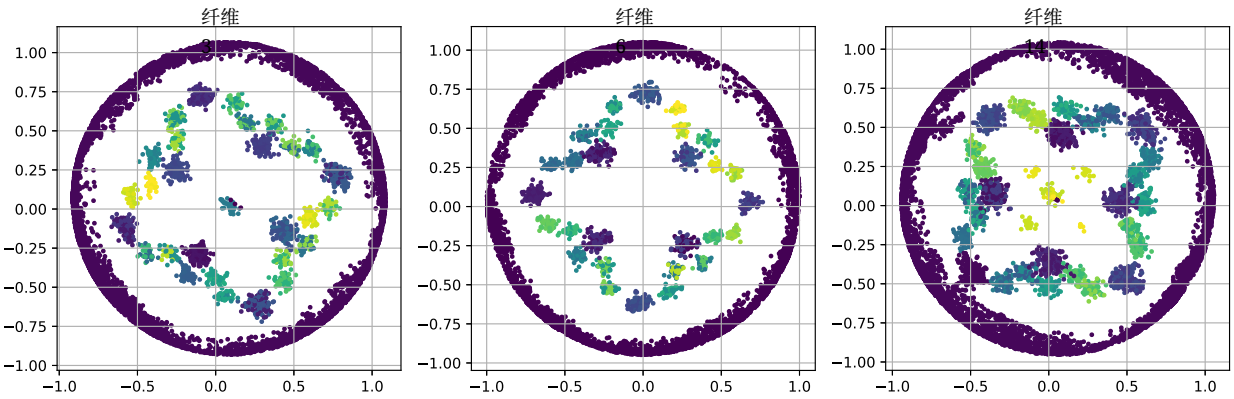


图 19

图 20 展示了其中一根纤维的部分局部丝状簇中的代表元图像块。请注意，每个簇都对应于 56 种可能的 3×3 二值阶跃边缘范围图像块中的一种，这些图像块沿主流轴应用了相机平移（所有二值阶跃边缘范围图像块的列表请参见附录 A.2 ）。另一方面，有两种不同的识别方式；如果我们选择

与该纤维相关的 $\mathbb{RP}^1$ 中主导方向（轴）的一个方向 $\hat{n} \in \mathbb{S}^1$，则沿方向 $\hat{n}$ 对其中一个二值阶跃边缘范围图像块应用相机平移（然后进行归一化），即可获得每个丝状簇中的平均图像块。如果选择相反的方向，则每个丝状簇都会对应于相反的二值范围图像块。无论如何，请注意这些图像块具有高方向性，因此主导方向是一项有意义的测量。

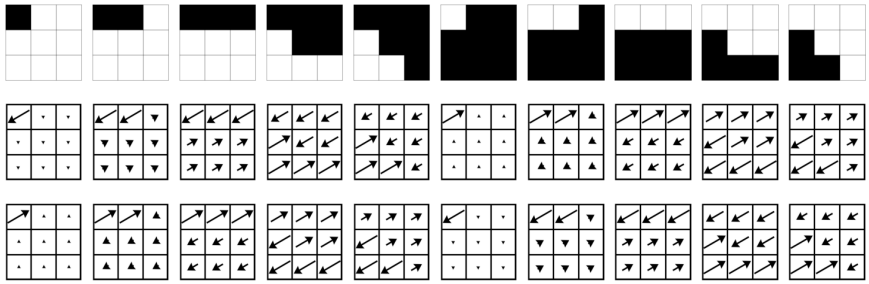


图20：在纤维 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 中识别二值阶跃边缘流场图像块及其对应二值阶跃边缘范围斑块的两种方法

全局结构： 图21 展示了构成G_1（ G的较大次级分量之一）中32个局部簇各自的代表性图像块。请注意，每个图像块都有相同的单个“激活”连通分量流向量，并且沿着 G_1移动时，该向量的方向会发生旋转。当激活向量完成一整圈旋转时， G_1 会遍历底空间两次，与每个纤维 X_j 相交于两个不同的位置，从而形成 $\mathbb{RP}^1$的二重覆盖。

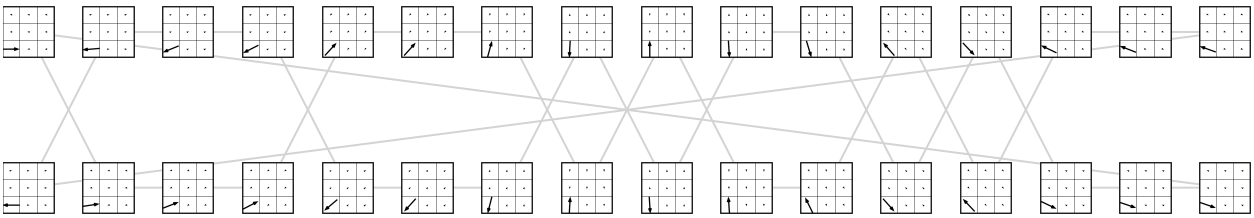


图21： G的一个连通分支的可视化图。每个节点都标注了对应局部簇中的一个图像块；边表示局部簇之间的交集。同一列中的图像块表示覆盖 $\{U_j\}_{j=1}^{16}$ 中同一开集上的局部簇，该覆盖属于 $\mathbb{RP}^1$。

鉴于这些结果，我们可以预期， G 的23个次级分量各自都有一个显著的圆形特征，事实确实如此。我们通过持久同调验证了这一点，并使用稀疏圆坐标算法对每个分量进行了参数化。图22展示了若干分量的结果。

缺失圆： 23 个次级分量中的每一个 G 都对应于一对沿所有可能方向施加相机运动的二值范围图像块。这表明总数应为 28。另一方面，图 18 显示， G_0 由 158 个局部簇组成。由于扩展光流环面是连通的，我们预期 G （按基数计）中最大的连通分支在每个纤维中大致包含一个局部簇。

经过进一步研究，我们发现，在每条纤维中， G_0 都包含一个较大的局部簇和大约 10 个小得多的局部簇。事实上，这些局部簇似乎组织成近乎独立的子分量，只在少数几个位置相连（见图 24b）。这明显表明，我们“缺失”的圆与扩展流环面缠绕在了一起。

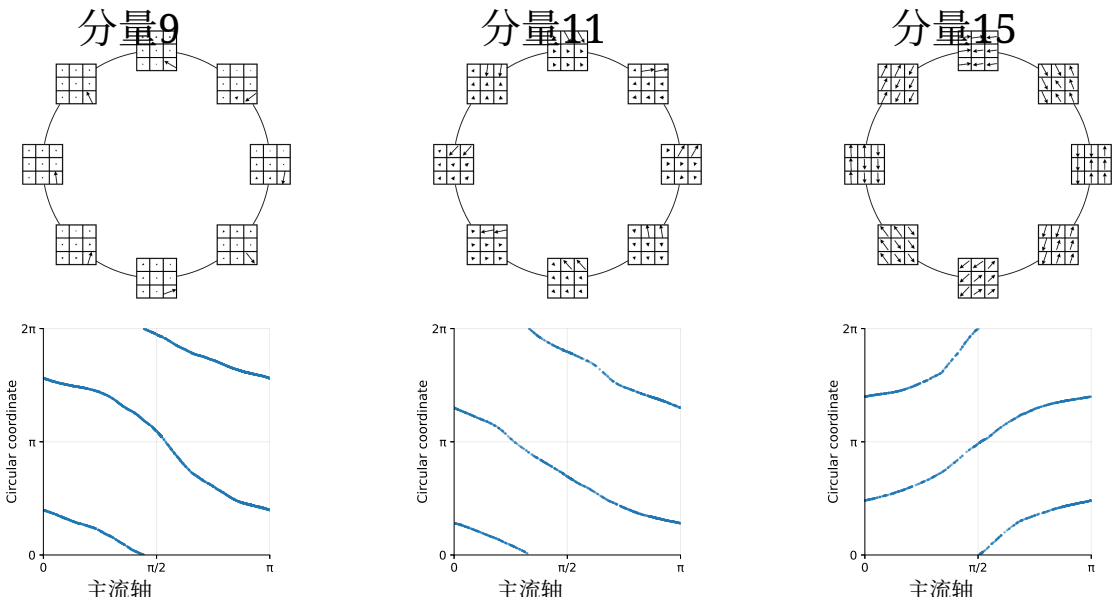


图 22：来自 G 的三个全局连通分量的示例图像块，根据计算所得的圆坐标放置于 $\mathbb{S}^1$ 中。

移除边： 为了理清主分量的各个部分，我们按照以下公式为 G 的每条边赋予权重

$$w(e_{jk}) = \frac{|X_j \cap X_k|}{\max\left(|X_j|, |X_k|\right)} \tag{5}$$

请注意，与仅包含少量点的交集相对应的边会被赋予较小的权重。与大小差异悬殊的局部簇之交集相对应的边也会被赋予较小的权重，因为上述公式中的分子不会超过较小集合的基数。

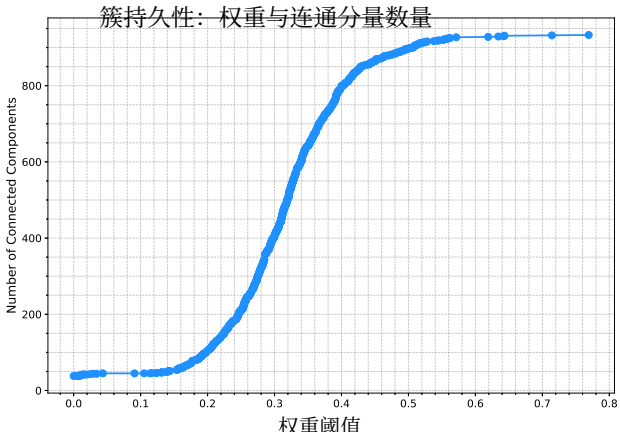
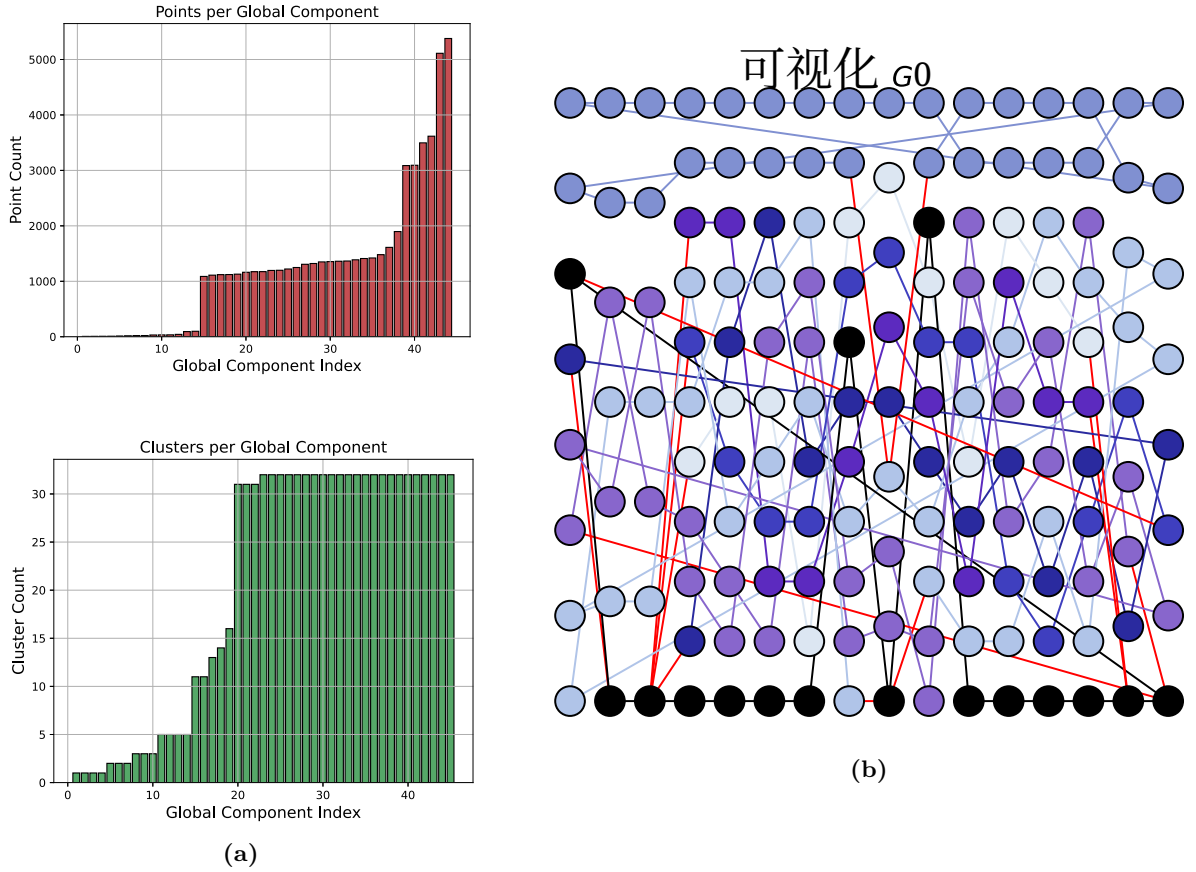


图23

定义 $w(v_j) = \infty$ 对于每个节点 v_j，我们通过 G 得到 $\{G^{(t)} = w^{-1}(t, \infty]\}$的一个滤过。图23 展示了 $G^{(t)}$ 的连通分支数量如何随 t变化。注意，对于较小的 t，连通分支的数量

相当稳定。特别是，在 0.07 附近存在一段权重区间，在此区间内连通分量的数量没有变化，这可能表明权重低于该阈值的边是由噪声造成的。

移除权重低于 0 G 的 14 条边。07 后，剩余的图 $G^{(0.07)}$ 有 45 个连通分支，其中 27 个具有适用于稀疏圆坐标算法的一维持久性类。我们确认这些连通分支对应于扩展光流环面和 28 个预期二值阶跃边缘圆中的 26 个。与 G不同， $G^{(0.07)}$ 按基数最大的主连通分量并未包含异常多的局部簇（见 24a）——事实上，每个纤维中恰好包含一个局部簇，在图 24b）中以黑色节点表示。



(a) (b)

图24：(a) $G^{(0.07)}$连通分支的概览。(b) G中最大连通分支的可视化。每个节点代表一个局部簇，每条边代表一个交集。节点根据其在完全子图 $G^{(0.07)}$中的连通分支着色。对应于（扩展）光流环面数据的节点以黑色显示。未出现在 $G^{(0.07)}$ 中的边以红色显示。

请注意，我们找回了五个“缺失圆”中的三个，其中两个的基数都明显大于其他圆形分量（尽管远不及主连通分量那么大）。这些较大的圆对应于水平线性二进制阶跃边缘块。

圆片段： $G^{(0.07)}$ 剩下的 18 个连通分支均未表现出可作为稀疏圆坐标算法输入的一维持久性类。另一方面，我们发现

有四个连通分量，其基数与某些较小的圆形分量相当，并且包含了尚未计入的数据中 90% 以上。图25a 展示了配对连通分量并集的持久图，清楚地表明这四个连通分量各自大约构成了一个缺失圆的一半。为了确认这一点，我们使用稀疏圆坐标算法对每一对进行参数化——结果如图 25b 所示。

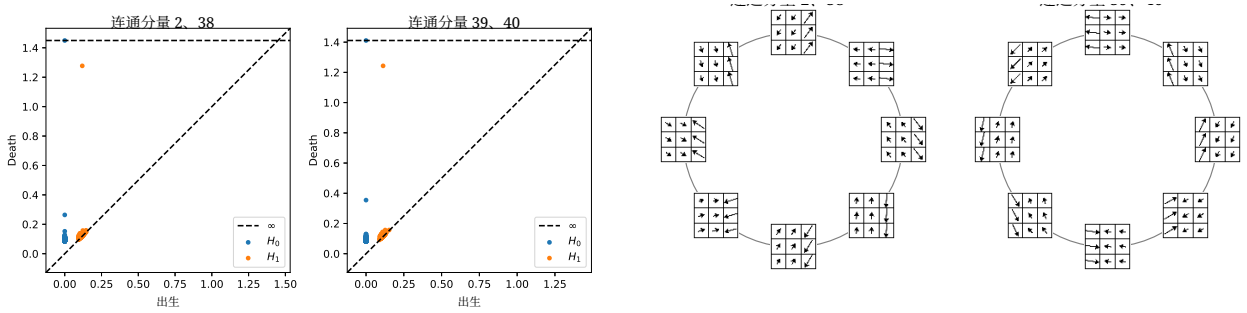


图25：(a) $G^{(0.07)}$的连通分量对 $\{2, 38\}$ 和 $\{39, 40\}$ 的并集各自对应的持久图。每个并集在连通分量合并并形成单环之前都彼此断开，此时的长度尺度约为 0.3。(b) 从每个连通分量对中选取的样本图像块，按照指定的圆坐标排列。

离群斑块： 主连通分量（即扩展流环面）和丝状圆几乎涵盖了所有的 $X(50{,}60)$。从图 19的投影中可以看到，数据中的少数离群图像块也按一种显著的模式组织成局部簇，不过这些额外的簇只存在于部分较密集的纤维中。

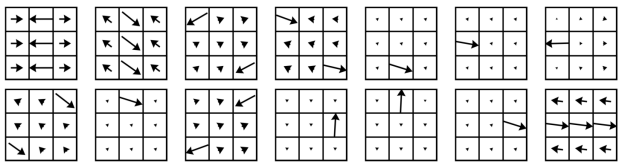


图26

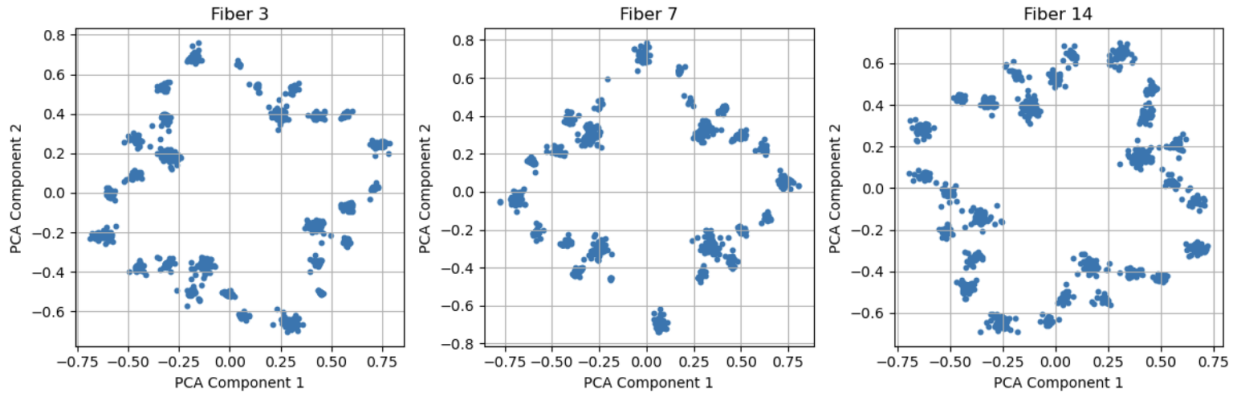
图 26 展示了离群簇中具有代表性的一组图像块。只有一个或两个活跃分量的图像块，显然对应于罕见／异常的二值范围图像块（相机运动沿着较常见的主导方向之一施加）。原则上，可以设想这些图像块成对对应于完整的圆形分量，正如我们在其他丝状体中看到的那样。其余离群点则对应于具有二次梯度的测距图像块。具体而言，这些图像块呈现以下形式

$$P(s,t) = \cos(t)\left(\cos(s)e_3^u + \sin(s)e_4^u\right) + \sin(t)\left(\cos(s)e_3^v + \sin(s)e_4^v\right)$$

其中 e_3^u， e_4^u， e_3^v， e_3^v 表示水平与垂直光流离散余弦变换基向量（见图4）。具有二次梯度的高对比度光学图像块是克莱因瓶模型的核心，该模型描述于 [Car+08]。同样，人们可以设想一个如上所述进行参数化的完整次级光流环面，甚至是在线性梯度与二次梯度之间插值的光流环面族。

8.2 解释

我们的研究结果表明，3×3高对比度光流图像块空间的一个稠密核心子集集中在一族圆周围，每一圆对应于一对施加了相机运动的二值阶跃边缘范围块。这些丝状圆中图像块的原始对比度范数通常远高于扩展光流环面附近图像块的对比度范数。事实上，若将注意力限制于按对比度范数计的前1%图像块，则几乎全部数据都集中在这些丝状圆周围——见图27。这在直观上是合理的，因为与主光流环面的线性梯度图像块相比，二值图像块的对比度范数必然往往更高。



~ ~图27： $X(30,\ 80)$ 的纤维的主成分分析投影（其中 X 表示我们~高对比度样本 X中排名前 5% 的图像块。因此， X 表示按对比度范数排名前 1% 的所有光流图像块）。

据观察，对比度范数排名前 1% 的光流图像块往往出现在运动边界处，而排名前 20% 的图像块则可能出现在图像对比度较高的运动物体附近（例如头发或纹理表面——见图28）。这表明，二值光流图像块可能与计算机视觉任务尤为相关。



图28：Sintel 视频中的三帧，圆点标示了我们样本中高对比度图像块的原始位置。深紫色圆点表示按对比度范数排名前 20% 的图像块；浅蓝色圆点表示排名前 1% 的图像块。

连通模型：图29展示了我们扩展模型中一个纤维的布局。该模型基于 3 x 3 高对比度光流数据集（不包括主光流环面附近方向性较低的图像块）。中心圆表示光流环面的一个切片，部分二值光流图像块显示在边界圆上（它们在 $\mathbb{S}^{15}$ 中互为对跖点，因此在主成分分析投影中看起来重叠在一起）。数据集中属于同一全局圆形簇的二值图像块以颜色相同的边框标示。

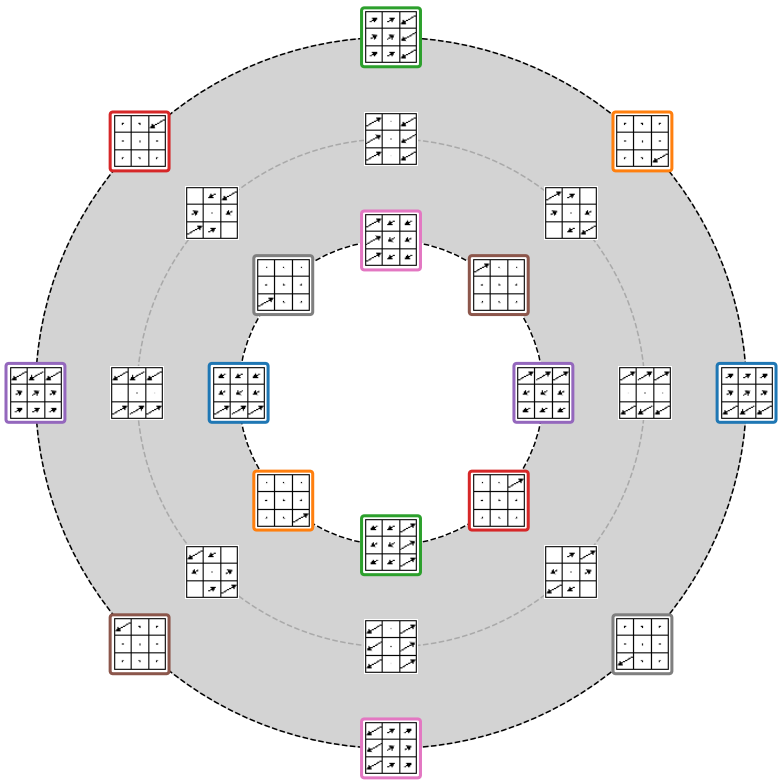


图29

我们的分析表明，只有中心光流圆以及每个二值图像块周围的小区域是稠密的。然而，类比 [LPM03], ，可以设想一种单一的连续流形结构，它很可能会出现在尺寸较大的图像块中——通过对测距图像块的阶跃边缘环带模型中的图像块施加相机均匀平移，可得到一个由环带构成的参数化族（见第 2 节）。这个流形 $\mathcal{M}$ 与光流环面同伦等价，不过（$\mathcal{M}$，p，$\mathbb{RP}^1$）作为具有环带纤维的纤维丛，在拓扑上并不平凡。等价地，也可以将 $\mathcal{M}$ 视为阿 Adams光流环面上一个不可定向线丛的圆盘丛的全空间 $\mathcal{T}$。正如莫比乌斯带的边界是一个圆，$\mathcal{M}$ 的边界由一个环面构成，而 $p|_{\partial\mathcal{M}}$ 的每个纤维都是一对 圆；如图 29所示，二值阶跃边缘图像块集中在 $\partial\mathcal{M}$附近；沿底空间移动时，每个纤维中的边界圆会互换。

事实上，$p|_{\partial\mathcal{M}}$ 提升为映射 $\mathring{p}$：$\partial\mathcal{M} \to \mathbb{S}^1$，该映射区分了每个图像块的主导光流方向；此映射的纤维与 $\mathbb{S}^1$ 同胚，并且（$\partial\mathcal{M}$，$\mathring{p}$，$\mathbb{S}^1$）是 $\mathbb{S}^1$ 上的平凡圆丛。作为对上述连续统模型的证据，我们计算了从所识别的 28 个阶跃边缘圆 $X_{\text{step}} \subset X(50, 60)$ 中各图像块的提升的光流方向，大致构造出了一个离散近似圆丛

$(X_{\text{step}},\ \mathring{p},\ \mathbb{S}^1)$ 在 [TP25] 的意义下。使用第 7.1 节所概述的相同流程，我们确认了该丛的整体平凡性，随后为 X_{step} 构造了一个全局环面坐标系；图 30 展示了部分坐标化图像块，清晰地反映出 $\partial\mathcal{M}$ 的底层结构。

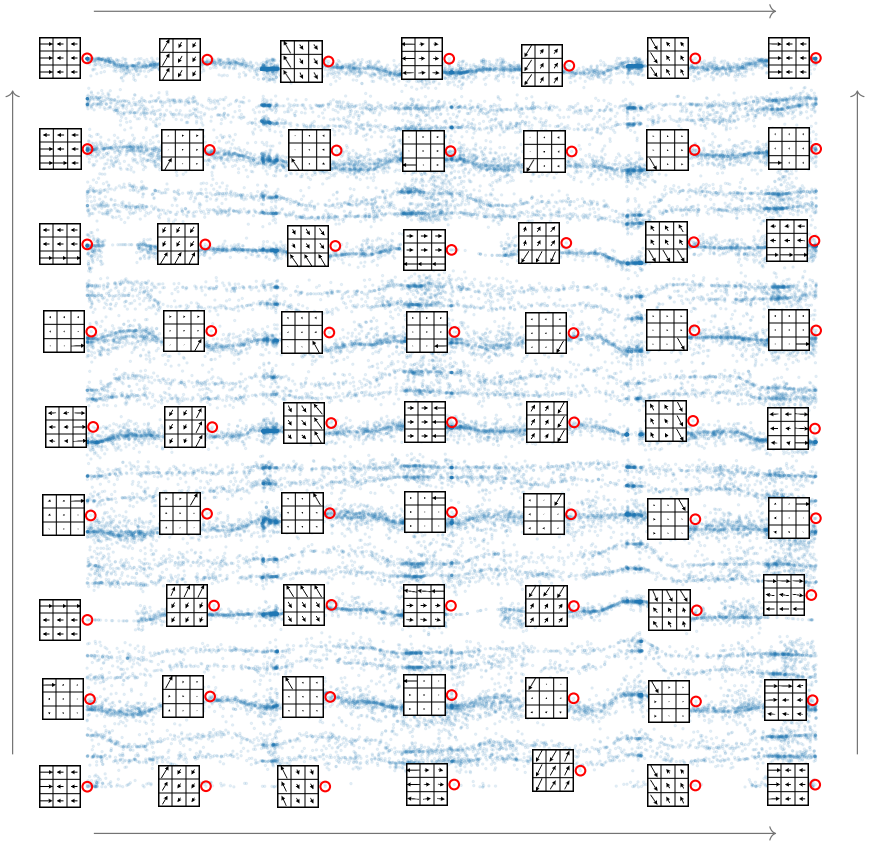


图30：来自 X_{step} 的二值阶跃边缘块样本，按提升的主要方向（x轴）和指定纤维坐标（y轴）排列。

研究完整的连续流形结构对于更大尺寸的图像块是否易于检测，会是一件有趣的事——这种固定低维模型的潜在价值，在更大图像块的空间中也会急剧增加。

9 总结与未来工作

我们的分析扩展了先前在 [AAC15] 和 [Ada+20] 中针对3×3 高对比度光流图像块（来自 [But+12]）空间所研究的几何模型。除了确认并扩展环面模型之外，我们还识别出一族圆形稠密核心子集，对应于二值阶跃边缘范围块，其描述见 [AC09]。事实上，我们表明，按对比度范数排名前1%的光流块几乎全部集中在这些圆附近，并观察到这些特殊图像块据实例出现在Sintel 视频的运动边界处。非常值得研究这些不相交的圆与光流环面是否会针对更大尺寸的图像块形成单一的连通流形结构，因为它可为几何压缩或分类算法奠定基础，类似于在 [PC14]中所发展的那些。

最后，我们针对 Adams等人识别出的稠密子集提出的三维流形模型 [Ada+20] 解释了为何尽管存在

通过纤维分析获得了有力的间接证据，却无法通过直接的持久性计算清晰地检测到环面模型。事实上，我们的结果凸显出，局部与全局持久性计算之间的关系，关键取决于所选特征映射的几何性质。

A 附录

A.1 命题 1 的证明

此处给出命题 1 的证明。为便于后文引用，我们先指出 $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$（方程（1））满足以下性质：

I. $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)\cdot F(\alpha',\ \theta)=0$ 对所有 $\alpha'\in\mathbb{S}^1$ 均成立，II. $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)\cdot F(\alpha,\ \theta')=0$ 对所有 $\theta'\in\mathbb{S}^1$ 均成立，III. $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 与 $F(\alpha',\ \theta)$ D-正交归一，对所有 $\alpha'\in\mathbb{S}^1$ 均成立。IV. $F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 与 $F(\alpha,\ \theta')$ D-正交归一，对所有 $\theta'\in\mathbb{S}^1$ 均成立

通过直接计算即可轻松验证这些性质。

˜1. $F(\alpha,\ \theta)$ 的均值为 0，这一事实立即意味着 $F(r,\ \alpha,\ \theta)$ 的均值也为 0（对任意 r）。˜为证明 $F(r,\ \alpha,\ \theta)$ 是对比度归一化的，注意到 $\cos(\tau)$ 是 r 的增函数，且 $\cos(\tau(0))=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos(\tau(1))=1$。由于 $F(\alpha,\ \theta)$ 和 ¯$F^{\perp}(\alpha,\ \theta)$ 是 D-正交归一，根据˜勾股定理可知，$F(r,\ \alpha,\ \theta)$ 的对比度范数为 1。

˜为证明 $F(r,\alpha,\theta)$ 的主导方向为 θ（模 π），且方向强度为 r，任取$\alpha,\theta\in\mathbb{S}^1$，并令 $A,B,M\in M_{9\times 2}$ 分别表示矩阵，其列向量分别是图像块 $F(\alpha,\theta)$ $F^{\perp}(\alpha,\theta)$ 和 $\tilde{F}(r,\alpha,\theta)$ 的分量向量。显然，我们有

$$M^TM=\cos^2(\tau(r))A^TA+\sin^2(\tau(r))B^TB+\cos(\tau(r))\sin(\tau(r))(B^TA+A^TB)$$

$F^{\perp}(\alpha,\theta)$ 的性质 II 立即推出 $B^TA=A^TB=0$。此外，矩阵 A^TA 和 B^TB可分解为

$$A^TA=R_\theta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}R_\theta^T,\qquad B^TB=R_\theta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}R_\theta^T$$

其中，

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

因此，我们有

$$M^TM=\cos^2(\tau(r))R_\theta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}R_\theta^T+\sin^2(\tau(r))R_\theta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}R_\theta^T$$

$$=R_\theta\begin{pmatrix}\cos^2(\tau(r))&0\\0&\sin^2(\tau(r))\end{pmatrix}R_\theta^T$$

这表明， $M^T M$的特征值为 $\cos^2(\tau(r))$ 和 $\sin^2(\tau(r))$。由于 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(\tau(r)) \leq 1$，我们有 $\cos^2(\tau(r)) > \sin^2(\tau(r))$，因此 $\tilde{F}(r, \alpha, \theta)$ 的主导方向为 $\theta \pmod{\pi}$，其方向强度由下式给出

$$\frac{\cos^2(\tau(r)) - \sin^2(\tau(r))}{\cos^2(\tau(r))} = 2 - \sec^2(\tau(r)) = r$$

2. 注意到 $\cos(\tau(1)) = 1$。

3. 假设 $F(r, \alpha, \theta) = F(r', \alpha', \theta')$。根据第 1 部分，我们有 $r' = r$ and $\theta' = \theta \pmod{\pi}$。因此，我们有

$$\cos(\tau(r))\left(F(\alpha, \theta) - F(\alpha', \theta + k\pi)\right) + \sin(\tau(r))\left(F^{\perp}(\alpha, \theta) - F^{\perp}(\alpha, \theta + k\pi)\right) = 0$$

其中 $k \in \{0, 1\}$。另一方面，容易验证 $F^{\perp}(\alpha', \theta + \pi) = -F^{\perp}(\alpha', \theta)$，因此上文 $F^{\perp}$ 的性质 2 表明， $F(\alpha, \theta) - F(\alpha', \theta + k\pi)$ 与 $F^{\perp}(\alpha, \theta) - F^{\perp}(\alpha', \theta + k\pi)$ 正交。因此，对上面等式两边取模的平方，得到

$$\cos^2(\tau(r))\left|F(\alpha, \theta) - F(\alpha', \theta + k\pi)\right|^2 + \sin^2(\tau(r))\left|F^{\perp}(\alpha, \theta) - F^{\perp}(\alpha', \theta + k\pi)\right|^2 = 0$$

由于 $\cos(\tau(r)) > 0$，我们得出 $F(\alpha', \theta + k\pi) = F(\alpha, \theta)$。最后，根据 [Ada+20]，我们知道 F 是一个二重覆盖，其唯一的等同关系为 $F(\alpha + \pi, \theta + \pi) = F(\alpha, \theta)$，所以这也是 F 的唯一等同关系。

4. 将 $\mathcal{T}$视为由 $\{e_1^u, e_2^u, e_1^v, e_2^v\}$张成的三维球面 S的子流形时， $\mathcal{T}$中每一点的法空间都是一维的。$F^{\perp}(\alpha, \theta)$ 的性质 I 和 II 意味着 $F^{\perp}(\alpha, \theta) \perp T_{F(\alpha,\theta)}\mathcal{T}$，不过也可以直接验证， $F^{\perp}(\alpha, \theta)$ 属于 $F_*(\alpha, \theta)$ 的余核（按通常方式将 $T_{F(\alpha,\theta)}\mathbb{R}^{18}$ 与 $\mathbb{R}^{18}$等同）。由于对于所有 α， θ， $F^{\perp}(\alpha, \theta)$ 的对比度范数均为 1，因此 $F^{\perp}(\alpha, \theta) \in T_{F(\alpha,\theta)}\tilde{S}$，命题得证。

A.2 二值阶跃边缘范围像图像块

参考文献

[AAC15] Henry Adams、Atanas Atanasov 和 Gunnar Carlsson。《拓扑数据分析中的弹性带微推法》。载于：《非线性分析中的拓扑方法》45.1（2015），第247–272页。 DOI：10.12775/TMNA.2015.013。[AC09] Henry Adams 和 Gunnar Carlsson。《距离图像块的非线性统计》。载于：《SIAM 成像科学杂志》2.1（2009），第110–117页。[Ada+20] Henry Adams等人。《光流的环面模型》。载于：《模式识别快报》129（2020），第304–310页。[Alf+24] Andrea Alfarano等人。《光流估计：当前技术水平的全面综述》。载于：计算机视觉与图像理解249（2024），第104160页。 DOI：10.1016/j.cviu. 2024.104160。[AMH22] Ahmed Alhawwary、Janne Mustaniemi 和 Janne Heikkil¨a。《PatchFlow：一种用于轻量级光流估计的两阶段图像块方法》。载于：亚洲计算机视觉会议（ACCV）论文集。Springer，2022，第3740–3756页。 DOI：10.1007/978-3-031-26293-7_32。

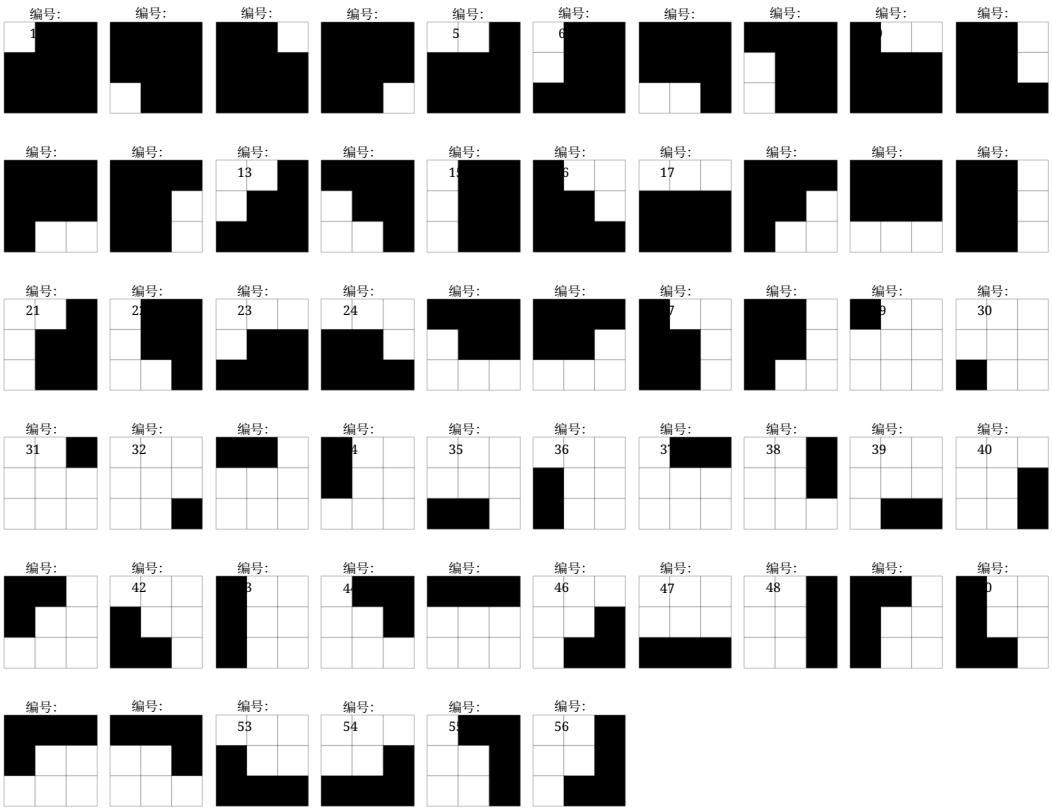


图31：56个二值阶跃边缘范围图像块列表

[Bak+11] Simon Baker等人。《用于光流的数据库与评估方法》。载于：国际计算机视觉期刊92.1（2011），第1–31页。[But+12] D. J. Butler等人。《用于光流评估的自然风格开源影片》。载于：欧洲计算机视觉会议（ECCV）。A. Fitzgibbon等（编），第IV部分，LNCS 7577。施普林格出版社，2012年10月，第611–625页。[Car+08] Gunnar Carlsson等人。《自然图像空间的局部行为》。载于：国际计算机视觉期刊76（2008），第1–12页。 DOI：10.1007/s11263-007-0056-x。[Car09] Gunnar Carlsson。《拓扑与数据》。载于：美国数学会通报46.2（2009），第255–308页。[CS10] Gunnar Carlsson 和 Vin de Silva。《之字形持久同调》。载于：计算数学基础10.4（2010），第367–405页。 DOI：10.1007/s10208-010-9066-0。[Est+96] Martin Ester等人。《一种用于在含噪大型空间数据库中发现簇的基于密度的算法》。载于：第二届国际知识发现与数据挖掘会议（KDD）论文集。AAAI出版社，1996，第226–231页。[Hat02] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002。[HLM00] Jinggang Huang、Ann B. Lee 和 David Mumford。《距离图像的统计》。载于：IEEE计算机学会计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集。IEEE。美国南卡罗来纳州希尔顿黑德，2000，第1324–1331页。 DOI：10.1109/CVPR.2000.855836。[HS81] Berthold KP Horn 和 Brian G Schunck。《确定光流》。载于：人工智能17.1-3（1981），第185–203页。[HS98] JH vanHateren 和 Avan der Schaaf。《自然图像数据集》。技术报告。格罗宁根大学，1998。[Kar77] Hermann Karcher。《黎曼质心与磨光函数平滑》。载于：《纯粹与应用数学通讯》30.5（1977），第509–541页。

[LPM03] Ann B. Lee、Kim S. Pedersen 和 David Mumford。《自然图像中高对比度图像块的非线性统计》。载于：国际计算机视觉期刊 54.1/2/3（2003），第83–103页。[Luo+22] Ao Luo 等。《利用核图像块注意力学习光流》。载于：IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集。IEEE，2022，第8906–8915页。 DOI：10.1109/CVPR52688.2022.00872。[MG15] Moritz Menze 和 Andreas Geiger。《面向自动驾驶车辆的物体场景流》。载于：IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集。IEEE，2015，第3061–3070页。 DOI：10.1109/CVPR.2015.7298925。[NM10] Anandaswaran Narayanan 和 Sanjoy K Mitter。《流形学习的样本复杂度》。载于：神经信息处理系统进展。第23卷。2010，第1869–1876页。[PC14] Jose A. Perea 和 Gunnar Carlsson。《用于纹理表示的基于克莱因瓶的字典》。载于：国际计算机视觉期刊 107.1（2014年3月），第75–97页。 DOI：10.1007/s11263- 013-0676-2。[Per19] Jose A Perea。《持久性的简史》。载于：Morfismos 23.1（2019），第1–16页。arXiv：1809.03624 [math.AT]。 URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.03624。[Per21] Jose A. Perea。《通过主 $\mathbb{Z}$-丛构造稀疏圆坐标》。载于：第15届阿贝尔研讨会论文集（2021）。 DOI：10.48550/arXiv.1809.09269。arXiv：1809.09269 [math.AT]。[PP19] Luis Polanco 和 Jose A. Perea。《利用透镜空间和持久上同调为数据赋予坐标》。载于：第31届加拿大计算几何会议（CCCG）论文集（2019）。arXiv：1905.00350 [math.AT]。 URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.00350。[PST23] Jose A. Perea、Luis Scoccola 和 Christopher J. Tralie。《DREiMac：利用埃伦伯格-麦克莱恩坐标进行降维》。载于：开放源代码软件期刊 8.91（2023），第5791页。DOI：10.21105/joss.05791。 URL：https://doi.org/10.21105/joss.05791。[Sch66] Peter H Sch¨onemann。《正交普罗克鲁斯问题的广义解》。载于：Psychometrika 31.1（1966），第1–10页。[Sco+23] Luis Scoccola 等。《环面坐标：利用格约简去相关圆坐标》。载于：第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）258.57（2023）。arXiv：2212.07201 [math.AT]。 URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.07201。[SMC07] Gurjeet Singh、Facundo M´emoli 和 Gunnar Carlsson。《用于高维数据集分析与三维物体识别的拓扑方法》。载于：Eurographics基于点的图形学研讨会。M. Botsch 和 R. Pajarola 编。Eurographics协会。瑞士，2007。[SP23] Luis Scoccola 和 Jose A. Perea。《FibeRed：利用向量丛对拓扑复杂数据进行纤维逐点降维》。载于：第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）258.56（2023）。arXiv：2206.06513 [math.AT]。 URL：https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06513。[TP25] Brad Turow 和 Jose A. Perea。《离散近似圆丛》。arXiv：2508.12914 [math.AT]。2025。 DOI：10.48550/arXiv.2508.12914。arXiv：2508.12914 [math.AT]。[Wei+15] Philippe Weinzaepfel 等。《学习检测运动边界》。载于：IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集。IEEE，2015，第2578–2586页。DOI：10.1109/CVPR.2015.7298873。[WS13] Lanhui Wang 和 Amit Singer。《鲁棒同步中旋转的精确稳定恢复》。载于：信息与推断：IMA期刊（2013）。收稿日期：2013年7月15日，第1–53页。 DOI：10.1093/imaiai/drn000。[Wul+12] J. Wulff 等。《创建合成光流基准的经验与见解》。载于：ECCV光流与立体估计未解问题研讨会。A. Fusiello 等编（编者）。第二部分，LNCS 7584。施普林格出版社，2012年10月，第168–177页。[Yin+18] Xiaoqing Yin 等。《深度运动边界检测》。载于：arXiv预印本 arXiv:1804.04785（2018）。[Zha+21] Mingliang Zhai 等。《光流与场景流估计：综述》。载于：模式识别 114（2021），第107861页。