arXiv:2603.06876v1 [math-ph] 6 Mar 2026

保面积微分同胚环群的中心扩张及其模糊球极限

Bas Janssens 和 Zhenghan Wang

2026年3月10日

摘要

我们对二维球面的保面积微分同胚环群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 及相关扭曲环群的中心扩张进行了分类。随后我们证明，对于带有 $k \to \infty$ 的（扭曲）环代数$L_{\mathfrak{su}}(k+1)$，相应的李代数余循环是 Kac-Moody 余循环的“模糊球极限”，前提是将这些余循环按 $6/k^3$ 进行重新缩放。

1 引言

在数学上严谨且与实验相关的量子场论既有趣又重要，但十分罕见。其中一类便是 $1+1$ 维的有理共形场论。在这一类理论中，取得成功的一个关键要素，是将 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 的全局共形对称性群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$通过 U(1) 中心扩张实现对称性增强。正是中心扩张李群的酉表示论，在共形场论的构造中发挥着关键作用。

将这一方法推广到高维将是一项有趣的挑战。在本文中，我们探讨这样一种可能性：在构造 $2+1$ 维量子场论（量子场论）时，取值于二维球面的保体积微分同胚群 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 的环群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$——将其视为 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 上的微分同胚——可能发挥与共形群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 在 $1+1$ 维场论中作用相似的角色。

量子场论有许多数学表述，但构造具有物理意义的实例却十分困难。我们的目标是基于扩张对称群的表示论，在数学上构造非平凡的 $(2+1)$ 维共形场论，并着眼于三维伊辛模型等具有物理意义的实例 [Eck26]。

一种理解一般量子场论的方式，是将其视为三元组 $(|0\rangle,\ \mathcal{L},\ \mathcal{S})$，其中 $|0\rangle$是真空或基态，$\mathcal{L}$ 是局部代数，$\mathcal{S}$ 是非局域对称代数。在我们的情形中，我们将 $\mathcal{S}$ 视为某个

无限维李群的群代数；而我们希望推广到高维的，是手征（$1+1$）维共形场论的手征代数／顶点算子代数表述，以及利用手征代数的表示论构造完整共形场论。 [Bor01] 中提出了手征代数向高维的推广，但没有给出非平凡的例子。

量子场论还有另一种通用框架，即代数量子场论（AQFT）。在 $(1+1)$ 维共形场论中，在适当的正则性假设下，顶点算子代数与局部共形网本质上是相同的 [CKLW18]。自然会期待，采用恰当的共形场论表述后，高维情形也存在类似的对应关系。

在这两种框架中，要在闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1,\,d}$的共形紧化 $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^d)/\mathbb{Z}_2$ 上构造非平凡量子场论，一个自然的出发点是寻找 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^d)^{\mathbb{Z}_2}$ 的子群：它们要足够大，能够产生可观测量的局部代数（因此最好是无限维的）；同时又要足够小，以便在李代数层面允许非平凡的中心扩张——在某些情形下，这似乎是正能量表示的先决条件 [JN24, JN25]。

由于 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^d)$ 的李代数只有在 $d = 0$ [JN25], 才具有有趣的中心扩张，因此需要针对 $d = 1$ 取一个子群。在这种情况下，共形群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 是一个自然的候选对象：它具有非平凡的中心扩张（本质上是Virasoro-Bott群的两个副本），而这些中心扩张的表示论是构造 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 上有理共形场论的关键组成部分。我们希望探究，对于 $d = 2$，取值于保体积微分同胚群 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 的环群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$（其中 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 是二维球面的保体积微分同胚群）能否在构造 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 上的量子场论时发挥类似作用。

本文是我们研究计划的初步步骤。我们确定了 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$的中心扩张，并证明相应的李代数余循环可由 $k \to \infty$时定义在 $L\mathfrak{su}(k+1)$上的Kac-Moody余循环经 $6/k^3$重标度后得到，即其“模糊球极限”。由于 $\mathbb{R}^{1,2}$ 的共形紧化是商空间$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}_2$，我们将这些结果推广到扭曲情形。我们将在未来 [Eck26]探讨这些结果与三维伊辛模型的模糊球方法之间可能存在的联系。人们或许可以期待，在极限 $k \to \infty$ 下，存在某种 $L\mathrm{SU}(k+1)$理论的极限，其对称群为 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$。事实上，当 $k \to \infty$ 时，$\mathrm{SU}(k+1)$的一个适当极限就是$\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ [Hop89]。我们计划今后再探讨这些问题。

我们关注特定群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$，主要是出于数学上的考虑。$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$ 的同伦型有两个分支：一个来自 $L\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$，另一个来自 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ [Hat81]。这两个群似乎都不允许在李代数层面出现非平凡的中心扩张，$\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ [JV16] 也同样如此。相比之下，环群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 存在一种可积分到群层面的李代数余循环，并且可以将其解释为 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 上余循环的极限，而这些余循环与广为人知的共形场论相关联。若将 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2)$ 的李代数认作

泊松代数 $C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)_0$，即在每个球面上积分为零的函数所构成的代数$\{t\}\times\mathbb{S}^2$，那么这个李代数余循环就是局部的，也就是说，在中心扩张李代数中，支撑于互不相交开集上的函数所构成的李代数彼此对易。这一局域性条件对于 $(2+1)$-共形场论的代数局域量子场论表述十分重要。若能理解 $(2+1)$-共形场论的手征代数形式体系中相应的局域性表述，将会很有意义；该形式体系通过傅里叶变换与代数局域量子场论互为对偶。

1.1 主要结果与论文结构

不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{S}^2$ 上的体积形式 μ是SO(3)不变的。我们将 $\mathbb{S}^2$ 的保体积微分同胚群SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)视为一个Fr´echet–李群，其李代数为$C^\infty_0(\mathbb{S}^2)$，即泊松代数 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$中由积分为零的函数构成的理想。

我们用 LSDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)表示光滑函数 $\mathbb{S}^1\to$ SDiff($\mathbb{S}^2$)的环群，其乘法为逐点乘法；并用 $LC^\infty_0(\mathbb{S}^2)$表示光滑函数 $F\colon\ \mathbb{S}^1\to C^\infty_0(\mathbb{S}^2)$的环代数，配备逐点泊松括号

$$[F,G](t):=\{F(t),G(t)\}.$$

我们可以将 $F\in LC^\infty_0(\mathbb{S}^2)$解释为一个光滑函数 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}$，并用$F'(t,\sigma)$或 $\frac{\partial}{\partial t}F(t,\sigma)$表示沿 $\mathbb{S}^1$方向的导数。

我们的第一个主要结果是对李代数 $LC^\infty_0(\mathbb{S}^2)$ 的中心扩张进行分类，并确定可积类的格。

定理 A. *$H^2(LC^\infty_0(\mathbb{S}^2)\ \mathbb{R})$ 是一维的。对于 $LC^\infty_0(\mathbb{S}^2)$ 上的每一个连续 2-余循环 ψ，存在一个实数 $c_\infty\in\mathbb{R}$，使得 ψ 与 $c_\infty\psi_\infty$ 上同调等价，其中 ψ_∞ 由下式给出*

$$\psi_\infty(F,G):=\frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{S}^2}F\partial_tG\mu\Big)dt. \tag{1}$$

与该余循环对应的李代数扩张可积为连通李群 $L\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)_0$ 的单连通覆盖的中心 $\mathrm{U}(1)$-扩张，当且仅当 c_∞ 为整数。

证明在第 2 节中完成，综合了 [NW08] 与 [JV16] 的结果，并加入一个关键的新要素：对泊松李代数 $C^\infty(\mathbb{S}^2)_0$ 上不变双线性型的分类。在第 3 节中，我们证明了扭曲环群 L_ΦSDiff($\mathbb{S}^2,\mu$) 的一个类似结果，该群由满足 $g_{t+1}=\Phi\circ g_t\circ\Phi^{-1}$ 的光滑函数 $g\colon\ \mathbb{R}\to$SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$) 构成，其中 $\Phi\colon\ \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ 是一个反向定向的“扭曲”。

在论文的第二部分（第 4 节和第 5 节）中，我们证明，在按 $6/k^3$ 进行重标度后，$LC^\infty(\mathbb{S}^2)_0$ 上的余循环ψ_∞ 是 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 上余循环 ψ_k 的“模糊球极限”。为此，我们广泛利用了$\mathbb{S}^2$上的 K¨ahler 结构，因此在论文的这一部分中，我们将 $\mathbb{S}^2$ 认定为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$，并取 μ 为典范线丛的对偶的曲率 ω。

环代数 $L\mathfrak{su}(2)$ 以一种自然的方式成为 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$的李子代数，因为包含映射 $\iota\colon \mathfrak{su}(2)\hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{CP}^1)$ 诱导出一个环代数的包含映射 $L\iota\colon L\mathfrak{su}(2)\hookrightarrow LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$。它也是 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 的李子代数。 $\mathfrak{su}(2)$ 的自旋 $s=k/2$ 表示 (π_k,V_k) 可以视为李代数同态 $\pi_k\colon \mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{su}(k+1)$，该同态诱导出一个环代数同态 $L\pi_k\colon L\mathfrak{su}(2)\to L\mathfrak{su}(k+1)$。

尽管 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 不是 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的李子代数，但它通过几何量子化 映射与$LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$相关联

$$Q_k\colon C^\infty(\mathbb{S}^2)\to \mathrm{End}(V_k),$$

我们将在第 4 节回顾这一映射。更准确地说，经过重新缩放并中心化的量子化映射

$$d\overline{\Phi}_k(f):=k\Big(Q_k(f)-\tfrac{1}{k+1}\mathrm{tr}(Q_k(f)\mathbf{1}\Big)$$

适合放在一个交换图中

$$\begin{array}{ccc} LC_0^\infty(\mathbb{CP}^1) & \xrightarrow{\quad L\overline{d\Phi}_k\quad} & L\mathfrak{su}(V_k) \\ & {\scriptstyle L\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle L\pi_k} & \\ & L\mathfrak{su}(2), & \end{array} \tag{2}$$

其中 $L\iota$ 和 $L\pi_k$ 是李代数同态，但水平映射$Ld\Phi_k$ 不是。不过，我们将在第 5 节证明，余循环

$$\psi_k(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X,\partial_t Y)dt \tag{3}$$

$$\psi_\infty(F,G) = \frac{6}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{S}^2}F\partial_t G\omega\Big)dt \tag{4}$$

在 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 和 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上可以排列成如下图表

$$\begin{array}{ccc} c_\infty\psi_\infty & \xleftarrow{\quad L\overline{d\Phi}_k^*\quad} & c_k\psi_k \\ & {\scriptstyle L\iota^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle L\pi_k^*} & \\ & c_1\psi_1 & \end{array} \tag{5}$$

并满足以下相容性条件。

定理 B。 李代数余循环 ψ_1、 ψ_k 和 ψ_∞ 能够在群层面上积分，当且仅当相应的常数 c_1、 c_k 和 c_∞ 是整数。

a) 当且仅当有 $(L\iota)^*c_\infty\psi_\infty=c_1\psi_1$

$$c_1=-c_\infty.$$

b) 我们有$(L\pi_k)^*c_k\psi_k=c_1\psi_1$ 当且仅当

$$c_1=\tfrac{k(k+1)(k+2)}{6}c_k.$$

c) 最后，如果$c_k = -\frac{6}{k\,k+1\,()(k+2)}\,c_\infty$ 我们有（逐点）极限

$$\lim_{k\to\infty} (Ld\overline{\Phi}_k)^* c_k \psi_k(f,g) = c_\infty \psi_\infty(f,g).$$

因此，从本质上说，带中心荷 $c_\infty \in \mathbb{Z}$ 的中心扩张李代数 $LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 可以由仿射 Kac–Moody 李代数 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 近似，其中心荷为

$$c_k = \frac{-c_\infty}{\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)} \tag{6}$$

在 $k \to \infty$ 的极限下。在第 5.3 节中，我们证明这一极限过程关于带有 $\Phi^*\omega = -\omega$ 的保定向微分同胚是等变的，因此在扭曲情形下也能得到这些“模糊球极限”。

无论是对于分类结果还是“模糊球极限”，我们都认为可以将 $\mathbb{S}^2$ 替换为更一般的辛流形（Σ，ω）。在第 6 节中，我们简要讨论在这种情况下可能出现的新特征。

1.2 迈向 2+1 维量子场论

为了在代数局域量子场论的框架下，推进构造数学上严格且非平凡的 $2+1$ 维量子场论这一计划，这提示了以下方法。

仿射 Kac-Moody 代数 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 的一列最高权表示（V_{λ_k}，ρ_{λ_k}，Ω_k）会在各自的泛包络代数上产生一列态 ϕ_k。利用几何量子化，应该可以将其转化为 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的泛包络代数上的一列态。我们关于“模糊球极限”的结果引出了这样一个问题：是否有可能通过审慎选择表示，并适当地按 $k^{-3/2}$ 的因子进行缩放，使其收敛到 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的泛包络代数上的一个态 ϕ_∞。如果可以，GNS 构造便能用于重构极限希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\infty$，以及 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的极限射影李代数表示。

如果所得表示可积分为群层面的表示 ρ_∞，则可以为开子集 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 赋予代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$，该代数由支撑在 $\mathcal{O}$中的群元素 g 所对应的 $\rho_\infty(g)$ 生成。由于李代数余循环是局部的，互不相交的开集 $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \emptyset$ 会产生彼此对易的算子代数。我们可以探究这些算子代数网在多大程度上满足其他 Haag-Kastler 公理。相对于等距群 SO(2) ×SO(3) 的等变性很可能可由表示论推出，但算子网是否对 SO(3,2) 等变，恐怕就更难回答了。

2 取值于$\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$的环群

保持 SO(3) 不变体积形式 μ 的微分同胚群 $K=$SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$) 在 $\mathbb{S}^2$ 上构成一个Fr´échet– 李群。其李代数 $\mathfrak{k}=\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 是无散向量场的李代数，我们将其等同于光滑函数的泊松代数 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$；这些函数定义在 $\mathbb{S}^2$ 上，且相对于 μ 的积分为零。泊松括号由 μ 导出，并将其视为 $\mathbb{S}^2$ 上的辛形式。

环群 $LK=L$SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)是由映射 $\phi\colon\ \mathbb{S}^1\to$SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)构成的群，这些映射相对于SDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)上的Fr´échet–李群结构是光滑的。等价地，LSDiff($\mathbb{S}^2,\mu$)是由所有在平凡丛$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^1$的每个纤维上保持定向和体积形式的竖直自同构构成的群。

它是一个Fr´échet–李群，其李代数为 $L\mathfrak{k}=C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathfrak{k})$。由于 $\mathfrak{k}=C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，我们可以将其识别为

$$L\mathfrak{k}=C_0^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)\subseteq C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)$$

泊松代数 $C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)$的子代数，其中包含在每个纤维 $\mathbb{S}^2_t:=\{t\}\times\mathbb{S}^2\subseteq\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2$上积分为零的函数，并配备仅依赖于 $\mathbb{S}^2$变量的（退化）括号:

$$\{F,G\}(t,\vec{x}):=\{F_t,G_t\}(\vec{x}).$$

左边的括号是环 $C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)$ 上的泊松括号（以球面为辛叶），右边的括号是由辛形式 μ 在 $\mathbb{S}^2$ 上诱导的普通泊松括号，作用于固定 $t\in\mathbb{S}^1$ 时的函数 $F_t\colon\ \mathbb{S}^2\to\mathbb{R}$ 和 $G_t\colon\ \mathbb{S}^2\to\mathbb{R}$。

2.1 中心扩张与 2-余循环

对于局部凸李代数 $\mathfrak{g}$，我们用 $H^\bullet(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 表示其取平凡系数的 连续李代数上同调，也就是复形 $C^\bullet(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 的上同调；该复形由关于弗雷歇拓扑联合连续的交错多重线性映射 $\mathfrak{g}\times\ldots\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 构成。微分是通常的切瓦莱–埃伦伯格微分；由于李括号 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 连续，连续余链构成一个子复形。$\mathfrak{g}$ 的局部凸中心扩张（以 $\mathbb{R}$ 为扩张核）由 $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 分类。

在 $\mathfrak{k}=C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上，我们定义内积

$$\kappa(f,g):=\int_{\mathbb{S}^2}fg\,\mu.$$

由于 μ具有不变性，内积在 SDiff($\mathbb{S}^2$) 作用下保持不变，

$$\kappa(\phi^*f,\phi^*g)=\textstyle\int_{\mathbb{S}^2}(\phi^*f\phi^*g)\mu=\int_{\mathbb{S}^2}\phi^*(fg\mu)=\kappa(f,g)$$

对所有 $\phi\in$SDiff($\mathbb{S}^2$) 都成立。特别是，它在伴随李代数作用下保持不变，

$$\kappa(\{h,f\},g)+\kappa(f,\{h,g\})=0.$$

我们证明以下结果，它表明内积 κ 在 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的第二连续上同调 $H^2(L\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ 中起到了 Killing 型的作用。

定理 1。 $H^2(L\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ 是一维的。每个定义在 $L\mathfrak{k}$上的连续 *2*-余循环 ψ 都与 $c\psi_\infty$上同调等价，其中 c 是一个实数，而 ψ_∞ 是余循环

$$\begin{aligned} \psi_\infty(F, G) &:= \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3} \int_{\mathbb{S}^1} \kappa\left(F, \tfrac{\partial}{\partial t} G\right) dt \\ &= \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3} \iiint_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2} F(t,\sigma) \tfrac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma) \mu(d\sigma) dt. \end{aligned} \tag{7}$$

根据 [NW08], , 任意李代数 $\mathfrak{k}$上的连续 2-余循环，可通过连续二阶上同调 $H^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$、连续不变双线性形式空间 $\mathrm{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R})^{\mathfrak{k}}$ 以及 Koszul 映射 Γ: $\mathrm{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R})^{\mathfrak{k}} \to H^3(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ 来理解。该映射将 S映至 $(\Gamma S)(f, g, h) = \kappa(\{f, g\}, h)$。我们通过描述这些组成部分，并结合 [NW08] 中的结果，证明定理 1。

一般辛流形 (Σ, ω) 上泊松代数$C_0^\infty(\Sigma)$的连续二阶李代数上同调，已在 [JV16] 中讨论。

定理 2 ([JV16])。若 Σ 是紧辛流形，则

$$H^2(C_0^\infty(\Sigma), \mathbb{R}) = H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma). \tag{8}$$

特别地，这意味着 $H^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R}) = 0$ 对于 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 成立。尽管本文中的许多论证可推广到一般的辛流形，但从现在起我们主要讨论 $\Sigma = \mathbb{S}^2$ 的情形。在第 6 节中，我们将简要评论当 $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma)$ 非平凡时，辛流形可能出现的新特征。

2.2 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$上的不变对称双线性形式

我们证明，除相差一个比例因子外，不变对称双线性形式

$$\kappa(f, g) = \int_{\mathbb{S}^2} fg \, \mu \tag{9}$$

是 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上唯一的连续不变双线性形式。事实上，与其考虑 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，不如考虑完整的泊松代数 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$。我们首先证明，这并不会实质性地改变情况。

2.2.1 中心的作用

设 (Σ, ω) 是一个紧辛流形，并且 $S\colon C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ 是泊松代数$C^\infty(\Sigma)$上的连续不变对称双线性形式。由于 Σ 是紧的， $C^\infty(\Sigma) = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus C_0^\infty(\Sigma)$ 是李代数的直和。

$C^\infty(\Sigma)$ 上的每个不变对称双线性形式，限制到$C_0^\infty(\Sigma)$上仍是不变对称双线性形式。反过来，由于常值函数是中心元，$C_0^\infty(\Sigma)$上的每个不变对称双线性形式 S 都可以扩张为 $C^\infty(\Sigma)$ 上的不变双线性形式，令 $S(\mathbf{1}, f) = S(f, \mathbf{1}) = 0$ 对所有$f \in C^\infty(\Sigma)$均成立。

这并非双射对应：例如，不变对称双线性形式

$$B(f,g) := \Big(\int_M f\omega^n/n!\Big)\Big(\int_M g\omega^n/n!\Big) \tag{10}$$

在 $C_0^\infty(\Sigma)$上显然限制为零。不过，根据以下命题，这基本上是唯一的反例。

命题 3. 如果 M 是紧的，那么两个不变双线性形式 S 和 S'在 $C^\infty(\Sigma)$ 上的限制，在 $C_0^\infty(\Sigma)$ 上是同一个不变双线性形式，当且仅当它们相差 B的一个倍数。

证明。假设 $S-S'$在 $C_0^\infty(\Sigma)$上限制为零。那么，如果设 $c_B := S(\mathbf{1},\mathbf{1}) - S'(\mathbf{1},\mathbf{1})/\mathrm{Vol}^2(\Sigma)$，则 $S'' := S - S' - c_B B$还满足 $S''(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 0$。由于 S''是不变的，且$\mathbf{1}$是中心元，对于所有 q，$r \in C^\infty(\Sigma)$，都有 $S''(\mathbf{1}, \{q, r\}) = S''(\{1, q\}, r) = 0$。但是根据 [ALDM74，第12] 节，$C^\infty(\Sigma)$的换位子理想是$C_0^\infty(\Sigma)$，因此对于 $f \in C_0^\infty(\Sigma)$，有 $S''(\mathbf{1}, f) = 0$。但由于 $S''(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 0$，对所有 $f \in C^\infty(\Sigma)$，都有$S''(\mathbf{1}, f) = 0$，所以 $S'' = 0$，因为它在$C_0^\infty(\Sigma)$上为零。

□

因此，对 $C_0^\infty(\Sigma)$ 上的不变双线性形式进行分类，等价于对 $C^\infty(\Sigma)$ 上的不变双线性形式进行分类；下文将采用第二种视角。

2.2.2 二维球面的泊松代数。

现在考虑球面 $\mathbb{S}^2$，并赋予其一个非零的 SO(3) 不变辛形式 μ。泊松代数 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 含有一个稠密多项式子代数 $\mathbb{R}[\mathbb{S}^2] := \mathbb{R}[x,y,z]/I_{\mathbb{R}}$，其中 $I_{\mathbb{R}}$ 是由 $x^2+y^2+z^2-1$ 生成的理想。$C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的每个连续不变双线性形式，都由其在 $\mathbb{R}[\mathbb{S}^2]$ 上的限制唯一确定。这些形式对应于复化 $\mathbb{C}[\mathbb{S}^2] = \mathbb{C}[x,y,z]/I_{\mathbb{C}}$ 上的 $\mathbb{C}$-线性不变双线性形式。

将 $\mathbb{C}^3$ 识别为线性泊松流形 $\mathfrak{so}(3,\ \mathbb{C})^*$ 后，$\mathbb{C}[x,y,z]$ 上的泊松括号定义为

$$\{p,q\}_{\vec{r}} = \left\langle \vec{r}\,,\ \vec{\nabla}p \times \vec{\nabla}q \right\rangle. \tag{11}$$

这里，$I_{\mathbb{C}}$是一个泊松理想，而 $\mathbb{C}[x,y,z]/I_{\mathbb{C}}$与 $\mathbb{S}^2$上的Kostant-Kirillov-Souriau辛结构 μ_{KKS} 所对应的泊松代数一致。

定理 4. $\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 上的每个不变双线性形式都具有如下形式

$$S = c_\kappa \kappa + c_B B$$

对某些 c_κ、$c_B \in \mathbb{C}$。

我们的证明依赖于泊松结构的 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$-等变性。作为$\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$-表示， $\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 分解为不可约表示如下

$$\mathbb{C}[\mathbb{S}^2] = \bigoplus_{l=0}^{\infty} V_l,$$

其中， l 是自旋 $V_l \subset \mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 表示。商映射 $\mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 诱导出同构 $\mathcal{H}_l \xrightarrow{\sim} V_l$，将 $\mathcal{H}_l \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ 与 x， y， z中次数为 $l \in \mathbb{N}$ 的齐次调和多项式空间对应起来，参见例如 [Kn96，第 IV.9 节，问题 12]，以及 [Kn96，第 IV.9 节，问题 2]。由于 $V_1 \subset \mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 同构于 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$，根据雅可比恒等式，泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}\colon \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \wedge \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \to \mathbb{C}[\mathbb{S}^2]$ 是 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ 表示之间的交织算子。

$\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ 表示 $P_l \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$（次数为 l 的齐次多项式）分解为

$$P_l = \mathcal{H}_l \oplus r^2\mathcal{H}_{l-2} \oplus r^4\mathcal{H}_{l-4} \ldots,$$

其中， $r^2 = x^2+y^2+z^2$ 显然是旋转不变量。由于 KKS 括号 (11) 的次数为 -1，我们有 $\{P_k, P_l\} \subseteq P_{k+l-1}$，因此特别有 $\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l\} \subseteq P_{k+l-1}$。由于泊松括号是交织算子 $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l \to P_{k+l-1}$，其像只能包含自旋为以下数值的不可约表示

$$|k-l|,\ |k-l|+1,\ \ldots,\ k+l-1,\ k+l.$$

特别地，泊松括号限制为一个交织算子

$$\{\cdot,\cdot\}_{2l}\colon \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_l \to \mathcal{H}_{l+1} \oplus \mathcal{H}_{l-1}. \tag{12}$$

引理 5。 对于 $l>0$，这个交织算子的像包含 $\mathcal{H}_{l+1}$。

证明。 权重为 0 的向量 $z^2 \in \mathcal{H}_2$ 与权重为（最高） l 的向量 $(x+iy)^l \in \mathcal{H}_l$ 的对易子 $\{z^2,(x+iy)^l\} = -2ilz(x+iy)^l$ 非零，其权重为 l。由于交织算子的像不包含于最高权重为 $l-1$ 的表示 $\mathcal{H}_{l-1}$ 中，根据舒尔引理，它包含 $\mathcal{H}_{l+1}$。 □

定理 *4* 的证明。 设 $S\colon \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \times \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \to \mathbb{C}$ 是一个不变双线性形式。由于它在 $S_{kl}\colon V_k \otimes V_l \to \mathbb{C}$ 上的限制是 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$- 不变的，因此它诱导出一个交织算子 $V_k \to V_l^*$。于是，根据舒尔引理，对于 $k \neq l$，有 $S_{kl}=0$，且 S_{kk} 是 κ_{kk} 的一个数乘，其中 $\kappa\colon \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \times \mathbb{C}[\mathbb{S}^2] \to \mathbb{C}$ 是式 (9) 中定义的非退化对称双线性形式的（复化）。特别地， S 是对称的。

由方程 (9) 和 (10) 得到的双线性形式 κ 和 B 满足 $B_{00} \neq 0$、$B_{11}=0$、$\kappa_{00} \neq 0$ 和 $\kappa_{11} \neq 0$，因此通过从中减去 κ 和 B的适当倍数，我们可以假设 $S_{00}=0$ 和 $S_{11}=0$。归纳地假设对于所有 $i \leq l$都有 $S_{ii}=0$。那么，由于对于所有 k都有 $S_{lk}=0$， $S(V_l,\ \{V_2,V_{l+1}\})=0$。不变性还意味着 $S(\{V_2,V_l\},\ V_{l+1})=0$。对于 $l>0$，根据引理 5，我们有 $V_{l+1} \subseteq \{V_2,V_l\}$，因此 $S_{l+1,\ l+1}=0$，正如所要求的那样。 □

我们将在光滑情形下继续讨论，为此需要以下推论。由定理 4 以及 $\mathbb{R}[\mathbb{S}^2]$ 是 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的稠密李子代数这一事实可得。

推论 6. *$C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的每个连续不变双线性形式都具有如下形式*

$$S = c_\kappa \kappa + c_B B$$

对于某些 c_κ、$c_B \in \mathbb{R}$。$C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的每个连续不变双线性形式都具有形式 $S = c_\kappa \kappa$。

注 1。尽管我们在证明中广泛使用了 $\mathfrak{so}(3)$-不变性，但我们认为，对于任意辛流形的紧支撑泊松代数 $C_c^\infty(\Sigma)$，即使没有任何额外对称性，这一结果也应成立。使用与 [JV16, 命题 4.2] 类似的技巧，可以证明每个双线性形式都是局部的，因此，证明一般结果时应足以使用一个局部模型（具有额外对称性）。

2.3 Koszul 映射

注意，$\kappa\colon C^\infty(\mathbb{S}^2) \times C^\infty(\mathbb{S}^2) \to \mathbb{R}$ 在子代数 $V_1 \simeq \mathfrak{so}(3)$ 上的限制，是单李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 上的一个不变对称双线性形式，因此等于 Killing 型的某个倍数。由于 κ 非退化，这个倍数非零。

Koszul 映射 $\Gamma\colon \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R})^\mathfrak{k} \to H^3(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ 将连续不变对称双线性形式 S 映射为连续 3-余循环 $(\Gamma S)(f, g, h) = S(\{f, g\}, h)$ 的类。

命题 7。 *对于 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$，Koszul 映射在连续双线性形式上是单射。对于其由积分为零的多项式构成的稠密子代数 $\mathfrak{k} = \mathbb{R}[\mathbb{S}^2]_0$，Koszul 映射在所有双线性形式上都是单射。*

证明。将 $\mathbb{S}^2$ 上的一次齐次多项式与 $\mathfrak{so}(3)$ 等同，并将相应的包含映射记为 $\iota\colon \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{k}$。将 $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{k}$ 对应的 Koszul 映射分别记为 $\Gamma_{\mathfrak{so}(3)}$ 和 $\Gamma_\mathfrak{k}$。由于 Koszul 映射具有函子性，$\iota^* \circ \Gamma_\mathfrak{k} = \Gamma_{\mathfrak{so}(3)} \circ \iota^*$，且 $\iota^*(\Gamma_\mathfrak{k} \kappa)$ 是 $\Gamma_{\mathfrak{so}(3)}(\kappa_{\mathfrak{so}(3)})$ 的一个非零倍数。

该类生成 $H^3(\mathfrak{so}(3), \mathbb{R})$，因此特别地，它非零。这意味着 $\Gamma_\mathfrak{k}(c\kappa) = 0$ 当且仅当 $c = 0$。由于 $\mathrm{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R})^\mathfrak{k}$ 的每个（连续）元素都具有这种形式，结论得证。□

2.4 $C_c^\infty(M, \mathfrak{k})$ 上的 2-余循环及定理 1 的证明

原则上，来自 [NW08] 的结果给出了一般流代数 $A \otimes \mathfrak{k}$上2-余循环的分类，其中 A 是任意含幺交换代数，而$\mathfrak{k}$ 是任意李代数。其主要结果表明，$A \otimes \mathfrak{k}$ 上的余循环本质上来自两个来源：$\mathfrak{k}$上的不变双线性型，以及 $\mathfrak{k}$上的2-余循环。这两个来源如何产生 $A \otimes \mathfrak{k}$ 上的余循环，则由Koszul 映射所支配。

对于平均值为零的光滑函数的泊松李代数 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，我们现在基本上掌握了这两个来源：我们已在定理 4中对不变双线性型进行了分类，而连续 2-余循环已在 [JV16] （定理 2）中得到分类。结合Koszul 映射的单射性（命题 7）， [NW08] 中的结果因此应使我们能够完成 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{k}$的2-余循环分类，它是 $L\mathfrak{k} = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{k})$的一个稠密子代数。

完成定理 2.4 的证明时，一个小小的复杂之处在于， [JV16] （连续余链）中的情形与 [NW08] （不要求连续性的余链）中的情形并不完全相同。因此，我们必须仔细处理证明不同部分所用的各种连续性性质。

下文记 Ω^1_A 为 A的 K¨ahler 微分，其泛导子为 $d\colon A \to \Omega^1_A$。若一个 q-余链 ψ 定义在 $A \otimes \mathfrak{k}$ 上，并且多重线性映射 $(f_1, \dots, f_q) \mapsto \psi(a_1 \otimes f_1, \dots, a_q \otimes f_q)$ 在固定 $a_1, \dots, a_q$ 时是连续的，我们就称其在 $\mathfrak{k}$变量上连续。

引理 8. 设 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，且 ψ 是定义在 $A\otimes\mathfrak{k}$ 上的一个 *2*-余循环，在 $\mathfrak{k}$变量上连续。那么 ψ 与下式上同调等价

$$\psi_\lambda(a \otimes f, b \otimes g) = \lambda(adb)\kappa(f, g) \tag{13}$$

对于一个线性映射 $\lambda\colon \Omega^1_A/dA \to \mathbb{R}$。

证明。 一对线性映射

$$f_1\colon \Lambda^2(A) \otimes S^2(\mathfrak{k}) \to \mathbb{R},$$
$$f_2\colon A \otimes \Lambda^2(\mathfrak{k}) \to \mathbb{R}$$

由此得到一对双线性映射 ψ_1, ψ_2，定义在 $A \otimes \mathfrak{k}$ 上：

$$\psi_1(a \otimes f, b \otimes g) = f_1(a \wedge b \otimes f \vee g)$$
$$\psi_2(a \otimes f, b \otimes g) = f_2(ab \otimes f \wedge g),$$

其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别表示交错张量积和对称张量积。由于交换子子代数 $\mathfrak{k}' := [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ 根据 [ALDM74], 等于 $\mathfrak{k}$，由此根据 [NW08, Thm. 4.1(iv)] 可知， $A \otimes \mathfrak{k}$ 上的每个 2- 余循环都是此类双线性映射之和 $\psi = \psi_1 + \psi_2$。如果 ψ 在 $\mathfrak{k}$变量上连续，那么双线性映射 $(f, g) \mapsto f_1(a \wedge b \otimes f \vee g)$ 也连续，并且根据 [NW08, Thm. 4.1(i)], 它是 $\mathfrak{k}$-不变的。因此，根据推论 6，它是 κ 的倍数，且我们有 $f_1(a \wedge b \otimes f \vee g) = L(a \wedge b)\kappa(f, g)$，其中 $L\colon A \wedge A \to \mathbb{R}$ 是一个线性映射。根据 [NW08, Thm. 4.1(ii) and Lemma 2.1]，我们有 $L(a \wedge b) = \lambda(adb - bda)$，其中 $\lambda\colon \Omega^1_A \to \mathbb{R}$ 是一个线性映射。

由于 $\mathfrak{k}$ 上的 Koszul 映射在连续余循环上是单射（命题 7），由 [NW08, 定理4.7(iii)] 可知，对于每个 $a \in A$， $f \wedge g \mapsto f_2(a \otimes f \wedge g)$ 都是 $\mathfrak{k}$ 上的 2-余循环。若 ψ 关于 $\mathfrak{k}$变量连续，则该映射是 $\mathfrak{k}$上的连续2-余循环，因此根据定理 2，它是一个余边界。因此

$f_2(a\otimes f\wedge g)=\gamma_a([f,g])$，其中 $\gamma\colon A\to\mathfrak{k}'$ 到 $\mathfrak{k}$ 的连续线性对偶的线性映射。特别地，$\psi_2(a\otimes f,\ b\otimes g)=\gamma([a\otimes f,b\otimes g])$ 是 1-余循环 $\gamma(a\otimes f):=\gamma_a(f)$ 的余边界，并且 ψ 与 $\psi_1(a\otimes f,\ b\otimes g)=\lambda(adb-bda)\kappa(f,\ g)$ 上同调等价。根据 [NW08, 定理4.7(ii)]，映射 $(a,\ b)\mapsto\lambda(adb-bda)$ 是一个循环1-余循环，这意味着 $\lambda(dA)=0$。

□

备注 2。事实上，我们已经证明了一个稍强的结论：对于一个在 $\mathfrak{k}$ 变量上连续的 1-上链 $\gamma\colon\ A\otimes\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$，有 $\psi-\psi_\lambda=d\gamma$。

应用于 Laurent 多项式环 $A=\mathbb{C}[z,z^{-1}]$，即可直接得到定理 1 的证明。

定理 *1* 的证明。我们将 $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}$ 中的 Laurent 单项式 $z^n\otimes f$ 与 $L\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 中的傅里叶模 $t\mapsto e^{int}f$ 对应，并将相应的包含映射记为 $\iota\colon\ \mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes\mathfrak{k}\to L\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$。若 ψ 是 $L\mathfrak{k}$ 上连续的李代数余循环，则其复化 $\psi_{\mathbb{C}}$ 拉回后得到一个 $\mathbb{C}$-线性的余循环 $\iota^*\psi_{\mathbb{C}}$，定义在 $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}$ 上，并且在 $\mathfrak{k}$ 变量上连续。

对于 $A=\mathbb{C}[z,z^{-1}]$，空间 Ω^1_A/dA 是一维的，其生成元为 $[z^{-1}dz]$，因此每个线性映射 $\lambda\colon\Omega^1_A/dA\to\mathbb{C}$ 都与 $\lambda(adz)=\frac{1}{2\pi i}\oint adz$成比例。由引理 8 可知，连续余循环的每个拉回 $\iota^*\psi_{\mathbb{C}}$ 都与某个 $c\psi_\lambda$上同调等价，其中 $c\in\mathbb{C}$。将其限制到实子代数 $(\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{k})\cap L\mathfrak{k}$ 上（在该子代数上，ψ 取实值），可得 $c\in\mathbb{R}$。

由 (1) 给出的 $L\mathfrak{k}$ 上连续余循环 ψ_∞ 的复化，拉回后得到一个与下式成比例的余循环

$$\psi_\lambda(a\otimes f,b\otimes g)=\Big(\frac{1}{2\pi i}\oint adb\Big)\,\kappa(f,g),$$

因此存在一个常数 c，使得 $\iota^*(\psi_{\mathbb{C}}-c\psi_\infty)$ 是恰当的，即为一个关于 $\mathfrak{k}$ 变量连续的 1-上链 $\gamma\colon\ \mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes\mathfrak{k}\to\mathbb{C}$ 的边界。

为证明 γ 可延拓为连续上链，注意到

$$\gamma(a\otimes\{f,g\})=\tfrac{1}{2}(\psi_{\mathbb{C}}(a\otimes f,\mathbf{1}\otimes g)-\psi_{\mathbb{C}}(a\otimes g,\mathbf{1}\otimes f)).\tag{14}$$

由于 $\mathfrak{k}$ 是完美的，且 ψ 是连续的，$a\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 在 $\mathbb{C}[z^{-1},z]$上的映射可延拓为连续映射 $C^\infty(\mathbb{S}^1,\ \mathbb{C})\to\mathbb{C}$ 对每个固定的 $f\in\mathfrak{k}$均成立。由于根据备注2，$f\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 是连续的，双线性映射 $(a,\ f)\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 是分别连续的。由于 $C^\infty(\mathbb{S}^1,\ \mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{k}$ 是 Fr´echet 空间，分别连续性蕴含联合连续性，因此 $\gamma\colon\ C^\infty(\mathbb{S}^1,\ \mathbb{C})\otimes\mathfrak{k}\to\mathbb{C}$ 根据射影张量积的泛性质延拓为 $C^\infty(\mathbb{S}^1,\ \mathbb{C})\otimes_\pi\mathfrak{k}=L\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 上的连续线性泛函。

□

注记 3. 自然可以猜想，对于泊松代数 $\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]_0$，有 $H^2(\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]_0,\mathbb{R})=\{0\}$，并且可以设想沿定理 4 的思路直接证明这一点，即利用不变双线性形式将余循环转化为斜对称导子。由此，从 [NW08] 便可立即得到 $\mathbb{C}[z^{-1},z]\otimes\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]_0$ 上（未必连续的）2-余循环的分类，而这又会推出定理 1，因为 $\mathbb{C}[z^{-1},z]\otimes\mathbb{C}[\mathbb{S}^2]_0$ 是 $L\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 的稠密子代数。

2.5 积分类

在已对 $L\mathfrak{k}$ 上的连续 2-余循环进行分类之后，尚需确定哪些余循环能给出可积到群层面的李代数扩张。为此，宜将 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的双线性形式规范化为

$$\kappa_\infty(f,g) := \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}^3(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} fg\mu.$$

泊松代数 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$与无散向量场的李代数$\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$之间的同构取决于 μ的缩放方式。如果按照上文所示缩放κ_∞ ，那么诱导的双线性形式 κ_∞ 在 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$上将不依赖于该同构。

2.5.1 $L\mathfrak{su}(2)$ 与 $L\mathfrak{k}$的整性条件之间的关系

根据 Smale 定理， [S59], 保向微分同胚群 Diff$(\mathbb{S}^2)_0$ 与 SO(3) 同伦等价。进而，$K = \mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 与 Diff$(\mathbb{S}^2)_0$ 同伦等价，因为轨道映射

$$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)_0 \to \Omega^2(\mathbb{S}^2)_1 : \phi \mapsto \phi^*\mu$$

是一个光滑的主 SDiff$(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 丛，其底空间是可缩空间 $\Omega^2(\mathbb{S}^2)_1$ ，由积分为一的体积形式 [Ham82]构成。

由此可知，李群 LSO(3) $\hookrightarrow LK$ 的包含映射是同伦等价。由于 π_1(SO(3)) $= \mathbb{Z}_2$，SO(3)与 LK 均有两个连通分支。又由于 π_2(SO(3))是平凡的，因此我们有 $\pi_1(L\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(3) \times \Omega\mathrm{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，且 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to L$SU(2) $\to L\mathrm{SO}(3)_0$ 是单连通覆盖。

由于 K_0 是 SU(2) 的单连通覆盖，且群包含映射 $L\mathrm{SU}(2) \hookrightarrow \widetilde{LK_0}$ 是这两个 1-连通李群之间的同伦等价。

设 G 是一个连通、单连通的局部凸李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。若 U(1) $\to G^\sharp \to G$是局部凸李群的一个中心扩张，则它可微化为局部凸李代数的连续中心扩张 $\mathbb{R} \to \mathfrak{g}^\sharp \to \mathfrak{g}$ 。在严格同构意义下，连续中心扩张由曲率余循环$\psi(x,\ y)$ 的上同调类 $[\psi] \in H^2(\mathfrak{g},\ \mathbb{R})$ 刻画：$= [\sigma(x)\ \sigma(y)] - \sigma([x,y])$，该余循环由连续线性分裂$\sigma$：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^\sharp$ 导出（根据 Hahn–Banach 定理，此类分裂存在）。

反过来，根据 [Ne02], ，连续李代数扩张 $\mathbb{R} \to \mathfrak{g}^\sharp \to \mathfrak{g}$可积为单连通李群 G的局部凸李群扩张，当且仅当周期同态 P_ψ: $\pi_2(G) \to \mathbb{R}$ 取整数值。对于足够光滑的类 $[\sigma] \in \pi_2(G)$，其定义为 $P_\psi([\sigma]) = \int_{\mathbb{S}^2} \sigma^*\Psi$，其中 Ψ 是 G上唯一一个在 $T_1G \simeq \mathfrak{g}$上与 ψ 一致的左不变二形式。

由于 LK 是局部凸李群的包含映射，则每个 $\widetilde{LK_0}$ 的连续中心扩张都会限制为一个连续中心扩张

到 $L\mathrm{SU}(2)$。如果前者产生余循环

$$\begin{aligned}\psi_\infty(F,G) &:= \int_{\mathbb{S}^1}\kappa_\infty(F,\partial_t G)dt \\ &= \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{S}^2}F\partial_t G\mu\Big)dt\end{aligned} \tag{15}$$

在 $L\mathfrak{k}$ 上，那么我们将在下文看到，这会拉回为余循环

$$\psi_{\mathfrak{su}(2)}(X,Y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(X,\partial_t Y)dt \tag{16}$$

在 $L\mathfrak{so}(3)\simeq L\mathfrak{su}(2)$ 上，其中不变双线性形式缩放为 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(h,h)=-2$ 在余根 $h=\mathrm{diag}(i,-i)$ 上。

根据 [PS86, 定理 4.4.1(iv)], ，余循环 $c\psi_{\mathfrak{su}(2)}$ （来自 (16)）对应于李群的中心扩张 $L\mathrm{SU}(2)^\sharp \to L\mathrm{SU}(2)$，当且仅当 $c\in\mathbb{Z}$，因此这是使 (15) 来自李群扩张 $LK_0^\sharp \to\!\!\!\!\sim LK_0$的必要条件。但由于 $\iota\colon L\mathrm{SU}(2)\hookrightarrow LK_0$ 诱导出同构 $\iota_*\colon \pi_2(L\mathrm{SU}(2)) \to\!\!\!\!\sim \pi_2(LK_0)$， $c\psi_{\mathfrak{su}(2)}$ （来自 (16)）在$L\mathrm{SU}(2)$ 上的周期同态的整性，意味着 $c\psi_\infty$ （来自 (15)）对$\sim LK_0$的周期同态也具有整性。因此， $c\in\mathbb{Z}$ 也是充分条件。由此得到以下结果：

定理 9。 余循环 (15)对应于$\sim LK_0$ 的一个光滑中心扩张，其扩张群为 $\mathrm{U}(1)$ ，当且仅当 $c_\infty\in\mathbb{Z}$。

证明。 唯一尚待证明的是，余循环 (15) 在子代数 $L\mathfrak{so}(3)$ 上的限制为 (16)。记 $\iota\colon \mathfrak{so}(3)\hookrightarrow\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 为由 $\mathfrak{so}(3)$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上的无穷小作用所导出的李代数包含映射。方程$i_{X_f}\mu=-df$给出了 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 与 $C_0^\infty(\mathbb{S})$ 之间的同构，由此我们得到包含映射 $\iota\colon \mathfrak{so}(3)\hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$。（若将 μ 替换为 $\lambda\mu$， $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 中的包含映射会发生变化，而 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 中的包含映射则不会。）

不变双线性形式的拉回

$$\kappa_\infty(f,g)=\frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3}\int_{\mathbb{S}^2}fg\mu$$

沿包含映射 $\iota\colon\ \mathfrak{so}(3)\hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 是 Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$ 的倍数，我们将其规范化为 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(h,\ h)=-2$ 在余根 $h=\mathrm{diag}(i,\ -i)$ 上的取值。为确定比例常数，设 $X,\ Y,\ Z$ 是 $\mathfrak{so}(3)\simeq\mathfrak{su}(2)$ 的标准基，满足 $[X,Y]=Z$、 $[Y,Z]=X$ 和 $[Z,X]=Y$。于是$Z=h/2$，故 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(Z,\ Z)=-1/2$，再由共轭不变性可得

$$\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(X,X)+\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(Y,Y)+\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(Z,Z)=-3/2. \tag{17}$$

由于 κ_∞ 不依赖于 SU(2) 不变体积形式μ的缩放，我们选择由欧几里得度量诱导的单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的面积 $\mu=\sin(\theta)d\phi\wedge d\theta$。于是 $\iota(Z)=\partial_\phi$，且由于 $i_{\partial_\phi}\mu=-d\cos(\theta)$,

这是一个哈密顿向量场 $\partial_\phi = X_z$，其势函数为 $z = \cos(\theta)$。由于 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $\mathbb{S}^2$上，我们得到

$$\kappa_\infty(x,x)+\kappa_\infty(y,y)+\kappa_\infty(z,z) = \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3}\int_{\mathbb{S}^2}(x^2+y^2+z^2)\omega = \frac{3}{4\pi}. \quad (18)$$

比较 (17) 和 (18)，我们得到 $\iota^*\kappa_\infty = -\frac{1}{2\pi}\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$。对于 ϕ，$\chi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ 和 X，$Y \in \mathfrak{su}(2)$，我们进而得到

$$\begin{aligned}(L\iota)^*\psi_\infty(\phi X, \chi Y) &= \int_{\mathbb{S}^1}\phi\chi'\kappa_\infty(\iota(X),\iota(Y))dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\phi\chi'\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(X,Y)dt \\ &= -\psi_{\mathfrak{su}(2)}(\phi X, \chi Y),\end{aligned}$$

so

$$(L\iota)^*\psi_\infty = -\psi_{\mathfrak{su}(2)}. \quad (19)$$

□

2.5.2 射影幺正表示

我们对可积性条件的兴趣源于 $L\mathfrak{k}$ 的射影幺正表示论。设 G 是一个局部凸李群，且 $\rho\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ 是一个射影幺正表示。称向量 $\psi \in \mathcal{H}$ 为光滑的，如果其轨道映射

$$G \to \mathbb{P}(\mathcal{H})\colon g \mapsto \overline{\rho}(g)\psi$$

是光滑的，我们用 $\mathcal{H}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ 表示光滑向量空间。如果 $\mathcal{H}^\infty$ 在希尔伯特空间拓扑下在 $\mathcal{H}$ 中稠密，则称该射影表示为光滑的。

对于有限维李群，这等价于强算子拓扑下的连续性；但对于无限维李群，这一要求略强一些，因此可以在 $\mathcal{H}^\infty$ 上定义 $\mathrm{Lie}(G)$ 的李代数表示。

G 的每一个连续射影幺正表示都给出一个中心扩张 $G^\sharp = \{(g,U) \in G \times \mathrm{U}(\mathcal{H})\,;\, \rho(g) = U\}$，它是拓扑群 $\mathrm{U}(1) \xrightarrow{-} G^\sharp \to G$ 的中心扩张。根据 [JN19]，若 ρ 是光滑射影幺正表示，则该扩张是局部凸李群扩张，并且相应的李代数扩张 $\mathbb{R} \to \mathfrak{g}^\sharp \to \mathfrak{g}$ 在（严格）同构意义下由连续线性分裂 $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^\sharp$ 的曲率余循环 $\psi(x,y) := [\sigma(x)\ \sigma(y)] - \sigma([x,y])$ 的上同调类 $[\psi] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ 所刻画。

推论 10. 若 $(\rho, \mathcal{H})$ 是局部凸李群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2, \mu)$ 的光滑射影幺正表示，则 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的导出的射影李代数表示 $(d\rho, \mathcal{H}^\infty)$ 满足

$$[d\rho(F), d\rho(G)] = d\rho(\{F,G\}) + ic_\infty\psi(F,G)\mathbf{1},$$

其中 ψ 与 (15) 上同调等价，且 $c_\infty \in \mathbb{Z}$。

3 扭曲环代数

SO(2) 对 $\mathbb{S}^1$ 的旋转作用产生一个半直积

$$\mathrm{SO}(2) \ltimes L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2),$$

其中 SO(2) 通过共轭作用于 LSDiff($\mathbb{S}^2$)，$T_\tau \phi_t T_{-\tau}(x) = \phi_{t-\tau}(x)$。在李代数层面，我们发现一个额外的生成元$\mathbf{d}$，它通过沿 $\mathbb{S}^1$ 方向求导来作用，

$$\mathbb{R}\mathbf{d} \ltimes LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$$

with

$$[\mathbf{d}, F]_t(x) = \frac{d}{dt} F_t(x).$$

将 $\mathbb{S}^1$ 解释为时间方向、将$\mathbf{d}$解释为时间平移的生成元，似乎很自然——当李代数在希尔伯特空间上表示时，它就成为哈密顿。

然而，至少在某些情况下，这一图景需要稍作调整。$3+1$ 维反德西特空间 $\mathrm{AdS}_{3,1}$ 可以在 $\mathbb{R}^5$ 内实现为

$$\mathrm{AdS}_{3,1} = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \,;\, x^2+y^2+z^2-u^2-v^2 = -L^2\},$$

其洛伦兹度量继承自 $\mathbb{R}^5$ 上度量符号为 $(+,+,+,-,-)$ 的度量。其等距群 SO(3,2) 在 $\mathrm{AdS}_{3,1}$，共形完备化的边界 $Q_{2,1}$ 上通过共形变换作用；该边界是射影二次曲面

$$Q_{2,1} = \{[x,y,z,u,v] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^5) \,;\, x^2+y^2+z^2-u^2-v^2 = 0\}.$$

特别地，SO(3) 作用于变量 (x,y,z)，而 SO(2) 作用于变量 (u,v)。由于 $x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2$，射线 $[x,y,z,u,v] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^5)$ 恰好存在两个满足 $x^2+y^2+z^2 = 1 = u^2+v^2$ 的代表元。因此 $Q_{3,1}$ 与 $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}_2$ 微分同胚，并带有 $\mathbb{Z}_2$-作用 $(t,x) \mapsto (-t,-x)$。这是 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 上的一个球面丛。下文中，为方便起见，我们将圆周 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 与其二重覆盖 $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ 区分开来，并在二者均归一化为 1 时，用 x 表示 $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$，用 $z = e^{2\pi i t}$ 表示 $z = u+iv$ （在 $\mathbb{S}^1$ 中）。于是丛映射 $Q_{3,1} \to \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 变为

$$\pi \colon Q_{3,1} \to \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \quad \pi([\vec{x}, e^{2\pi i t}]) = e^{4\pi i t}$$

如果我们将 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 与复平面中的圆周等同起来，那么 SO(2) 的一次完整旋转会沿圆周 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 绕行两周，而 SO(2) 对 $Q_{3,1}$ 的作用会在 $Q_{3,1} \to \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 上诱导出一个非平凡的 Ehresmann 联络整体单值化，即球面 $\mathbb{S}^2$ 上的反演 $P(x) = -x$。

3.1 扭曲环代数的结构

为描述这一情形下的环群，考虑一个稍微更一般的光滑球面丛 $\pi\colon F \to \mathbb{S}^1$ 会更方便。于是 F 是

同构于 $F_\Phi := (\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}$，这是由 $\mathbb{Z}$-作用（$\tau,\ x$） $\mapsto(\tau+n,\ \Phi^{-n}(x))$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$ 上产生的球面丛，该作用由 $\mathbb{S}^2$ 的微分同胚 Φ 确定。我们假设 $\Phi^*\mu=\mu$ 或 $\Phi^*\mu=-\mu$ 成立。第一种情形的例子是恒等元，第二种情形的例子是反演 $P(x)=-x$。若 $\Phi^*\mu=\mu$，则每个纤维 F_t 都配有一个体积形式 μ_t。若$\Phi^*\mu=-\mu$，则该体积形式 μ_t 仅在相差一个符号的意义下定义良好。

因此，我们将体积形式 $\mu\in\Omega^2(\mathbb{S}^2)$ 替换为密度 $|\mu|\in\Gamma(\mathbb{S}^2,|\Lambda|^{-2}T\mathbb{S}^2)$，例如通过与定向类张量积得到。这样做的优点是稍微扩大了自同构群（反演确实满足 $P^*|\mu|=|\mu|$），同时保持无穷小自同构的李代数不变，即 $\mathfrak{x}(\mathbb{S}^2,\mu)=\mathfrak{x}(\mathbb{S}^2,|\mu|)$。我们将如下定义扭曲环群 。

定义 11。 扭曲环群 $L_\Phi\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 是球面丛 $F_\Phi\to\mathbb{S}^1$ 的所有竖直自同构 ϕ 构成的群，使得对于每个 $t\in\mathbb{S}^1$，映射 $\phi_t\colon F_t\to F_t$ 在纤维 $F_t\simeq\mathbb{S}^2$ 上保持定向，并且保持密度 $|\mu|_t$。

非扭曲情形 若 $\Phi^*\mu=\mu$，则 $F\to\mathbb{S}^1$ 同构于平凡球面丛。事实上，根据 Smale 定理 [S59]，群 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 具有 $\mathrm{SO}(3)$ 的同伦型，特别是连通的。由于 $\Phi\in\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$，我们可以选取一条保体积微分同胚的光滑路径$\Phi_t$，满足 $\Phi_0=\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2}$ 和 $\Phi_{t+n}=\Phi^{-n}\circ\Phi_t$，于是映射 $[t,x]\mapsto[t,\Phi_t(x)]$ 是良定义的丛同构 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2\to F$。这意味着群$L_\Phi\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 同构于非扭曲环群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$，但请注意，平凡丛上的 $\mathrm{SO}(2)$ 作用与 $(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}$ 上的$\mathbb{R}$-作用并不一致。 $\mathbb{R}$ 作用的生成元不是$\mathbf{d}=\frac{d}{dt}$，而是

$$\mathbf{d}+A$$

其中 $A_t=(\frac{d}{dt}\Phi_t^{-1})\circ\Phi_t$ 为路径 Φ_t 的（左）对数导数。（可以将 A 视为 $F\to\mathbb{S}^1$ 上的 Ehresmann联络，其整体单值化由 Φ_t 支配。）由于 $A\in LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，半直积 $\mathbb{R}\ltimes L_\Phi\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 的李代数同构于非扭曲李代数 $\mathbb{R}\mathbf{d}\ltimes LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，但 $\mathbb{R}$-作用的生成元被 $A\in LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 平移。

扭曲情形扭曲情形的主要例子是 $\Phi=P$，即球面的反演， $P(x)=-x$。事实上，任意两个微分同胚 Φ,Φ'若满足 $\Phi^*\mu=(\Phi')^*\mu=-\mu$，则相差一个元素 $\Phi'\Phi^{-1}\in\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$，因此与前面一样，我们可以在 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 中选取一条光滑路径 Φ_t，使得 $\Phi'\Phi_{t+1}\Phi^{-1}=\Phi_t$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 都成立，且 $\Phi_0=\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2}$。这通过 $[t,x]\mapsto[t,\Phi_t(x)]$ 实现了球面丛的一个同构 $F_\Phi\to F_{\Phi'}$。同样，这会诱导出李代数的一个同构，因此在反定向情形下，不失一般性，我们可以假设 $\Phi=P$。不过请注意，无穷小$\mathbb{R}$-作用 $\frac{d}{d\tau}$ 的生成元 F_Φ 在 F_P 的模型中由下式表示：

$$\tfrac{d}{d\tau}+A,$$

其中，与前面一样， Φ_t 的左对数导数 A_t 可解释为 $F_P \to \mathbb{S}^1$ 上的 Ehresmann联络。

扭曲环群 $L_P\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 由满足 $\phi_{t+1} = P^{-1}\circ\phi_t\circ P$ 的光滑函数 $\phi\colon \mathbb{R}\to \mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 构成。等价地，它同构于子群 $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)^{\mathbb{Z}_2}$，该子群在 $\mathbb{Z}_2$-作用 $(e^{it},x)\mapsto(-e^{it},-x)$ 下保持不变。在此对应关系中， $L\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 中的圆周 $\mathbb{S}^1$ 是 $L_P\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 中圆周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的二重覆盖。 $L_P\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 的李代数 $L_P\mathfrak{k}$ 由满足 $\xi_{\tau+1} = TP^{-1}\circ\xi_\tau\circ P$ 的光滑函数 $\xi\colon \mathbb{R}\to\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\mu)$ 构成。

我们可以将 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$ 与 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 等同起来，但这样做时需要记住，这种等同取决于 μ。若 X_f 是势函数为 f 的哈密顿向量场，那么当 Φ 保持定向时， $\Phi_*X_f := T\Phi^{-1}\circ X_f\circ\Phi$ 是势函数为 Φ^*f 的哈密顿向量场；而当 Φ 反转定向时，则有 $-\Phi^*f$。特别地，反演 $P(x) = -x$ 导致了如下自同构

$$\alpha_P(f) = -P^*f \tag{20}$$

满足 $\alpha_P(q) = (-1)^{\deg(q)+1}$ 在次数为 $\deg(q)$ 的齐次多项式上 q。在这种表示下，扭曲环代数可以识别为

$$L_P\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2},$$

满足 $F(-z,-x) = -F(z,x)$ 的光滑函数 $F\colon \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}$，且其在每个二维球面$\{z\}\times\mathbb{S}^2$上的积分均为零。 $\mathfrak{so}(2)$ 作用的生成元为 $\mathbf{d}F(e^{it},x) = \frac{\partial}{\partial t}F(e^{2\pi it},x)$。注意，在截面表示为 $(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,|\mu|))^{\mathbb{Z}}$ 的图景中，这对应于 $\mathbf{d}\xi = 2\frac{d}{d\tau}\overline{\xi_\circ}$ 事实上，第一种图景中的纤维丛底空间是 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$，第二种图景中的底空间是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

一个代数模型 球面的反演给出泊松代数 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的一个自同构 α_P，其阶为二；也就是说，它定义了一个 $\mathbb{Z}^2$-分次，其中 $\mathfrak{k}[0]$ 在反演下为偶， $\mathfrak{k}[1]$ 为奇。由于该自同构在 $\mathrm{SO}(3)$ 下不变，这个分次也保持不变。偶部分 $\mathfrak{k}[0]$ 包含奇数次的齐次多项式，奇部分 $\mathfrak{k}[1]$ 包含除常数外的偶数次齐次多项式。复化 $(L_P\mathfrak{k})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 包含稠密子代数

$$\widehat{\mathfrak{k}}^P_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\mathbf{d}\ltimes\bigoplus_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\ k>0\\ n+k\ \mathrm{odd}}} z^n\otimes V_k,$$

其中 V_k 是次数为 k的调和齐次多项式。括号运算在 n上是分次的，但在 k' 上仅有过滤结构：$=k-1$。特别地，子空间 $\mathbf{1}\otimes V_1$是一个李子代数，与 $\mathfrak{so}(3)$有典范同构。

3.2 扭曲流代数

尽管我们的动机来自圆周 $\mathbb{S}^1$上的球丛，但为了对2-余循环进行分类，考虑局部平凡的二维球面更为方便

丛 $\pi\colon\ F \to M$以一个（不必紧致的）流形 M为底。若它可由局部平凡化 $\Phi_i\colon\ \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{S}^2$ 覆盖于 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$之上，且转移函数$g_{ji}\colon\ U_j \cap U_i \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$取值于，则我们称$F \to M$ 为一个非定向辛丛

$$\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2, |\mu|) = \{\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)\,;\, \phi^*\mu = \pm\mu\}.$$

这是对辛丛概念的轻微放宽；在辛丛中，结构群会约化为 SDiff($\mathbb{S}^2$, μ)。由二维球面上的密度 $|\mu| \in\Gamma(\mathbb{S}^2,\ |\Lambda|^{-2}TM)$，我们得到 F 上的垂直密度 $|\nu|$，它在每个纤维上都等价于 $|\mu|$。具体而言，设 T^vF 为垂直切丛，$|\Lambda|^{-2}T^vF$ 为与垂直标架主 Gl(2, $\mathbb{R}$)-丛 Fr(T^vF) 相关联的实直线丛，其特征为 $\chi(g) = |\det(g)|^{-1}$。由于结构群保持 $\mathbb{S}^2$ 上的密度 $|\mu|$，我们通过在局部坐标中令 $|\nu| = \Phi_i^* p_2^* |\mu|$，得到定义良好的整体截面 $|\nu| \in \Gamma(F,\ |\Lambda|^{-2}T^vF)$，其中 $p_2\colon\ U_i \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ 是到第二个因子的投影。

三元组（F, M, $|\nu|$）生成李代数

$$\mathfrak{g}_c(M) = \{X \in \Gamma_c(F, T^vF)\,;\, L_X|\nu| = 0\}.$$

或者，由于 SDiff($\mathbb{S}^2$, $|\mu|$) 通过自同构作用于 $\mathfrak{k} = \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$，我们也可以将其视为

$$\mathfrak{g}_c(M) = \Gamma_c(M, \mathfrak{K})$$

作为一个李代数丛的紧支撑截面的李代数$\mathfrak{K} \to M$，其典型纤维为 $\mathfrak{k} = \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu)$。在这一图景中，$x \in M$ 上方的纤维是李代数 $\mathfrak{K}_x = \mathfrak{X}(F_x,\ |\nu|)$。

当 $M = \mathbb{S}^1$ 时，我们自然得到扭曲环代数：由 $\mathbb{Z}$-作用（τ, x）$\mapsto$（$t + n$, $\Phi^{-n}(x)$）生成的、位于 $\mathbb{S}^1$ 上方的球面丛$F = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}$ 继承了来自 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ 的垂直密度 $p^*|\mu|$（因为 $\Phi^*|\mu| = |\mu|$），而李代数 $\mathfrak{g}(\mathbb{S}^1)$ 与 $L_\Phi\mathfrak{k}$ 同构。

对于平凡丛 $F = M \times \mathbb{S}^2$，我们得到由取值于 Fr´echet– 李代数 $\mathfrak{k} = \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2, |\mu|)$ 的紧支撑光滑函数构成的李代数 $\mathfrak{g}_c(M) = C_c^\infty(M, \mathfrak{k})$。一般而言，开子集上的映射 $U \mapsto \mathfrak{g}_c(U)$ 构成一个李代数的柔性余层（按照 [Br68]的定义）。局部平凡化给出了李代数同构 $\mathfrak{g}_c(U) \simeq C_c^\infty(U, \mathfrak{k})$，其中开子集 $U \subseteq M$ 足够小。

如果我们给 $\mathbb{S}^2$ 赋予密度 $|\mu|$而非体积形式 μ，就必须稍微修订势函数的概念。事实上，由于 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ \mu) = \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ -\mu)$，我们可以直接用 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ |\mu|)$ 表示保持$|\mu|$ 且允许任意定向的向量场李代数。不过，尽管这两个李代数都同构于$C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$，这种同构取决于定向的选择：若向量场X相对于 μ 的势函数为 f，$i_X\mu = df$，那么同一向量场 X 相对于 $-\mu$ 的势函数为 $-f$。因此，我们不把势函数看作 $\mathbb{S}^2$ 上的函数，而是将其视为由$\mathcal{L}$ 定义的实直线丛 $\mathcal{L} \to \mathbb{S}^2$ 的截面：$=\mathrm{Fr}(\mathbb{S}^2) \times_\sigma \mathbb{R}$，其中 $\sigma\colon \mathrm{Gl}(2,\ \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ 是行列式的符号。

由于 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ 是平凡的， fg 是一个通常的函数，并且

$$\kappa(X_f, X_g) = \int_{\mathbb{S}^2} fg|\mu|$$

是 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2,\ |\mu|)$ 上的不变双线性形式。从这一描述可以看出， κ不仅在 SDiff($\mathbb{S}^2$, μ) 下不变，甚至在 SDiff($\mathbb{S}^2$, $|\mu|$) 群下也不变；该群由 ($\mathbb{S}^2$, $|\mu|$) 的自同构构成（不一定保定向）。相比之下，泊松括号 $\{f,g\}$ 并非 $\mathbb{S}^2$ 上的函数，而是 $\mathcal{L}\to\mathbb{S}^2$ 的一个截面，即向量场 $[X_f, X_g]$ 对应的唯一势函数。若将等式两边都解释为 $\mathcal{L}$ 的截面，公式 $L_{X_f}g = \{f,g\}$ 仍然成立。

若将 $\mathcal{L}\to F$ 定义为实直线丛 $\mathcal{L} := \mathrm{Fr}(T^vF)\times_\sigma\mathbb{R}$，它由沿行列式符号关联的垂直标架丛构成，那么每个 $X\in\mathfrak{g}_c(M)$ 都对应一个势函数 $F\in\Gamma_c(F, \mathcal{L})$，满足 $i_X|\nu| = -d^vF$；其中 d^v 表示 F 的纤维上的“垂直”德拉姆微分。该定义是良定的，因为定向的选择会使等式两边同时变号。由于 FG 是一个真正的函数，纤维积分给出一个双线性形式

$$\kappa(X_F, Y_G) = \fint FG|\nu|$$

在取值于 $C_c^\infty(M)$的 $\mathfrak{g}_c(M)$上。它在如下意义下不变:

$$\kappa([X_F, X_G], X_H) + \kappa(X_G, [X_F, X_H]) = 0.$$

最后，设 λ 为 M上的闭流，即一个连续线性泛函$\lambda\colon\Omega^1_c(M)\to\mathbb{R}$，它在恰当1-形式 $d\Omega^0_c(M)$上为零。设 ∇为 $F\to M$ 上与 $|\nu|$相容的Ehresmann联络，其意义是：沿从 $x\in M$ 到 $y\in M$ 的路径 γ 的整体单值化诱导一个微分同胚$\Gamma(\gamma)\colon F_x\to F_y$，它保持垂直密度， $\Gamma(\gamma)^*|\nu|_{F_y} = |\nu|_{F_x}$。于是纤维积分ffl $F\nabla G|\nu|$是 M上的紧支撑1-形式，并且

$$\psi_{\lambda,\nabla}(X_F, Y_G) = \lambda\Big(\fint F\nabla G|\nu|\Big)$$

是 $\mathfrak{g}_c(M)$上的2-余循环。$\psi_{\lambda,\nabla}$ 的上同调类不依赖于联络的选取。事实上，任何其他联络 ∇' 与 ∇ 相差一个水平1-形式 $A\in\Omega^1(F, T^vF)$，并且具有如下性质：对每个$v_x\in T_xM$， $\pi^{-1}(x)$上的向量场 $A(v_x)\colon f\mapsto A_f(v_x)$保持垂直密度。因此 $A(v_x)\in\mathfrak{X}(\pi^{-1}(x)\ |\nu|)$具有势函数 $a(v_x)$，它是 $\mathcal{L}$ 的一个截面，使得 $i_{X_{A(v_x)}}|\nu| = -d^va(v)$。由此可知，对 $F, G\in\Gamma_c(F,\mathcal{L})$，我们有

$$\begin{aligned}\psi_{\lambda,\nabla'}(X_F, X_G) - \psi_{\lambda,\nabla}(X_F, X_G) &= \lambda\Big(\fint FL_AG|\nu|\Big)\\ &= \lambda\Big(\fint\{F,G\}a|\nu|\Big)\end{aligned}$$

是 $\eta(X_F) = \lambda(\text{ffl}\quad Fa|\nu|)$ 的余边界。

定理 12. 连续上同调 $H^2(\mathfrak{g}_c(M)\ \mathbb{R})$ 与连续对偶 $(\Omega^1_c(M)/d\Omega^0_c(M))'$ 同构。 $\mathfrak{g}_c(M)$ 上的每个连续*2*-余循环都与

$$\psi_{\lambda,\nabla}(X_F, X_G) = \lambda\Big(\oint F\nabla G|\nu|\Big) \tag{21}$$

对于闭流 $\lambda\colon \Omega^1_c(M) \to \mathbb{R}$。

在继续证明（第 3.3 节和第 3.4 节）之前，我们先说明这对扭曲环代数 $L_P\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2}$意味着什么。为了分类 2-余循环，我们考虑球面丛 $F = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$，其中 $\mathbb{Z}_2$ 对 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 的作用由 $(z, x) \mapsto (-z, -x)$ 给出，而对 $\mathbb{S}^1$ 的作用由 $z \mapsto -z$ 给出。因此， $\mathcal{L} \to F$ 的截面恰好是定义在双覆盖 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 上、满足 $F(-z, -x) = -F(z, x)$ 的函数 F。当然， $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ 仍然是一个圆周 $\mathbb{S}^1$；由于 $\Omega^1(\mathbb{S}^1)/d\Omega^0(\mathbb{S}^1)$ 是一维的，且其生成元为 $\lambda(\alpha) = \oint \alpha$，我们便得到了以下结果。

定理 13. 连续上同调 $H^2(L_P\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ 是一维的。除相差一个缩放因子外， $L_P\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2}$ 上的每个连续*2*-余循环都与以下余循环上同调等价：

$$\psi^P_\infty(F, G) := \frac{6\pi}{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)^3} \int_{\mathbb{S}^1} \Big(\int_{\mathbb{S}^2} F\partial_t G\mu \Big) dt. \tag{22}$$

余循环 $c^P_\infty \psi^P_\infty$ 可积到群层面，当且仅当 $c^P_\infty \in \mathbb{Z}$。

关于可积性条件，注意到由 [NW09]中的引理 3.10 可知，对于 $M = \mathbb{S}^1$，余循环 (12) 的可积性不依赖于“扭曲” Φ。因此，可积性条件应与定理 9 中的相同。由于球面丛 $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}_2$ 的底流形是 $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$而不是 $\mathbb{S}^1$，余循环 (22) 对应于 $\lambda(\alpha) = \frac{12\pi}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2)^3} \oint \alpha$的 (21)，也就是与余循环 (1) 相同的流。这解释了为什么 (22) 中出现因子 6π （而不是 12π）。

3.3 C_c^∞（M， $\mathfrak{k}$）的 2-余循环分类

证明定理 12 的第一步是考虑局部情形。由于球面丛 $F \to M$ 在足够小的开子集 $U \subseteq M$ 上是平凡的，因此限制在这些子集上的李代数 $\mathfrak{g}_c(U)$ 与 $C_c^\infty(U,\ \mathfrak{k})$ 同构。本节对这些李代数上的连续 2- 余循环进行分类。证明的第二步见第 3.4 节，我们将仿照 [JW13]，把李代数二阶上同调的计算化归到局部情形。

下文将 $C_c^\infty(M,\ \mathfrak{k})$ 视为 LF-李代数，其拓扑是在 M 的紧子集上，对 $\mathfrak{k}$ 中所有导数的一致收敛拓扑。

引理 14. 设 M 为一个光滑流形，且 $\mathfrak{k} = C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$。那么， $C_c^\infty(M, \mathfrak{k})$ 上的每个 *2*-余循环都与 ψ_λ上同调等价，其中 $\lambda\colon \Omega^1_c(M)/d\Omega^0_c(M) \to \mathbb{R}$是一个闭流，并且

$$\psi_\lambda(F, G) = \lambda(\kappa(FdG)).$$

由此我们当然可以立即得出定理 1。事实上，对于 $M = \mathbb{S}^1$，我们有 $\Omega^1_c(\mathbb{S}^1)/d\Omega^0_c(\mathbb{S}^1) = H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$，因此每个闭流都是 $\lambda(adt) = \oint a(e^{it})dt$的实数倍。由于 ψ_λ 与 (7) 中的余循环 ψ_∞ 成比例，定理 1 得证。

为证明引理 14，我们需要做若干准备。我们将$C^\infty_c(M, \mathfrak{k})$与射影张量积 $A \otimes_\pi \mathfrak{k}$等同，其中 $A = C^\infty_c(M)$是紧支撑光滑函数代数。若 M 为非紧，则环 $A = C^\infty_c(M)$没有单位元，因此我们不能直接应用 [NW08] 中的结果。我们首先通过证明向A 添加一个单位元后情形基本不变来解决这一问题。事实上，将恒等元添加到$A = C^\infty_c(M)$得到含幺代数 $A_{\mathbf{1}} = C^\infty_c(M) \oplus \mathbb{R}\mathbf{1}$，现在我们证明 $A_{\mathbf{1}} \otimes_\pi \mathfrak{k} = C^\infty_c(M, \mathfrak{k}) \rtimes \mathfrak{k}$ 与$A \otimes_\pi \mathfrak{k} = C^\infty_c(M, \mathfrak{k})$具有相同的连续二阶上同调。

引理 15. 若 M 为非紧，则包含映射 $\iota\colon C^\infty_c(M, \mathfrak{k}) \hookrightarrow C^\infty_c(M, \mathfrak{k}) \rtimes \mathfrak{k}$在连续李代数二阶上同调中诱导同构 $\iota^*\colon H^2(C^\infty_c(M, \mathfrak{k}) \rtimes \mathfrak{k}, \mathbb{R}) \to H^2(C^\infty_c(M, \mathfrak{k}), \mathbb{R})$。

证明。 这基本上可由 [JW13 的定理 2 的证明7]推出。由于我们需要做一些细微调整，为方便读者起见，这里重述论证。

由于 $\mathfrak{k} = C^\infty_0(\mathbb{S}^2)$是完美的 [，根据 [JW13，命题 II.4]，$A \otimes_\pi \mathfrak{k}$ 李代数是拓扑完美的74], 。由此可得，每个连续2-余循环

$$\psi\colon A \otimes_\pi \mathfrak{k} \times A \otimes_\pi \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$$

根据 [JW13，引理 2.2], ，它是对角的，因此 $\mathrm{supp}(a) \cap \mathrm{supp}(b) = \emptyset$ 蕴含$\psi(a \otimes f, b \otimes g) = 0$。为证明 ι^*是满射的，设 $\psi\colon A \otimes_\pi \mathfrak{k} \times A \otimes_\pi \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$是一个连续余循环。我们将 ψ 延拓为 $A_{\mathbf{1}} \otimes_\pi \mathfrak{k}$ 上的余循环 ψ'，令$\psi'(\mathbf{1} \otimes f, \mathbf{1} \otimes g) := 0$，并定义 $\psi'(a \otimes f, \mathbf{1} \otimes g) := \psi(a \otimes f, \chi \otimes g)$，其中 $\chi \in C^\infty_c(M, \mathbb{R})$是满足 $\chi|_{\mathrm{supp}(a)} = 1$的某个函数。由于 ψ 是对角的，该表达式不依赖于 χ的选取。为验证 ψ' 仍是余循环，注意到

$$\psi'(a \otimes f, [\mathbf{1} \otimes g, \mathbf{1} \otimes h]) + \mathrm{cyclic} = \psi'(a \otimes f, [\chi \otimes g, \chi' \otimes h]) + \mathrm{cyclic} = 0$$

对于 $\chi, \chi' \in A$ 其中 χ 在 a 的支撑上等于 $\mathbf{1}$，且 χ' 在 χ 的支撑上等于 $\mathbf{1}$。这表明 $(A \otimes_\pi \mathfrak{k}) \times \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ 上的余循环恒等式。 $\mathfrak{k} \times (A \otimes_\pi \mathfrak{k}) \times (A \otimes_\pi \mathfrak{k})$ 上的余循环恒等式类似，而 $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ 上的余循环恒等式是平凡的。

为证明 ι^* 是单射的，设 ψ' 是 $A_{\mathbf{1}} \otimes_\pi \mathfrak{k}$上的连续余循环，使得 $\iota^*\psi' = d\gamma$ 是$A \otimes_\pi \mathfrak{k}$上连续线性泛函 γ 的余边界。若将 γ零延拓到 γ': $A_{\mathbf{1}} \otimes_\pi \mathfrak{k} \to \mathbb{R}$，则 $\psi'' := \psi - d\gamma'$ 在 $A \otimes_\pi \mathfrak{k} \times A \otimes_\pi \mathfrak{k}$上为零。因此

$$\psi''([a \otimes f, b \otimes g], \mathbf{1} \otimes h) + \mathrm{cyclic} = 0$$

根据余循环恒等式，且由于 ψ'' 在 $A \otimes_\pi \mathfrak{k} \times A \otimes_\pi \mathfrak{k}$ 上消失，这意味着 $\psi''([A \otimes \mathfrak{k}, A \otimes \mathfrak{k}], \mathbf{1} \otimes \mathfrak{k}) = \{0\}$。由于 $\mathfrak{k}$是完美的，且 $A^2 = A$，这意味着

$\psi''(A\otimes\mathfrak{k},\ \mathfrak{k})=\{0\}$。由于 ψ'' 是连续的，且 $A\otimes\mathfrak{k}\subseteq A\otimes_\pi\mathfrak{k}$ 是稠密的，我们有 $\psi''(A\otimes_\pi\mathfrak{k},\ \mathfrak{k})=\{0\}$。因此， ψ'' 可经由 $\mathfrak{k}$上的连续余循环分解，而该连续余循环根据定理 2 是某个连续 1-上链的余边界。 □

引理 *14* 的证明。设 ψ 是 $A\otimes_\pi\mathfrak{k}$上的连续余循环，其中 $A=C_c^\infty(M)$，且 $\mathfrak{k}$ 是泊松代数 $\mathfrak{k}=C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$。若 M 是紧的，我们对含幺代数 A应用引理 8。若 M 是非紧的，则根据引理 15， ψ 可扩张为 $A_{\mathbf{1}}\otimes_\pi\mathfrak{k}$ 上的连续余循环，然后我们对含幺代数 $A_{\mathbf{1}}=C_c^\infty(M)\oplus\mathbb{R}\mathbf{1}$应用引理 8。

无论哪种情况，我们都得到 $\psi(a\otimes f,\ b\otimes g)=\lambda(adb)\kappa(f,\ g)+\gamma(ab\otimes[f,g])$，其中线性泛函 $\lambda\colon\Omega^1_A/dA\to\mathbb{R}$，以及 1-上链 $\gamma\colon A\otimes\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$，后者关于 $\mathfrak{k}$变量是连续的。回忆一下，K¨ahler 微分的泛性质给出了一个典范映射 $\Omega^1_A/dA\to\Omega^1_c(M)/d_{\mathrm{dR}}C_c^\infty(M)$。我们需要证明 λ可通过一个连续线性映射 $\Omega^1_c(M)/dC_c^\infty(M)\to\mathbb{R}$分解，并且余循环 γ 是连续的。

由于 $\mathfrak{k}$ 是完美的 [ALDM74], ，由 [JW13, 命题 II.4，引理 2.2]可知， ψ 是对角的：若 $\mathrm{supp}(a)\cap\mathrm{supp}(b)=\emptyset$ ，则 $\lambda(adb)=0$。若我们取 $f\in\mathfrak{k}$，使得 $\kappa(f,\ f)=1$，便可得双线性映射 $(a,\ b)\mapsto\lambda(adb)=\psi(a\otimes f,\ b\otimes f)$ 同样是对角的。

但此时映射 $\check{\lambda}\colon C_c^\infty(M)\to C_c^\infty(M)'\colon b\mapsto\lambda(\ \cdot db)$ 从测试函数到分布是局部的，也就是说，对于所有 $a\in C_c^\infty(M)$，都有 $\mathrm{supp}(\check{\lambda}(a))\subseteq\mathrm{supp}(a)$。由于该余循环是联合连续的，映射 $(a,\ b)\mapsto\lambda(adb)$ 也联合连续，因此 $b\mapsto\lambda(\ \cdot db)$ 根据佩特雷定理是一个微分算子。它是一个一阶微分算子，因为

$$(\delta_\alpha\delta_\beta\check{\lambda})(b):=\check{\lambda}(\alpha\beta b)-\alpha\check{\lambda}(\beta b)-\beta\check{\lambda}(\alpha b)+\alpha\beta\check{\lambda}(b)=0$$

对所有 $\alpha,\ \beta\in C_c^\infty(M)$，因此存在 $\phi_0,\ \phi_1^\mu$ 上的分布，使得 $\check{\lambda}(b)(a)=b\phi_0+\partial_\mu b\phi_1^\mu$ 在局部坐标中成立（重复指标表示求和）。因此 $\lambda(adb)=\phi_0(ab)+\phi_1^\mu(a\partial_\mu b)$。利用 $b=\mathbf{1}$ ，我们看到 $\phi_0=0$，所以 λ可降为连续线性映射 $\phi_1\colon\Omega^1_c(M)/dC_c^\infty(M)\to\mathbb{R}$，如所需。

最后，为了证明 1-上链 γ 是连续的，我们按 (14) 中的方法进行。可由 ψ 恢复该 1-上链:

$$\gamma(a\otimes\{f,g\})=\tfrac{1}{2}(\psi(a\otimes f,\mathbf{1}\otimes g)-\psi(a\otimes g,\mathbf{1}\otimes f)),$$

由于 ψ 是连续的，映射 $a\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 也是连续的。我们已从备注2得知 $f\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 是连续的，因此双线性映射 $(a,\ f)\mapsto\gamma(a\otimes f)$ 分别连续。由于 A和 $\mathfrak{k}$是桶化局部凸向量空间，巴拿赫–施泰因豪斯定理表明，该双线性映射在 $A\times\mathfrak{k}$ 上联合连续。这意味着，根据射影张量积的泛性质， γ 可延拓为连续线性泛函 $\gamma\colon A\otimes_\pi\mathfrak{k}\to\mathbb{R}$ ，从而完成证明。

□

3.4 定理12的证明

第二步中，按照 [JW13], ，我们将李代数二阶上同调的计算化归为局部情形。

定理 *12* 的证明。对于一个开集 $U \subseteq M$，令 $\mathfrak{g}_c(U)$ 表示与 $\pi\colon F \to M$ 在 U 上的限制相关联的李代数。对于足够小的开邻域 $U \subseteq \mathbb{R}$，它与 $C_c^\infty(U, \mathfrak{k})$ 同构。更一般地，$\mathfrak{g}_c(U)$ 是弗雷歇–李代数 $\mathfrak{K} \to M$ 构成的局部平凡丛的截面空间，其纤维为 $\mathfrak{K}_x = \mathfrak{X}(\pi^{-1}(x) \ |\nu|)$。

根据 [JW13，推论 2.5], ，将开子集 $U \subseteq M$映射到第二连续李代数上同调 $\mathcal{S}(U) = H^2(\mathfrak{g}_c(U) \ \mathbb{R})$ 的预层 $\mathcal{S}$ 满足局部恒等元公理。根据 [JW13，命题 2.6] ，由 $\mathcal{F}(U) = \mathrm{Hom}(\Omega_c^1(U)/dC_c^\infty(U) \ \mathbb{R})$ 定义的预层 $\mathcal{F}$ 是一个层。由于

$$\lambda_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{S}(U); \lambda \mapsto [\psi_{\lambda,\nabla}]$$

它是预层的单态射，且在足够小的开子集 U上是同构，因此根据 [JW13，命题 2.8]，它是同构。特别地，$\mathcal{S}$ 是一个层。在 $U = M$上取值可得

$$H^2(\mathfrak{g}_c(M), \mathbb{R}) \simeq \left(\Omega^1(M)/dC^\infty(M)\right)'$$

如所需。 □

4 几何量子化

为了将 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的余循环 (1) 展示为 $k \to \infty$ 上 Kac-Moody 余循环在 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 上的极限，我们需要用到一些几何量子化中的著名结果。本节将回顾这些结果，并专门讨论二维球面。由于我们需要显式地处理复结构，因此将 $\mathbb{S}^2$ 与射影直线 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$等同起来会很方便。

设 $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^1, ,$ 并令 μ 为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上 SU(2) 不变的辛形式。我们假设，按照由复结构诱导的定向，μ 为正。令 $\mathbb{L} = \tau^*$ 为 τ 上典范线丛 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的对偶。我们赋予 $\mathbb{L}$ 由 τ 到平凡丛 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ 的包含映射诱导的 SU(2) 不变联络 ∇ 和厄米形式 h 。于是（$\mathbb{L}$，∇，h）是一个 SU(2)-等变预量子线丛，其曲率为整形式

$$F_\nabla = -i\omega.$$

每个定义在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上的 SU(2) 不变辛形式 μ 都与 ω 成比例，并且由于 $\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) = 2\pi$ ，我们有

$$\mu = \frac{\mathrm{Vol}_\mu(\mathbb{S}^2)}{2\pi}\omega. \tag{23}$$

4.1 量子同胚群与泊松李代数

令 $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \nabla, h)$ 表示量子同胚群，即保持线丛 $\mathbb{L} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上联络和厄米内积的（光滑）自同构群。自同构 $g\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ 覆盖一个微分同胚$g_M\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1, ;$ 由于 g 保持联络，g_M 也保持辛形式。映射 $g \mapsto g_M$ 是从 $\mathcal{G}$

到 SDiff($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$) 的满射群同态。其核，即 ($\mathbb{L}$, ∇, h) 的竖直自同构群 $\mathcal{Z} \simeq$U(1)，是 $\mathcal{G}$ 的中心。

量子同胚群是一个 Fr´echet–李群 [RS81], ，其李代数 Lie($\mathcal{G}$) 与泊松代数 C^∞($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$) 同构。这个同构或许最容易通过主 U(1) 丛$P = \{\lambda \in \mathbb{L}$来描述； h(λ, λ) $= 1\}$，以及由 ∇ 诱导的联络 1-形式 $\theta \in \Omega^1(P, i\mathbb{R})$。于是 Lie($\mathcal{G}$) 是 P 上 U(1)-等变向量场 X 构成的李代数，而要求 $L_X\theta = 0$ 意味着 $i_X d\theta + d(i_X\theta) = 0$。由于$X$ 和 θ 都是等变的， $i_X\theta$ 也同样是等变的，并且

$$i_X\theta = -i\pi^* f$$

对于某个 $f \in C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{R})$。由于 $d\theta = \pi^* F_\nabla = -i\pi^*\omega$，函数 f 通过 $i_{X_f}\omega + df = 0$ 决定了 X 的水平分量 $X_f \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \omega)$。由于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是单连通的，每个辛向量场都是哈密顿的，而映射 $f \mapsto X_f$ 是一个从 $C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{R})$ 到辛向量场李代数 $\mathfrak{X}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \omega)$ 的满射李代数同态。其核是由常值函数构成的阿贝尔李代数 $\mathbb{R}$，而中心扩张

$$1 \to \mathrm{U}(1) \to \mathcal{G} \to \mathrm{SDiff}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to 1 \tag{24}$$

Fr´échet–李群的对应物是中心扩张

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{R}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \omega) \to 0 \tag{25}$$

Fr´échet–李代数的对应物。

备注 4。 注意，李代数扩张 (25) 是平凡的，因为常数作为一个理想分裂出来 [JV16，推论 3.6]。相比之下，群扩张 (24) 是非平凡的；SU(2) 在 $\mathbb{L} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上的自然作用保持联络不变，因此诱导出一个包含映射 SU(2) $\hookrightarrow \mathcal{G}$ ，其覆盖了包含映射 SU(2)/$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow$ SDiff($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$)。将 (24) 限制到 SU(2)/$\mathbb{Z}_2$ 上所得的是自旋$_c$扩张

$$1 \to \mathrm{U}(1) \to \mathrm{SU}(2) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{U}(1) \to \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \to 1.$$

由于 Diff($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$) 是一个主 SDiff($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$)-丛，其底空间是由恒定总质量的光滑正测度构成的可缩空间 [Ham82，定理 2.5.3], ，并且根据 Smale 定理 [S59], ，包含映射 SU(2)/$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow$ SDiff($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$) 是一个同伦等价，因而量子同胚群 $\mathcal{G}$ 具有自旋$_c$(3) $=$ SU(2) $\times_{\mathbb{Z}_2}$ U(1) 的同伦型。

4.2 几何量子化

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathcal{H}_k := \Gamma_{L^2}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{L}^{\otimes k})$ 记为 $\mathbb{L}^{\otimes k}$ 的平方可积截面所构成的希尔伯特空间，其内积为

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} h^{\otimes k}(\sigma_1, \sigma_2)\omega.$$

$\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{H}_k$ 上的酉表示由下式给出

$$\rho^k(g)s := g^{\otimes k} \circ s \circ g_M^{-1},$$

并由此得到李代数表示

$$d\rho^k(f)s = \left(ikf - \nabla_{X_f}^{\otimes k}\right) s$$

在光滑截面 $\Gamma(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{L}^{\otimes k})$ 上的 Lie($\mathcal{G}$) $= C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$。

令 $V_k := \Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{L}^{\otimes k})$ 为全纯截面的空间，并令Π_k: $\mathcal{H}_k \to V_k$ 为到 V_k 上的正交投影（Szeg″o 投影）。群 SU(2) $\subseteq \mathcal{G}$ 通过全纯变换作用于 $\mathbb{L}$，因此 V_k是 SU(2) 的酉表示。根据 Borel–Weil 定理，它们是不可约的，并且 SU(2) 的所有不可约表示都具有这种形式。为明确给出同构，我们对每个 $\alpha \in \mathbb{C}^{2*}$ 定义全纯截面 σ_α: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{L}^{\otimes k}$，其定义为 $\sigma_\alpha([\psi]) = \alpha^{\otimes k}|_{\mathbb{C}\psi}$。

命题16。映射 $S^k(\mathbb{C}^{2*}) \to \Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{L}^{\otimes k})$ 定义为

$$\alpha^{\otimes k} \mapsto \sqrt{k+1}\sigma_\alpha$$

是酉$\mathrm{SU}(2)$表示之间的等距同构。

（它们是维数为 $d = k+1 = 2s+1$ 的自旋 $s = k/2$ 表示。）

证明。 由于 $\mathbb{L}$ 是典范线丛 τ 的对偶，线性同构由 Riemann-Roch 得出。它是交织算子这一事实可直接由定义推出；又由于两个表示都是不可约的，因此除一个比例因子外，它是等距的。关键在于确定这个比例因子。

使用反酉同构 $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^{2*}$ 来将 $\alpha(\chi) = \langle \Omega\ \chi\rangle$ 写作某个 $\Omega \in \mathbb{C}^2$，这样做很方便。由于对于所有 $l \in \tau_{[\psi]}^{\otimes k}$，都有 $\sigma_\Omega([\psi])(l) = \langle \Omega\langle\psi, \psi\rangle^k\langle\psi^{\otimes k}, l\rangle$，我们有

$$h^{\otimes k}(\sigma_\Omega, \sigma_\Omega)_{[\psi]} = \left(\frac{\langle\Omega,\psi\rangle\langle\psi,\Omega\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle}\right)^k.$$

在原点 $[1,0]$, 周围的射影坐标图 $[1,z] \mapsto z$ 中，$\mathbb{L}$ 上典范联络 ∇ 的曲率为 $F_\nabla = 1/(1+|z|^2)^2 dz \wedge dz$，因此 $F_\nabla = -i\omega$，对于总体积为 Vol$_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) = 2\pi$ 的辛形式 $\omega = \frac{}{}^2 (1+|z|^2)^2 dx \wedge dy$，有$P_\psi = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi\ \psi\rangle}$，且 $\Omega = (u, 0)$，由此我们得到

$$\begin{aligned}\langle\sigma_\Omega, \sigma_\Omega\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} h(\Omega, P_\psi\Omega)^k\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{u}^k u^k (1+|z|^2)^{-2-k} dxdy.\end{aligned}$$

生成函数 $G(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(-\lambda)^k\langle\sigma^{(k)}\Omega\sigma^{(k)}\Omega\rangle$ 于是为

$$\begin{aligned}G(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty (1+r^2)^{-2} e^{-\lambda|u|^2(1+r^2)^{-1}} r dr d\phi \\ &= \int_0^1 e^{-\lambda|u|^2 y} dy = \frac{1}{\lambda|u|^2}(1 - e^{-\lambda|u|^2}),\end{aligned}$$

因此 $\langle \sigma^{(k)}\Omega\, \sigma^{(k)}\Omega \rangle = \frac{1}{k+1}\langle \Omega,\ \Omega\rangle^k$。 □

由于 ρ^k 是酉表示，“条件期望”

$$\Phi_k \colon \mathcal{G} \to B(V_k), \quad g \mapsto \Pi_k \circ \rho^k(g) \circ \Pi_k$$

是正的：我们有

$$\sum_{i,j} \langle v_i, \Phi_k(g_i^{-1} g_j) v_j \rangle \geq 0$$

对 $V_k \times \mathcal{G}$中的所有有限序列(v_i, g_i)成立。从而，映射 $\phi_k(g) := \langle \Omega_k, \Phi_k(g)\Omega_k \rangle$对每个$\Omega_k \in V_k$都是正的。若$\Omega_k$ 对$(\rho^k, \mathcal{H}_k)$是循环的，则 $\mathcal{G}$-表示可通过GNS构造从 ϕ_k 恢复。由于SU(2)通过全纯变换作用在 $\mathbb{L}$ 上，映射 Φ_k 对SU(2)的左作用和右作用都是等变的。

由于每个全纯截面都是光滑的，且每个光滑截面都是 $\mathcal{G}$-表示$(\rho^k, \mathcal{H}_k)$中的光滑向量，正映射 Φ_k： $\mathcal{G} \to B(V_k)$是光滑的。它的导数

$$d\Phi_k(f) = \Pi_k \circ (ikf\mathbf{1} - \nabla_{X_f}^{\otimes k}) \circ \Pi_k$$

映入斜厄米算子， $d\Phi_k$： $C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to \mathfrak{u}(V_k)$。该映射是 $\mathfrak{su}(2)$-等变的；特别地，它沿包含映射 ι： $\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$的拉回恰好是自旋 $k+1$ 表示 π_k： $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{u}(V_k)$。换言之，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) & \xrightarrow{d\Phi_k} & \mathfrak{u}(V_k) \\ & {\scriptstyle\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\pi_k} & \\ & \mathfrak{su}(2) & \end{array} \tag{26}$$

（请注意， $d\Phi_k$ 不是李代数同态，但它与ι 的复合是。）若将 $d\Phi_k$ 缩放 $\hbar := 1/k$，便可得到几何量子化映射$Q_k := \frac{1}{k} d\Phi_k$，

$$Q_k(f) = \Pi_k \circ \left(if\mathbf{1} - \frac{1}{k} \nabla_{X_f}^{\otimes k} \right) \circ \Pi_k.$$

4.3 Berezin-Toeplitz量子化

The $f \in C^\infty$的***Berezin-Toeplitz*量子化**of $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{R})$ is the operator

$$T_k(f) := \Pi_k \circ (f\mathbf{1}) \circ \Pi_k. \tag{27}$$

请注意， T_k： $C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{R}) \to i\mathfrak{u}(V_k)$映射到厄米算子。Berezin-Toeplitz量子化与几何量子化之间的关系由Tuynman 引理给出：

引理 17 (Tuynman, [T87, BHSS91])**.** 设(M, ω) 是一个可预量子化的$K\ddot{a}hler$流形，其预量子线丛为$(\mathbb{L}, \nabla)$。那么

$$\Pi_k \circ \nabla_{X_f} \circ \Pi_k = \Pi_k \circ (-i/2)\Delta f \circ \Pi_k,$$

其中 Δ 是该黎曼度量对应的 *Laplace-Beltrami*算子。

由于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是一个 K¨ahler 流形，Tuynman 引理表明，对于 $\mathbb{L}^{\otimes k}$，几何量子化 Q_k 与 Berezin-Toeplitz 量子化 T_k 之间的关系为

$$Q_k(f) := iT_k(f + \tfrac{1}{2k}\Delta f).$$

特别地，这意味着 $Q_k(f) \to iT_k(f)$ 在 $\|\cdot\|_{C^2}$ 中对 $k \to \infty$ 一致成立。
Berezin-Toeplitz 量子化具有以下性质；关于前两部分，参见 [BMS94]定理 4.1 和 4.2，关于第三部分，参见 [G79] 。

定理 18 ([BMS94])。 设 (Σ, ω) 是一个可预量子化的紧致 *Kähler* 流形，其维数为 $2d$，且 $\mathbb{L} \to \Sigma$ 是一个非常充足的预量子线丛。

1）对于每个 $f \in C^\infty(\Sigma)$，都存在一个常数 $c_f > 0$ 使得

$$\|f\|_\infty - \frac{c_f}{k} \le \|T_k(f)\| \le \|f\|_\infty.$$

2）对于每个 $f, g \in C^\infty(\Sigma)$，都存在一个常数 $c_{f,g} > 0$ 使得

$$\|k\,[T_k(f), T_k(g)] - iT_k(\{f, g\})\| \le \frac{c_{f,g}}{k}.$$

3）对于 $f_1, \dots f_n \in C^\infty(\Sigma)$，存在一个常数 $c_{f_1,\dots,f_n} > 0$ 使得

$$\Big|\frac{1}{\dim(V_k)}\mathrm{tr}(T_k(f_1)\cdots T_k(f_n)) - \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Sigma)}\int_\Sigma f_1 \cdots f_n\,(\omega^d/d!)\Big| \le \frac{c_{f_1,\dots,f_n}}{k}.$$

注意，对于 $\Sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^1,$，我们有 $\dim(V_k) = k+1$，且 $\mathrm{Vol}(\Sigma) = 2\pi$。

5 Kac-Moody 代数的模糊球极限

我们将 $\mathfrak{u}(V_k)$ 与 $\mathfrak{u}(k+1)$ 等同，并将 $\mathfrak{su}(V_k)$ 与 $\mathfrak{su}(k+1)$ 等同。几何量子化给出一个映射 $d\Phi_k\colon C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to \mathfrak{u}(k+1)$，对常数取迹后，该映射归结为映射 $d\Phi_k\colon C_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to \mathfrak{su}(k+1)$。环代数层面上相应的映射 $Ld\Phi_k\colon LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to L\mathfrak{su}(k+1)$ 使我们能够将 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 上的 Kac-Moody 余循环 ψ_k 拉回为 $LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 上的反对称双线性形式 $(Ld\Phi_k)^*\psi_k$ ——它们并不完全是余循环，因为映射 $Ld\Phi_k$ 并非真正的李代数同态。我们证明，在极限 $k \to \infty$ 下，只要将这些双线性形式乘以因子 $6/k^3$ 进行重标度，它们就会收敛到式 (1) 中的余循环 ψ_∞ 。

5.1 利用几何量子化比较余循环

在 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 上，每个李代数余循环都与某个常数 $c_k \in \mathbb{R}$ 对应的 $c_k\psi_k$ 上同调等价，其中 ψ_k 是 Kac-Moody 上闭链

$$\psi_k(X, Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1} \kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X, \tfrac{d}{dt}Y)dt.$$

这里 $\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X,\ Y)\ =\mathrm{tr}(XY)$ 是 $\mathfrak{su}(k+1)$ 的 Killing 型，其归一化方式使得余根 $h=\mathrm{diag}(i,\ -i,\ 0,\ \dots,\ 0)$ 满足 $\kappa(h,\ h)\ =-2$。当且仅当 c_k 是整数时，相应的中心扩张才能积分到群层面 [PS86，定理 4.4.1]。

将余循环 ψ_k 从 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 扩展到 $L\mathfrak{u}(k+1)$，并使用相同的公式，会很方便。然后，我们可以沿着映射 $L(d\Phi_k)$: $LC^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)\ \to L\mathfrak{u}(k+1)$，将双线性映射 ψ_k 拉回到 $LC^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$。

利用 $d\Phi_k(f)\ =ikT_k(f+\frac{1}{2k}\Delta f)$ 以及记号 $g'=\frac{d}{dt}g$，可得

$$\begin{aligned}(Ld\Phi_k)^*\psi_k(f,g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(d\Phi_k(f),d\Phi_k(g'))dt\\ &= -\frac{k^2}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(T_k(f+\tfrac{1}{2k}\Delta f)T_k(g'+\tfrac{1}{2k}\Delta g'))dt\\ &= -\frac{k^2}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\frac{k+1}{\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}fg'\omega+\mathcal{O}(1)\Big)dt\\ &= -\frac{k^2(k+1)}{2\pi\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}fg'\omega\wedge dt+\mathcal{O}(k^2).\end{aligned}$$

（最后一步利用了 Berezin-Toeplitz量子化中迹与刘维尔测度的相容性，见定理 18 第 3 部分。符号 $\mathcal{O}(k^2)$ 表示一个加性项，其大小受 $c_{f,\ g}k^2$ 控制，其中常数 $c_{f,\ g}$ 可以依赖于 f 和 g。）

我们不想比较 $LC^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 和 $L\mathfrak{u}(k+1)$，而是希望比较完美李代数 $LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 和 $L\mathfrak{su}(k+1)$。由于 $d\Phi_k$ 不一定会将均值为零的函数 $C_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 映射到无迹矩阵 $\mathfrak{su}(k+1)$，因此我们将常数项迹除，并定义：

$$d\overline{\Phi}_k(f):=d\Phi_k(f)-\tfrac{1}{k+1}\mathrm{tr}(d\Phi(f))\mathbf{1}.$$

通过 $Ld\Phi_k(f)$ 拉回，我们得到一个修正项

$$(Ld\overline{\Phi}_k)^*\psi_k=(Ld\Phi_k)^*\psi_k-\tfrac{1}{2\pi(k+1)}\textstyle\int_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(d\Phi_k(f))\mathrm{tr}(d\Phi_k(g'))dt.$$

由于 $\mathrm{tr}(d\Phi_k(f))\ =\mathrm{tr}(ikT_k(f)+\mathcal{O}(1))$ 且 $\mathrm{tr}(T_k(f))\ =\underline{(k+1)\,\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)}\ \int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}f\omega+\mathcal{O}(1)$，我们发现这个修正项为

$$+\frac{k^2(k+1)}{2\pi\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^2}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}f\omega\Big)\Big(\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}g'\mu\Big)dt+\mathcal{O}(k^2).$$

将 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上的平均值记为

$$\overline{f}:=\tfrac{1}{\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)}\textstyle\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}f\omega,$$

于是我们得到

$$(Ld\overline{\Phi}_k)^*\psi_k=-\frac{k^2(k+1)}{2\pi\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}(f-\overline{f})(g-\overline{g})'\omega dt+\mathcal{O}(k^2).\qquad(28)$$

特别地，修正项不影响积分为零的函数的子代数$C_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$上的最高阶项。

由于余循环 ψ_∞ （视为哈密顿向量场李代数上的余循环）与体积形式的选择无关，我们可以选择$\mu = \omega$ ，以便与（$Ld\Phi_k$）$^*\psi_k$进行比较。由于 $\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{S}^2) = 2\pi$，(1) 中的前置因子变为 $6/(2\pi)^2$, ，于是我们得到（逐点）极限

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{6}{k^3}(Ld\overline{\Phi}_k)^*\psi_k = \psi_\infty. \tag{29}$$

5.2 余循环的整性与极限定理

我们通过线丛 $\mathbb{L} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 上的标准双全纯作用，将 SU(2) 视为 $\mathcal{G}$ 的一个子群，并将包含映射记为 ι: SU(2) $\hookrightarrow \mathcal{G}$。根据博雷尔-韦伊定理，酉自旋 $s = k+1$ 表示 π_k: SU(2) $\to U(V_k)$ 是 Φ_k: $\mathcal{G} \to$End(V_k) 沿包含映射 ι: SU(2) $\hookrightarrow \mathcal{G}$ 的拉回。应用环函子，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} L\mathcal{G} & \xrightarrow{\quad L\Phi_k \quad} & L\mathrm{End}(V_k) \\ & {\scriptstyle L\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle L\pi_k} & \\ & LSU(2). & \end{array} \tag{30}$$

注意，（虚线）水平映射并非群同态，但两个对角映射是。在李代数层面，这给出交换图

$$\begin{array}{ccc} LC^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) & \xrightarrow{\quad Ld\Phi_k \quad} & L\mathfrak{u}(V_k) \\ & {\scriptstyle L\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle L\pi_k} & \\ & L\mathfrak{su}(2), & \end{array} \tag{31}$$

其中映射 $Ld\Phi_k$ 同样不是李代数同态。

由于 $\mathfrak{su}(2)$映射到积分为零的函数空间 $C_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$，且由于 $d\Phi_k$ 映射到无迹矩阵，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) & \xrightarrow{\quad L\overline{d\Phi}_k \quad} & L\mathfrak{su}(V_k) \\ & {\scriptstyle L\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle L\pi_k} & \\ & L\mathfrak{su}(2). & \end{array} \tag{32}$$

同样， $L\iota$ 和 $L\pi_k$ 是李代数同态，但水平映射

$L\overline{d\Phi}_k$ 不是。尽管如此，余循环

$$\psi_1(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(\xi,\eta')dt \tag{33}$$

$$\psi_k(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X,Y')dt \tag{34}$$

$$\psi_\infty(f,g) = \frac{6}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{S}^2} fg'\omega\Big)dt \tag{35}$$

在 $L\mathfrak{su}(2)$、 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 和 $LC_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上可以安排一个图表

$$\begin{array}{ccc} c_\infty\psi_\infty & \xleftarrow{\quad L\overline{d\Phi}_k^*\quad} & c_k\psi_k \\ & {\scriptstyle L\iota^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle L\pi_k^*} & \\ & c_1\psi_1. & \end{array} \tag{36}$$

通过审慎选择这些常数，该图表具有以下意义上的"渐近可交换性":

定理 19. 李代数余循环 $c_1\psi_1$、 $c_k\psi_k$ 和 $c_\infty\psi_\infty$ 可积到群层面，当且仅当相应的常数 c_1、 c_k 和 c_∞ 是整数。

a) We have $(L\iota)^*c_\infty\psi_\infty = c_1\psi_1$ *if and only if*

$$c_1 = -c_\infty.$$

b) 我们有 $(L\pi_k)^*c_k\psi_k = c_1\psi_1$ ，当且仅当

$$c_1 = \tfrac{k(k+1)(k+2)}{6}c_k.$$

c) 最后，若 $c_k = -\frac{6}{k(k+1)(k+2)}c_\infty$ ，则有（逐点）极限

$$\lim_{k\to\infty}(L\overline{d\Phi}_k)^*c_k\psi_k(f,g) = c_\infty\psi_\infty(f,g).$$

注 5. 注意，对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，$\frac{k}{(k+1)(k+2)}\ 6$ 都是整数，并且 c 点中的中心荷 c_k 在 k足够大时满足 $0 < c_k < 1$ 。特别地，相应的余循环 $c_k\psi_k$ 无法积到群层面。

证明。 $c_k\psi_k$ 可积到群层面当且仅当 $c_k\in\mathbb{Z}$ ，这是众所周知的结果 [PS86, 定理 4.4。1], 而 $c_\infty\psi_\infty$ 可积到群层面当且仅当 $c_\infty\in\mathbb{Z}$ ，这是定理 9。由于 $\mathrm{Vol}_\omega(\mathbb{CP}^1) = 2\pi$，因此 $(L\iota)^*\psi_\infty = \psi_1$ 当且仅当 $c_\infty = -c_1$ ，这一事实可由定理 9 的证明中的方程 (19) 推出。

不变双线性形式 $\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$ 沿李代数同态 $\pi_k\colon \mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{su}(k+1)$ 的拉回，是单李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 上的一个不变双线性形式，因而为 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$ 的某个倍数。对于

b) 部分，只需确定这个比例常数。 $\mathfrak{su}(2)$ 上的 Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$ 被规范化，使得对于余根 $h = \mathrm{diag}(i, -i)$ 有 $\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(h, h) = -2$ 。Killing 型 $\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$ 被规范化，使得它在 $\mathfrak{su}(k+1)$ 的余根上取值为 -2 。由于 $\mathrm{spec}(\pi_k(h)) = \{-ik, -i(k-2)\dots, i(k-2)\ ik\}$，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(\pi_k(h), \pi_k(h)) &= -\big((-k)^2 + (-k+2)^2 + \ldots + (k-2)^2 + k^2\big) \\ &= -\tfrac{1}{3}k(k+1)(k+2).\end{aligned}$$

因此 $\pi_k^* \kappa_{\mathfrak{su}(k+1)} = -\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$，并且

$$(L\pi_k)^* \psi_k = \tfrac{k(k+1)(k+2)}{6}\psi_1.$$

最后，根据 $c_k = -\frac{6}{k(k+1)(k+2)} c_\infty$，由方程（29）可得逐点极限 $\lim_{k\to\infty}(Ld\Phi_k)^* c_k \psi_k(f, g) = c_\infty \psi_\infty(f, g)$，对所有 $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ 均成立。 □

5.3 扭曲 Kac-Moody 代数的模糊球极限

二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点反射 $P(x) = -x$ 在 $\mathrm{SDiff}(\mathbb{S}^2, \mu)$ 上诱导一个自同构 $\phi \mapsto P \circ \phi \circ P^{-1}$，因此在其李代数 $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2, \mu)$ 上诱导一个自同构 $\alpha_P(X_f) = P_* X_f \circ P^{-1}$。由于 $P^*\mu = -\mu$，这在泊松代数 $C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上诱导自同构 $\alpha_P(f) = -(P^{-1})^* f$。

如果将二维球面与 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$，认同，那么点反射就是反全纯映射

$$P\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1, \quad P([z:w]) = [-\overline{w} : \overline{z}].$$

在典范线丛 $\tau \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$，上，它由反全纯丛反同构覆盖

$$P^\tau\colon \tau \to \tau, \quad P^\tau(z, w) = (-\overline{w} : \overline{z}).$$

注意， P^τ 在纤维上是反线性的，并且 $(P^\tau)^2 = -\mathrm{Id}$。在对偶丛 $\mathbb{L} = \tau^*$ 上，我们于是得到反线性、反全纯的丛自同构

$$P^{\mathbb{L}}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}, \quad P^{\mathbb{L}}(\alpha) := \overline{\alpha} \circ (P^\tau)^{-1}.$$

如果 $\alpha \in \mathbb{L}_{[z,w]}$，那么 $P^{\mathbb{L}}(\alpha) \in \mathbb{L}_{P[z:w]}$。事实上，若 α 是 $\tau_{[z:w]}$ 上的线性泛函，那么 $P^{\mathbb{L}}(\alpha)$ 是反线性映射 $\alpha\colon \tau_{[z:w]} \to \mathbb{C}$ 与反线性映射 $(P^\tau)^{-1}\colon \tau_{P[z:w]} \to \tau_{[z:w]}$ 的复合，因此是线性映射 $P^{\mathbb{L}}(\alpha) : \tau_{P[z:w]} \to \mathbb{C}$。映射 $P^{\mathbb{L}}\colon \mathbb{L}_{[z:w]} \to \mathbb{L}_{P[z:w]}$ 是反线性的，而 $P^{\mathbb{L}}\colon \mathbb{L}^{\otimes k} \to \mathbb{L}^{\otimes k}$ 是一个反全纯自同构，它将命题16中的全纯截面 σ_Ω 映射为全纯截面 $P_*^{\mathbb{L}}\sigma_\Omega = P^{\mathbb{L}} \circ \sigma_\Omega \circ P^{-1} = \sigma_{(P_*)^{\otimes k}\Omega}$，其中

$$P_* \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\Omega}_2 \\ \overline{\Omega}_1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

因此 $P_*^{\mathbb{L}}$: $\Gamma_{\mathrm{Hol}}(\mathbb{L}^{\otimes k}) \to \Gamma_{\mathrm{Hol}}(\mathbb{L}^{\otimes k})$ 是一个反线性同构，可利用命题16将其识别为 $(P_*)^{\otimes k}$: $S^k\mathbb{C}^2 \to S^k\mathbb{C}^2$。映射 $d\Phi_k$: $\underline{C}^\infty(\mathbb{S}^2) \to \mathfrak{u}(V_k)$ 以及其无迹版本 $d\Phi_k$: $C_0^\infty(\mathbb{S}^2) \to \mathfrak{su}(V_k)$ 均在点反射下等变。

引理20. 对于 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$，我们有

$$d\Phi_k(\alpha_P(f)) = P_*^{\mathbb{L}} d\Phi_k(f)(P_*^{\mathbb{L}})^{-1}.$$

无迹版本 $d\overline{\Phi}_k$也满足相同的等变性。

证明. 回顾 $d\Phi_k(f) = iT_k(kf + \frac{1}{2}\Delta f)$。由于 P^*与 Laplace-Beltrami算子 Δ 对易，对于光滑函数 $g := kf + \frac{1}{2}\Delta f$，我们有 $d\Phi_k(\alpha_P f) = iT_k(\alpha_P g)$，因此只需证明 Berezin- Toeplitz 量子化的等变性，即 $iT_k(\alpha_P g)P_*^{\mathbb{L}} = P_*^{\mathbb{L}} iT_k(g)$。

由于 $P_*^{\mathbb{L}}$是反线性的，且与全纯截面上的投影 Π_k 对易，我们有

$$P_*^{\mathbb{L}} iT_k(g)s = -i\Pi_k P_*^{\mathbb{L}}(gs) = -i\Pi_k((P^{-1})^* g)P_*^{\mathbb{L}} s$$

对于 $\mathbb{L}^{\otimes k}$的全纯截面 s，这与

$$iT_k(\alpha_P g)P_*^{\mathbb{L}}(s) = i\Pi_k(-P^{-1})^* g)P_*^{\mathbb{L}} s$$

如所需。由此可直接得出无迹版本的等变性:

$$\begin{aligned} d\overline{\Phi}_k(\alpha_P(f)) &= d\Phi_k(\alpha_P(f)) - \tfrac{1}{k+1}\mathrm{tr}\big(d\Phi_k(\alpha_P(f))\big)\mathbf{1} \\ &= P_*^{\mathbb{L}} d\Phi_k(f)(P_*^{\mathbb{L}})^{-1} - \tfrac{1}{k+1}\mathrm{tr}\big(P_*^{\mathbb{L}} d\Phi_k(f)(P_*^{\mathbb{L}})^{-1}\big)\mathbf{1} \\ &= P_*^{\mathbb{L}}\Big(d\Phi_k(f)(P_*^{\mathbb{L}})^{-1} - \tfrac{1}{k+1}\mathrm{tr}\big(d\Phi_k(f)\big)\mathbf{1}\Big)(P_*^{\mathbb{L}})^{-1} \\ &= P_*^{\mathbb{L}} d\overline{\Phi}_k(\alpha_P(f))(P_*^{\mathbb{L}})^{-1}. \end{aligned}$$

□

由于 $\mathfrak{su}(2)$在点反射下保持不变，交换图 (32) 可限制为交换图

$$\begin{array}{ccc} LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^P & \xrightarrow{L\overline{d\Phi}_k} & L\mathfrak{su}(V_k)^P \\ & {\scriptstyle L\iota}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle L\pi_k} & \\ & L\mathfrak{su}(2). & \end{array} \tag{38}$$

这里，$LC_0^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^P$ 表示所有满足 $F_{t+1} = \alpha_P(F_t)$ 的光滑函数F: $\mathbb{R} \to C_0^\infty(\mathbb{S}^2)$ 所构成的扭曲环代数，而 $L\mathfrak{su}(V_k)^P$表示所有满足 $\xi_{t+1} = P_*^{\mathbb{L}}\xi_t(P_*^{\mathbb{L}})^{-1}$ 的光滑函数 ξ: $\mathbb{S}^1 \to \mathfrak{su}(V_k)$ 所构成的扭曲环代数。

若利用命题16将 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathbb{L}^{\otimes k})$ 与 SU(2)-表示$S^k\mathbb{C}^2$对应起来，那么由式（37），反线性映射 $P_*^{\otimes k}$: $S^k\mathbb{C}^2 \to S^k\mathbb{C}^2$ 由 $P_*^{\otimes k} = \pi_k(u) \circ J = J \circ \pi_k(u)$ 给出，其中 J 是 $S^k\mathbb{C}^2$ 上的复共轭，并且

$$u = \exp(-\tfrac{1}{2}\pi i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证， P_* 对 $\mathfrak{su}(2)$ 的共轭作用是平凡的，因此 $L\mathfrak{su}(2)^P = L\mathfrak{su}(2)$。对于 $k>1$， $\pi_k(u)$ 的共轭作用不会改变 $L\mathfrak{su}(k+1)$ 的同构类，因为它是连通李群 $\mathrm{SU}(k+1)$ 的内自同构；但对于 $k>1$，反线性映射 J 的共轭作用并非内自同构：它是定义表示与其对偶之间的反线性交织算子。

因此，对于 $k>1$，李代数 $L\mathfrak{su}(V_k)^P$ 并不同构于环代数 $L\mathfrak{su}(V_k)$，但其复化 $L\mathfrak{su}(V_k)^P_{\mathbb{C}}$ 是与 $\mathfrak{sl}(k+1) \simeq A_k$的唯一非平凡图自同构相对应的扭曲环代数。

我们像之前一样将 $LC_0^\infty(\mathbb{CP}^1)^P$ 与 $C_0^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2}$ 等同起来；若将$L\mathfrak{su}(V_k)^P$与在 $\pi_k(u)J$的共轭作用下的不动点代数 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}(k+1))^{\mathbb{Z}_2}$ 等同起来，那么定义在 $L\mathfrak{su}(2)$、 $L\mathfrak{su}(k+1)^{\mathbb{Z}_2}$和 $C_0^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2}$上的余循环为

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(\xi,\eta')dt && (39)\\
\psi_k^P(X,Y) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\kappa_{\mathfrak{su}(k+1)}(X,Y')dt && (40)\\
\psi_\infty^P(f,g) &= \frac{3}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{S}^1}\Big(\int_{\mathbb{S}^2} fg'\omega\Big)dt && (41)
\end{aligned}$$

同样可以将它们排列成一个图表

$$\begin{array}{ccc}
c_\infty^P\psi_\infty^P & \xleftarrow{\quad L\overline{d\Phi}_k^*\quad} & c_k^P\psi_k^P \\
& {\scriptstyle L\iota^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle L\pi_k^*} & \\
& c_1\psi_1. &
\end{array} \qquad (42)$$

这些前置因子的选取使得其整数倍对应于可积余循环；关于 $C_0^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2)^{\mathbb{Z}_2}$，参见定理 13；对于$C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}(k+1))$，论证类似。将定理 19 限制到不动点代数上，便可立即得到扭曲情形下的相应结果：

定理 21. 李代数余循环 $c_1\psi_1$、 $c_k^P\psi_k^P$和 $c_\infty^P\psi_\infty^P$ 可积到群层面，当且仅当相应的常数 c_1、 c_k^P和 c_∞^P 为整数。

a) We have $(L\iota)^* c_\infty^P\psi_\infty^P = c_1\psi_1$ *if and only if*

$$c_1 = -\tfrac{1}{2}c_\infty^P.$$

b) 当且仅当 $(L\pi_k)^* c_k^P\psi_k = c_1\psi_1$

$$c_1 = \tfrac{k(k+1)(k+2)}{12}c_k^P.$$

c) 最后，如果 $c_k^P = -\frac{6}{k\,k+1\,()(k+2)}c_\infty^P$ 存在（逐点）极限

$$\lim_{k\to\infty}(L\overline{d\Phi}_k)^* c_k^P\psi_k(f,g) = c_\infty\psi_\infty^P(f,g).$$

6 超越二维球面

为明确起见，我们将讨论限定在二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上，但自然会想知道，对于更一般的辛流形（$\Sigma,\ \omega$）情况会如何。对于余循环的分类，自然的出发点应是 C_c^∞（$M,\ \mathfrak{k}$），其中 $\mathfrak{k} = C_{c,\,0}^\infty(\Sigma)$ 是由积分为零的紧支撑函数构成的泊松李代数。随后，可以用一个（无定向的）辛丛 $F \to M$ 来描述“扭曲”版本，其典型纤维为（$\Sigma,\ |\omega|$）。

尽管我们预期上述关于中心扩张的方法可以改用于这一情形，但我们尚未详细完成相应分析。此时，我们希望简要指出这一方向上的若干想法、猜想与未决问题。

6.1 2-余循环的猜想分类

对于一个（不必紧致的）辛流形 (Σ,ω)，泊松李代数 $\mathfrak{k} = C_{c,0}^\infty(\Sigma)$ 是完美的 [ALDM74, JV16]。可以尝试沿 [JW13] 的思路进行局部化过程；若此法可行，则可将注意力限制在局部情形 $\mathfrak{g}_c(M) = C_c^\infty(M,\mathfrak{k})$。

于是，[NW08] 表明应当预期余循环有两个来源：$\mathfrak{k}$ 上的不变双线性型，以及李代数二阶上同调 $H^2(\mathfrak{k},\mathbb{R})$。根据 [JV16]，$\mathfrak{k}$ 的二阶连续李代数上同调同构于 $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$。Σ 上的辛向量场 S 给出2-余循环 $\psi(f,g) = \int_\Sigma (fL_Sg - gL_{Sf})\omega^n/n!$，且该2-余循环为恰当的当且仅当 S 是哈密顿的。由此，可在 $\mathfrak{g}_c(M)$ 上得到如下形式的2-余循环

$$\psi_{\phi,S}(F,G) = \phi\Big(\int_\Sigma (FL_SG - GL_SF)\,\omega^n/n!\Big), \tag{43}$$

其中，$S\colon\ M \to \mathfrak{X}(\Sigma,\ \omega)$ 是一个取值于辛向量场的光滑函数，而 ϕ 是 M 上的一个分布。它们不会出现在 $\mathbb{S}^2$ 中，因为 $\mathbb{S}^2$ 上的所有辛向量场都是哈密顿的（因此会产生余边界），所以这些“垂直余循环”是该问题的一项额外特征。

预期余循环的第二个来源是连续不变双线性形式空间。$C_{c,\,0}^\infty(\Sigma)$ 上的一个连续不变双线性形式是通常的内积

$$\kappa(f,g) = \int_\Sigma fg\omega^n/n!,$$

但据我们所知，要证明它在相差一个比例因子的意义下唯一，仍是一个开放问题。一种可能的途径是先在某个合适的局部模型（例如 $T^*\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{CP}^n$）上证明这一点，然后借鉴 [JW13，引理 2.2] 中的思路，通过证明完美李代数 $\mathfrak{k}$ 上的每个连续不变双线性形式都来自 $\Sigma\times\Sigma$ 上一个支撑在对角线 $\Delta(\Sigma)$ 上的分布，从而将问题局部化。

与 $\mathbb{S}^2$ 的情形相比，一个有趣的新特点是，对于一个具有共形辛向量场的（必然是非紧的）辛流形 Σ

场 E，若满足 $L_E\omega = c\omega$，则 Koszul 映射 $\Gamma(\kappa)(f,\ g,\ h) = \kappa(\{f,g\},\ h\})$并非单射，至少在 $c \neq 0$ 的情况下如此。事实上，若 X_f 是势函数为 f 的哈密顿向量场，那么 $[E, X_f]$ 就是势函数为 $L_E f - cf$ 的哈密顿向量场。由此很容易看出

$$L_E\{f,g\} = \{L_E f, g\} + \{f, L_E g\} - c\{f,g\},$$

并且 2-余链 $\eta(f,\ g) = \int_\Sigma (fL_E g - gL_E f)\omega^n/n!$ 满足

$$d\eta(f,g,h) \quad = \quad (n+2)c\int_\Sigma \{f,g\}h\omega^n/n!.$$

根据 [NW08], ，对于任意（不一定闭合的）流 $\lambda \in \Omega^1_c(M)'$ ，我们由此得到耦合型余循环

$$\psi_\lambda(F,G) = \lambda\Big(\int_\Sigma (n+2)c\Big(Fd^MG - Gd^MF\Big) - d^M(FL_EG - GL_EF)\omega^n/n!\Big), \tag{44}$$

其中 d^M 表示 M上的德拉姆微分。注意，若 λ 是闭的，且 $\lambda(d\Omega^0_c(M)) = 0$，那么经过缩放后，这就化为通常的余循环

$$\psi_\lambda(F,G) = \lambda\Big(\int_\Sigma \big(Fd^Mg - Gd^MF\big)\omega^n/n!\Big) \tag{45}$$

这是我们对紧流形所预期的结果。对于辛向量场 S （满足 $c = 0$的共形向量场 E ），可以恢复式（43）中的余循环，它们来自恰当流 $\phi \in \Omega^0_c(M)'$，其意义是 $\phi = \lambda \circ d^M$。

因此，可以猜想这样的图景：二维球面 $\Sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上，只有来自不变双线性形式的余循环（45）。一个穿孔 $\Sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{z_0\}$ 会产生额外的耦合型（44）余循环，它们与 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{z_0\} = T^*\mathbb{R}$上的欧拉向量场 E 相关。每增加一个穿孔 $\Sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{z_0, \dots, z_n\}$，预期就会出现额外的“垂直”型（43）余循环，它们与辛向量场 S_n 相关；这些向量场在$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma)$中的类是绕额外穿孔 z_n的环路的庞加莱对偶。

可积性理解得最为清楚的余循环，大概是一般型 (45) 的那些；来自 [NW09] 的结果表明，可积性取决于针对具有紧支撑势函数的紧支撑哈密顿微分同胚群（的单连通覆盖）的周期同态 $\pi_2(\mathrm{Ham}_c(\Sigma)) \to \mathbb{R}$ 。

对于“耦合”与“竖直”余循环，精确的可积性条件仍是一个未决问题。对于环群，一种可能的途径是在 [Ne02]所给出的 $\pi_2(L\mathrm{Ham}_c(\Sigma))$ 上计算周期同态。或者，对于 (43) 型的“竖直”余循环，来自 [JV18]以及[DJNV21, DJNV24] 的想法或许有助于至少得到积分的充分条件。

6.2 紧致K¨ahler流形的猜想极限

对于“模糊球极限”，自然的框架应是环代数 $L\mathfrak{k}$，其中 $\mathfrak{k} = C^\infty_0(\Sigma)$ 是紧致 K¨ahler 流形 Σ上的泊松代数。

毋庸置疑，几何量子化和 Berezin-Toeplitz 量子化都非常适用于这一框架。若 $\mathbb{L} \to \Sigma$ 是预量子线丛，那么几何量子化会给出一个从 $C_0^\infty(\Sigma)$ 到 $\mathrm{End}(\Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathbb{L}^{\otimes k}))$ 的映射。由于全纯截面的空间是有限维的，因此可以应用环路函子，得到从 $L\mathfrak{k}$到 $L\mathfrak{su}(d(k))$ 的自然映射，其中 $d(k)$ 是 $\mathbb{L}^{\otimes k}$ [的全纯截面空间的维数 BHSS91, BMS94]。尽管我们只对 $\Sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 进行了详细分析，但类似的过程似乎也能为 (45) 型余循环导出有趣的“几何量子化极限”。

对于“垂直”型和“耦合”型的余循环，一个值得研究的问题是：它们是否以及如何源自具有有限维纤维的环代数上的（可能是平凡的）余循环，且在极限 $k \to \infty$ 中成立。

致谢

Z.W. 部分经费由 ARO MURI 合同 W911NF-20-1-0082 资助。

参考文献

[ALDM74]Andr´e Avez、Andr´e Lichnerowicz与A. Diaz–Miranda。关于代˙数——无穷小´自同构，以及一个流形´´（辛，symplec- tique）。《微分几何杂志》9, 1–40, 1974.[Bor01] R.E. Borcherds，量子顶点代数，Taniguchi数学会议奈良。第98卷。2001.[Br68] Glenn E. Bredon，余层与同调，《太平洋数学杂志》25:1 1–32, 1968[BHSS91] Martin Bordemann、Jens Hoppe、Peter Schaller与Martin Schlichenmaier，$\mathfrak{gl}$（∞）与几何量子化，《数学物理通讯》138, 209–244 (1991)[BMS94] Martin Bordemann、Echhardt Meinrenken与Martin Schlichenmaier，K¨ahler流形的Toeplitz量子化与 $\mathfrak{gl}$（N），$N \to \infty$极限，《数学物理通讯》165, 281–296 (1994)[CKLW18] S. Carpi、Y. Kawahigashi、R. Longo与M. Weiner，从顶点算子代数到共形网，再返回，第254卷，第1213号。美国数学会，2018.[Eck26] L. Eck与Z. Wang，通过模糊球面代数构造三维共形场论，arXiv预印本 arXiv:2602.15025（2026）。[F86] D. B. Fuks，无限维李代数的上同调，1986.

[G79] Victor Guillemin，谱理论中若干经典定理再探。线性偏微分方程解的奇点研讨班，《数学年刊》，研究第91号，H¨ormander, L.（编），普林斯顿大学出版社1979，第219–259页。[Hat81] Allen Hatcher，论 $S^1 \times S^2$的微分同胚群，《美国数学会会刊》（1981）：427-430.[Ham82] Richard S. Hamilton，Nash与Moser的反函数定理，《美国数学会通报》7:1, 1982, 65–222.[Hop89] J. Hoppe，无质量相对论曲面的量子理论与二维束缚态问题，Soryushiron Kenkyu电子学80.3（1989）：145-202.[HV25] S. Haller与C. Vizman，非线性格拉斯曼流形：普通、装饰与增广，2025，arXiv:2503.15363[IKM16] A. Izosimov、B. Khesin与M. Mousavi，曲面辛微分同胚的余伴随轨道与理想流体动力学，载于傅里叶研究所年刊，第66卷，第2385–2433页，2016.[JV16] Bas Janssens与Cornelia Vizman，哈密顿向量场李代数的泛中心扩张，《国际数学研究通知》16（2016），4996–5047.[JN19] Bas Janssens、Karl-Hermann Neeb，无穷维李群的射影酉表示，《京都数学杂志》59(2)：293-341, 2019.[JN24] Bas Janssens、Karl-Hermann Neeb，规范群的正能量表示I：局部化，《欧洲数学会回忆录》，第9卷（2024），viii + 148 页。[JN25] B. Janssens、M. Niestijl，紧支撑微分同胚群的广义正能量表示，《数学物理通讯》406, 45（2025）。[JV18] B. Janssens、C. Vizman，经由预量子化实现泊松李代数中心扩张的可积性，《辛几何杂志》16:5（2018），1351–1375.[DJNV21] Tobias Diez、Bas Janssens、Karl-Hermann Neeb与Cornelia Vizman，保持微分形式的李群的中心扩张，《国际数学研究通知》2021:5（2021），3794–3821[DJNV24] Tobias Diez、Bas Janssens、Karl-Hermann Neeb与Cornelia Vizman，非线性格拉斯曼流形上的诱导微分特征，傅里叶研究所年刊74:6（2024），2483–2503

[JRV25] B. Janssens、L. Ryvkin、C. Vizman，《精确无散度向量场李代数的泛中心扩张》，arxiv:2409.05182（即将在纯粹与应用数学杂志发表）[JW13] B. Janssens 和 Ch. Wockel，《规范代数与群的泛中心扩张》，纯粹与应用数学杂志，第 2013 卷，第 682 期，2013 年，第 129–139 页。[Kn96] A. Knapp，《李群：超越入门》，Birkhäuser，1996 年[IKP21] Lous Ioos、David Kazhdan 和 Leonid Polterovich，《*Berezin–Toeplitz*量子化与最小不锐性原理》，《国际数学研究通知》，第 2021 卷，第 6 期，第 4625–4656 页（2021 年）[Ne14] K.-H. Neeb，《希尔伯特–圈群双重扩张的半有界酉表示》，傅里叶研究所年刊，第 64 卷（2014 年），第 5 期，第 1823–1892 页。[Ne02] K.-H. Neeb，《无穷维李群的中心扩张。》Ann. Inst. Fourier 52:5（2002 年），1365–1442。[NW08] K.-H. Neeb 和 F. Wagemann，《一般李代数流代数的二阶上同调》，Canad. J. Math. **60**（2008 年），第 4 期，892–922。[NW09] K.-H. Neeb 和 C. Wockel，《截面群的中心扩张。》Ann. Glob. Anal. Geom. 36，381–418（2009 年）。[Ni23] M. Niestijl，《超越范数连续情形的全纯诱导及其在正能量表示中的应用》，arxiv:2301.05129[PS86] Andrew Pressley 和 Graeme Segal，《环群》，牛津科学出版社，1986 年。[RS81] Tudor Ratiu 和 Rudolf Schmid，《三个杰出微分同胚群的可微结构》，Math. Z. **177**（1981 年），81–100。[S59] Stephen Smale，《二维球面的微分同胚》，Proc. Amer. Math. Soc. **10:4**（1959 年），621–626。[T87] Gijs Tuynman，《量子化：比较不同方法的尝试。》J. Math. Phys.**28** （1987 年），2829–2840。