arXiv:2603.06877v1 [math.DG] 6 Mar 2026

哈密顿系统的散射刚性及其在芬斯勒几何中的应用

NIKOLAS EPTAMINITAKIS 和 PLAMEN STEFANOV

ABSTRACT. 我们研究定义在 $T^*M\backslash 0$ 上的哈密顿系统的散射刚性，其中 M 是一个带边界流形，并配备了正齐次哈密顿函数 $H(x,\ \xi)$。我们证明，对于正能级 $H = E > 0$，可以由散射关系唯一确定 H，但需允许一个固定边界的正则变换（在适当意义下）。我们定义边界点之间的传播时间 $T(x,\ y)$，并证明其线性化导出一个沿哈密顿曲线的 X 射线变换，且我们可以将其反演。当 $E = 0$ 时，可以通过一个微分同胚来表述散射刚性：该微分同胚作用于零能量曲面，保持边界并尊重其上哈密顿流的轨道，同时保持限制辛形式。传播时间由一个定义函数取代，该函数定义在可由局部唯一的零双特征线连接的边界点对上。其线性化导出“哈密顿光线变换”，我们同样可以在规范意义下将其反演。作为这种相空间方法的应用，我们证明了非捕获芬斯勒流形的半全局透镜刚性。规范变换群由某些正则变换与勒让德变换的复合构成。

CONTENTS

1. 引言 2 2. 正能级。散射关系与传播时间 3 2.1. 预备知识 3 2.2. 散射关系与传播时间 4 2.3. 刚性结果 7 3. 传播时间的线性化 11 3.1. 传播时间 $T(x,y)$ 11 3.2. 一个变分公式 11 3.3. $T(x,y)$ 的线性化 12 3.4. $T(x,y)$ 作为 S 13 的生成函数 3.5. X射线变换 14 4. 零能级：实主型算子的散射刚性 15 4.1. 设定 15 4.2. 散射刚性 16 4.3. 线性化 19 4.4. 哈密顿光线变换 20 5. 芬斯勒流形的刚性 21 附录 A. 动机：双曲型 DN 映射 24 A.1. 具有时不变系数的双曲型 ΨDO 方程 25 A.2. 实主型方程 26

Date：2026年3月10日。P.S. 部分得到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2154489 和 DMS-2452757 的支持。本研究的一部分是在 N.E. 访问普渡大学期间进行的，由前一项资助支持。

A.3. 回到具有时不变系数的双曲型 ΨDO 方程 参考文献 27
28

1. Introduction

本文研究了 $T^*M \setminus 0$上与哈密顿量 $H(x,\xi)$ 相关的二阶齐次哈密顿系统的透镜刚性问题和边界刚性问题，其中 M 是一个带边界的紧流形，同时也研究了它们在芬斯勒几何中的应用。我们部分受到双曲型系统研究的启发：在非退化性假设下进行微局部化后，这些系统可对角化为一组具有此类哈密顿量的标量方程。核心问题是，散射关系 S 或边界点之间的传播时间能在多大程度上确定 H。需要注意的是，这是一个形式上 欠定的 问题：数据依赖于 $2n-2$ 个变量，其中齐次性也计入在内，而 H 依赖于 $2n-1$ 个变量。我们给出了具有局部数据时该问题的完整刻画。实际上，齐次性的阶数可以是任意正整数，但在论述中选择二阶，原因有二：首先，便于将结果与度量情形 $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$进行比较，其中 g 是黎曼度量，或更一般地说，是伪黎曼度量；其次，使结果更易应用于二阶双曲型系统，尤其是各向异性弹性系统。散射关系和传播时间编码在相应偏微分方程的柯西数据的（奇异性）中，参见附录 A。

第一轮结果大致表明，两个哈密顿量若在某个固定正能级上具有相同的数据（因而在任意正能级上也相同），则它们通过一个齐次正则变换的拉回彼此相关 κ；正如下面定理2.1中所精确定义的那样，该变换在某种意义下在边界上是恒等映射。证明相对直接。需要注意的是，这并不能立即解决黎曼情形；这一问题已得到广泛研究，参见例如 [11, 17, 22, 29, 30, 32, 34]。黎曼刚性实际上要求 κ 由底空间变量的微分同胚 ψ 生成，并将其提升到 TM（我们可以将其认作 T^*M，当 g 固定时）。这是一个难得多的问题。

在非共轭假设下，我们定义边界点之间的传播时间 $T(x,y)$，然后将其关于 H 进行线性化。黎曼情形下的标准推导依赖于能量泛函的一阶变分。我们在引理 3.1 中证明了一个哈密顿量对应的结果，并且或许有些反直觉地表明，连接一对固定点的哈密顿曲线并不是哈密顿量版本能量泛函的临界点。尽管如此，T 的线性化最终表现为作用于 T^*M 上的函数 $f(x,\xi)$ 的 X射线变换，该变换沿着 H 的哈密顿曲线进行，我们记作 $\mathrm{X}f$。X 的反演在规范意义下是显然的：它就是沿流对函数 $\phi(x,\xi)$ 求导，而该函数在 $x \in \partial M$ 时为零。回到黎曼情形，在线性化边界刚性中，$f(x,\xi)$ 由一个二阶对称张量诱导，并且局部取形如 $f = f^{ij}(x)\xi_i\xi_j$；人们希望证明 $\phi(x,\xi)$ 是 M 上关于 ξ 线性的一形式。再次强调，这是一个更为困难的问题，但近年来已经取得了大量进展，参见例如 [18, 21, 23, 28, 31, 33, 39]。

我们的第二组结果涉及零能级上的哈密顿动力学，其动机来自实主型拟微分算子（ΨDO）的奇性传播。一个重要例子是 $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$，其中具有 g 伪黎曼 [1, 14]（特别是洛伦兹[16, 25–27, 41, 42]）结构，但不是黎曼结构。现在一个重要区别在于，$H^{-1}(\{0\})$ 是锥形的、余维一的，因而不存在定义传播时间的适当方式。我们证明，可以恢复零锥，且只差一个保持哈密顿流的轨道及限制辛形式的微分同胚。散射关系是齐次的，并且是相应 DN（或 DD）映射的典范关系，参见 A.2 节。我们还刻画了相关

“光线变换” L 的核。这也回答了 [20]关于散射关系以及 L所提出的问题。我们还证明，与其使用传播时间，不如取任意一个定义函数，该函数定义在能够通过零双特征曲线相连的边界点对上；其线性化将导出这一光线变换。对这样的定义函数进行线性化比对散射关系进行线性化更为方便，另见 [26]。

我们展示了一个应用，说明如何利用相空间分析解决一个具体的刚性问题。我们考虑芬斯勒流形，并利用勒让德变换证明刚性结果；该变换使我们能够将芬斯勒度量化为哈密顿量。从哈密顿量回到芬斯勒度量，则需要 $H_{\xi\xi} > 0$，而我们在哈密顿分析中并不作此假设，但在这里却需要它。例如，在各向异性弹性力学的应用中，对于对应于以最快速度传播的波的哈密顿量，这一条件成立，但一般情况下并不成立。我们仅使用哈密顿形式和少许辛几何推导主要结果。据我们所知，针对芬斯勒流形刚性问题的研究包括 [7, 8], ，其表述有所不同：研究中假设存在内部源或内部反射。 [7, 8]中保持数据不变的群由底空间上的等距变换组成，且这些变换逐点固定 ∂M 。相比之下，这里存在一个大得多的群，它由相空间中保持数据不变的正则变换构成；正如我们将在第 5 节讨论的那样，其中有些变换并非由底流形上的微分同胚诱导。这也表明，不能将弹性力学中的传播时间问题视为芬斯勒几何中的问题，从而将其求解到固定边界的底空间微分同胚等价为止。文献 [19], 还研究了某个芬斯勒度量子类的边界刚性问题，并指出存在边界距离函数相同但不等距的芬斯勒度量。

我们以半整体的方式表述并证明大部分结果，使用局部数据进行局部恢复。在适当的假设下，也可以用整体方式表述这些结果。这需要更仔细地分析相应的正则变换和X射线变换在掠射线附近的光滑性。

本文结构如下。我们在第2节研究正能级上的哈密顿系统。在该节中，我们引入散射关系和传播时间，后者以初始点和方向为参数。我们在定理2.1中证明一个半全局刚性结果。在第3节中，在非共轭假设下，我们以端点为参数表示传播时间 $T(x, y)$，并对其关于哈密顿量进行线性化。由此得到哈密顿X射线变换，并描述其核。尽管求解非线性问题（我们已在第2节中完成）并不需要线性化，但我们仍进行这一工作，以便将其与度量情形联系起来，并希望这对研究特殊类别的哈密顿量有所帮助。本节还将证明，边界上的传播时间$T(x, y)$能够唯一确定散射关系，实际上它充当一个生成函数。我们在第4节研究零能级，求解非线性刚性问题和线性化的“光线”X射线问题。芬斯勒刚性结果将在第5节中证明。

致谢。 N.E. 感谢 A.P. Contini 的有益讨论。

2. Positive energy levels. The scattering relation and the travel times

2.1. 预备知识。 设 M 是一个维数为 $n \geq 2$ 的光滑流形，可以有边界，也可以没有边界。设 $H(x, \xi) \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$ 是一个正的、二次齐次的哈密顿量[1]，即$H \circ \mathcal{M}_\lambda = \lambda^2 H$ 对于 $\lambda > 0$，其中

$$\mathcal{M}_\lambda : T^*M \setminus 0 \to T^*M \setminus 0, \quad (x, \xi) \mapsto (x, \lambda\xi)$$

[1]本文通篇中，“齐次”均指关于纤维变量的正齐次。

是伸缩算子。我们可以将能级 $H = 1/2$ 视为参考能级，它定义了我们关注的传播时间。一个例子是 $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ ，其中 $g = \{g^{ij}\}$ 是对应于黎曼度量的余度量，以局部坐标表示。我们称之为“度量情形”。我们将 T^*M 上的辛二形式固定为 $\sigma = \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x$ ，其对应的矩阵为$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} = -J^\intercal$，采用分块形式；并令 $X_H = -J(\mathrm{d}H)^\mathsf{T} = H_\xi\partial_x - H_x\partial_\xi$ 为相关的哈密顿生成元，生成哈密顿流 Φ^t。（此处及下文中，全微分均为行向量。）我们假设 H 在能级 $1/2$ 上非退化（因此在任意正能级上也非退化），即 $\mathrm{d}H \neq 0$ 在 $H = 1/2$ 上。我们用 $\alpha = \xi\mathrm{d}x$ 表示 $T^*M \setminus 0$ 上的重言1-形式，其中 $\sigma = \mathrm{d}\alpha$。

欧拉恒等式 $\xi \cdot H_\xi = 2H$ 表明，在正能级上， X_H 永远不会是径向的（即与 $\xi\partial_\xi$成比例）；事实上，$\xi\partial_\xi$ 总是与正能级超曲面横截。若哈密顿曲线（$x(t)$ $\xi(t)$）（或其 x-投影）由 $(x_0,\ \xi^0)$ 发出，我们称之为从该点发出；也就是说，后者是 $t = 0$处的初始条件。当然，在 $t = 0$ 处的实际方向是 $v := \dot{x} = H_\xi$。注意，映射 $\xi \mapsto v$ 不一定是局部微分同胚；要使其成为局部微分同胚，我们需要 $\det H_{\xi\xi} \neq 0$。定义

$$|\xi|_x = (2H(x,\xi))^{\frac{1}{2}}, \quad S^*M = \{(x,\xi) \in T^*M \setminus 0 \mid |\xi|_x = 1\}. \tag{1}$$

根据非退化性假设，只要 $H \neq 0$ ， $H = 1/2$， S^*M 就是 T^*M的光滑子流形。此外，由欧拉恒等式，当 $H_\xi \neq 0$时， $H = 1/2$，因此，对于固定的 x，每个纤维 S^*_xM都是 T^*_xM的子流形。注意， $|\xi|_x$不一定是范数，甚至可能不满足$|-\xi|_x = |\xi|_x$。另一方面，对于每个 $\lambda > 0$，都有 $|\lambda\xi|_x = \lambda|\xi|_x$；当 $\xi \neq 0$时， $|\xi_x| > 0$。在度量情形下， $|\xi|_x$ 是余向量 ξ的长度。我们称能级为 $1/2$单位时的双特征线为单位双特征线；于是 $|\xi|_x = 1$。它们与其他正能级上的双特征线由以下引理联系起来。

引理 2.1。 若 $\gamma(t) = (x(t)\ \xi(t))$ 是能级为 E 的哈密顿曲线，则对任意 $\lambda \neq 0$,$\tilde{\gamma}(t) = \mathcal{M}_\lambda \circ \gamma(\lambda t) = (x(\lambda t)\ \lambda\xi(\lambda t))$ 都是能级为 $\lambda^2 E$ 的哈密顿曲线。用流映射表示， $\Phi^t \circ \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda \circ \Phi^{\lambda t}$。

证明。 容易验证 $\mathrm{d}\mathcal{M}_\lambda J = \lambda J(\mathrm{d}\mathcal{M}_{\lambda^{-1}})^\mathsf{T}$。由 H 的齐次性，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\gamma} &= \lambda\mathrm{d}\mathcal{M}_\lambda X_H\big|_{\tilde{\gamma}(t)} = -\lambda\mathrm{d}\mathcal{M}_\lambda J(\mathrm{d}H)^\mathsf{T}\big|_{\tilde{\gamma}(t)} = -\lambda^2 J(\mathrm{d}\mathcal{M}_{\lambda^{-1}})^\mathsf{T}(\mathrm{d}H)^\mathsf{T}\big|_{\tilde{\gamma}(t)} \\ &= -J(\mathrm{d}H)^\mathsf{T}\big|_{\tilde{\gamma}(t)} = X_H\big|_{\tilde{\gamma}(t)},\end{aligned}$$

这就证明了所述结论。 □

例如，当 $H = |\xi|^2/2$ 在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上时，哈密顿曲线的形式为 $\gamma(t) = (x_0 + t\xi^0, \xi^0)$。按上述方式重新缩放，得到 $\tilde{\gamma}(t) = (x_0 + (\lambda t)\xi^0, \lambda\xi^0) = (x_0 + t(\lambda\xi^0)\ \lambda\xi^0)$，它是初始条件为 $(x_0, \lambda\xi^0)$、能级为 $\lambda^2|\xi^0|^2/2$ 的哈密顿曲线。

2.2. 散射关系与传播时间。除非另有说明，全文设 M为带边界流形。若相应双特征线（其中 $\pi : T^*M \to M$ 为投影）的初始速度向量 $H_\xi(x,\xi) = \mathrm{d}\pi X_H$ 指向内部（相应地，外部），则称 $(x,\xi) \in T^*M \setminus 0\big|_{\partial M}$ 为入射（相应地，出射）。固定 ∂M 的两个不相交开子集 U 与 V，并设 $(x_0,\xi^0) \in T^*M \setminus 0$（满足 $x_0 \in U$）为产生单位双特征线 γ_0的初始余向量，并假设 $\gamma_0(s)$在时间 $s = s(x_0,\xi^0) \neq 0$（正或负）首次于某 (y_0,η^0)处横截地击中 V（更精确地说， $T^*M \setminus 0\big|_V$），亦见图 1。该横截性对由 (x,ξ)发出的每条双特征线 $\gamma_{x,\xi}$ 在一个小锥形

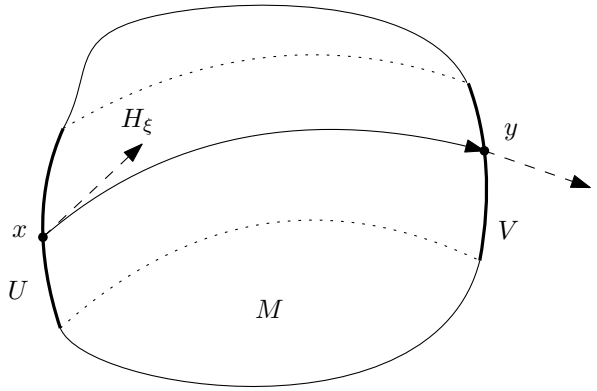


FIGURE 1. 散射关系 S。余向量 ξ、 ξ'、 η 和 η' 未绘制出来。点线之间的定义域表示 Γ，见（6）（投影到底空间上）。

邻域（(x_0,ξ^0) 的邻域，其中 $x\in U$）内得以保持，且端点为 (y,η)，位于 $s(x,\xi)$，其中 $y\in V$。作为第一步，我们可以定义局部散射关系

$$\hat{S}:(x,\xi)\mapsto(y,\eta). \tag{2}$$

我们还设

$$\text{travel time}=\hat{\ell}(x,\xi).$$

ˆ若（x、ξ）是入射的（相应地，出射的），使得（y、η）是出射的（相应地，入射的），则 ℓ（x、ξ）>0ˆ（相应地，ℓ（x、ξ）<0）。注意，由于 H 关于纤维中的对跖ˆ映射不一定对称，其流不必是可逆的。因此，若我们知道 S（x、ξ）=（y、η）$\in T^*M\big|_V$在某个正时间 s（x、ξ）内成立，则没有理由认为从（x、$-\xi$）出发的双特征线会在任意正或负时间内与 $T^*M\big|_V$相交。

鉴于其在偏微分方程中的预期应用，散射关系和传播时间是从 $T^*\partial M$ 上的波前集中提取的。因此，我们用这类余向量来参数化这些量。典范嵌入 $\iota:\partial M\hookrightarrow M$ 所诱导的拉回映射 $\iota^*:T^*M\to T^*\partial M$，对应于将 $T^*M\big|_{\partial M}$ 中的一个元素限制到 $T\partial M$ 上。我们将 $(x,\ \xi)\in T^*M\big|_U$ 和 $(y,\ \eta)\in T^*M\big|_V$ 分别拉回到 U 和 V，并用撇号表示拉回结果，即

$$(x,\xi')=\iota^*(x,\xi),\quad (y,\eta')=\iota^*(y,\eta). \tag{3}$$

用底空间的边界坐标 $(x',\ x^n)$ 表示，其中 $x^n=0$ 位于 U 上；相应地，用 $(\xi,\ \xi_n)$ 表示 T^*M 的线性坐标，$\iota^*(x,\ \xi)=(x',\ \xi')$。

给定 ξ' 处的 $x\in U$，对于一般的哈密顿量，并不能保证存在唯一的单位 ξ（例如入射或出射），使其具有该拉回，且光滑地依赖于 (x,ξ')。“慢度曲面”$|\xi|_x=1$ 不一定严格凸，甚至可能不凸，见图 2。为保证给定 (ξ,x,ξ') 时局部存在唯一的 $H_\xi=\mathrm{d}\pi X_H$，我们对其施加以下条件：

$$\langle\mathrm{d}\rho,H_\xi\rangle\neq 0 \tag{4}$$

在 (x_0,ξ^0) 处，其中 ρ 是边界定义函数[2]。变换到满足 $U=\{x^n=0\}$ 的边界局部坐标后，条件 (4) 可写为 $H_{\xi_n}(x_0,\xi^0)\neq 0$。根据哈密顿系统，这可以写成 $\dot{x}^n\neq 0$。那么，双特征线 $\gamma_{x_0,\xi^0}(s)$ 是入射/出射的，当且仅当$\pm\langle\mathrm{d}\rho,H_\xi\rangle>0$，但绝不与 U 相切。例如，在图 2 中，$\langle\mathrm{d}x^n,H_\xi\rangle<0$，因此 ξ 是出射的。

[2]带边界流形上的 *boundary defining function* ρ 按定义满足 M 在 $\rho>0$ 上、 M°在 $\rho=0$ 上，以及 $\mathrm{d}\partial M$在 $\rho\neq 0$ 上。

在条件（4）下，已知 $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ 在某个 $x \in U$ 处，可唯一确定 ξ_n 局部给出的$|\xi|_x = (2H(x,\xi))^{1/2} = 1$ （根据隐函数定理）；然后可确定 ξ。将此解记为

$$\xi = \zeta(x', \xi') = (\xi', \zeta_n(x', \xi')). \tag{5}$$

这定义了$\zeta = \zeta_{(x_0,\xi^0)}$中拉回的局部逆3。在度量情形下，$\xi_n = (1 - |\xi'|_g^2)^{1/2}$以边界正规坐标表示。我们还注意到，在哈密顿量情形下，形如 $|\xi'| < 1$ 的不等式并不意味着 $|\xi| = 1$ 对于给定的 ξ'可解。事实上，我们只在某个（x_0, ξ^0）附近进行局部研究，甚至不假设 $H(x_0, \xi^{0\prime})$有定义。

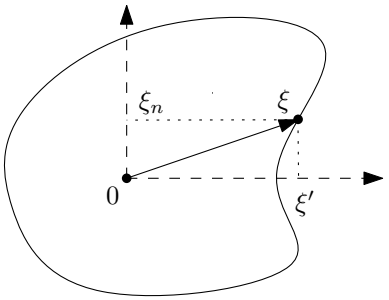


FIGURE 2. 慢度曲面 $|\xi|_x = 1$ （二维情形）在与边界坐标（x', x^n）相对应的对偶坐标中，位于 U处，此处局部有 x^n 是边界定义函数。条件（4）意味着从 ξ 的顶点向下作垂线，该垂线与曲面在该处横截。它并不排除存在其他指向 ξ内的 M，且它们具有相同的限制 ξ'。对于上图所示的 ξ，$\mathrm{d}x_n H_\xi = H_{\xi_n} < 0$，这表明 ξ 是出射的。

我们在上文假设，从（x_0, ξ^0）出发的单位双特征线 $\gamma_0(s)$ 在 $s = s_0 \neq 0$ 横截地击中 $T^*M \setminus 0\big|_V$，并满足（4）。后者意味着 $x(s_0) \in V$，且 $\dot{x}(s_0)$ 不与 V 相切（特别地，它在那里不为零）；其中，暂时记 $x(s)$ 为 γ_0 的空间分量。令（y_0, η^0） $= \gamma(s_0)$。于是，在（y_0, η^0）处（4）同样成立。显然，在 x_0 和 y_0 处的横截条件（4）在小扰动下是稳定的。

定义 *2.1.* 设（x_0, ξ^0） $\in S^*M$，且 $x_0 \in U$，满足（4）。对于充分接近（$x_0, \xi^{0\prime}$）的（x, ξ'） $\in T^*U$，令（x, ξ）为在（x_0, ξ^0）的某个邻域内满足 $\iota^*(x, \xi) = (x, \xi')$ 且 $|\xi|_x = 1$ 的局部唯一解，并令 $\gamma_{x,\xi}(s)$ 为从（x, ξ）出发的单位双特征线。假设 $\gamma_{x,\xi}(s)$ 对于 $s = \ell(x, \xi') \neq 0$ 在 $y \in V$ 横截地击中 V，且其在该处的纤维的限制 η' 为 TV。则我们称

$$S : (x, \xi') \to (y, \eta'),$$

散射关系，以及 $\ell(x, \xi')$ 相应的传播时间（正或负）。

请注意，按照我们的记号，

$$S = \iota^* \circ \hat{S} \circ \zeta.$$

ˆ 每当我们需要强调 S 或 S 对 H的依赖时，都会将其作为上标标出。(S, ℓ) 称为透镜数据。我们沿用公认的术语，例见 [6], 。或许“散射”和“透镜”这两个术语应该互换，因为在光学透镜的几何光学中，传播时间不起作用，而“散射”则可用于时空。

为了更具体地进行局部化，令 $\mathcal{U} \subset T^*U$为（x_0, $\xi^{0\prime}$）的一个邻域，在该邻域中，关于（x_0, ξ^0）的局部可解性假设和在 V处的横截性假设

定义 2.1 成立。我们将双特征曲线在 TV 上相应端点的限制所构成的集合记为 V，即 $\mathcal{V} \subset T^*V$。集合 $\mathcal{V}$ 也是开集，因为 $S\colon\ \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 是一个微分同胚（事实上是辛的），其逆映射是相对于 $\mathcal{V}$ 的散射关系。

到目前为止，我们将 S 和 ℓ 与能级 $1/2$ 联系起来。我们可以将 S 扩展为一个依赖于 λ 的族 $S_\lambda(x,\ \xi')$，其中 $\lambda > 0$，并要求它关于 ξ' 是一阶齐次的，定义为 $S_\lambda(x,\ \xi') = \mathcal{M}_\lambda(S(x,\ \xi'/\lambda))$。我们还令 $\ell_\lambda(x,\ \xi') = \lambda^{-1}\ell(x,\ \xi'/\lambda)$。于是，$S_\lambda$ 和 ℓ_λ 对应于能级 $\lambda^2/2$ 上的哈密顿曲线，并由 S、ℓ 唯一确定。接下来，我们令

$$\mathcal{U}_\lambda = \{(x,\xi') \in T^*U |\ (x,\xi'/\lambda) \in \mathcal{U}\}.$$

我们有一个映射 $\zeta_\lambda\colon\ \mathcal{U}_\lambda \to T^*M \setminus 0\big|_U$，它通过（一阶）齐次性扩展了（5）。

在度量情形下，$\mathcal{U}$ 可以取为 T^*U 中的开单位球丛，记作 B^*U，$\mathcal{V}$ 也类似。在边界正规坐标中，$2H(x,\ \xi) = |\xi'|_g^2 + \xi_n^2$，并且 $2H = 1$ 可以在 ξ_n 满足 $\xi_n \neq 0$ 时光滑地求解；在此情形下，这等价于（4）。这两个解分别对应入射射线和出射射线。对于 $\lambda > 0$，我们求解 $2H = \lambda^2$ 以定义 S_λ。

设 $(x_0,\xi^0) \in T^*M \setminus 0\big|_U$ 如定义 2.1 所述；为简单起见，以下始终假设它是入射的（出射情形也可类似处理）。设 $\Gamma_{(x_0,\xi^0)} \subset T^*M \setminus 0$ 为锥集

$$\begin{aligned}\Gamma_{(x_0,\xi^0)} \coloneqq \bigcup_{\lambda>0} \big\{(y,\lambda\eta) |\ (y,\eta) \text{ lies on the unit bicharacteristic issued from}\\ \text{some } (x,\xi) \text{ in a small neighborhood of } (x_0,\xi^0) \text{ in } S^*M \text{ with } (x,\xi') \in \mathcal{U}\big\},\end{aligned} \tag{6}$$

也就是说，ξ 是满足 $H(x,\xi) = 1/2$ 且限制在 T_xU 上为 ξ' 的局部唯一解。若在某段讨论中固定了 (x_0,ξ^0)，我们便在记号中省略它，并将其记作 Γ。注意，S_λ 仅由经过 Γ 的哈密顿曲线定义，因此至多只能在那里恢复 H。以下，对于 $(y,\eta) \in \Gamma$，记

$$\ell_-(y,\eta) = \inf\{t \geq 0 : \pi \circ \Phi^{-t}(y,\eta) \in U\}, \quad \ell_+(y,\eta) = \inf\{t \geq 0 : \pi \circ \Phi^{t}(y,\eta) \in V\}. \tag{7}$$

由引理 2.1，$\ell_\pm$ 是 -1 阶齐次的。

2.3. 刚性结果。众所周知，例如参见 [2, 第 45A 章]，，给定一个正则变换 $(\tilde{x},\tilde{\xi}) = \kappa(x,\xi)$，哈密顿量 $\tilde{H} = H \circ \kappa^{-1}$ 定义了一个新的哈密顿系统，它与 $\tilde{H}$ 相关；对于原系统的任意解 $(x(s)\ \xi(s))$，新系统的解为 $(\tilde{x}(s)\ \tilde{\xi}(s)) = \kappa(x(s)\ \xi(s))$。这可写为 $\kappa \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \kappa$，其中 Φ^s 与 H 相关，另见下文（10）。等价地，$X_{\tilde{H}} = \mathrm{d}\kappa X_H$。在本文中，正则变换指从其定义域（始终不包含零截面）到其像上的辛微分同胚。我们尤其关注锥形定义域上的齐次微分同胚，即分别在定义域和像上与伸缩算子相交织的微分同胚。齐次正则变换保持哈密顿量的齐次性，并且在适当意义下对应于相应余球面丛之间的接触同胚，见 [2, 附录 4]。

可以证明，开子集 $T^*M \setminus 0$ 之间的微分同胚 κ 对所有 H 共轭 H 和 $H \circ \kappa^{-1}$ 的流，当且仅当它是正则变换。事实上，如前所述，在达布坐标下，辛形式可写成分块形式 $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$，于是 κ 的辛条件可写为 $(\mathrm{d}\kappa)^{\mathsf{T}} J(\mathrm{d}\kappa) = J$，等价地写作 $(\mathrm{d}\kappa)J(\mathrm{d}\kappa)^{\mathsf{T}} = J$。回忆一下，$X_H = -J\mathrm{d}H^{\mathsf{T}}$。记作 $\tilde{H} = H \circ \kappa^{-1}$，则有 $X_{\tilde{H}} = -J(\mathrm{d}\kappa^{-1})^{\mathsf{T}}\mathrm{d}H^{\mathsf{T}}$。若 κ 是正则的，则 $X_{\tilde{H}} = -\mathrm{d}\kappa J\mathrm{d}H = \mathrm{d}\kappa X_H$，这证实了流的共轭性。另一方面，若对每个哈密顿量 H，这些流都共轭，则对所有 H，有 $J(\mathrm{d}\kappa^{-1})^{\mathsf{T}}\mathrm{d}H^{\mathsf{T}} = \mathrm{d}\kappa J\mathrm{d}H^{\mathsf{T}}$，这蕴含了 κ 的辛条件。

设 M 是一个带边界流形，其边界与 M 相同。在 $T^*M\setminus 0$ 和 $T^*M\setminus 0$ 上分别有两个哈密顿量 H 和 H，我们用加波浪号的符号表示与 H 对应的对象。假设 $(x_0,\tilde{\xi}^0)\in T^*\tilde{M}\setminus 0$ 满足 $x_0\in U$，且式 (4) 在此处对 $\tilde{H}$ 成立；那么 $(x_0,\tilde{\xi}^0)$ 如式 (6) 所示导出一个锥集 $\tilde{\Gamma}\subset T^*\tilde{M}\setminus 0$。令 Γ_U 为所有满足 $x\in U$ 的 (x,ξ) 的集合，其中 $(x,\xi)\in\Gamma$；并类似地定义 $\Gamma_V,\Gamma_U,\Gamma_V$。那么，对于每个齐次且正则的 κ，若 $H=\kappa^*H$，则

$$\kappa(\Gamma_U)=\tilde{\Gamma}_U,\quad \kappa(\Gamma_V)=\tilde{\Gamma}_V,\quad \text{and } \iota^*\circ\kappa=\iota^* \text{ on } \Gamma_U\cup\Gamma_V, \tag{8}$$

则 $S=S$ 在 $\mathcal{U}$上。映射 κ 如上所述，是度量情形下微分同胚的对应物，它逐点固定 M ∂M，而此类微分同胚的微分的拉回，是上述正则变换的一个例子。注意，对于所有 κ，$\pi\circ\kappa(x,\xi)=x$ 满足$x,\xi)\in\Gamma_U$，这是由（8）中的第一和第三个性质得出的；对于 V，结论也类似。这类变换构成了一个丰富且非平凡的集合，参见注记 5.3和A.2。

反过来也成立，这就是我们的半全局刚性定理。

定理 2.1（正能级上的哈密顿系统半全局刚性）。采用前述记号，假设 $S^H=S^H$，$\ell=\tilde{\ell}$ 在 $\mathcal{U}$ 上（相对于入射余向量 (x_0,ξ^0)，$(x_0,\tilde{\xi}^0)$）。那么存在一个齐次正则变换 $\kappa:\Gamma\to\tilde{\Gamma}$，使得 (8) 成立，并且在 $\kappa^*H=H$ 上有 Γ。

注 2.1. 根据达布定理（见 [12, 定理 21.1.6]），局部而言，任意两个非退化哈密顿量都可通过正则变换的拉回彼此等价。事实上，可以从某个 (x,ξ) 的邻域中的 $p_1=H$ 出发，并将其补全为辛坐标系 (q,p)，使得在该坐标系中 $X_H=\partial/\partial q^1$。当 H 是齐次的，且 X_H 从不沿径向（如我们的情形）时，可以选择齐次变换。事实上，对 $H_1:=(2H)^{1/2}$ 应用齐次达布定理 [12, 定理 21.1.9], [9, 命题 6.1.3], ；根据欧拉恒等式，它也从不沿径向。因此可得，在任意 $(x_0,\xi^0)\in T^*M\setminus 0$ 的锥形邻域中，H_1 等价于 $G_1:=\xi_n$；进而 H 等价于 $G:=\xi_n^2/2$，其中 $X_G=\xi_n\partial_{x^n}$（n 为维数，不求和），或者在需要时等价于 $|\xi|^2/2$。该定理指出，在满足其假设的条件下，存在这样一个满足特定边界条件的半整体变换。此外，定理还指出，我们无法从透镜数据中提取更多信息。

定理的证明 *2.1*。该证明遵循一种论证思路；这种思路至少在度量情形下已广为人知，它通过相空间中的一个映射建立流之间的共轭，参见例如 [4, 40]。为说明这一思路，我们先从一个较简单的设定入手，即在更强的假设下，假设 $H=H$ 在 处具有无穷阶 $\partial TM\setminus 0$，且 $\Gamma_U=\Gamma_U$，并且 $\Gamma_V=\Gamma_V$（因此 $\zeta=\zeta$），然后再处理一般情形。在这些假设下，我们可以将 M 嵌入一个更大的开流形 N 中，该流形 维数相同，并将 H 和 H 光滑地延拓到 $N\setminus M$，使得 $H=H$ 在那里成立。令

$$\kappa(y,\eta):=\tilde{\Phi}^{\ell_-(y,\eta)}\circ\Phi^{-\ell_-(y,\eta)}(y,\eta), \tag{9}$$

见图3。根据引理 2.1，它是齐次的；由于传播时间相等，其取值于 $\Gamma\subset T^*M$。我们验证它可逆。设 $(\tilde{y},\tilde{\eta})=\kappa(y,\eta)$，它属于 (x,ξ) 的轨道：$=\Phi^{-\ell_-(y,\eta)}(y,\eta)\in\Gamma_U=\tilde{\Gamma}_U$。将 $(\tilde{y},\tilde{\eta})=\tilde{\Phi}^{\ell_-(y,\eta)}(x,\xi)$ 代入陈述$\tilde{\Phi}^{-\tilde{\ell}_-(\tilde{y},\tilde{\eta})}(\tilde{y},\tilde{\eta})\in\tilde{\Gamma}_U$，可得 $\tilde{\Phi}^{\ell_-(y,\eta)-\tilde{\ell}_-(\tilde{y},\tilde{\eta})}(x,\xi)\in\tilde{\Gamma}_U$。根据 ℓ_-的定义，我们有 $\ell_-(y,\eta)\geq\tilde{\ell}_-(\tilde{y},\tilde{\eta})$；若 $\ell_-(y,\eta)>\ell_-(\tilde{y},\tilde{\eta})$，则双特征线 $\gamma(x,\xi)$ 会在正向时间与 ∂T^*M相交于一个入射余向量。根据传播时间相等，$\tilde{\Phi}^t(x,\xi)$ 不会因 $t\in[0,\ell_-(y,\eta)]\subset[0,\ell(x,\xi)]$而离开 T^*M，因此这与之矛盾。由此可知 $\ell_-(y,\eta)=\ell_-(\tilde{y},\tilde{\eta})$，因而 κ 可由 $\kappa^{-1}(\tilde{y},\tilde{\eta})=\Phi^{\ell_-(\tilde{y},\tilde{\eta})}\circ\tilde{\Phi}^{-\ell_-(\tilde{y},\tilde{\eta})}(\tilde{y},\tilde{\eta})$ 逆变换。此外，它还是一个正则变换：事实上，

给定 $(y,\ \eta) \in \Gamma$，我们可以找到一个局部常数 $t_0 > \ell_-(y,\ \eta)$，使得 $\Phi^{-t_0}(y,\ \eta) \in N \setminus M$。注意到，由于 $H = \tilde{H}$ 位于 $N \setminus M$ 上，$\kappa(y,\ \eta) = \tilde{\Phi}^{t_0} \circ \Phi^{-t_0}(y,\ \eta)$，辛性质成立，因为 $\tilde{\Phi}^{t_0}$ 和 Φ^{-t_0} 都是辛的。根据构造以及等式 $\ell = \tilde{\ell}$, $\kappa = \mathrm{Id}$ 在 Γ_U上，$\tilde{}$和 $\kappa(\Gamma_V) = \Gamma_V$。此外，$\iota^* \circ \kappa = \iota^*$在 Γ_U上显然成立；而在 Γ_V上，采用上述记号，有

$$\begin{aligned}\iota^*\kappa(y,\eta) = \iota^*\tilde{\Phi}^{\ell_-(y,\eta)}(x,\xi) = \iota^*\tilde{\Phi}^{\hat{\ell}(x,\xi)}(x,\xi) = \iota^*\hat{S}^{\tilde{H}}(x,\xi) = S^{\tilde{H}}(x,\xi') \\ = S^H(x,\xi') = \iota^*\hat{S}^H(x,\xi) = \iota^*\Phi^{\hat{\ell}(x,\xi)}(x,\xi) = \iota^*(y,\eta).\end{aligned}$$

由于哈密顿量沿其双特征流保持不变，并且 $H = \tilde{H}$在 $T^*M \setminus 0\big|_U$上，$\kappa^*H = H$ 在 Γ上。我们还提到，κ 共轭这些流：与之前一样令 t_0，

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^s \circ \kappa(y,\eta) = \tilde{\Phi}^{t_0+s} \circ \Phi^{-t_0}(y,\eta) = \tilde{\Phi}^{t_0+s} \circ \Phi^{-t_0-s} \circ \Phi^s(y,\eta) \\ = \tilde{\Phi}^{t_0} \circ \Phi^{-t_0} \circ \Phi^s(y,\eta) = \kappa \circ \Phi^s(y,\eta).\end{aligned} \tag{10}$$

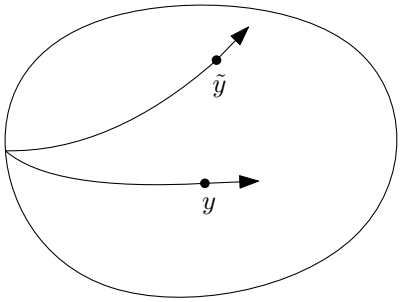


FIGURE 3. 典范关系 κ。图中未绘制余方向。

现在我们处理 t $\tilde{}$一般情形。在这里我们不必有 $\Gamma_U = \Gamma_U$，因此我们将用9）替换

$$\kappa = \tilde{\Phi}^{\ell_-(y,\eta)} \circ \tilde{\zeta}_\lambda \circ \iota^* \circ \Phi^{-\ell_-(y,\eta)}, \quad \lambda = \sqrt{2H(y,\eta)}; \tag{11}$$

下面的论证旨在证明其辛性质。选取局部坐标 x' 在 U上，并令 ξ'为对偶坐标，在 T^*U中。定义映射 $\Psi\colon (x',\ s,\ \xi',\ E) \mapsto (y,\ \eta)$ 如下

$$(y,\eta) = \Phi^s((x',0),\xi), \qquad \xi = (\xi', h(x',\xi',E)), \quad E > 0, \quad (x',\xi') \in \mathcal{U}_{\sqrt{2E}}, \quad s \in \left[0, \ell_{\sqrt{2E}}(x',\xi')\right]. \tag{12}$$

函数 $h(x',\xi',E) := (\zeta_{\sqrt{2E}})_n(x',\xi')$满足 $H(x',0,\xi',h) = E$，并且我们有齐次性 $h(x',\xi',E) = (2E)^{1/2}h(x',(2E)^{-1/2}\xi',1/2)$。

我们声称 Ψ 在其定义域上是一个正则变换。首先，我们通过计算 $s = 0$ 处的雅可比矩阵来检验辛性质。根据隐式关系，我们有

$$\partial_{x'}h = -\frac{\partial_{x'}H}{\partial_{\xi_n}H}, \quad \partial_{\xi'}h = -\frac{\partial_{\xi'}H}{\partial_{\xi_n}H}, \quad \partial_E h = \frac{1}{\partial_{\xi_n}H}.$$

我们在 s 处对 $s = 0$ 求导，记作 $y = (y',\ y^n)$ 和 $\eta = (\eta',\ \eta_n)$：

$$\partial_s y = \mathrm{d}y X_H = \partial_\xi H, \quad \partial_s \eta = \mathrm{d}\eta X_H = -\partial_x H.$$

对于所有其他导数，当 $s=0$ 时，我们有 $(y',\ y^n,\ \eta',\ \eta_n)=(x',\ 0,\ \xi',\ h(x',\ \xi',\ E))$。综上，$s=0$ 的雅可比矩阵可写为

$$D_{x',s,\xi',E}(y',y^n,\xi',\eta_n)=\begin{pmatrix}\mathrm{Id} & \mathrm{d}_{\xi'}H^{\mathsf{T}} & 0 & 0\\ 0 & \partial_{\xi_n}H & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{d}_{x'}H^{\mathsf{T}} & \mathrm{Id} & 0\\ -\frac{\mathrm{d}_{x'}H}{\partial_{\xi_n}H} & -\partial_{x^n}H & -\frac{\mathrm{d}_{\xi'}H}{\partial_{\xi_n}H} & \frac{1}{\partial_{\xi_n}H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{Id} & C & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & D & \mathrm{Id} & 0\\ D^{\mathsf{T}}/a & b & -C^{\mathsf{T}}/a & 1/a\end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中小写字母表示标量，且 $C,\ D$ 的维数为$(n-1)\times 1$。现在通过直接计算即可验证：若 $J=(0,-\mathrm{Id};\mathrm{Id},0)$如前所述呈分块形式，且 A 是形如(13)的任意矩阵，则有 $A^{\mathsf{T}}JA=J$。因此映射(12)在 $s=0$处满足辛性质。现在我们可以将这一性质从 $s=0$向外延拓。对任意固定的 s_0，

$$\mathrm{d}\Psi\big|_{s=s_0}=\mathrm{d}(\Phi^s(x',0,\xi',h))\big|_{s=s_0}=\mathrm{d}(\Phi^{s_0}\circ\Psi(x',s-s_0,\xi',E))\big|_{s=s_0}=\mathrm{d}\Phi^{s_0}\circ\mathrm{d}\Psi\big|_{s=0}, \tag{14}$$

它作为辛映射的复合，因而是辛的。

我们已构造了一个正则变换 $\Psi:(x',s,\xi',E)\mapsto(y,\eta)$，它是从(12)中所指出的定义域到 Γ 的双射，这由 Γ 的定义可知。它具有齐次性

$$\Psi(x',s,\xi',E)=(y,\eta)\implies\Psi(x',\lambda^{-1}s,\lambda\xi',\lambda^2E)=(y,\lambda\eta),\quad\lambda>0.$$

给定 $\tilde{H}$，我们共构造与之相关的同一变换。于是 (11) 可表示为以下复合

$$\kappa:(y,\eta)\overset{\Psi^{-1}}{\longmapsto}(x',s,\xi',E)\overset{\tilde{\Psi}}{\longmapsto}(\tilde{y},\tilde{\eta})$$

~ ~映射 Γ 到 Γ，该映射是正则的，且为一阶齐次。我们仍有 $\kappa^*H=H^{\sim}$ ~，因为 $H(y,\eta)=E=H(\tilde{y},\tilde{\eta})=H(\kappa(y,\eta))$。其余性质很容易验证。□

注 2.2。或者，我们也可以考虑坐标变换 $(x',t,\xi',\lambda)\mapsto(y,\eta)\in\Gamma$，其定义为

$$(y,\eta)=\Phi^{t/\lambda}((x',0),\lambda\zeta(x',\xi'/\lambda)),$$

其中 $\lambda:=|\eta|_y=(2H(y,\eta))^{1/2}$。随后我们可以用同样的方法推导出，这一坐标变换对应于一个齐次正则变换（与我们在上文证明中的构造不同）。不过，目前这种方法更容易推广到第4.1节的零能量情形，因此我们更倾向于采用这种方法。

注记 2.3。在每个余球面丛中，典范 1-形式 $\alpha=\xi\mathrm{d}x=\xi\partial_\xi\lrcorner\sigma$ 的核定义了一个极大非可积分布，换言之，即一个接触结构（见 [2, 附录 4]）。上述证明也可以用接触几何的语言来表述，即用映射 $(y,\eta)=\hat{}\Psi(s,x',\xi')=\Phi^s(\zeta(x',\xi')):\mathbb{R}_t\times\mathcal{U}_{(x',\xi')}\to S^*M$ 代替 (12) 中的映射，并证明它满足 $\Psi^*\alpha=\alpha'$；其中，$\alpha'=\mathrm{d}s+\xi_j\mathrm{d}x^j$ 的核在定义域空间中定义了一种自然的接触结构。由此可得到单位球面丛之间的映射，再利用齐次性将其延拓，从而得到所需结果。同样，我们没有采用这种方法，因为它似乎无法以显而易见的方式推广到第 4.1 节的零能量情形。 [15] 讨论了接触形式和里布向量场的一个逆问题。

注记 2.4. 到目前为止，我们并未要求 $H(x,\xi)$ 关于纤维变量 ξ 为偶函数。若它是偶函数——这在我们所考虑的应用中往往如此——那么根据引理 2.1，$(x(s)\ \xi(s))$ 是单位双特征线，当且仅当 $(x(-s)\ -\xi(-s))$ 是单位双特征线。此时，(4) 在 $(x_0,-\xi^0)$ 处也成立，并且我们可以在 (5) 中将 ζ 定义为 $\zeta(x',-\xi')=-\zeta(x',\xi')$。于是 $S(x,-\xi)$ 定义良好（参数 s 沿射线改变符号）。若 $(y,\eta')=S(x,\xi')$，则 $(y,-\eta')=S(x,-\xi')$，即 S 关于纤维

变量为奇函数。因此，除了入射射线外，若已知出射射线上的 S （反之亦然），并不会提供额外信息。在这种情况下， κ 也是奇函数。

3. Linearization of the travel times

3.1. **传播时间** $T(x,y)$**.** 现在，我们将用其起点和端点x和 y来参数化传播时间，记作 $T(x,y)$。这需要无共轭假设。这样的传播时间对应于信号从 $x \in \partial M$ 到达 $y \in \partial M$ 所实际花费的时间，其中模型为双曲型偏微分方程（43）。

定义 3.1. 对于$(x,\xi) \in T^*M \setminus 0$，指数映射定义为$\exp_x \xi = \Phi^1_x(x,\xi)$。
在度量情形下，这是众所周知的指数映射，其中 ξ 通过音乐同构与一个向量相关联。

定义 3.2. 我们称 $y = \exp_x \xi$ 沿着从ξ出发的双特征线与 x 不共轭，若$\exp_x$ 在 ξ附近是局部微分同胚。若如此，我们称 $|\xi| =: T(x,y)$ 为 x与 y之间的传播时间。

这是度量情形中同一概念的一种推广，但也可能出现一些新的效应。我们无法先验地知道，只要 x和 y 足够接近，它们就不共轭。此外请注意，当 x 和 y分别足够接近 x_0 和 y_0，且其余方向足够接近 ξ^0时， $T(x,\ y)$定义为从 x 到 y的唯一单位双特征线的传播时间，其传播时间先验上足够接近$\hat{}\ell(x_0,\ \xi^0)$。

3.2. **一个变分公式。** 假设 $H(x,\ \xi;\ s)$ 是哈密顿量附近的一个单参数族，其传播时间为 $T(x_1,\ x_2;\ s)$。若海森矩阵 $H_{\xi\xi}$ 为正定，我们便可使用勒让德变换得到一个芬斯勒度量（见第 5节），并利用哈密顿曲线变换为测地线的提升曲线这一事实；这些曲线是能量泛函的临界曲线。对于最快速度，在弹性力学中严格凸性至少成立，但一般情况下并不成立。

下一个引理是黎曼几何中能量泛函一阶变分的一个类比。然而，两者存在两个本质区别。首先，扰动曲线是某个扰动后的哈密顿函数的哈密顿曲线，而不是任意的光滑变分。其次，下面的（15）中存在一个非平凡的积分项；而在度量情形的类似情况下，即对切丛中测地线提升附近曲线的能量进行扰动时，并不会出现这样的项。事实上，当端点固定时，总变分便为零，这与众所周知的事实一致：我们所扰动的测地线是能量泛函的临界点。关系式（15）特别表明，哈密顿曲线并不是邻近曲线中的能量极小化曲线。

引理 3.1。 设 $[0,1] \ni t \mapsto \gamma\ (t;\ s) :=\ (x\ (t;\ s)\ \ \xi\ (t;\ s)\ )$ 是与 $H\ (x,\xi;\ s)$ 相关的一族哈密顿曲线，并且光滑地依赖于实参数 s。那么能量

$$E(\gamma(\,\cdot\,;s)) \coloneqq \int_0^1 H(x(t;s),\xi(t;s);0)\,\mathrm{d}t$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} E(\gamma(\,\cdot\,;s)) = \langle \xi(t;0), x_s(t;0)\rangle\Big|_{t=0}^{t=1} - 2\int_0^1 H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

证明。我们有

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} H(x(t;s),\xi(t;s);0) = H_x\cdot x_s + H_\xi\cdot\xi_s = -\dot{\xi}\cdot x_s + H_\xi\cdot\xi_s,$$

均限制在 $s=0$。对 t 从 0 到 1 积分，并对项 $\dot{\xi}\cdot x_s$ 使用分部积分。我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}E(\gamma(\,\cdot\,;s)) &= \int_0^1(-\dot{\xi}\cdot x_s + H_\xi\cdot\xi_s)\,\mathrm{d}t\\ &= -\langle\xi(t;0),x_s(t;0)\rangle\Big|_{t=0}^{t=1}+\int_0^1(\xi\cdot\dot{x}_s+H_\xi\cdot\xi_s)\,\mathrm{d}t\\ &= -\langle\xi(t;0),x_s(t;0)\rangle\Big|_{t=0}^{t=1}+\int_0^1((\partial_sH_\xi)\cdot\xi+H_\xi\cdot\xi_s)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{16}$$

其中，同样，所有量都限制在 $s=0$。这里，(∂_sH_ξ) 表示 s导数，其对象为H_ξ（x（t；s）ξ（t；s）；s），并且是关于 s在 $s=0$处的所有出现，而不仅仅是最后一次。由欧拉恒等式，（16）中的被积函数等于

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(H_\xi(x(t;s),\xi(t;s);s)\cdot\xi(t;s)\big)=2\partial_s\big(H(x(t;s),\xi(t;s);s)\big)$$

在 $s=0$处，并且特别地，与 t无关。由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}E(\gamma(\,\cdot\,;s))=-\langle\xi(t;0),x_s(t;0)\rangle\Big|_{t=0}^{t=1}+2\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\int_0^1H(x(t;s),\xi(t;s);s)\,\mathrm{d}t.\tag{17}$$

对于后一项，我们有

$$2\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\int_0^1H(x(t;s),\xi(t;s);s)\,\mathrm{d}t=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}E(\gamma(\,\cdot\,;s))+2\int_0^1H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t.\tag{18}$$

将（17）与（18）结合起来，即可证明（15）。 □

例3.1. 我们将上述能量与度量情形中的对应量进行比较。那里的能量被定义为 $g_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$ 的积分。然而，将其转换到余切丛上，我们有$g^{ij}(g\dot{\gamma})_i(g\dot{\gamma})_j$，其中 $g\dot{\gamma}=\xi$。然后，在保持 g 不变的情况下对 γ 作变分。然而，按照我们在（17）中定义能量的方式，在度量情形中，$\xi(t;s)$是由 $\dot{\gamma}$ 借助$g(x;s)$降指标得到的，而不是用 $g(x;0)$。于是，s导数将会包含额外的项。用 δ表示变分，即 $s=0$处的 s导数，我们有

$$\begin{aligned}\partial_s|_{s=0}\left(H(x(t;s),\xi(t;s);0)\right) &= g^{ij}\delta((g\dot{\gamma})_i(g\dot{\gamma})_j)\\ &= 2\big(g^{-1}(\delta g)\dot{\gamma}\big)\cdot(g\dot{\gamma})+2\big(g^{-1}(g\delta\dot{\gamma})\big)\cdot g\dot{\gamma}=-2((\delta g^{-1})(g\dot{\gamma}))\cdot(g\dot{\gamma})+2\delta\dot{\gamma}\cdot g\dot{\gamma}.\end{aligned}$$

对 t 从 $t=0$ 到 $t=1$积分此恒等式。第一项给出以下积分：$-2H_s(x(t;0)\ \xi(t;0);0)$。第二项为 $\delta((g(\,\cdot\,;0)\dot{\gamma})\cdot\dot{\gamma})$，对此我们可以应用测地线能量的第一变分公式，得到式（16）中的边界项。因此，在这种情况下，（16）得到了验证。

回到一般情形，当勒让德变换 $\mathcal{L}$ 可逆时（见第5节），在 TM 上满足欧拉-拉格朗日方程的曲线局部极小化作用量。它们是作用量泛函的临界曲线，而欧拉-拉格朗日方程最初正是由此导出的。将作用量转换为上文定义在 T^*M 上的能量时，需要先让 $\mathcal{L}_s$ 依赖于 s，然后再将其作为 $s=0$求导。这就是为什么我们不能指望积分（15）一般为零。

3.3. T的线性化（x，y）。

推论 3.1. 假设沿着与 $H(x,\xi,0)$相关、从 (x_1,ξ^1) 出发的双特征线，x_1 与 $x_2\in M$ 不共轭。令 $[0,1]\ni t\mapsto(x(t;s)\ \xi(t;s))$ 为相关的哈密顿曲线，

$H(x,\xi;s)$，它们随 s 光滑变化（当 $|s|\ll 1$ 时），且其 x-投影连接 x_1 与 x_2。那么

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{1}{2}T^2(x_1,x_2;s)=-\int_0^1 H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

将双特征曲线参数化为单位速度曲线，可得

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}T(x_1,x_2;s)=-\int_0^{T(x_1,x_2;0)} H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

证明。 应用引理 2.1 其中 $\lambda=T(x_1,x_2;s)$。那么，本引理中的重参数化曲线位于能级 $T^2(x_1,x_2;s)/2$，并且它们在 x_2 时达到 $t=1$。我们有

$$\frac{1}{2}T^2(x_1,x_2;s)=\int_0^1 H(x(t;s),\xi(t;s);s)\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

这显然成立，因为我们对右侧的常数 $T^2/2$ 进行积分。由（19）和（15）、（17），可得（ $\tilde{t}=Tt$。然后作参数化变换 $x(\tilde{t}/T)$ $T^{-1}\xi(\tilde{t}/T)$) 是能级为 $1/2$的哈密顿曲线。进行该变量替换后，可得（20）。□

例 3.2. 设 g 是一个黎曼度量，且 $H=\frac{1}{2}g^{ij}\xi_i\xi_j$。沿着流有 $H_-=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$，其中 γ 是测地线。能级 $1/2$ 表示单位速度测地线 $\gamma(t)$。令$t=\tau T(x_1,x_2;s)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)=\tilde{\gamma}(T(x_1,x_2;s)\tau)$。那么，在 τ 参数下，“传播时间”为 1。我们有 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}_\tau\tilde{\gamma}(\tau)=T(x_1,x_2;s)\,\dot{\gamma}(T(x_1,x_2;s)\tau)$，其长度为 $T(x_1,x_2;s)$。能量 E由下式给出

$$E(\gamma(\cdot,s))=\frac{1}{2}\int_0^1 g_{ij}(\tilde{\gamma};s)\dot{\tilde{\gamma}}^i(\tau;s)\dot{\tilde{\gamma}}^j(\tau;s)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}T^2(x_1,x_2;s).$$

对 s 求导，并利用测地线的极小化性质，得到

$$TT_s|_{s=0}=\frac{1}{2}\int_0^1(\partial_s g)_{ij}(\tilde{\gamma})\dot{\tilde{\gamma}}^i\dot{\tilde{\gamma}}^j|_{s=0}\,\mathrm{d}\tau.$$

回到原来的参数化，我们得到

$$\partial_s T|_{s=0}=\frac{1}{2}\int_0^{T(x_1,x_2;0)}(\partial_s g)_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j|_{s=0}\,\mathrm{d}t, \tag{22}$$

一个众所周知的公式。我们将把它转换到余切丛上。余度量为 g^{-1}，其s-导数为 $\partial_s g^{-1}=-g^{-1}(\partial_s g)g^{-1}$。于是，用切丛表示的哈密顿量变分 H_s 变为 $H_s=-\frac{1}{2}(\partial_s g)_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$。于是我们得到与推论 3.1 相同的公式。度量情形下，这个公式众所周知，但通常写成形式（ 22 ），而非其协向量形式（19）。

3.4. $T(x,y)$ 作为 S的生成函数。

推论 3.2. 假设沿着从(x_0,ξ^0)出发、相对于 $H(x,\xi)$的双特征线 γ_0， x_0 与 y_0 不共轭。设 $T(x,y)$ 为邻域内 x 与 y 之间（局部定义的）传播时间。则在(x_0,y_0)附近，下述结论成立。

(a) $(y,\mathrm{d}_y T)=\Phi^{T(x,y)}(x,-\mathrm{d}_x T)$;

(b) 我们进一步有

$$C:=\{(x,-\mathrm{d}'_x T,y,\mathrm{d}'_y T)\}$$

是散射关系 S 的图像（相对于入射余向量(x_0,ξ^0)， 该余向量满足(4)）， 在$(x_0,\xi^{0\prime},y_0,\eta^{0\prime})$的邻域内。

证明。我们应用引理 3.1，其中哈密顿量与参数 s 无关，而曲线仅通过其端点依赖于 s 。于是，$H_s = 0$ 见式 (15)，能量关系的变分与其度量对应物相似。设 $x(s)$、 $y(s)$ 是 M 中关于 $|s| \ll 1$ 的光滑曲线，且 $x(0) = x_0$、 $y(0) = y_0$。令 $(q(t;\ s)\ p(t;\ s))$ 为光滑的哈密顿曲线，其中 $q(0, s) = x(s)$， $q(1, s) = y(s)$。设 $p(0,0) = \xi^0$， $p(1, 0) = \eta^0$， $v = q_s(0; 0)$， $w = q_s(1, 0)$。那么，见式 (21)，

$$\partial_s \frac{1}{2} T^2(x(s), y(s))|_{s=0} = \langle \eta^0, w\rangle - \langle \xi^0, v\rangle. \tag{23}$$

左侧的导数等于 $T\langle \mathrm{d}_x T,\ v\rangle + T\langle \mathrm{d}_y T,\ w\rangle$ 在 $s = 0$ 处。除以 T 得到

$$\partial_s T(x(s), y(s))|_{s=0} = \langle \tilde{\eta}^0, w\rangle - \langle \tilde{\xi}^0, v\rangle,$$

其中 $\tilde{\xi}^0$ 和 $\tilde{\eta}^0$ 现在都已归一化为单位向量。由于这对任意两个向量 v （在 x_0处）以及 w （在 y_0处）都成立，因此这证明了 （a）。

（b）部分 由 （a） 立即得出。 □

3.5. **X射线变换**。我们定义 X 射线变换

$$\mathsf{X} f(\gamma) = \int f \circ \gamma(t)\, \mathrm{d}t = \int f(x(t), \xi(t))\, \mathrm{d}t, \quad f \in C^\infty(S^*M)$$

沿所有单位极大哈密顿曲线 γ 经过 S^*M，假设它们在有限时间内有定义。我们也可以将 $\mathsf{X} f$ 定义在不一定是单位曲线上，条件是 $f(x, \xi)$ 关于 $m = 0, 1, \ldots$ 是 ξ中的齐次函数；那么，当以初始点为参数时，$\mathsf{X} f(x, \xi)$ 是 $m-1$ 阶齐次函数。推论 X 表明，变换是传播时间的线性化，见3.1，公式（20）。其中，$f = H_s|_{s=0}$ 先验上是二阶齐次的，但由于它被限制在 $H = 1/2$上，齐次性无关紧要。

模规范变换后，X 易于求逆。

定理 3.1 (X的反演。 设 H， $\mathcal{U}$， $\mathcal{V}$和 Γ 如定理 2.1前的讨论所述。那么对每个 $f \in C^\infty(S^*M \cap \Gamma)$，$\mathsf{X} f = 0$ 对 Γ 中的所有极大单位双特征线成立，当且仅当 $f = X_H \phi$ 存在某个 $\phi \in C^\infty(S^*M \cap \Gamma)$，使得 $\phi = 0$ 在 $\Gamma_U \cup \Gamma_V$上成立。

证明。 “如果”部分显然。对于“仅当”陈述，设 $\phi(x,\ \xi) = \int_{-\ell_-(x,\ \xi)}^0 f(\Phi^s(x,\ \xi))\, \mathrm{d}s$。显然，$\phi = 0$ 在 Γ_U上。由于 $\mathsf{X} f = 0$， $\phi = 0$ 在 Γ_V上。 □

现在我们证明，将一族规范等价哈密顿量线性化后，得到的正是 \(X\) 的自然零空间。设 \(\{v1\}(\{v2\}，ϵ) \{v6\}Id \{v7\}(ϵ^2)，\{v9\} 是一族齐次正则变换，满足 \(\{v10\}(Γ_U) $\pi \circ \kappa(\Gamma_V)$ \{v14\} 且在 \(\{v16\} 上成立。我们可以假设所考虑的参考双特征曲线邻域足够小，使得 \(\{v17\} 可缩；于是 \(\{v18\} 也可缩。无穷小典范变换 \(\{v19\} 的形式为 \(\{v20\}，其中 \(\{v21\}(Γ)\) 在相差一个常数的意义下唯一确定。事实上，由于 \(\{v23\}(·，ϵ)\) 是辛的，根据 Cartan公式，\(d(\{v28\}) \{v29\}（\(\{v30\} 是李导数），又由于 \(\{v31\} 可缩，故 \(\{v32\}d\{v33\} 对某个 \(\{v34\} 成立，即 \(\{v35\}。此外，由 \(\{v36\} 的齐次性可得

$$\xi \phi_{\xi\xi} = 0, \quad \xi \phi_{x\xi} = \phi_x \implies d(\phi - \xi \phi_\xi) = 0 \text{ on } \Gamma. \tag{24}$$

我们现在验证 $\phi = 0$ 在 $\Gamma_U \cup \Gamma_V$ 上（相差一个常数）。取一点 $\zeta_0 = (x_0,\ \xi^0) = ((x',\ 0),\ (\xi',\ \xi_n)) \in \Gamma_U$，照常用边界坐标表示。然后写作 $F(\zeta_0) = a \cdot \partial_x + b \cdot \partial_\xi$，其中 $a = \partial_\xi \phi\big|_{\zeta_0}$, $b = -\partial_x \phi\big|_{\zeta_0}$。由于对于所有 $|\epsilon| \ll 1$，我们都有 $\pi \circ \kappa(\zeta_0,\ \epsilon) \in U$ 且 $\iota^* \circ \kappa(\cdot,\ \epsilon) = \iota^*$，因此可知 $a = 0$ 且 $b' = -\partial_{x'} \phi\big|_{\zeta_0} = 0$。由于 $\zeta_0 \in \Gamma_U$ 是任意的，可知 $\phi\big|_{\Gamma_U}$ 是局部常数，因而在此处也是常数，可取为 0。令其在 Γ_U 上为 0，我们得到

$\phi - \xi\phi_\xi = 0$ 在 Γ_U上，因此 $\phi = \xi\phi_\xi$ 在 Γ 由（24）可知，即 ϕ 在 上是 1 次齐次的 Γ。沿用之前的论证可知， ϕ 在 Γ_V上也为常数，因此由齐次性可知其在此处必为零。将哈密顿量线性化后，我们得到

$$\begin{aligned}(\kappa^{-1}(\cdot,\epsilon))^* H(x,\xi) &= H\big((x,\xi) - \epsilon F(x,\xi)\big) + O(\epsilon^2) \\ &= H(x,\xi) - \epsilon \mathrm{d}H \cdot F + O(\epsilon^2) = H(x,\xi) + \epsilon X_H \phi + O(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{25}$$

因此，线性化确实是 $X_H\phi$，其中 ϕ 是次数为 1 的齐次函数，并在 $\Gamma_U \cup \Gamma_V$ 处取零。

最后提及，若对于一族在 M 上逐点固定 ∂M 的微分同胚 $f(\cdot,\epsilon)$，有 $\kappa(\cdot,\epsilon) = (f(\cdot,\epsilon), \mathrm{d}(f^{-1})^*(\cdot,\epsilon))$，此时 $f(\cdot,\epsilon)$ 的线性化是 M 上一个在 ∂M 处消失的向量场 V，则可验证 $F = (V, -\mathrm{d}_x(\xi \cdot V))$，因此上述势函数（相差一个常数）由 $\phi = \alpha(V)$ 给出。此外，若 $H = \frac{1}{2} g^{ij}\xi_i\xi_j$，例如利用局部坐标可验证，式 (25) 中的线性项为 $X_H\phi = \xi(\nabla_{\xi^\sharp} V) = (\mathrm{d}^s V^\flat)(\xi^\sharp, \xi^\sharp)$，其中协变导数 g、对称微分 d^s 和音乐同构均是相对于 g 定义的。这是度量的一参数族线性化的著名表达式，将其转移到了相空间上。

4. Zero energy level: Scattering rigidity for operators of real principal type

4.1. 设定。令 $p_m(x,\xi) \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$ 为实值且在 ξ 中具有 m 阶齐次性。令 p 为 S^m 中的一个符号，其主符号为 p_m。假设 $\partial M = \emptyset$，H¨ormander 的奇异性传播定理指出，满足方程 $p(x,D)u = f$ 的解的 $\mathrm{WF}(u) \setminus \mathrm{WF}(f)$ 包含于 $p_m^{-1}(0)$ 中，并且在能级 $p_m = 0$ 上关于 p_m 的哈密顿流保持不变。这里的变量并未作时空分离。零双特征线的参数化无关紧要；在该定理中，它们被视为点集。事实上，如下文引理 4.1 所示（这一点也是已知的），将 p_m 乘以一个椭圆符号（在 $p_m = 0$ 上）只会改变参数化。这是合理的，因为这相当于对我们的方程作用一个椭圆 ΨDO。这促使我们研究这类齐次哈密顿量 $H \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$ 的散射关系。我们假设 $m = 2$（通过乘以椭圆因子可将其转换为任意其他阶），且 $\mathrm{d}H \neq 0$ 在 $H^{-1}(\{0\})$ 上。此外，我们假设 $H^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$（$H^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ 的情形对应于椭圆算子，从我们的角度来看并无研究意义）。

此类算子的逆问题已在 [20] 中得到研究。该文证明，边界上的柯西数据能够唯一确定散射关系 S_0（定义见下文）和低一阶或低两阶项的零双特征变换 L（见（35））。这些变换的反演仍是一个未解决问题。

引理 4.1（[27]）**.** 设 M 为带边界或不带边界的流形。设 $H(x,\xi)$ 为定义在 $(x_0,\xi^0) \in T^*M \setminus 0$ 附近的哈密顿量，并假设 $H(x_0,\xi^0) = 0$，$\mathrm{d}H(x_0,\xi^0) \neq 0$。设 $\mu(x,\xi) > 0$ 在(x_0,ξ^0)附近。

(a) 那么， H 和 $\check{H}$ 的哈密顿曲线：$= \mu H$ 在零能级上、(x_0,ξ^0) 附近作为点集重合，但其参数化可能不同。更具体地说，若$(x(s)\ \xi(s))$和$(\check{x}(\check{s})\ \check{\xi}(\check{s}))$ 是分别与 H 和 $\check{H}$相关、初始条件均为(x_0,ξ^0) 且分别取于 $s = 0$、 $\check{s} = 0$的解，那么

$$(\check{x}(\check{s}(s)), \check{\xi}(\check{s}(s))) = (x(s), \xi(s)) \tag{26}$$

求解 $\check{s}(s)$

$$\frac{\mathrm{d}\check{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mu(x(s),\xi(s))}, \quad \check{s}(0) = 0. \tag{27}$$

(b) 令 $\check{s}(s;x_0,\xi^0)$ 满足 $d\check{s}/ds>0$，并通过式 *(27)* 在经过 (x_0,ξ^0) 的哈密顿轨迹上定义 μ。那么，对于 μ 的任意光滑延拓，取由 $\check{H}:=\mu H$ 确定的轨迹 $(\check{x},\check{\xi})$ 时，式 *(26)* 成立。

证明。 部分 (a) 的证明见 [27]。 (b) 的证明可由(a) 的证明推出。 . □

例如 $p=g^{ij}(x)\xi_i\xi_j/2$，其中 g 是洛伦兹的。任意正的共形因子都会重新参数化零双特征曲线，但作为点集，它们保持不变。除非（以非唯一的方式）选定一个时间函数，否则这里无法自然地定义传播时间。请注意，我们的假设也允许 g 是任意号差的伪黎曼度量（p，q），只要 $pq\neq 0$ 成立。现在取 2.1 中的缩放引理，并令 $E=0$，即可印证上述论证。

˘注 4.1. 两个可能不同的哈密顿量 H 和 H 具有相同的零能量超曲面 $\mathcal{H}$，则存在某个不消失的齐次零阶函数 $\mu\in C^\infty(T^*M\setminus 0)$，使得 $\check{H}=\mu H$。因此，根据引理 4.1， H 和 H 在 $\mathcal{H}$ 上的哈密顿流仅相差一个重新参数化；根据式 (27)，这只取决于 $\mathcal{H}$上 μ 的取值。换个角度看，一旦知道微分 $\mathrm{d}H$ 在 $\mathcal{H}=H^{-1}(\{0\})$上的取值，哈密顿向量场 X_H 在该处便已确定。两个不同哈密顿量 H 和 H 的˘微分，在零能量超曲面 $\mathcal{H}$ 上满足 $\mathrm{d}\check{H}=\mu\mathrm{d}H$，其中 $\mu\in C^\infty(\mathcal{H})$是某个标量函数（因为它们都是余法向），且在$\mathcal{H}$上， $X_{\check{H}}=\mu X_H$。从这两种角度都可以看出，零哈密顿流取决于 $\mathcal{H}$（其任一定义函数都能将双特征线确定为点集），以及 $\mathcal{H}$ 上的一个共形因子（它确定这些曲线的参数化）。当然，无论采用哪种角度，共形因子 μ 在 $\mathcal{H}$ 上的取值都相同。

这与正能级上的正齐次哈密顿量情形截然不同：此时正能量超曲面不是锥形的；事实上，对于任意 $\xi\neq 0$，径向射线 $s\mapsto s\xi$ 都与 $\{H=E\}$ 横截相交。这意味着 $\{\check{H}=E\}=\{H=E\}$ 等价于 $\check{H}=H$，因为利用齐次性， H （因而其流）可在全局由 $\{H=E\}$ 确定。

假设 $\det H_{\xi\xi}\neq 0$，对于固定的 x 和 $E>0$，当 ξ 取遍满足 $|\xi|=\sqrt{2E}$ 的某个开集，且 t 取遍 0 附近的某个开集时，$\exp_x(t\xi)$ 的像仍是开集。当 $E=0$ 时，定义域包含于一个余维一锥集；若 $\det H_{\xi\xi}\neq 0$，则在遇到共轭点之前，像与该锥集微分同胚。基本例子包括 $H=\frac{1}{2}|\xi|^2/2$ 时的 $x=x_0+s\theta$、 $E=1/2$；以及在 g 为闵可夫斯基时的 $x=x_0+s(1,\theta)$。后一种情况下，像为光锥 $(x^0)^2=(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2$。当 $H(x,\xi)$ 在 x 变量上没有特殊结构，但在 ξ 变量上具有特殊结构（例如是 ξ 的多项式，或这类矩阵的特征值）时，这一观察尤为重要。

4.2. 散射刚性。与第 2 节类似，我们从带边界流形 M 中的一条零双特征曲线 γ_0 开始，该曲线连接 $T^*M\setminus 0\big|_{\partial M}$ 中的两个不同余向量 (x_0,ξ^0) 和 (y_0,η^0)，并且对于固定的哈密顿量 H，曲线包含于 $\{H=0\}$ 中。选取 ∂M 的两个互不相交的开子集 $U\ni x_0$ 和 $V\ni y_0$，使得式 (4) 在每个开子集上都成立。根据我们的假设， $\ell_\pm(x,\xi)<\infty$ 沿着 γ_0 （$\ell_\pm$ 如式 (7)，但位于能级 0），因此由式 (4) 可知，在 $H^{-1}(\{0\})$ 中的 (x_0,ξ^0) 邻域内也成立，并且 $\ell_\pm$ 在该处光滑。对于入射余向量，可以像式 (2) 那样定义散射关系 $\hat{}\ S_0(x,\xi)=\Phi^{\ell_+(x,\xi)}(x,\xi)$（下标 zero 表示零能级），它是 1 次齐次的。为了定义 T^*U 中余向量的散射关系 S_0，像之前一样，将 (x,ξ) 和 $(y,\eta)=\hat{}S_0(x,\xi)$ 分别限制在 TU 和 TV 上，从而得到相应的元素 $(x,\xi')\in T^*U$ 和 $(y,\eta')=S_0(x,\xi')\in T^*V$。由隐函数定理，对于给定的 (x,ξ')，可以在 $(x_0,\xi^{0\prime})$ 的一个充分小的锥形邻域 $\mathcal{U}\subset T^*U$ 内，关于 ξ 求解 $H(x,\xi)=0$；同样，也可以在 $(y_0,\eta^{0\prime})$ 的一个锥形邻域 $\mathcal{V}$ 内求解 $=S_0(x^0,\xi^{0\prime})$。这里的新要点是， $\mathcal{U}$ 和

$\mathcal{V}$ 是锥形的，而 S_0 是 1 次齐次的。当 $H = \frac{1}{2}g^{ij}\xi_i\xi_j$ 具有洛伦兹度量，且 U 是类时的， $\mathcal{U}$ 可以是类时锥 $g(\xi', \xi')$ 在 T^*U 上的任意锥形开子集 < 0。当 U 是类空的， $\mathcal{U}$ 则可以是 T^*U 的任意锥形开子集。此时传播时间没有自然的选取方式。相对于固定的 (x_0, ξ^0)，我们设

$$\Gamma_0 := \{(y, \eta) | (y, \eta) \text{ 位于从某个 } (x, \xi) \text{ 出发的零双特征线上，且 } (x, \xi') \in \mathcal{U}\}.$$

我们假设，必要时缩小 Γ_0，使得对于 $(x, \xi) \in \Gamma_0\big|_U = \{(x, \xi) \in \Gamma_0 : x \in U\}$，方程 $H(x, \xi) = (x, \xi')$ 关于 (x, ξ) 有唯一解，并令 $(x, \xi) = \zeta(x, \xi')$。如有需要，进一步缩小$\Gamma_0$ 后，我们还可以假设在 Γ_0 上有 $\ell_\pm < \infty$，并且 $\ell_\pm$ 是光滑的。我们将 σ_0 记为辛形式在 T^*M 上的限制，限制到 Γ_0。

下文中， M 是一个与 M 维数相同且具有相同边界的带边界流形，并且 $\tilde{H} \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$ 是一个具有与 H相同性质的齐次哈密顿量。所有与 (M, H) 对应的量、集合等均用波浪号标记；对于这些对象，我们采用与对应于 (M, H) 的类似对象相同的假设。

定理 4.1 （零能级上的半全局刚性）。

(a) 假设存在一个光滑的齐次微分同胚 $\kappa : \Gamma_0 \to \Gamma_0$，满足 $\kappa^*\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$ 以及 *(8)*。则 H 与 $\tilde{H}$ 的散射关系在 $\mathcal{U}$ 上一致。*(b)* 假设 $S_0^H = S_0^{\tilde{H}}$ 在 $\mathcal{U}$ 上。则存在一个正的 $\mu \in C^\infty(\Gamma_0)$，且为零次齐次，使得对于哈密顿量 $\breve{H} := \mu H$，有 $\breve{\ell}_+ \circ \zeta = \tilde{\ell}_+ \circ \tilde{\zeta}$ 在 $\mathcal{U}$ 上成立。若 μ' 是另一个与 μ 具有相同性质的函数，则 $\int (\mu^{-1} - \mu'^{-1}) \circ \gamma(t)dt = 0$ 对包含于 Γ_0 中的每一条零双特征线 γ 成立。此外，存在唯一的齐次微分同胚 $\kappa : \Gamma_0 \to \Gamma_0$，其 $\kappa^*\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$ 满足 *(8)*，并且共轭 $\breve{H}$ 与 $\tilde{H}$ 的流，即

$$\kappa \circ \breve{\Phi}^t(x, \xi) = \tilde{\Phi}^t \circ \kappa(x, \xi) \quad \forall (x, \xi) \in \Gamma_0, \quad t \in [-\breve{\ell}_-(x, \xi), \breve{\ell}_+(x, \xi)]. \tag{28}$$

注 4.2。注意，在 (a) 中取恒等映射，若 $\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0$，则 H 与$\tilde{H}$ 的散射关系一致。特别地，对 $H^{-1}(\{0\})$ 上任意（齐次） $\mu \neq 0$， H 与 μH 具有相同的数据。此外，(a) 部分表明，若哈密顿量 H 是 H 经由满足 (8) 的齐次正则变换的拉回，至多相差乘以一个共形因子，则 H 与 $\tilde{H}$ 具有相同的散射关系。这正是度量情形中所预期的情形。若 M 上的两个洛伦兹度量通过 $g = \mu\psi^*\tilde{g}$相关联，其中 ψ 是固定 ∂M 的 M 的微分同胚，且 μ 是共形因子，则我们自动得到整个相空间上的一个正则变换，它将相应的哈密顿量联系起来，至多相差一个仅依赖于底空间变量的共形因子。

在逆问题中，可以将 κ 延拓为一个定义在Γ_0 的邻域中的微分同胚 K （甚至可以使其成为正则变换，例如利用余等向嵌入定理，见 [5]）。于是，对 μ的某个延拓 $\tilde{\mu}$，在 Γ_0 附近有 $K^*\tilde{H} = \tilde{\mu}H$，其存在性由如下事实保证： H 与 $\tilde{H}$ 是同一超曲面的定义函数。然而，这些延拓并不唯一，而我们的数据仅允许我们在余维一超曲面 Γ_0 与 $\tilde{\Gamma}_0$之间构造一个微分同胚，并未提供将其延拓到邻域的优先方式。

定理的证明 *4.1*。对于部分 (a)，我们将证明，对于每个 $\zeta_0 \in \Gamma_0\big|_U$，都存在一个光滑、严格递增的函数 $\alpha : [0, \ell_+(\zeta_0)] \to [0, \infty)$，使得对于 $t \in [0, \ell_+(\zeta_0)]$ 有

$$\kappa \circ \Phi^t(\zeta_0) = \tilde{\Phi}^{\alpha(t)} \circ \kappa(\zeta_0). \tag{29}$$

首先注意到， Γ_0 关于 σ是余等向的，作为辛流形的余维数为1的子流形。因此，对每个 $\zeta \in \Gamma_0$， $T_\zeta\Gamma_0$ 的一维辛正交补关于

于 σ 包含在 $T_\zeta\Gamma_0$ 中，并且可以看出它实际上由 $X_H\big|_\zeta$ 张成。类似的讨论对 $\tilde{\Gamma}_0$ 成立。给定 $\zeta\in\tilde{\Gamma}_0$ 和 $v\in T_\zeta\tilde{\Gamma}_0$，并利用 $\kappa^*\tilde{\sigma}_0=\sigma_0$，

$$\tilde{\sigma}(\mathrm{d}\kappa X_H,v)=\tilde{\sigma}_0(\mathrm{d}\kappa X_H,v)=\sigma_0(X_H,\mathrm{d}\kappa^{-1}v)=\sigma(X_H,\mathrm{d}\kappa^{-1}v)=0,$$

也就是说，$\mathrm{d}\kappa X_H\big|_\zeta$ 属于 $T_\zeta\tilde{\Gamma}_0$ 的辛正交补，因此它必定是 $X_{\tilde{H}}\big|_\zeta$ 的标量倍数。由于 $\mathrm{d}\kappa X_H$ 和 $X_{\tilde{H}}$ 均为光滑且不消失的函数，故存在一个处处不为零的函数 $\mu\in C^\infty(\Gamma_0)$，使得 $\mathrm{d}\kappa X_H=\mu X_{\tilde{H}}$。由式 (8) 可知，$\kappa$ 将入射余向量映射为入射余向量，$\mu>0$ 处处成立。因此，$\mathrm{d}\kappa X_H$ 和 $X_{\tilde{H}}$ 的流在保持定向的重新参数化下相同，这意味着存在 α 满足式 (29) 的

利用式 (8) 和 (29) 可知 $\alpha(\ell_+(x,\xi))=\ell_+(\kappa(x,\xi))$，由此得到

$$\kappa\circ\hat{S}_0^H(x,\xi)=\hat{S}_0^{\tilde{H}}\circ\kappa(x,\xi),\quad (x,\xi)\in\Gamma_0\big|_U. \tag{30}$$

为转到 $\mathcal{U}$ 上的散射关系，我们利用 $S^H=\iota^*\circ\hat{S}_0^H\circ\zeta$，对 $\tilde{H}$ 也同理。回忆 $\iota^*\circ\kappa(x,\xi)\overset{(8)}{=}(x,\xi')$，且 $\kappa(x,\xi)=\tilde{\zeta}(x,\xi')$，我们得到

$$\begin{aligned}S^H(x,\xi')&=\iota^*\circ\hat{S}_0^H\circ\zeta(x,\xi')\overset{(8)}{=}\iota^*\circ\kappa\circ\hat{S}_0^H(\zeta(x,\xi'))\overset{(30)}{=}\iota^*\circ\hat{S}_0^{\tilde{H}}\circ\kappa(\zeta(x,\xi'))\\&=\iota^*\circ\hat{S}_0^{\tilde{H}}\circ\tilde{\zeta}(\iota^*\circ\kappa(\zeta(x,\xi')))=S_0^{\tilde{H}}(\iota^*(\zeta(x,\xi')))=S_0^{\tilde{H}}(x,\xi').\end{aligned}$$

因此，H 与 $\tilde{H}$ 的散射关系在 $\mathcal{U}$ 上一致。

对于 (b) 部分，为构造 μ，沿 X_H 的流保持常数，将函数 $\Gamma_0\big|_U\ni(x,\xi)\to\ell_+(x,\xi)\,\tilde{\ell}_+(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(x,\xi))\in(0,\infty)$ 延拓。换言之，对于 $(y,\eta)\in\Gamma_0$，我们令 $\mu(y,\eta):=\ell_+(\Phi^{-\ell_-(y,\eta)}(y,\eta))\,\tilde{\ell}_+(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(\Phi^{-\ell_-(y,\eta)}(y,\eta)))$ 这是零次齐次的，并且按构造满足 $X_H\mu=0$。由引理 4.1，对于 $\breve{H}:=\mu H$ 的流 $\breve{\Phi}^{\breve{s}(s)}$，我们有 $\breve{\Phi}^{\breve{s}(s)}=\Phi^s$，其中由 (27) 可得

$$\breve{s}(s;x,\xi)=\frac{\tilde{\ell}_+\big(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(\Phi^{-\ell_-(x,\xi)}(x,\xi))\big)}{\ell_+(\Phi^{-\ell_-(x,\xi)}(x,\xi))}s\quad\text{for }(x,\xi)\in\Gamma_0.$$

用 $s=\ell_+(x,\xi)$ 替换某个 $(x,\xi)\in\Gamma_0\big|_U$（从而 $\ell_-(x,\xi)=0$），可见 $\breve{\Phi}^{\tilde{\ell}_+(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(x,\xi))}\in\Gamma_0\big|_V$，由此可得

$$\breve{\ell}_+(x,\xi)=\breve{s}(\ell_+(x,\xi);x,\xi)=\tilde{\ell}_+(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(x,\xi)). \tag{31}$$

这等价于 $\breve{\ell}_+\circ\zeta=\tilde{\ell}_+\circ\tilde{\zeta}$ 在 $\mathcal{U}$ 上。若 μ' 是另一个与 μ 具有相同性质的函数，则由（27）可知它必须满足

$$\int_0^{\ell_+(x,\xi)}\frac{1}{\mu(\Phi^s(x,\xi))}\mathrm{d}s=\tilde{\ell}_+(\tilde{\zeta}\circ\iota^*(x,\xi))=\int_0^{\ell_+(x,\xi)}\frac{1}{\mu'(\Phi^s(x,\xi))}\mathrm{d}s,$$

对于 $(x,\xi)\in\Gamma_0\big|_0$。由此亦可见，若 $X_H\mu=X_H\mu'=0$，则它们必须一致。

类似于定理 2.1 的证明，我们构造 $\kappa:\ \Gamma_0\to\Gamma_0$，取法为

$$\kappa(y,\eta)=\tilde{\Phi}^{\breve{\ell}_-(y,\eta)}\circ\tilde{\zeta}\circ\iota^*\circ\breve{\Phi}^{-\breve{\ell}_-(y,\eta)}(y,\eta).$$

光滑性和齐次性可由第 4.2 节开头的说明得出。性质 (8) 可利用 (31) 得出，而 (28) 可通过验证 $\breve{\ell}_-(\breve{\Phi}^t(y,\eta))=t+\breve{\ell}_-(y,\eta)$. 得到。关于唯一性，对于 $t=\ell_-(y,\eta)$，(28) 意味着 κ 由其在 $\Gamma_0\big|_U$ 上的取值唯一确定。在那里，(8) 意味着我们必须有 $\kappa=\tilde{\zeta}\circ\iota^*$。

现在我们证明 $\kappa^*\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$。和往常一样，我们将流形 M 扩展为一个维数相同、稍大的流形 N，并将 $\breve{H}$ 扩展到 $T^*N \setminus 0$ 中 $T^*M \setminus 0$ 的一个邻域。固定 $(y_1,\ \eta^1) \in \Gamma_0$，并令 $(x_1,\ \xi^1) = \breve{\Phi}^{-s_0}(y_1,\ \eta^1) \in \Gamma_0$，其中 $s_0 := \breve{\ell}_-(y_1,\ \eta^1)$。定义映射

$$\breve{\Psi}(x', s, \xi', E) = \breve{\Phi}^s(x', 0, \xi', \breve{h}(x', \xi', E))$$

$\breve{}$与 (12) 完全相同，不过现在 $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$，其中 $0 < \epsilon \ll 1$ 和 h 由下式隐式定义：$\breve{H}(x', 0, \xi', \breve{h}) = E$，当 E 接近 0 时。注意，$(x', 0, \xi', \breve{h}(x', \xi, 0)) = \zeta(x', 0, \xi')$，且 $\breve{\Psi}(x_1', s_0, \xi^{1\prime}, 0) = (y_1, \eta^1)$。由 (13) 和 (14) 可知，$\mathrm{d}\breve{\Psi}\big|^*_{s=s_0}\tilde{\sigma} = \sigma$，且该映射局部可逆。构造一个与 $\tilde{H}$对应的类似映射 $\tilde{\Psi}$；出于相同原因，它是辛映射。于是 $\kappa(y_1, \eta^1) = \tilde{\Psi}(x_1', s_0, \xi^{1\prime}, 0) = \tilde{\Psi} \circ \breve{\Psi}^{-1}(y_1, \eta^1)$，并且在 $T\Gamma_0$ 上，$\mathrm{d}(\tilde{\Psi} \circ \breve{\Psi}^{-1}) = \mathrm{d}\kappa$。由于 $\left(\mathrm{d}(\tilde{\Psi} \circ \breve{\Psi}^{-1})\big|_{(y_1,\eta^1)}\right)^*\tilde{\sigma} = \sigma$，$\kappa^*\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$。□

4.3. **线性化**。在这种情况下不存在自然的传播时间，但在假设无共轭的前提下，可以定义以点对作为零哈密顿曲线起点与端点的定义函数。第二作者在 [26] 中证明，在洛伦兹情形下，任何此类函数都是散射关系的生成函数，且其线性化即为光线变换。我们在此情形下证明一个类似的结果。我们假设

$$y_0 \in V \text{ is not conjugate to } x_0 \in U \text{ along } \gamma_0. \tag{32}$$

则当 $(x, y) \in U \times V$足够接近 (x_0, y_0) 时，存在唯一一条（未必为零的）双特征线，且它足够接近 γ_0。如有必要，我们缩小 U 和 V，以确保该性质。

定义 4.1。假设(32)。

(a) 集合 $\Sigma \subset U \times V$由点对 (x, y) 组成，使得 x 与 y 由一条局部唯一的零双特征线相连。***(b)*** 我们称 $r(x, y)$ 为 Σ 在 $U \times V$上的定义函数，如果 ***(i)*** $\Sigma = \{r = 0\}$，***(ii)*** $\mathrm{d}r \neq 0$ 在 Σ上，且 ***(iii)*** $r > 0$ 当且仅当连接 x 与 y 的局部唯一哈密顿曲线位于正能级上。

条件 (iii) 只是一种符号约定，与 [26]中的约定一致。

定理 4.2。在上述假设（包括 (32)）

(a) 假设 U 和 V 足够小，则 Σ 是 $U \times V$的余维一子流形。***(b)*** 令 $r(x, y)$ 为 $U \times V$上 Σ 的一个定义函数。那么

$$C = \{(x, -\lambda \mathrm{d}'_x r, y, \lambda \mathrm{d}'_y r);\ \lambda > 0, (x, y) \in \Sigma\} \tag{33}$$

在$<x_0, \xi^0, y_0, \eta^0)$附近的局部范围内，它是 S_0的图像。

(c) 若 $H(\cdot, \cdot;\ s)$ 是满足上述假设、且在 $s = 0$附近随 s 光滑变化的哈密顿量单参数族，并且 r_s 是相应 $\Sigma(s)$的定义函数光滑族，那么

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} r_s(x, y) = -\rho(x, y) \int_0^1 f \circ \gamma_{[x,y]}(t)\, \mathrm{d}t \quad on\ \Sigma = \{r(x, y) = 0\}, \tag{34}$$

其中，$f = \mathrm{d}H(\cdot, \cdot;\ s)/\mathrm{d}s|_{s=0}$，$[0, 1] \ni t \mapsto \gamma_{[x,y]}$是连接 x 与 y的$H|_{s=0}$ 的局部唯一零双特征曲线，而 $\rho > 0$ 是一个光滑函数。

证明。我们沿用 [26]中定理 2.1 的证明。由非共轭假设（32），对于每个固定的 x，相应指数映射下 $\mathcal{H} = H^{-1}(\{0\}$的像是 M 在 y_0附近的余维一超曲面。径向射线 $\xi \mapsto t\xi$ 从 x_0出发，且 t 接近

1，与 V 由（4）可知，在 y_0附近横截于V。这表明该超曲面与 V的交集是 V的余维一子流形。我们也可以在这些论证中将初始点 $x \in U$ 作为参数。这就证明了(a)。

考虑(b)。只需证明对 r的一种选择成立，另见定理证明末尾的论证。我们选取一个定义函数 r ，使用引理3.1中定义的能量概念

$$E(\gamma) = \int_0^1 H(\gamma(t))\,\mathrm{d}t$$

是哈密顿曲线 $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t)\ \xi(t)) \in T^*M \setminus 0$的能量。被积函数与 t无关，且仅在零双特征曲线上为零。采用如 (c) 中以初始点和终点为依据的参数化$\gamma_{[x,y]}(t)$，可得 $E(\gamma_{[x,y]}) = 0$ 在 $U \times V$上成立，当且仅当 $(x,\ y) \in \Sigma$。我们设

$$r(x,y) = E(\gamma_{[x,y]}).$$

我们断言 r 是 Σ的定义函数。下面证明它在该处的微分不为零。

变分 引理3.1 在零能量情形下仍然成立。仿照（23） ，

$$\partial_s\big|_{s=0} r = \partial_s E(\gamma(\,\cdot\,;s);s)\big|_{s=0} = \langle \eta^0, w\rangle - \langle \xi^0, v\rangle$$

取 ξ^0， η^0， v和 w，如同该证明中的做法。由于这对每个 $v \in T_{x_0}U$， $w \in T_{y_0}V$都成立，我们得到$r_x = -\xi^0$， $r_y = \eta^0$ 在 $s = 0$处。这些余向量按条件 $t \in [0,1]$归一化。去掉这一归一化后，（ $\lambda > 0$ 33）中便会出现因子 $\lambda > 0$（33）。

为了证明 $\mathrm{d}r \neq 0$ 在 Σ上成立，假设它不成立。于是，在 x_0处有 $\xi^{0\prime} = 0$ ，并且在 y_0处也有 $\eta^{0\prime} = 0$ 。这表明，在 x_0处， $\xi^0 \neq 0$ 余法向于 U ；类似地，在y_0处， $\eta^0 \neq 0$ 余法向于 V。我们可以在（4）中用 ξ^0 替换 $\mathrm{d}\rho$ ，并相应地用 η^0替换，但这样就会与欧拉恒等式矛盾，因为它蕴含 $\xi \cdot H_\xi = 0$。请注意，我们证明的结论比（$\xi^{0\prime}$， $\eta^{0\prime}$） $\neq 0$稍强一些；我们证明了每个分量都不为零。这与以下预期一致： C 会在局部将 $T^*U \setminus 0$映射到 $T^*V \setminus 0$。这就证明了（b）部分。

现在考虑（c） 。随着

$$r(x,y;s) \coloneqq E(\gamma(\,\cdot\,;s);s) \coloneqq \int_0^1 H(x(t;s),\xi(t;s);s)\,\mathrm{d}t,$$

写出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} r(x,y;s) &= \int_0^1 H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} E(\gamma(\,\cdot\,;s)) \\ &= -\int_0^1 H_s(x(t;0),\xi(t;0);0)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而结合 $\rho = 1$ 得到（34）。最后， $\Sigma(s)$ 的任何其他定义函数都具有如下形式：$\alpha(x,y;\ s)r(x,y;\ s)$， $\alpha > 0$在 $\Sigma(s)$ 上。关于 s 在 $s = 0$ 处求导后，这会带来上面所述的附加非零因子 $\rho(x,y) = \alpha(x,y,0)$，如所声称。□

4.4. 哈密顿光线变换。上一节自然地引出了“哈密顿光线变换”

$$Lf(\gamma) = \int f \circ \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x(t),\xi(t))\,\mathrm{d}t, \quad f \in C^\infty(T^*M \setminus 0) \tag{35}$$

在零光线（$H = 0$）上。我们假设 f 是 m 次齐次的，且 m 具有某种性质，因为我们可以自由地进行缩放，并且根据引理 2.1，回顾 $\Gamma_0 \subset H^{-1}(0)$ 是一个

锥形余维一集合。因此， f 也必须在该处定义，而令其为齐次函数是自然的。

注意，(34) 仅能确定 Lf 至相差一个光滑椭圆乘子。造成这种非唯一性的原因是，可以乘以这样的因子来改变 H ，而不改变 S_0^H。另一方面， L 的单射性以及可能的微局部可逆性不受这种因子的影响。

定理 4.3. $Lf = 0$ 对于包含在 Γ_0 中的每条零双特征曲线成立，当且仅当 $f = X_H\phi$ 在Γ_0上具有某个 $\phi(x,\xi)$，且该处有定义、阶数为 $m-1$ 齐次，并在 $x \in \partial M$时消失。这等价于在 Γ_0 附近有 $f = X_H\phi + \mu H$，其中 ϕ 是 ϕ 在 Γ_0附近的任意光滑齐次延拓，并且存在某个 $\mu(x,\xi)$，其阶数为 $m-2$齐次。</output>

证明。 证明与定理3.1的证明相同。 ϕ 的齐次性由构造可得。对于第二部分，取 ϕ的任意一个如上所述的延拓。于是， $f - X_H\phi = 0$在 Γ_0上成立，因此 $f = X_H\phi + \mu H$具有某个 μ ，因为 H 是 $H^{-1}(\{0\})$的定义函数。于是，在 Γ_0之外， μ 由该方程唯一确定，尤其必为阶数 $m-2$齐次。由连续性可知，这在 Γ_0 上也成立。注意， ϕ 的另一个延拓会产生另一个 μ ，其在 Γ_0上的取值相同。 □

ϕ 和 μ 的延拓在 $H^{-1}(0)$之外不必是齐次的，但我们仍采用这种方式，因为我们也假设 f 是齐次的。上述等价性陈述必须在齐次类中理解。

5. Rigidity of Finsler manifolds

本节将应用第 2 节的结果，证明关于芬斯勒度量的刚性结果。我们假设 M 是一个带边界流形，配备了芬斯勒结构，即一个光滑函数 $F\colon\ TM\setminus 0 \to (0,\infty)$，其在切空间 T_xM 上的限制对每个 $x \in M$都是一个闵可夫斯基范数。按定义，这意味着 $F(x,\cdot)$是关于x的一次正齐次函数，并且其海森矩阵[3] $g_v(x)\colon = \frac{1}{2}\partial_v^2 F^2(x,v)$对每个$(x,v) \in TM\setminus 0$都是正定二次型。为方便起见，我们通过连续性将 F 延拓至零截面。需要注意的是，芬斯勒结构不一定具有可逆性，即不一定在映射$(x,v) \mapsto (x,-v)$作用下保持不变；我们不作此假设。关于芬斯勒几何的标准参考文献是 [3]。黎曼度量 g 通过令 $F = \sqrt{g(v,v)}$诱导出一个可逆的芬斯勒结构。近年来，芬斯勒几何中的反问题受到广泛关注，部分原因在于其与各向异性弹性中弹性波传播研究的相关性（例如参见 [7,8,19]）。

在每个 T^*M 上，余芬斯勒函数 $F^*(x,\xi)$ 定义为对每个 $T_x^*M, x \in M$，取 $\xi(v)$ 在满足 $F(x,v) = 1$ 的情况下的最大值。事实证明， $F^*(x,\cdot)$ 在每个 T_x^*M 上都是一个闵可夫斯基范数，称为余芬斯勒范数，见 [3,第 14 节。8],特别地，1 2 $(F^*(x,\cdot))^2$ 在零截面以外具有正定的海森矩阵。关于 $\frac{1}{2}F^2$ 的勒让德变换 $\mathcal{L}_F\colon\ TM\setminus 0 \to T^*M\setminus 0$ 是在每个 x 上逐点定义的，它通过 $\mathcal{L}_F(x,v) = \partial_v(\frac{1}{2}F^2) = F\partial_v F = g_v(x)(v,\cdot)$ 将 $T_xM\setminus\{0\}$ 映射到 $T_x^*M\setminus\{0\}$，其中用到了欧拉恒等式。它是一个微分同胚，通常在纤维上并非线性，并且满足

$$F = F^* \circ \mathcal{L}_F. \tag{36}$$

此外，$(\mathcal{L}_F)^{-1} = \mathcal{L}_{F^*}$。 TM上的芬斯勒测地流 Φ_L^t是由关于$L = \frac{1}{2}F^2$的欧拉–拉格朗日方程确定的流。 T^*M上的余芬斯勒流是H的哈密顿流：$= \frac{1}{2}(F^*)^2$。相应的流由 $\mathcal{L}_F$共轭：

$$\Phi_H^t \circ \mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F \circ \Phi_L^t. \tag{37}$$

[3]此处及本节中的下标 v 并不表示求导。

（这是关于具有正定海森矩阵的拉格朗日函数的一般事实，参见例如 [5, 定理 20。10]。）由芬斯勒度量得到的哈密顿量是二次齐次的，并且具有凸海森矩阵。我们称其为凸（二次齐次）哈密顿量。反过来，给定任意这样的哈密顿量，我们可以对其应用相应的勒让德变换，从而在 M 上得到一个芬斯勒度量。这就建立了芬斯勒度量与严格凸的二次齐次哈密顿量之间的一一对应关系，我们将利用这一点。

与第 2 节不同，我们在切丛中进行研究。记 $SM = \{(z, v) \in M : F(v) = 1\}$ 为关于 F 的单位球丛，它是一个带边界的光滑流形 ∂SM。设 U 是 ∂M 的一个开子集（如有需要，我们总可以认为 M 包含于一个更大的光滑芬斯勒流形中），并设 U 是 SM 在 U 之上的一个开子集，由指向内侧的单位向量[4]组成。（和之前一样，我们只处理指向内侧的情形，因为指向外侧的情形类似。）注意，与此处不同，在第 2 节中，$\mathcal{U}$ 是 T^*U 的一个子集。我们以与 (6) 中定义 Γ 类似的方式定义 $\mathcal{G} \subset TM$（因此 $\mathcal{G}$ 是锥形的），并假设从 U 中初始速度出发的所有测地线都在开集 $V \subset \partial M$ 中首次横截地交于 ∂M。根据 (36)，第 2 节意义下的单位余方向与芬斯勒意义下的单位方向相对应。在这里，我们将把散射关系理解为一个映射

$$\hat{\mathsf{S}}^F : \mathsf{U} \to SM\big|_V,$$

与（2）类似，不过这里我们只需要它作用于单位长度向量。这也是其他研究芬斯勒流形上散射关系相关变体的工作的做法，参见 [7]<style id='8'>。传播时间 $\ell : \mathsf{U} \to \mathbb{R}$ 的定义与哈密顿量情形类似。

在第2节中，散射关系定义在边界余切丛的子集之间，我们希望使用在那里得到的结果。我们将 $\partial_\pm SM = \{(z, v) \in SM : \pm \mathrm{d}\rho(v) > 0\}$ 记作边界的入射/出射部分，其中 ρ 是任意一个边界定义函数。我们有一个自然映射

$$\mathcal{R}_\pm : \partial_\pm SM \to T^*\partial M, \quad v \mapsto \iota^* \circ \mathcal{L}_F(v).$$

按照惯例，在边界点附近的坐标中，它满足 $\xi_\alpha = \partial_{v^\alpha}(\frac{1}{2}F^2(x, v)) = \sum_{1 \le j \le n} g_{\alpha j}(v)v^j$，$\alpha \le n-1$。(38)

由此表达式可知，例如，（38）仅取决于 F 在 v 的某个邻域内的取值；原则上，F 甚至不必在其他地方定义。我们假设 F 在全局上有定义，主要是为了记号方便。

引理 5.1。映射 $\mathcal{R}_\pm$ 是到其像上的微分同胚。

证明。回忆一下，F^* 是一个闵可夫斯基范数，且 $\mathcal{L}_F : TM \setminus 0 \to T^*M \setminus 0$ 是一个微分同胚。由（36），它诱导出一个微分同胚 $SM \to S^*M$，其中 S^*M 是 $H = \frac{1}{2}(F^*)^2$ 的单位余球面丛，如（1）中所示。我们将入射／出射余向量的空间记作

$$\partial_\pm S^*M = \{(x, \xi) \in \partial S^*M : \mathrm{d}\pi X_H \in \partial_\pm SM\}.$$

由于 $\mathrm{d}\pi X_H(\xi) = H_\xi(\xi) = \mathcal{L}_{F^*}(\xi) = (\mathcal{L}_F)^{-1}(\xi)$，入射／出射的性质在 $\mathcal{L}_F$ 下保持不变，因此我们得到微分同胚 $\mathcal{L}_F : \partial_\pm SM \to \partial_\pm S^*M$。只需证明

$$\iota^* : \partial_\pm S^*M \to T^*\partial M \tag{39}$$

是到其像上的微分同胚。

像往常一样，在一个边界点附近选取坐标 (x', x_n)，使得 $(x, \xi') = \iota^*(x, \xi)$，其中 $(x, \xi) \in S^*_xM$，$x \in \partial M$，且 $\xi = (\xi', \xi_n)$。要证明 (39) 是单射，只需证明：给定 $(x, \xi') \in \iota^*(\partial_\pm S^*M)$，恰好存在一个 ξ_n 使得 $H(x, \xi', \xi_n) = 1/2$ 且 $H_\xi(x, \xi', \xi_n) \in \partial_\pm SM$（注意，$\xi_n$ 可以取任意符号）。将单位余球丛记为

$$B^*M = \{(x, \xi) \in T^*M : H(x, \xi) \le 1/2\}.$$

[4]这意味着，对于 M，任意边界定义函数 ρ 都满足 $\mathrm{d}\rho(v) > 0$，对所有 $(x, v) \in \mathsf{U}$ 均成立。

由闵可夫斯基范数的三角不等式（见 [3,定理 1.2.2]）可知，对于任意 $x \in M$，集合B_x^*M 都是严格凸的，即连接其中任意两个不同点的线段都包含在其内部。固定 (x,ξ')，考虑函数 $t \overset{f}{\mapsto} H(x,\xi', t)$，由 H的凸性和齐次性，它满足 $f'' > 0$和 $f \overset{|t|\to\infty}{\to} \infty$。$\iota^*(x,\xi',\xi_n)$ 中的 ξ_n恰好对应于方程 $f(t) = 1$的解。这样的解至少存在一个，因为 $(x,\xi) \in \partial_\pm SM$，且它满足 $f'(t) = H_{\xi_n}(x,\xi,t) \neq 0$；因此，根据 f的上述性质，必定还存在另一个解，且f'的符号相反。所以，(39) 是单射。由条件 $H_\xi \neq 0$，它是一个局部微分同胚；该条件使我们能够在 $(x^0,\xi_0) \in \partial_\pm S^*M$的一个邻域内，将方程 $H(x,\xi,\xi_n)$ 关于 ξ_n 光滑地求解。□

注 5.1. 还存在另一个自然映射 $\partial_\pm SM \to T^*\partial M$，其构造如下。如 [24,第 27 页-28], 所述，存在唯一的指向 ∂M 的指向内侧／外侧的单位法向量场 $\nu_\pm$，其意义在于对所有 $w \in T\partial M$，均有 $g_{\pm\nu}(\pm\nu, w) = w$（$\nu_\pm$不必线性相关）。因此我们得到良定义的直和分解 $TM = \mathbb{R}\nu_\pm \oplus T\partial M$，从而可以 ˆ 定义投影 $\mathcal{P}_\pm$： $\partial TM \to T\partial M$。由于 F在 ∂M上诱导出芬斯勒结构 F，我们可由 $\mathcal{L}_{\hat{}F} \circ \mathcal{P}_\pm$ 定义映射 $\partial_\pm SM \to T^*\partial M$。若 F来自黎曼度量，则该映射与 $\mathcal{R}_\pm$一致，但一般情形下未必如此。

注意，根据引理 5.1，给定形式 $v \in \partial SM$，即可恢复向内/向外指向的$\langle \xi', w\rangle := g_v(v, w)$，对所有 $w \in T_x\partial M$。由（37），可得 $\hat{\mathsf{S}}^F = \mathcal{L}_F^{-1} \circ \hat{} S^H \circ \mathcal{L}_F$，回顾（2）。此外，根据定义 2.1，我们可以在 U

$$\hat{\mathsf{S}}^F = \mathcal{R}_-^{-1} \circ S \circ \mathcal{R}_+. \tag{40}$$

这就是我们按照（ $\mathcal{R}_\pm$ ）中的方式定义 38，而不采用备注 5.1 中所述方法的原因。

备注 5.2。 在黎曼情形下研究透镜刚性问题时，人们通常通过对 ˆS 的出射数据和入射数据进行投影及“逆投影”来定义散射映射 S： $T\partial M \to T\partial M$。这样做的优点是只需在 $T\partial M$ 上了解未知度量 g，而不必在 ∂TM 上了解。在我们的情形中，按照备注 5.1 所述定义这样的投影，并不能很好地适配该问题的哈密顿表述。若采用哈密顿方法，可以定义 $\mathsf{S} := \mathcal{L}^{-1}{}_{\hat{}F} \circ \mathcal{R} \circ \hat{\mathsf{S}} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{L}_{\hat{}F}$，但这似乎有些人为。当然，在黎曼情形下，这两种方法是一致的。

设 $\tilde{M}$ 为第二个带边界流形，使得 $\partial M = \partial\tilde{M}$。如前记 $H = \frac{1}{2}(F^*)$ 与 $\Gamma = \mathcal{L}_F(\mathcal{G})$。我们用 $\mathcal{K}_{\Gamma,\ H}$ 表示齐次典则变换κ： $\Gamma \to \kappa(\Gamma) =: \tilde{\Gamma} \subset T^*\tilde{M}$ 的集合，使得 $\tilde{H} := H \circ \kappa^{-1}$ 在 $\tilde{\Gamma}$ 上严格凸（见下文注记 5.3）。于是 $\tilde{H} = \frac{1}{2}(\tilde{F}^*)^2$ 对芬斯勒度量 $\tilde{F}$ 成立，从而对 $\kappa \in \mathcal{K}_{\mathcal{G},\ H}$，我们有如下映射链

$$(\mathcal{G}, F) \xrightarrow{\mathcal{L}_F} (\Gamma, H) \xrightarrow{\kappa} (\tilde{\Gamma}, \tilde{H}) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\tilde{F}^*}} (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{F}). \tag{41}$$

引理 5.2. 设 F 为 M 上的芬斯勒度量，且 $\mathcal{G}$ 如前，并设 $\kappa \in \mathcal{K}_{\mathcal{G},\ H}$ 是正则˜变换，满足 （8）。复合 $\phi := \mathcal{L}_{\tilde{F}^*} \circ \kappa \circ \mathcal{L}_F$： $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$，即 （41）中诸映射的复合（采用该处记号），满足 ˆS $\tilde{F} \circ \phi = \phi \circ \hat{\mathsf{S}}^F$。

˜证明。 我们已经看到 (8) 推出 $S^H = S^{\tilde{H}}$。于是我们有

$$\hat{\mathsf{S}}^{\tilde{F}} \circ \phi = \tilde{\mathcal{R}}_-^{-1} \circ S^{\tilde{H}} \circ \tilde{\mathcal{R}}_+ \circ \phi = \tilde{\mathcal{R}}_-^{-1} \circ S^H \circ \tilde{\mathcal{R}}_+ \circ \phi \overset{(40)}{=} \tilde{\mathcal{R}}_-^{-1} \circ \mathcal{R}_- \circ \hat{\mathsf{S}}^F \circ \mathcal{R}_+^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}}_+ \circ \phi. \tag{42}$$

记 $\zeta_\pm$ 为 入射/出射逆映射 ι^*，如引理 5.1 的证明中所述，我们有 e

$$\mathcal{R}_\pm^{-1}\circ\tilde{\mathcal{R}}_\pm\circ\phi=\mathcal{L}_F^{-1}\circ\zeta_\pm\circ\iota^*\circ\mathcal{L}_{\tilde F}\circ(\mathcal{L}_{\tilde F^*}\circ\kappa\circ\mathcal{L}_F)=\mathcal{L}_F^{-1}\circ\zeta_\pm\circ\iota^*\circ\kappa\circ\mathcal{L}_F$$
$$\overset{(8)}{=}\mathcal{L}_F^{-1}\circ\zeta_\pm\circ\iota^*\circ\mathcal{L}_F=\mathrm{Id},$$

因为 $\zeta_\pm\circ\iota^*=$ 在 $\partial_\pm S^*M$ 上的恒等映射。将其代入（42），即可得到所述结论。 □

我们有如下定理 2.1 的类似结果。

定理 5.1（芬斯勒流形的半全局刚性）。 定理中的符号约定与本节中的定义相同。

(*a*) （正问题。）设 (M,F) 是一个带边界的芬斯勒流形，其中 $\mathcal{G}$ 如上所述。设 $\tilde M$ 是另一个具有 $\partial M=\partial\tilde M$ 的流形，并设 $\kappa\in\mathcal{K}_{\Gamma,H}$ 是从 Γ 到 $\tilde\Gamma$ 的正则变换，满足边界条件 $\kappa(x,\xi)=(x,\xi)$ 在 $\Gamma\big|_{\partial M}$ 上。若 $\tilde H:=H\circ\kappa^{-1}=\frac12(\tilde F^*)^2$，则在 U 上有 $\hat{S}^F=\hat{S}^{\tilde F}$，且对应的传播时间满足 $\tilde\ell=\ell$。

(*b*) （逆问题。）设 (M,F) 是一个带边界的芬斯勒流形，并假设在 $TM\big|_{\partial M}$ 上有 $F=\tilde F$。假设在 $\mathcal{U}$ 上有 $\hat{S}^{\tilde F}=\hat{S}^F$，$\tilde\ell=\ell$。那么，存在一个齐次正则变换 $\kappa\in\mathcal{K}_{\Gamma,H}$，满足在 $\Gamma\big|_{\partial M}$ 上 $\kappa=\mathrm{Id}$，使得在 $\mathcal{G}$ 上有 $\phi^*\tilde F=F$，其中 $\phi=\mathcal{L}_{\tilde F}^{-1}\circ\kappa\circ\mathcal{L}_F$。特别地，在 $\mathcal{G}\big|_{\partial M}$ 上有 $\phi=\mathrm{Id}$。

证明。 注意到现在 $\phi=$ 在 $SM\big|_{\partial M}$ 上等于 Id，命题(a) 便可由引理5.2 立即推出。为证明(b)，注意由（40）和 $\hat{S}^{\tilde F}=\hat{S}^F$，可得 $\tilde{\mathcal{R}}_-^{-1}\circ S^{\tilde H}\circ\tilde{\mathcal{R}}_+=\mathcal{R}_-^{-1}\circ S^H\circ\mathcal{R}_+$。由于在我们的情形下，$F=\tilde F$ 在 $TM\big|_{\partial M}$ 上，$\mathcal{R}=\tilde{\mathcal{R}}$，因此 $S^H=S^{\tilde H}$。由定理2.1，存在一个满足（8）的齐次正则变换 κ，使得在 Γ 上有 $H=\kappa^*\tilde H$。条件 $\iota^*\circ\kappa=\iota^*$ 与在 $TM\big|_{\partial M}$ 上的 $F=\tilde F$ 一起，推出在 $T^*M\big|_{\partial M}$ 上有 $H=\tilde H$，从而在 $\Gamma\big|_{\partial M}$ 上有 $\kappa=\mathrm{Id}$。条件 $\kappa\in\mathcal{K}_{\Gamma,H}$ 自动满足，因为我们知道 $\tilde H=\frac12(\tilde F^*)^2$ 是一个齐次二次严格凸哈密顿量。□

注 5.3。定理 5.1 提出了以下问题：给定定义在 $\Gamma\subset T^*M$ 上的二次齐次严格凸哈密顿量 H，我们能否刻画集合 $\mathcal{K}_{\Gamma,H}$？ $\pi(\Gamma)$ 上的任意单射局部微分同胚都会提升为 $\mathcal{K}_{\mathcal{G},H}$ 中的一个元素（事实上，任何这样的正则变换都会保持每个凸哈密顿量的凸性）。这些元素可以经过扰动，得到 $\mathcal{K}_{\mathcal{G},H}$ 中并非微分同胚提升的元素。为此，取这样一个 κ_0 以及一点 $\zeta_0=(x_0,\xi^0)\in T^*M\setminus 0$，并写作 $(y_0,\eta^0)=\kappa_0(x_0,\xi_0)$。由 [13, 命题 25.3.3]，存在 y_0 邻域内的坐标 y，以及一个齐次生成函数 $\phi(x,\eta)$，其中 U 是 x_0 的邻域，并且满足 $\partial^2_{x\eta}\phi\neq0$；使得在 (x_0,ξ^0,y_0,η^0) 的某个邻域 U 内，有 $\mathrm{graph}(\kappa_0)=(x,\mathrm{d}_x\phi,\mathrm{d}_\eta\phi,\eta)$。由于 κ_0 是某个微分同胚的提升，存在一个可逆线性映射，使得 $\eta_j=A_j^i(x)\partial_{x^i}\phi$；特别地，$\phi$ 是关于 η 的一次多项式。在保持其齐次性的同时，对 ϕ 在一个紧集上作微小扰动，并破坏它对 η 的线性依赖关系，我们便得到 $\mathcal{K}_{\mathcal{G},H}$ 中某个正则变换的图像，而该变换并非源自微分同胚。另见注 A.2。

Appendix A. Motivation: the Hyperbolic DN map

我们回顾一些微局部构造，这些构造启发了我们对散射关系的定义 S_λ 以及传播时间的定义 ℓ_λ，见第2节，它们与某个正能级有关；而 S_0 则与零能级有关。我们证明，这些量自然地出现在边界观测中。我们不

研究狄利克雷到诺伊曼（DN）映射，而是研究狄利克雷到狄利克雷（DD）微局部映射，不过前者也可以通过相同的构造得到，见注A.1。

A.1. **系数时不变的双曲型 ΨDO 方程**。考虑如下伪微分方程：

$$(D_t^2 - q(x,D))u \in C^\infty, \tag{43}$$

其中 $q(x,\xi) \sim q_2(x,\xi) + q_1(x,\xi) + \dots$ 是二阶经典符号，即假设 q_k 在 ξ 中关于 k 次齐次。假设 $q_2 > 0$。主符号 q_2 在 $T^*M \setminus 0$ 上具有不变定义。为不变地定义次主符号，我们需要先将 $q(x,D)$ 改写为作用于半密度的形式，然后次主符号为 $q_1 + (\mathrm{i}/2)\partial_{x^j}\partial_{\xi_j} q_2$，参见 [12, 定理 18.1。33] 和 [20]。(43) 式右端只需在所关注的双特征曲线附近微局部光滑；不过，也可以事后通过微局部截断实现这一点。以下的光滑性假设也同样如此。

奇异性传播定理将时空中的奇性与哈密顿量 $p = -\frac{1}{2}\tau^2 + H(x,\xi)$ 联系起来（这里的因子 $-1/2$ 只是为了方便），其中 $H = \frac{1}{2}q_2$。哈密顿系统为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}t = -\tau, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x = H_\xi, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tau = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\xi = -H_x \tag{44}$$

并满足某些初始条件。因此，τ 为常数，而我们希望对 p 保持在零能级上，这意味着 $H(x,\xi) = \frac{1}{2}\tau^2$。第一个方程意味着 $t = t_0 - \tau s$。换言之，

$$t = t_0 - \tau s, \quad \tau = \text{const.}, \quad (x,\xi) = \Phi^s(x_0,\xi^0) \quad \text{on } H(x,\xi) = \frac{1}{2}\tau^2, \tag{45}$$

其中 Φ^t 是 H 的哈密顿流。我们看到，当 $\mp\tau > 0$ 时，随着 s 增大，双特征线向未来/过去传播。另一方面，在奇异性传播定理中，s 没有内在意义，因此可以将其替换为 t。于是，对于 $\eta := -\xi/\tau$（按我们的术语称为单位），$\tau < 0$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = H_\xi(x,\eta), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta = -H_x(x,\eta).$$

当 $\tau > 0$ 时，我们令 $\eta = \xi/\tau$。于是 $(-\tau)^{-1}H_\xi(x,\xi) = -H_\xi(x,\eta)$，$-\tau^{-2}H_x(x,\xi) = -H_x(x,\eta)$。在这种情形下，哈密顿系统与上文相同，只是将 H 替换为 $-H$。我们现在可以令 $t = -t$，并得到同一系统。关键在于，对于 $\tau < 0$，有效哈密顿量中的单位余方向将是 $\eta = -\xi/\tau$；而当 $\tau > 0$ 时，我们有 $\eta = \xi/\tau$ 沿时间反向传播。因此我们的设定涵盖了这两种情形。注意，我们说明了如何把 t 当作参数（时间）来处理，而不是将其视为“空间”变量之一。如果我们希望在时空中工作，则应保留 (44)。

例 A.1. 考虑最简单的情形 $H = |\xi|^2/2$ 在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上。此时速度为 $|\dot{x}| = |H_\xi| = |\xi|$。我们可以用任意常数（甚至用函数）重新缩放 s，这等价于将 p 乘以椭圆因子。这并不改变奇点传播的陈述，但新的零双特征曲线对应于一个新的哈密顿量：$\mu p = \mu(-\tau^2/2 + H)$，而不是我们原来的 $\mu = 1$。在这个常系数情形下，

$$t = t_0 - \tau s, \quad x = x_0 + s\xi$$

其中 ξ、τ 为常数，$\tau^2 = |\xi|^2 \neq 0$。令 $t_0 = 0$，得到

$$x = x_0 - t\xi/\tau.$$

令 $\eta = -\xi/\tau$。那么 η 是单位向量，事实上

$$x = x_0 + t\eta^0, \quad \eta = \eta^0 \tag{46}$$

是 $H = |\eta|^2/2$ 的哈密顿曲线，但此时能级为 $H = 1/2$。注意，上文中τ 的符号无关紧要，但在此情况下，哈密顿量 H 是 ξ的偶函数。

现在假设 $M = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$。给定边界数据 f 在 $\mathbb{R} \times \partial M$ 上的一个奇性（t, x, τ, ξ'），其中撇号表示限制，我们得到两个具有该限制的余向量：$\xi_\pm = (\xi', \pm\xi_n)$，且 $\xi_n := (\tau^2 - |\xi'|^2)^{1/2}$，假设 $|\xi'| < |\tau|$（一个类时奇性）。第一个指向 M 内部，第二个指向其外部。如果 $\tau < 0$，它们都向未来传播，这意味着 t 随着 s 增大，而（τ, $\xi_\pm$）向 M 内/外传播。当 $\tau > 0$ 时，它们都向过去传播。另一方面，当 s减小时，它们向未来传播。

如果我们在这个例子中只给出 H，并且希望将其连接到（43），我们从（46）开始，其中 η^0 为单位余向量。将其限制到 $T\partial M$上，我们得到 $\eta^{0\prime}$，其中 $|\eta^{0\prime}| < 1$，并且有两个具有该限制的余向量 $\eta_{\pm}$。第一个，η_+，对应于在 M 中向 $t > 0$传播。第二个，η_-，在 M 中向 $t < 0$传播。

由于 $H > 0$，我们可以将 $\frac{1}{2}\tau^2 - H = \frac{1}{2}(\tau - \sqrt{2H})(\tau + \sqrt{2H})$ 分解。根据 τ 的符号，其中一个因子沿另一个因子的零双特征曲线是椭圆的。这表明，只需在 $H(x, \xi) = \frac{1}{2}\tau^2$ 上对其中一个因子进行微局部分析即可。

A.2. **实主型方程**。现在我们考虑更一般的情形，其中第 A.1 节是一个特殊情形。我们将在第 A.3 节回到偏情形。令 p 如第 4.1 节中所述属于实主型。我们假设阶数为 $m \in \mathbb{Z}$。下述定理基本上是已知的；例如参见 [35] 关于洛伦兹版本的论述，它与奇异性传播定理直接相关。

定理 A.1。采用第 *4.1* 节中的记号，令 $f \in \mathcal{E}'(U)$，$\mathrm{WF}(f) \in \mathcal{U}$。令 u求解 $p(x, D)u \in C^\infty$ 在 Γ_0 的某个邻域内，并且 $u|_U = f$ 模 C^∞。则映射

$$\Lambda : f \mapsto u|_V$$

是一个零阶椭圆傅里叶积分算子，与零能级处 p_m 的散射关系 S_0 相关。

证明（略）。在满足 $U = \{x^n = 0\}$ 的局部坐标中，我们要寻找如下形式的参数子

$$u(x) = (2\pi)^{-n+1} \int e^{\mathrm{i}\phi(x,\xi')} a(x, \xi) \hat{f}(\xi')\, \mathrm{d}\xi',$$

其中 $a \sim a_0 + a_1 + \dots$ 是零阶经典振幅，而 ϕ 满足程函方程

$$H(x, \mathrm{d}_x\phi) = 0, \quad \phi|_{x^n=0} = x' \cdot \xi'. \tag{47}$$

我们在 $(x_0, \xi^{0\prime})$ 的锥形邻域内求解 (x, ξ')。特征线法（见 [10],）指出，首先对 $x^n = 0$ 求解 $H(x, \mathrm{d}_x\phi) = 0$，从而确定 $\mathrm{d}_x\phi(x, \xi')$。这里的代数方程可能有多个局部光滑解；我们任选其中一个。在本例中，我们选择能给出 $\partial_{x^n}\phi = \xi_n$ 的解，见 (5)。接着，我们转到依赖于 ξ' 的坐标 $(x', s) \mapsto x(s) = \gamma_{(x',0)}\,\xi(x')(s)$，其中 γ 是零双特征线在底空间上的投影。在这些坐标中，$\phi = x' \cdot \xi'$。于是有 $\mathrm{d}_x\phi = \xi(s)$，其中后者是该双特征线的纤维分量。要将 $p(x, D)$ 应用于 u，我们使用渐近展开：将一个 Ψ 微分算子作用于 $e^{\mathrm{i}\rho\phi}a$，当 $\rho \to \infty$ 时。在这种情况下，$\rho = |\xi'|$，见 [38, 定理 VI.3.1]。首项给出程函方程 (47)。第二项（见 [37], 中的 (3.32) 和 (3.34) ）给出第一个输运方程：

$$Ta_0 = 0, \quad a_0|_{x^n=0} = 1,$$

其中

$$T := \sum_{|\alpha|=1} (\partial_\xi^\alpha p_m)(x, \partial_x\phi) D_x^\alpha + p_{m-1}(x, \partial_x\phi) + \mathrm{i} \sum_{|\alpha|=2} (\partial_\xi^\alpha p_m)(x, \partial_x\phi) \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \phi.$$

输运方程 $Ta_0 = 0$ 沿着每条投影到底空间的零双特征线都是一个常微分方程，正如首项所表明的那样。接下来的两项类似于势，可以通过积分因子法处理。特别地， a_0 永不为零。为了确定 a_j 对于 $j \geq 1$，我们求解一个非齐次输运方程，其具有相同的 T，但右端项由前面的步骤确定。类似的构造见 [36, 第八章], ，例如通过引入一个辅助时间变量。

暂且假设程函方程一直到达 V 及其稍后一点的位置都可解。那么 Λ 是一个形式上的（目前如此）傅里叶积分算子，在微局部意义下从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$，其拉格朗日流形由相位 $\psi := \phi(x', \xi') - y' \cdot \xi', x \in V, y' \in U$ 参数化，其中 x' 是 x 在坐标 V 中的限制，在这些坐标下 $V = \{x^n = 0\}$ （注意此处我们交换了 x 和 y 的角色，以使记号与 [36] 一致）。相关的典范关系见例如 [36, VIII.5], ，其形式为

$$(\partial_{\xi'}\phi, \xi') \mapsto (x', \partial_{x'}\phi). \tag{48}$$

我们声称（原则上这是已知的），上述内容可化简为

$$(y', \xi') \mapsto (x', \partial_{x'}\phi(x', \xi')),$$

其中 y' 满足：从 $(y', 0)$ 出发、余方向为 ξ 且投影为 ξ' 的双特征线，沿 $\in U$ 到达 $(x', 0)$；于是 $\partial_{x'}\phi(x', \xi')$ 就是该处的余方向。这正是 S_0。

为证明上述断言，设 $(x, \eta) = (x(t, y', \xi') \ \eta(t, y', \xi'))$ 为该零双特征线。考虑 $F(t) := \phi_{\xi'}(x(t, y', \xi') \ \xi')$。那么 $\dot{F}^\alpha(t) = \dot{x}^i(\partial_{x^i}\partial_{\xi_\alpha}\phi) = H_{\xi_i}(x, \eta)(\partial_{x^i}\partial_{\xi_\alpha}\phi)(x(t, y', \xi') \ \xi')$。后者为零，这可由对哈密顿–雅可比方程 (47) 关于 ξ'求导得到。于是 $F(t) = F(0) = y'$。类似的论证见 [38, 第 322] 页。

上述构造仅局部成立，未必能一直延伸到 V。另一方面，从一个与 U_1 横截相交的 γ_0 小超曲面出发，同样可以进行这一构造，因此在该点有 (4)，这可以通过适当选择 U_1 来实现。我们可以沿着 γ_0 选取单位分解，将 Λ 写成有限个傅里叶积分算子的复合，其典范关系为相应散射关系的复合，即 S_0，另见 [35]。□

注 A.1. 也可以研究定理 A.1 中的狄利克雷到诺伊曼映射，这也是文献中常见的做法。处理方式非常相似：需要将满足狄利克雷边界条件的解在V 处反射，并取法向导数在 V处的迹；例如，参见 [35] ，其中介绍了波动方程情形下的这一构造。DN映射是一个椭圆傅里叶积分算子，其典范关系相同，阶数为一。

注 A.2. 关系式 (48)（不带撇号）允许我们通过第三类生成函数 $\phi(x, \xi)$，构造一大类满足 (8) 中边界条件的典范关系 κ。只需令 $\phi(x, \xi)$ 为一阶齐次函数，使得 $\phi(x, \xi) = x' \cdot \xi'$对 $x = (x', 0) \in U$成立，并且 ξ 位于某个 $\xi^0 \neq 0$的锥形邻域内；在 V上，关于那里的边界˜坐标，也可作类似处理。只要 (48) 是从 Γ 到 Γ 的微分同胚（例如，当某个 C^k中的 ϕ足够小时，这一条件成立），那么我们就能得到具有所需性质的正则变换 κ。特别地，可以选择 $\phi = x \cdot \xi$，使其远离某个邻域 $U \cup V$；这样，当 x 接近 U 或 V时， $\kappa(x, \xi)$ 就是恒等映射。注意，以这种方式得到的 κ，当且仅当 $\phi(x, \xi) = F^{-1}(x) \cdot \xi$时，才由微分同胚 F生成。

A.3. 回到具有时不变系数的双曲型 ΨDO 方程。现在考虑（43）的特殊情形。此时 $p = \tau^2 - q$ 是二阶齐次的，为方便起见除以 2，得到 $p_2 = \tau^2/2 - H(x, \xi)$, $H = q_2/2$。A.2 节中用 $x \in \mathbb{R}^n$ 表示的变量此时为 $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$。与 (x_0, ξ^0) 对应的是一个固定点 $(t_0, x_0, \tau^0, \xi^0) \in (T^*\mathbb{R} \times \mathcal{U}) \setminus 0$。我们沿用第 2 节中的记号 $U, V, \mathcal{U}, \mathcal{V}$，它们只与 x有关；需要注意的是，在

第A.2节的设定中，它们会被替换为 $\mathbb{R}\times U$等。我们假设在 (4) 条件成立，其中 (t_0,x_0,τ^0,ξ^0) 取入射条件；在出射端则有 (s_0,y_0,τ^0,η^0)。特别地，这确定了 $\operatorname{sgn}(\tau_0)$。式 (45) 中 s 的符号取决于 ξ^0 是入射的（此时 $s>0$）还是出射的（此时 $s<0$）。那么，与 $\tau^2/2-q_2/2$相关的 具有如下形式

$$\Gamma_0=\left\{(t,x,\tau,\xi)|\ (x,\xi)=\Phi^{-(t-\hat t)/\tau}(\hat x,\hat\xi),\ (\hat x,\hat\xi)\in\mathcal{U}_{|\tau|},\ \tau\in\operatorname{sgn}(\tau_0)\mathbb{R},\ \hat t\in\mathbb{R}\right\},$$

其中， $-(t-t_0)/\tau$ 的符号（我们在上文称之为 s）决定了 $t-\hat t$ 的符号，并如所说明的那样依赖于 ξ^0。 t 所变化的区间范围由轨迹位于 U 与 V 之间这一要求所决定。

定理 A.2. 设 $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}\times U)$，$\operatorname{WF}(f)\in(T^*\mathbb{R}\times\mathcal{U})\setminus 0$。设 u 求解 $(D_t^2-q(x,D))u\in C^\infty$于$\Gamma_0$ 且 $u|_{\mathbb{R}\times U}=f$ 模 C^∞。则该映射

$$\Lambda: f\mapsto u|_{\mathbb{R}\times V}$$

是与典范关系相关联的零阶椭圆傅里叶积分算子

$$(t,\tau,(y',\eta'))\mapsto(t+\operatorname{sgn}(-\tau)\ell(y',\eta'/|\tau|),\tau,S_{|\tau|}(y',\eta')),$$

其中 $S_{|\tau|}$ 是 $H=\frac12 q$ 在能级 $\tau^2/2$ 处的散射关系。

证明。令 $p=-\frac12\tau^2+H(x,\xi)$。于是哈密顿流如（45）中那样解耦。关于 Λ的典范关系则可写为

$$(t,x',\tau,\xi')\mapsto(t-\tau\ell_{|\tau|}(x',\xi'),y',\tau,\eta'),\quad (y',\eta')=S_{|\tau|}(x',\xi'),$$

其中 $\ell_{|\tau|}(x',\xi')$ 是 s 的取值，在该取值处，$\Phi^s((x',0)\ \xi)$ 的底空间投影达到 V，且 ξ 求解 $H((x',0)\ \xi)=\tau^2/2$。我们有 $\ell_{|\tau|}(x',\xi')=|\tau|^{-1}\ell(x',\xi'/|\tau|)$，从而完成证明。□

References

[1] D. Agrawal 和 P. Stefanov。伪欧几里得度量的光线变换。 *J. Geom. Anal.*，35(9)：论文编号 267，22 页，2025。[2] V. I. Arnol'd。 *Mathematical methods of classical mechanics*，第 60 卷，*Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，第二版，1989。由 K. Vogtmann 和 A. Weinstein 从俄文译出。[3] D. Bao、S.-S. Chern 和 Z. Shen。*An introduction to Riemann-Finsler geometry* 200 *Grad. Texts Math.* 2000，纽约州纽约：Springer，卷数不详，年份不详。[4] J. Bohr、F. Monard 和 G. P. Paternain。输运扭子空间的局部与整体 blow-down。*arXiv:2403.05985*，2024。[5] A. Cannas da Silva。 *Lectures on symplectic geometry*，第 1764 卷，*Lect. Notes Math.* 柏林：Springer，2001。[6] C. Croke。具有俘获测地线的散射刚性。*Ergodic Theory Dynam. Systems*，34(3)：826–836，2014。[7] M. V. de Hoop、J. Ilmavirta、M. Lassas 和 T. Saksala。一个叶状且可逆的芬斯勒流形由其断裂散射关系确定。 *Pure Appl. Anal.*，3(4)：789–811，2021。[8] M. V. de Hoop、J. Ilmavirta、M. Lassas 和 T. Saksala。由边界距离映射确定紧致芬斯勒流形，以及弹性力学中的一个逆问题。 *Comm. Anal. Geom.*，31(7)：1693–1747，2023。[9] J. J. Duistermaat 和 L. H¨ormander。傅里叶积分算子 II。 *Acta Math.*，128(3-4)：183–269，1972。[10] L. C. Evans。 *Partial differential equations*，第 19 卷，*Graduate Studies in Mathematics*。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1998。[11] C. R. Graham、C. Guillarmou、P. Stefanov 和 G. Uhlmann。渐近双曲流形上的X射线变换与边界刚性。 *Annales de l'Institut Fourier*，69(7)：2857–2919，2019。[12] L. H¨ormander。 *The analysis of linear partial differential operators. III*，第 274 卷。施普林格出版社，柏林，1985。伪微分算子。[13] L. H¨ormander。*The analysis of linear partial differential operators. IV*，第 275 卷。施普林格出版社，柏林，1985。傅里叶积分算子。[14] J. Ilmavirta。伪黎曼几何中的X射线变换。 *J. Geom. Anal.*，28(1)：606–626，2018。

[15] G. Katz。从边界数据恢复接触形式。 *arXiv:2309.14604*，2026。[16] M. Lassas、L. Oksanen、P. Stefanov 和 G. Uhlmann。洛伦兹流形上的光线变换。

Comm. , ( ): –。

Math. Phys. 377 2 1349 1379, 2020

[17] M. Lassas、V. Sharafutdinov 和 G. Uhlmann。黎曼度量的半整体边界刚性。

Math. , ( ): –。

Ann. 325 4 767 793, 2003

[18] F. Monard、P. Stefanov 和 G. Uhlmann。具有共轭点的黎曼曲面上的测地射线变换。 *Comm. Math. Phys.*，337(3)：1491–1513，2015。[19] K. M¨onkk¨onen。Randers度量的边界刚性。 *Ann. Fenn. Math.*，47(1)：89–102，2022。[20] L. Oksanen、M. Salo、P. Stefanov 和 G. Uhlmann。实主型算子的反问题。

Amer. , ( ): –。

J. Math. 146 1 161 240, 2024

[21] G. P. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。 *Geometric inverse problems—with emphasis on two dimensions*，第 204 卷， *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*。剑桥大学出版社，剑桥，2023。前言由 Andr´as Vasy 撰写。[22] L. Pestov 和 G. Uhlmann。二维紧致简单黎曼流形具有边界距离刚性。*Ann. of Math. (2)*，161(2)：1093–1110，2005。[23] V. Sharafutdinov。 *Integral geometry of tensor fields*。反问题与病态问题丛书。VSP，乌得勒支，1994。[24] Z. Shen。 *Lectures on Finsler geometry*。新加坡世界科学出版社，2001。[25] P. Stefanov。解析洛伦兹流形上光线变换的支撑定理。

Proc. Amer. Math. , ( ): –。

Soc. 145 3 1259 1274, 2017

[26] P. Stefanov。洛伦兹散射刚性问题与稳态度量的刚性。 *J. Geom. Anal.*，34 9 267，25，2024 ( )：论文编号。[27] P. Stefanov。洛伦兹散射刚性问题中解析度量的边界确定与局部刚性。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(13)：rnaf201，2025。[28] P. Stefanov 和 G. Uhlmann。张量场X射线变换与边界刚性的稳定性估计。*Duke Math. J.*，123(3)：445–467，2004。[29] P. Stefanov 和 G. Uhlmann。一般简单度量的边界刚性与稳定性。 *J. Amer. Math. Soc.*，18 4 975 1003，2005 ( )：–。[30] P. Stefanov 和 G. Uhlmann。一类非简单黎曼流形在不完备数据下的局部透镜刚性。 *J. Differential Geom.*，82(2)：383–409，2009。[31] P. Stefanov 和 G. Uhlmann。具有折叠焦散的测地X射线变换。 *Anal. PDE*，5(2)：219–260，2012。[32] P. Stefanov、G. Uhlmann 和 A. Vasy。部分数据下的边界刚性。 *J. Amer. Math. Soc.*，29 332，2016 2 299( )：–。[33] P. Stefanov、G. Uhlmann 和 A. Vasy。张量局部测地X射线变换的求逆。 *J. Anal. Math.*，136 1 151 208，2018 ( )：–。[34] P. Stefanov、G. Uhlmann 和 A. Vasy。正规规范下的局部与整体边界刚性及测地X射线变换。 *Ann. of Math. (2)*，194(1)：1–95，2021。[35] P. Stefanov 和 Y. Yang。洛伦兹流形上 Dirichlet-Neumann映射的逆问题。

Anal. , ( ): –。

PDE 11 6 1381 1414, 2018

[36] M. E. Taylor。 *Pseudodifferential operators*，第 34 卷， *Princeton Mathematical Series*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981。[37] M. E. Taylor。 *Partial differential equations. II*，第 116 卷， *Applied Mathematical Sciences*。施普林格出版社，纽约，1996。线性方程的定性研究。[38] F. Tr`eves。 *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 2*。普莱enum出版社，纽约，1980。傅里叶积分算子，大学数学丛书。[39] G. Uhlmann 和 A. Vasy。局部测地射线变换的逆问题。 *Invent. Math.*，205 120，2016 1 83( )：–。[40] J. Vargo。解析度量范畴中的透镜刚性证明。 *Math. Res. Lett.*，16(6)：1057–1069，2009。[41] A. Vasy 和 Y. Wang。关于波动方程解的光线变换。 *Comm. Math. Phys.*，384(1)：503–532，2021。[42] Y. Wang。整体双曲洛伦兹流形上光线变换的微局部分析。*arXiv:2104.08576*，2021。

Institut für Differentialgeometrie, Leibniz Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907