arXiv:2603.06890v1 [math.NT] 6 Mar 2026

魔法分割函数：利用狄利克雷可逆算术函数进行符号平滑卷积

MAXIE DION SCHMIDT 博士
MAXIEDS@GMAIL.COM

Abstract. 算术函数及其逆函数之和的符号变化是一个微妙的课题，仍有很大空间可供探索并取得新成果。假设 $S_f(x) := \sum_{n\leq x} f(n)$ 是某个算术函数f的求和函数，且满足 $f(1) \neq 1$。关于 $V(S_f,\ Y)$ 的极限增长——即 $S_f(y)$ 在区间 $y \in (0,\ Y]$ 上符号变化的次数——已有已知下界。我们观察到，通过离散卷积，可以对 f，$S_{f^{-1}}(x)$ 的狄利克雷逆函数的局部振荡性质进行分割理论符号平滑。这些所谓的可逆“魔法分割函数”编码会产生一列卷积和；只要 $f(n)$（或 $f^{-1}(n)$）这一序列相对于 n 具有合理的渐近上界，这些卷积和就具有可预测的符号性质。

1. Introduction

1.1. 狄利克雷卷积与狄利克雷逆函数。 对于任意固定的 f，我们定义其在所有正整数 $x \geq 1$ 上的求和函数为

$$S_f(x) := \sum_{n\leq x} f(n).$$

给定任意两个算术函数 f 和 g，我们定义它们的狄利克雷卷积 $f * g$为因子和

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),\ \text{for all } n \geq 1.$$

关于狄利克雷卷积的乘法逆元定义为 $\varepsilon(n) \equiv \delta_{n,1}$ 使得对任意算术函数 f，均有 $f * \varepsilon = \varepsilon * f = f$。如果 $f(1) \neq 1$，则该函数可进行狄利克雷求逆。也就是说，存在另一个算术函数 $f^{-1}(n)$，使得 $f * f^{-1} = f^{-1} * f = \varepsilon$。此外，当函数 f^{-1}存在时，它是唯一的，并满足以下递归公式

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & \text{if } n = 1; \\ -\frac{1}{f(1)} \times \sum\limits_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right), & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

关于 f^{-1} 的其他公式，在 f 为任意狄利克雷可逆算术函数时，对逆函数在 $n \geq 1$上的符号分布仅能提供有限的洞见。一种分拆理论动机用于表达

Date: 星期二 10th 2026年3月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 11A25；11N64；11N56。
Key words and phrases. 算术函数；狄利克雷逆；狄利克雷卷积；狄利克雷级数；算术函数的符号变化；平滑变换；柯西乘积；离散卷积。

任意 f （满足 $f(1) \neq 0$ ）的狄利克雷逆表明，对于 $n > 1$:

$$f^{-1}(n) = \sum_{k=1}^{\Omega(n)} (-1)^k \left\{ \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+k\lambda_k=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k | n}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)!}{1!2!\cdots k!} f(\lambda_1) f(\lambda_2)^2 \cdots f(\lambda_k)^k \right\}. \tag{1}$$

设算术函数 g 与自身的 m 重卷积（即将 g 与自身连续卷积 m 次，记作 n）表示为 $[g]_{*m}$。Mousavi 和 Schmidt 证明了 [7]

$$f^{-1}(n) = \frac{\varepsilon(n)}{f(1)} + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{\Omega(n)}{2} \right\rfloor} \left([f - f(1)\cdot\varepsilon]_{*2j+1}(n) - f(1) \times [f - f(1)\cdot\varepsilon]_{*2j}(n) \right) \frac{1}{f(1)^{2j+1}}. \tag{2}$$

1.2. 关于分拆函数的一些有趣卷积实验。 我们通过实验观察到，在涉及特殊分拆函数的离散卷积编码下，某些带符号整数序列存在一种有趣的趋势，即所谓的符号平滑变换。

定义 1.1. 定义以下分拆函数：对所有 $n \geq 0$ ，它们分别是下列基于乘积的生成函数的系数：

$$\begin{aligned}
q(n) &:= [q^n] \prod_{m\geq 1} (1+q^m) && \text{(3a)}\\
&= [q^n]\left(1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 5q^7 + 6q^8 + 8q^9 + 10q^{10} + 12q^{11} + \cdots\right)\\
q^*(n) &:= [q^n] \prod_{m\geq 1} (1+q^m)^{-1} && \text{(3b)}\\
&= [q^n]\left(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + 3q^{12} + \cdots\right)\\
p^*(n) &:= [q^n] \prod_{m\geq 1} (1-q^m) && \text{(3c)}\\
&= [q^n]\left(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots\right)\\
p(n) &:= [q^n] \prod_{m\geq 1} (1-q^m)^{-1} && \text{(3d)}\\
&= [q^n]\left(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

换言之， $q(n)$ 是将 n 分拆为互异部件（不计顺序）的分拆数，这与将 n 分拆为奇数部件的分拆数相同； $q^*(n)$ 是 $q(n)$ 的柯西乘积逆； $p(n)$ 是 n 的分拆数（不计顺序）；而 $p^*(n)$ 是 $p(n)$ 的柯西乘积逆。

注释 1.2（特殊分拆函数的渐近）。 我们可以对这些序列的 q级数生成函数应用圆法或鞍点论证，从而得到如下的极限渐近式，其中 $n \to \infty$ [3, 4, 12] [9, §26.10(v)]:

$$q(n) = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt[4]{3}\cdot n^{\frac{3}{4}}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{3}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{4a}$$

$$q^*(n) = \frac{(-1)^n}{2\cdot 24^{1/4} n^{\frac{3}{4}}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{6}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{4b}$$

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{4c}$$

定义 1.3（基于卷积的编码）。 我们定义两个可逆变换，即两种编码；对于任意固定的算术 f，它们互为逆变换，且由离散卷积和给出

$$c_1[f](n) := \sum_{1\le j\le n} f(j)q(n-j) \tag{5a}$$

$$c_2[f](n) := \sum_{1\le j\le n} f(j)q^*(n-j) \tag{5b}$$

$$c_3[f](n) := \sum_{1\le j\le n} f(j)p^*(n-j) \tag{5c}$$

$$c_4[f](n) := \sum_{1\le j\le n} f(j)p(n-j). \tag{5d}$$

定义 1.3 中的卷积若干表格列于附录部分的表格中（见附录 A） [10, 附录 A]。函数的符号平滑性质 f（f^{-1}，分别）与定义 1.3中的特殊分拆函数进行卷积后，我们注意到以下性质：

定理 *1.4*（符号平滑卷积）。设符号函数 $sgn(h(n)) \mapsto \{\pm 1\}$定义为$|h(n)|/h(n)$，当 $h(n) \neq 0$ 时，其中 $sgn(h(n)) := 1$ 当 $h(n) = 0$。此外，假设对于所有 n 均有 $f(n) \geq 1$，并且当 $n \to \infty$时， $f(n) \ll q^*(n)$。那么对于所有充分大的 n，我们有

$$\operatorname{sgn}\left\{c_2[f^{-1}](n+1)\right\} = -\operatorname{sgn}\left\{c_2[f^{-1}](n)\right\}. \tag{A}$$

我们还有

$$\operatorname{sgn}\left\{c_1[f^{-1}](n)\right\}, \tag{B}$$

对于所有充分大的 n，最终为常数。

根据固定序列 $f(n)$，我们有时会发现卷积序列 $c_3[f](n)$ 和 $c_4[f](n)$ 具有类似的性质，尽管情况并非总是如此（参见附录 A中的表格）。备注 1.2 中所示四个特殊分拆函数的指数主导渐近性质表明，将定理 1.4 推广为未来的研究课题是值得探讨的。

1.3. 算术函数的局部符号变化。 在应用中，人们经常研究算术函数 f的符号变化；在这些应用中，当 f 在 f （尤其是 f^{-1}）时，我们必须估计依赖于 f 的和的增长，而此时该函数的符号会发生振荡。已有若干结果刻画了行为足够良好的 f 在长度不断增大的连续整数区间上预期发生的符号变化次数。令 $V(f, Y)$ 表示当实数 $Y > 0$ 时， f 在区间 $(0, Y]$ 上的符号变化次数：

$$V(f,Y) := \sup\left\{N : \exists\{x_i\}_{i=1}^{N}, 0 < x_1 < \cdots < x_N \le Y, f(x_i) \neq 0, \operatorname{sgn}(f(x_i)) \neq \operatorname{sgn}(f(x_{i+1})), \forall 1 \le i < N\right\}.$$

众所周知， f的狄利克雷生成函数（DGF）的解析性质、极点和零点 [5]为了解这些函数的符号变化提供了关键线索。 f 例如，若 f的DGF在某个半平面上解析，并满足某些限制条件，那么Landau在1905年证明，$S_f(x$的求和函数在 x 趋于无穷大时会发生无穷多次符号变化。我们还有下一个定理，它推广了Landau的结果，并就 $S_f(x$的符号变化频率给出了更精确的最弱表述。

ˆ**定理1.5** (P´olya)。假设 $S_f(x)$ 对所有 $x \geq x_0$均为实值，并定义函数 $F_f(s)$，其在 $-s$处的梅林变换为

$$\hat{F}_f(s) := \int_{x_0}^{\infty} \frac{S_f(x)}{x^{s+1}} dx.$$

ˆ假设 $F_f(s)$ 对所有 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 都是解析的，但在任何满足 $\mathrm{Re}(s) > \theta - \varepsilon$ *for*ˆ$\varepsilon > 0$ 的半平面内都不是解析的。此外，假设 $F_f(s)$ 在某个半平面 $\mathrm{Re}(s) > \theta - c_0$ 内是亚纯的，其中某个 $c_0 > 0$。令

$$\gamma_f := \begin{cases} \inf\{|t| : \hat{F}_f(s) \textit{ is not analytic at } s = \theta + \imath t\}, & \text{if } f \text{ is not analytic at } \mathrm{Re}(s) = \theta; \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

Then

$$\limsup_{Y \to \infty} \left\{ \frac{V(S_f, Y)}{\log Y} \right\} \geq \frac{\gamma_f}{\pi}.$$

2. Proof of the main theorem

定理 *1.4*(*A*) 的证明。 为简化记号，我们定义常数

$$A := \frac{1}{2 \cdot 24^{\frac{1}{4}}}, k := \frac{\pi}{\sqrt{6}},$$

也就是说，使得

$$q^*(n) = \frac{(-1)^n A \exp\left(k\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

接着，我们计算 $1 \leq j \leq n$ 的如下差值:

$$\begin{aligned} q^*(n+1-j) - q^*(n-j) &= (-1)^{n+1-j} A \left[\frac{\exp\left(k\sqrt{n+1-j}\right)}{(n+1-j)^{\frac{3}{4}}} - \frac{\exp\left(k\sqrt{n-j}\right)}{(n-j)^{\frac{3}{4}}} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n+1-j}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1-j} A}{(n+1-j)^{\frac{3}{4}}} \left[\exp\left(k\sqrt{n+1-j}\right) + \frac{\exp\left(k\sqrt{n-j}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n+1-j}\right)^{\frac{3}{4}}} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n+1-j}}\right)\right) \\ &= \left(\frac{2A(-1)^{n+1-j} \exp\left(k\sqrt{n+1-j}\right)}{(n+1-j)^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{\exp\left(k\sqrt{n+1-j}\right)}{(n+1-j)^{\frac{9}{4}}} \right) \right) \times \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n+1-j}}\right)\right) \end{aligned}$$

因此，编码和之差满足

$$c_2[f^{-1}](n+1) - c_2[f^{-1}](n) = f^{-1}(n+1) - 2c_2[f^{-1}](n) + o\left(c_2[f^{-1}](n)\right).$$

我们断言，由于我们关于 $n \to \infty$ 时 $f(n)$ 渐近增长的假设，有 $f^{-1}(n+1) = o\left(c_2[f^{-1}](n)\right)$（当 $n \to \infty$ 时）。这就完成了对（A）在所有充分大的 n 下成立的证明。□

类似但略显重复的论证表明，当我们与严格正值的分拆函数 $q(n)$ 进行卷积时，定理的 (B) 部分仍然成立。

3. Conclusions

我们有若干狄利克雷卷积恒等式，其形式为 $\lambda^{-1} = (\mathbb{1}_{\mathrm{Sq}} * \mu)^{-1}$、 $\varphi^{-1} = (\mathrm{Id}_1 * \mu)^{-1}$ 和 $\mu^{-1} = 1$ ，其中 $\mathbb{1}_{\mathrm{Sq}}$ 是平方数的特征函数，且对所有 $n \geq 1$ ，恒等函数 $\mathrm{Id}_1(n) = n$ 。求和函数 $L(x) := \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ 和 $M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n)$ 的求和项带有符号且呈振荡性，其部分和众所周知难以精确估计——尤其是在短区间内。这也有助于说明为何附录 A 中表格里特别值得关注的情形，着重展示了带符号狄利克雷逆函数 f^{-1} 的符号平滑性质。请注意，定义 1.3 规定的离散卷积（柯西乘积或生成函数卷积）是可逆的，因此，任何此类关于 f (f^{-1}（分别）的分拆函数编码都可以逆向还原，以恢复原序列的各项。

致谢。 感谢布里斯托大学的 Hamed Mousavi 博士，他对我在佐治亚理工学院博士论文中关于 MAGIC 分拆函数实验的观察提出了推广建议。

References

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*，施普林格，1976。[2] F. Baustian 和 V. Bobkov，《狄利克雷逆的渐近行为》， *ArXiv:math.NT/1903.12445*（2019）。[3] P. Flajolet 和 R. Sedgewick。《解析组合学》。剑桥大学出版社，2009（2010 年第三次印刷）。[4] G. H. Hardy 和 S. Ramanujan。《组合分析中的渐近公式》。伦敦数学会会刊，s2-17 (1)，第 75–115 页（1918）。Wiley Online Library：https://doi.org/10.1112/plms/s2-17.1.75。[5] J. Kaczorowski 和 J. Pintz，《算术函数的振荡性质 I》， *Acta Math. Hung.* **48**，第 173–185 页，1986。[6] K. Matom¨aki 和 M. Radziwitt，《短区间中的乘法函数》， *Annals of Math.*，第 183 卷，第 3 期，第 1015–1056 页（2016）。[7] H. Mousavi 和 M. D. Schmidt，《互素因子和、最大公因数和及广义拉马努金和的因式分解定理》。Ramanujan J. 54：309–341（2021）。[8] N. Ng，《M¨obius 函数求和函数的分布》， *ArXiv:math.NT/0310381*（2008）。[9] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark。《NIST 数学函数手册》。剑桥大学出版社，2010。[10] M. D. Schmidt。《特殊和生成函数的因式分解定理与典范表示》。佐治亚理工学院博士论文，2022。在线获取：https://arxiv.org/abs/2209.12287。[11] S. L. Segal，《狄利克雷卷积求和法》， *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63**，393（1967）。[12] H. Todt。《分拆函数的渐近性质》。宾夕法尼亚州立大学学位论文（2011）。在线获取：https://etda.libraries. psu.edu/files/final_submissions/2280。

AppendixA. Tables of experiments

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	0	2	2	−1	0	−2	0	0
3	2	4	1	4	5	−2	−2	−1	−2	−1
4	2	7	−1	7	9	−1	−2	0	−2	−2
5	4	12	2	12	18	−4	−7	−1	−7	−7
6	2	17	−4	17	28	2	−6	6	−6	−8
7	6	27	4	27	50	−6	−13	−7	−13	−21
8	4	39	−6	39	76	−1	−20	8	−20	−30
9	6	53	5	53	121	−2	−23	−5	−23	−51
10	4	74	−10	74	178	4	−31	15	−31	−69

表 A.1. 当 $f(n) \equiv \varphi(n)$ 为欧拉函数时的符号平滑变换

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	1	3	3	−2	−1	−3	−1	−1
3	2	5	0	5	6	−2	−3	0	−3	−2
4	3	9	0	9	12	1	−1	2	−1	−2
5	2	13	−2	13	20	−2	−5	0	−5	−6
6	4	20	1	20	35	4	−2	5	−2	−5
7	2	28	−4	28	54	−2	−4	−6	−4	−12
8	4	39	2	39	86	0	−9	4	−9	−16
9	3	54	−4	54	128	1	−6	−4	−6	−24
10	4	71	4	71	192	4	−7	8	−7	−28

T表 A.2. 当 $f(n) \equiv d(n)$ 为因数函数时的符号平滑变换

Email address: maxieds@gmail.com

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	1	3	3	-2	-1	-3	-1	-1
3	2	5	0	5	6	-2	-3	0	-3	-2
4	2	8	-1	8	11	2	0	3	0	-1
5	2	12	-1	12	19	-2	-4	-1	-4	-5
6	3	18	0	18	32	5	0	6	0	-2
7	2	25	-2	25	50	-2	-1	-8	-1	-8
8	2	34	-1	34	77	-2	-8	3	-8	-11
9	2	46	-1	46	115	2	-2	-3	-2	-15
10	3	61	2	61	170	5	-1	10	-1	-14

表 A.3. $f(n) \equiv \omega + 1$情况下的符号平滑变换

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	2	4	4	-3	-2	-4	-2	-2
3	15	19	12	19	20	-15	-17	-12	-17	-16
4	105	125	89	125	129	-96	-112	-82	-112	-114
5	945	1073	838	1073	1094	-945	-1060	-845	-1060	-1075
6	10395	11484	9437	11484	11617	-10305	-11379	-9349	-11379	-11495

表 A.4。 当 $f(n) \equiv n!!$ 是双阶乘函数时的符号平滑变换。注意，该函数的增长近似为 $n!! \sim C \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ 其中 $C > 0$ 为常数，其渐近增长远远超过备注 *1.2* 中给出的分拆函数渐近性质。于是我们可以计算得出，定理 *1.4* 的 ***(A)*** 部分中的卷积编码性质对这一列 $f(n)$不成立。

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	0	-1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	-1
3	-1	-2	-1	-2	-3	1	0	1	0	-1
4	1	-2	3	-2	-3	-1	-2	-1	-2	-3
5	-1	-3	-3	-3	-7	1	-1	1	-1	-3
6	1	-4	4	-4	-8	-1	-2	-2	-2	-6
7	-1	-5	-5	-5	-15	1	-3	3	-3	-7
8	2	-6	7	-6	-17	-2	-4	-5	-4	-13
9	-2	-8	-10	-8	-30	1	-5	5	-5	-15
10	2	-10	11	-10	-35	-2	-7	-6	-7	-26

表 A.5. 当 $f(n) \equiv q^*(n)$ 时的符号平滑变换（以展示与相应分拆函数相比，f 的增长所面临的挑战）

n	$f(n)$	$c_1[f](n)$	$c_2[f](n)$	$c_3[f](n)$	$c_4[f](n)$	$f^{-1}(n)$	$c_1[f^{-1}](n)$	$c_2[f^{-1}](n)$	$c_3[f^{-1}](n)$	$c_4[f^{-1}](n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	1	3	3	-2	-1	-3	-1	-1
3	3	6	1	6	7	-3	-4	-1	-4	-3
4	5	12	1	12	15	-1	-4	1	-4	-5
5	7	21	1	21	29	-7	-13	-3	-13	-15
6	11	36	2	36	54	1	-14	8	-14	-20
7	15	59	1	59	95	-15	-31	-15	-31	-49
8	22	94	3	94	163	-10	-52	11	-52	-77
9	30	146	2	146	270	-21	-77	-17	-77	-141
10	42	222	5	222	439	-14	-117	26	-117	-214

表 A.6。 当 $f(n) \equiv p(n)$ 为普通分拆函数时的符号平滑变换