arXiv:2603.06893v1 [cs.IT] 6 Mar 2026

并行信道上的目标速率最小二乘功率分配

Bhaskar Krishnamachari

南加州大学明希系电气与计算机工程系

bkrishna@usc.edu

2026年3月

摘要

我们研究在 N 并行高斯信道（如OFDM子载波）上的功率分配问题，其中每个信道都具有期望的目标频谱效率。给定信道增益噪声比系数 $a_i > 0$与每信道目标 $T_i \geq 0$，我们在总功率约束 $\sum_i P_i \leq P_{\text{tot}}$ 和非负性 $P_i \geq 0$条件下，最小化总速率偏差平方和 $\sum_{i=1}^{N}(\log_2(1 + a_i P_i) - T_i)^2$。我们证明，最优分配绝不会超过任何目标，并且当所有目标联合可行时可能留有未使用的功率，这一结构与经典注水根本不同。利用KKT条件，我们在活动集上导出了以Lambert W 函数表示的每信道闭式解，并将剩余计算归结为针对对偶变量的一维单调二分法。所得算法的运行时间为 $O(N \log(1/\varepsilon))$，并在 $N = 1{,}024$个信道上相对通用数值求解器实现高达1,890× 的加速比。在瑞利衰落信道上的数值实验证实，该闭式解与数值优化结果吻合至机器精度，并表明在一系列工作条件下，其目标跟踪性能优于注水法、均匀分配和比例公平。

关键词： 功率分配、OFDM、目标速率、Lambert W 函数、凸优化、注水法、KKT条件。

1 引言

正交频分复用（OFDM）及其多址变体 OFDMA 可将频率选择性无线信道转换为一组并行窄带子信道，从而实现灵活的逐子载波功率与速率自适应 [1, 2]。在这些并行信道上进行功率分配的经典方法，是在总功率预算下最大化和速率，由此得到广为人知的注水法 [1, 3]。注水法会为较强的信道分配更多功率，并始终耗尽全部预算；当唯一目标是总吞吐量时，这种策略是最优的。

然而，许多实际无线系统运行时采用的是目标速率，而不是无界的吞吐量目标。每个用户的服务质量（QoS）要求、应用层需求、调度器分配的工作点以及离散的调制编码方案（MCS）等级，都会对各个子信道提出期望速率 [4, 5]。现有方案主要通过硬约束处理目标：要么将其设为最低速率门限（速率自适应分配），要么将其设为必须满足的精确要求，并以最小功率实现（裕量自适应分配） [6, 7]。然而，在目标

可以协商的场景中，硬约束并不适用：例如软QoS偏好、妨碍精确满足速率要求的MCS粒度，或受益于平滑惩罚函数的可微优化流程。

我们通过研究一种软目标速率跟踪表述来弥补这一空白。我们并不强制施加速率约束，而是最小化所有子信道上达到的速率与信道特定目标之间的平方偏差之和。该最小二乘目标对不足进行平滑惩罚，并得到一种在各信道之间平衡功率的分配，从而在预算允许的范围内尽可能接近每个目标。

据我们所知，(i) 二次速率偏差目标、(ii) 具有每信道目标的并行高斯信道、(iii) 总功率约束，以及 (iv) 朗伯 W 函数闭式解这一特定组合此前尚未被研究。本文的主要贡献如下：

1. 我们针对 N 个具有每信道目标与总功率约束的并行高斯信道，建立了目标速率最小二乘功率分配问题（第3节）。2. 我们证明最优速率从不超过各自目标（不超调性质），据此确立该问题在其自然定义域上的凸性，并根据功率预算是否超过每信道功率上限之和刻画两种工作区间（第4节）。3. 我们通过KKT条件与Lambert W 函数推导出每信道闭式解，将问题归结为关于对偶变量的一维单调求根问题（第5节）。4. 我们给出保证 $O(N\log(1/\varepsilon))$ 收敛性的二分算法，并讨论数值稳定性方面的考虑（第6节）。5. 我们对照数值优化验证闭式解，将分配行为与经典注水进行比较，并展示其在衰落信道上的可扩展性与统计性能（第7节）。

本文其余部分安排如下。第2 节回顾相关工作。第3 节介绍系统模型与问题表述。第4 节阐述该问题在其自然定义域上的结构性质与凸性。第5节通过 KKT条件推导 Lambert W闭式解。第6 节介绍二分算法及其收敛性。第7 节展示数值实验。第8节讨论扩展形式及其与其他问题表述的联系。第9 节总结全文。

2 相关工作

2.1 经典注水

并行高斯信道上的和速率最大化问题的注水解是信息论中的一项基础性成果 [1,3]。Goldsmith 和 Varaiya [2] 建立了具有信道侧信息的衰落信道容量理论，将注水法扩展至时变场景。注水法的关键特性在于，它总会用尽全部功率预算，并优先分配功率给增益较高的信道。我们的表述与这一理念不同：目标函数并非吞吐量最大化，而是目标跟踪，因此可能出现未使用功率。

2.2 QoS约束与自适应裕量分配

Wong 等人 [4] 提出了多用户 OFDM，在满足每用户速率和误比特率要求的前提下，自适应地分配子载波、比特和功率。Chow、Cioffi 和 Bingham [6]为离散多音（DMT）系统（DSL 中 OFDM 的前身）开发了一种实用的比特加载算法，以最小化功率

，同时满足每个子信道的目标比特率。他们的方法以及随后大量的 DSL/DMT 比特加载研究，都将每信道目标视为硬约束：分配器要么精确达到每个目标，要么判定问题不可行。Sadr 等人开展的综述 [7] 以及 Huang 和 Berry 的综述 [5] 将 OFDM 资源分配分为速率自适应（在功率约束下最大化速率）和自适应裕量（在速率约束下最小化功率）两类。我们的公式属于一个独特的类别：我们不施加硬速率约束，而是对目标偏差施加二次惩罚，从而得到平滑的分配方案，即使预算不足以满足所有目标，性能也能逐步平缓下降。这种软目标方法避免了硬约束公式固有的不可行问题，并提供可微的目标函数，便于与基于梯度的外循环优化器集成。

2.3 公平性与比例分配

Kelly [8] 将比例公平性引入通信网络中的速率分配，并将其与对数效用最大化联系起来。Mo 和 Walrand [9] 通过一个参数化效用函数族，统一了比例公平、最大最小公平以及介于两者之间的公平性概念。Shen 等人 [10] 将比例速率约束应用于多用户 OFDM，确保用户按照指定比例获得速率。我们的目标速率表述可视为一种互补方法：比例公平性控制用户速率之间的比值，而我们的方法控制与指定目标之间的绝对偏差 。此外，比例公平性最大化速率的单调凹效用，因此总会用尽功率预算；即使采用弹性速率约束，它也不会直接最小化相对于指定每信道目标的偏差。

2.4 无线优化中的朗伯 W 函数

朗伯 W 函数定义为 $W(z)e^{W(z)} = z$ [11]，它出现在若干无线资源分配问题中。Brah 等人 [12] 将其用于协作中继网络中的受约束功率分配。Bacci 等人 [13]推导出了适用于小小区网络能量感知链路自适应的朗伯 W 解。Meshkati 等人 [14]在博弈论能效功率控制中得到了朗伯 W 表达式。在这些研究中，朗伯 W 函数均源于 KKT 条件下对数速率函数与功率约束之间的相互作用。我们的贡献将这类结果拓展到了最小二乘目标速率跟踪场景。

2.5 本文的定位

将我们的表述与两种主流范式进行对比颇有启发意义。一般而言，效用最大化框架 [15], 的目标函数是速率的凹且单调递增函数（例如加权和速率、α-公平效用），因此增加功率总能提高效用，而且预算总会被全部用尽。我们的二次偏差目标函数并非单调函数：信道达到其目标后，继续增加功率只会造成浪费，因此会产生剩余功率这一根本不同的特性。基于惩罚的 *QoS* 方法会在吞吐量目标函数中加入约束违反惩罚，通常通过拉格朗日项来实施；惩罚项充当的是正则项，而非主要目标函数。与之不同，我们的表述直接 将偏差平方和作为唯一目标函数进行最小化，从而形成结构不同的 KKT 系统，并可得朗伯 W 闭式解。惩罚方法会在单调效用函数中附加偏差项，但仍会耗尽预算；由于我们的目标函数仅关注偏差，所得功率分配会呈现非单调的剩余功率行为，而这在加入惩罚项的表述中并不存在。先前关于朗伯 W 函数的结果 [12–14]研究的是能量效率和协作中继，而非并行信道上的平方偏差目标跟踪。

表 1 总结了我们的表述与经典替代方案之间的关系。目标速率最小二乘法占据了软QoS目标与闭式Lambert W此前尚未探索的交叉点

表1： 功率分配设计理念的比较。

方法	目标函数	功率使用量
注水法	最大和速率	始终满功率
自适应裕量	满足硬性目标的最小功率	所需最小值
最大最小公平性	最大化最坏情况速率	始终满载
目标速率（我们的方法）	**最小平方偏差**	**可能存在松弛**

并行信道的解。

3 系统模型与问题表述

3.1 并行高斯信道模型

我们考虑一个单用户系统，其中 N 包含并行高斯信道，这种情形常见于频率选择性衰落信道上的 OFDM 传输。令 $P_i \geq 0$ 表示分配给信道 i的发射功率，并令$a_i > 0$ 表示信道 i上的有效信道增益噪声比（综合考虑路径损耗、衰落和噪声功率谱密度）。我们假设发射机拥有完美的信道状态信息（CSI），因此已知 a_i。信道[1] 上的可达频谱效率 i 由香农公式给出：

$$r_i(P_i) = \log_2(1 + a_i P_i) \quad \text{(bits/s/Hz)}. \tag{1}$$

该模型可直接应用于 OFDM 子载波、DSL 中的 DMT音调，或任意一组非干扰并行链路。

3.2 优化问题

为每个信道 i 指定一个目标频谱效率 $T_i \geq 0$。用$\boldsymbol{P}$ = 表示功率分配向量（P_1，……， P_N）。给定总功率预算 $P_{\text{tot}} > 0$，我们寻求使目标值总平方偏差最小的功率分配：

$$\begin{aligned} \min_{\{P_i\}_{i=1}^N} \quad & J(\boldsymbol{P}) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \Big(\log_2(1 + a_i P_i) - T_i \Big)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{N} P_i \leq P_{\text{tot}}, \qquad P_i \geq 0 \ \ \forall i. \end{aligned} \tag{2}$$

各信道的目标值 T_i 可以不同。带有重要性权重 $w_i > 0$ 的加权变体 $\sum_i w_i (r_i - T_i)^2$ 也可采用相同方法处理（见附录）。

3.3 目标函数结构讨论

速率函数 $r_i(P_i) = \log_2(1 + a_i P_i)$关于 P_i 是凹函数。令 $c \triangleq \ln 2$(在第 3–5 节中均采用此记号)。由于每一项 $f_i(P_i) = (r_i(P_i) - T_i)^2$ 都是将凹函数复合到凸二次函数上，因此目标函数的凸性并非显而易见：二阶导数

$$f_i''(P_i) = \frac{2a_i^2}{c^2(1 + a_i P_i)^2} \Big[1 - \ln(1 + a_i P_i) + T_i\, c \Big] \tag{3}$$

[1]Thr本文中，“速率”均指频谱效率（比特/秒/赫兹），即按带宽归一化后的速率。

当 $\ln(1+a_iP_i) > 1+T_i\,c$ 时会改变符号，也就是说，当 $P_i > (e\cdot 2^{T_i}-1)/a_i$ 时。因此，$J(\boldsymbol{P})$在 $P_i \ge 0$ 上并非全局凸函数。然而，正如我们在第 4 节中所证明的，最优解局限于一个凸性成立的受限域内，因此可以得到精确的闭式解。

4 结构性质

我们将建立一些结构性结果，以区分目标速率分配与经典注水法，并利用这些结果证明该问题在其自然定义域上的凸性。

定理 4.1 (无超调)。 若 $\boldsymbol{P}^* = (P_1^*, \ldots, P_N^*)$ 是 (2)的最优解，则 $r_i(P_i^*) \le T_i$ 对所有 $i = 1, \ldots, N$均成立。

证明。 反设 $r_j(P_j^*) > T_j$对某个信道 j成立。考虑修改后的分配$P_j' = (2^{T_j}-1)/a_j < P_j^*$，它可达到 $r_j(P_j') = T_j$。此修改将第 j 项从 $(r_j(P_j^*) - T_j)^2 > 0$严格降为零，不会增加其他任何项，并且严格降低总功率 $\sum_i P_i$。由于所得分配仍然可行，因此有 $J(\boldsymbol{P}') < J(\boldsymbol{P}^*)$，这与 $\boldsymbol{P}^*$ 的最优性矛盾。□

定理 4.1 表明，最优分配始终处于每个 $r_i \le T_i$所在的区域；正如我们接下来将证明的，这恰好是目标函数具有凸性的区域。从实际角度来看，不超调性质意味着系统绝不会浪费功率，让某个信道超出其目标；与其将多余功率用于一个信道，不如用它来减少另一个信道的不足。

命题4.2 （单信道上限）。 在信道 i 上恰好达到目标所需的功率为

$$\bar{P}_i \triangleq \frac{2^{T_i}-1}{a_i}. \tag{4}$$

根据定理 *4.1*，最优分配满足 $P_i^* \le P_i$ 对所有 i。

4.1 受限域上的凸性

定理 4.1 和命题 4.2 表明，最优解满足 $0 \le P_i^* \le P_i$。因此，我们可以将约束 $P_i \le P_i$ 添加到（2）中，而不改变最优解。现在我们来验证目标函数在该受限域上是凸的。

命题4.3 （凸性）。 每一项 f_i（P_i） =（$\log_2$（$1 + a_iP_i$） $- T_i$）^{2}对所有$P_i \in [0, P_i]$均满足 f''_i（P_i） ≥ 0。

证明。 由（3）可知， $f''_i(P_i) \ge 0$ 当且仅当 $\ln(1 + a_iP_i) \le 1 + T_i \ln 2$。拐点位于$P_i^{\inf} = (e\cdot 2^{T_i}-1)/a_i$处。由于 $e > 2$，对于所有 $T_i \ge 0$，均有 $e\cdot 2^{T_i} > 2^{T_i+1} > 2^{T_i}$，因此 $P_i^{\inf} > \bar{P}_i$。由此可得，对于所有 $P_i \in [0, P_i]$， $f_i''(P_i) \ge 0$。□

由于 J（$\boldsymbol{P}$） 是在紧致域 $\{0 \le P_i \le P_i, \ \sum_i P_i \le P_{\text{tot}}\}$ 上线性约束下的凸函数之和，因此增广问题是一个凸规划。根据Slater条件（原点 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ 严格可行），强对偶成立，且KKT条件对于全局最优性 [16]而言既是必要条件也是充分条件。此外，由于附加约束 $P_i \le P_i$ 在最优点处不活跃（根据定理 4.1，最优速率满足 $r_i^* \le T_i$ 但在 $r_i^* < T_i$ 情形 B中通常），与这些上界相关联的对偶变量为零，因此原问题（2）的KKT条件与增广问题的KKT条件一致。

定理 4.4 (机制刻画)。 最优解呈现出两种截然不同的机制：

- 情形 ***A***（功率充足）：若 $P_{\text{tot}} \geq \sum_{i=1}^{N} \bar{P}_i$，则 $P_i^* = \bar{P}_i$ 对所有 i，目标函数达到 $J^* = 0$，且功率约束处于松弛 状态，$\sum_i P_i^* = \sum_i P_i < P_{\text{tot}}$。
- 情形 ***B***（功率不足）：若 $P_{\text{总功率}} < \sum_{i=1}^{N} \bar{P}_i$，则 $\sum_i P_i^* = P_{\text{总功率}}$（功率约束是紧约束），$J^* > 0$，且最优对偶变量 $\lambda^* > 0$。

证明。对于情形 A，令 $P_i = P_i$，即可对所有 i实现 $r_i = T_i$，从而得到 $J = 0$。根据定义，$J \geq 0$，因此这是全局无约束最优解。所用总功率为 $\sum_i P_i \leq P_{\text{tot}}$，所以约束是松弛的。

对于情形 B，若 $\sum_i P_i^* < P_{\text{tot}}$，则根据互补松弛有 $\lambda^* = 0$。在 $\lambda^* = 0$的情况下，每一项的无约束最优解 $(r_i - T_i)^2$ 为 $P_i = \bar{P}_i$，总功率为 $\sum_i \bar{P}_i > P_{\text{tot}}$，这与假设矛盾。因此，约束必定是紧约束。□

备注 4.1. 功率松弛区间（情形 A）是目标速率分配的一个显著特征。相比之下，和速率最大化的经典注水法总是会用尽全部预算，因为增加功率总会提高和速率。

推论4.5 (单调性). 最优目标 $J^*(P_{\text{tot}})$ 关于 P_{tot} 单调不增，在$P_{\text{tot}} = \sum_i P_i$ 处达到零，并且对于所有更大的预算都保持为零。类似地，对于固定的 P_{tot}，J^* 关于每个目标 T_i 单调不减。

5 基于朗伯 W 函数的 KKT 解

本节将利用 KKT 最优性条件和 Lambert W 函数，推导每信道功率分配的闭式解。

5.1 KKT 条件

令 $c = \ln 2$。我们构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{P}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{N} (r_i - T_i)^2 + \lambda \Big(\sum_{i=1}^{N} P_i - P_{\text{tot}} \Big) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i P_i \tag{5}$$

具有对偶变量 $\lambda \geq 0$（功率约束）和 $\mu_i \geq 0$（非负性）。如第4节所述，问题在受限域 $0 \leq P_i \leq P_i$ 上是凸的，且满足 Slater条件，因此 KKT条件是最优性的必要充分条件 [16]。关于 P_i 的驻点条件给出

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = 2(r_i - T_i) \frac{a_i}{(1 + a_i P_i)\, c} + \lambda - \mu_i = 0. \tag{6}$$

互补松弛条件为 $\lambda(\sum_i P_i - P_{\text{tot}}) = 0$ 且 $\mu_i P_i = 0$ 对所有 i

.

5.2 活动集推导

对于一个活动信道（$P_i > 0$），有 $\mu_i = 0$，且（6）变为

$$2 \Big(\log_2(1 + a_i P_i) - T_i \Big) \frac{a_i}{(1 + a_i P_i)\, c} + \lambda = 0. \tag{7}$$

由于 $r_i \leq T_i$ 根据定理 4.1，第一项为非正，这与 $\lambda \geq 0$一致。代入$y_i = 1 + a_i P_i > 1$ 并利用 对数$_2\, y_i = 1$n y_i/c，方程（7）变为

$$\ln y_i = T_i\, c - \frac{\lambda\, c^2}{2\, a_i}\, y_i. \tag{8}$$

两边取指数可得

$$y_i\, e^{\frac{\lambda c^2}{2a_i}\, y_i} = 2^{T_i}. \tag{9}$$

我们定义 $\alpha_i \triangleq \lambda c^2/(2a_i) \geq 0$并将（9）乘以 α_i:

$$(\alpha_i y_i)\, e^{\alpha_i y_i} = \alpha_i\, 2^{T_i}. \tag{10}$$

这是标准形式 $z\, e^z = w$，其中 $z = \alpha_i y_i$ 和 $w = \alpha_i\, 2^{T_i} \geq 0$。由于 $w \geq 0$，朗伯 W 函数的主分支W_0 [11], 是满足 $W_0(w) \geq -1$ （当 $w \geq -1/e$ 时）的唯一实值分支，因此得到 $\alpha_i y_i = W_0(\alpha_i\, 2^{T_i})$，从而

$$\boxed{P_i(\lambda) = \frac{2}{\lambda\, c^2}\, W_0\!\left(\frac{\lambda\, c^2}{2\, a_i}\, 2^{T_i}\right) - \frac{1}{a_i}.} \tag{11}$$

这是每个活动信道关于对偶变量的闭式功率分配 λ。从实际应用的角度看，方程（11）将信道参数 (a_i, T_i) 和单个标量 λ 直接映射为每信道最优功率，每个信道只需进行一次朗伯 W 函数求值，无需逐信道迭代优化。注意，$c^2 = (\ln 2)^2$ 之所以出现，是因为速率表达式使用了对数2；若速率采用自然对数，则可简化为 $c = 1$。

5.3 非活动阈值

当 $P_i = 0$时，我们有 $y_i = 1$ 且 $r_i = 0$。驻点条件（6）给出 $\mu_i = \lambda - 2a_i T_i/c$。对偶可行性 $\mu_i \geq 0$ 得出非活动条件:

$$P_i^* = 0 \quad \text{if} \quad \lambda \geq \frac{2\, a_i\, T_i}{c}. \tag{12}$$

乘积 $a_i T_i$ 较小的信道（增益较差和/或目标较低）会随着 λ 增大而首先关闭。将（11）和（12）与命题4.2中的上限结合:

$$P_i^*(\lambda) = \min\left\{\bar{P}_i,\ \max\left\{0,\ P_i(\lambda)\right\}\right\}. \tag{13}$$

此表达式将每个信道的分配限制在可行范围 $[0, P_i]$内：功率充足的信道达到其上限，功率有限的信道采用朗伯 W 函数分配，而低于活跃阈值（12）的信道则完全关闭。上限钳制 P_i 确保满足不超调性质（定理 4.1），从而保证分配给任何信道的功率都不会超过满足其目标所需的功率。

5.4 单调性与极限行为

引理5.1 （P_i（λ）的单调性）。对于每个信道 i，若 $a_i,\ T_i > 0$，则未钳制分配 P_i（λ）在 （11）中随 λ 增大而严格递减，适用于 $\lambda > 0$。

证明。设 $w = \alpha_i\, 2^{T_i}$，其中 $\alpha_i = \lambda c^2/(2a_i)$。则 $P_i(\lambda) = W_0(w)/\alpha_i - 1/a_i$。利用恒等式$W_0'(w) = W_0(w)/[w(1 + W_0(w))]$,，直接计算表明，对于 $\lambda > 0$，$dP_i/d\lambda < 0$，因为 $W_0(w)$ 与α_i 均随 λ 增大，但 P_i 减小。 □

引理5.2 （极限行为）。当 $\lambda \to 0^+$，P_i（λ）$\to \bar{P}_i = (2^{T_i} - 1)/a_i$ （上限）。当 $\lambda \to \infty$，未截断表达式 （11） 趋于 $-1/a_i$，因此截断分配 P_i^*（λ）$\to 0$。

证明。当 $\lambda \to 0^+$ 时，论证为 $w = \alpha_i 2^{T_i} \to 0$。利用小 w 时的 $W_0(w) \approx w$，可得 $P_i \to 2^{T_i}/a_i - 1/a_i = (2^{T_i} - 1)/a_i = \bar{P}_i$。由于 $\lambda \to \infty$，$w \to \infty$ 和 $W_0(w) \sim \ln w$，因此 $W_0(w)/w \to 0$。于是 $y_i = W_0(w)/\alpha_i \to 0$，未截断的 $P_i(\lambda) = (y_i - 1)/a_i \to -1/a_i$。由于 $P_i^*(\lambda) = \max\{0, P_i(\lambda)\}$，截断后的分配趋于零。 □

算法 1通过二分法进行目标速率最小二乘功率分配

要求：信道增益 $\{a_i\}_{i=1}^N$，目标 $\{T_i\}_{i=1}^N$，预算 P_{tot}，容差：计算所有 $\bar{P}_i \leftarrow (2^{T_i}-1)/a_i$ 的上限 ε 则 $\bar{P}_i \leftarrow P_i$；$\lambda^* = 0$ 结束 if 5：$\lambda_{\text{lo}} \leftarrow 0$ 6：$\lambda_{\text{hi}} \leftarrow 1$ 7：当 $S(\lambda_{\text{hi}}) > P_{\text{tot}}$ 执行 8：$\lambda_{\text{hi}} \leftarrow 2\lambda_{\text{hi}}$ 9：结束 while 10：重复 11：$\lambda \leftarrow (\lambda_{\text{lo}} + \lambda_{\text{hi}})/2$ 12：对于 $i = 1$ 到 N 执行 13：通过 (11) 和 (13) 计算 $P_i^*(\lambda)$ 14：结束 for 15：$S(\lambda) \leftarrow \sum_{i=1}^N P_i^*(\lambda)$ 16：如果 $S(\lambda) > P_{\text{tot}}$ 则 17：$\lambda_{\text{lo}} \leftarrow \lambda$ 18：否则 19：$\lambda_{\text{hi}} \leftarrow \lambda$ 20：结束 if 21：直到 $|S(\lambda) - P_{\text{tot}}| < \varepsilon$ 22：返回 $\{P_i^*(\lambda)\}_{i=1}^N$ 和 λ

5.5 特殊情形

单信道（$N = 1$）**：**若 $P_{\text{tot}} \geq P_1$，则 $P_1^* = P_1$ 且 $J^* = 0$。否则，$P_1^* = P_{\text{tot}}$（将所有可用功率用于该单信道）。

等增益（$a_i = a$ **对所有** i）**：**对于均匀目标 $T_i = T$，由对称性可得，对所有 i，$P_i^* = \min(P_{\text{tot}}/N, P)$，其中 $\bar{P} = (2^T - 1)/a$。该分配是均匀分配，与注水法形成对比（此情形下注水法也均匀分配，但会用尽所有功率）。

目标 $T_i \to 0$**：**随着 $T_i \to 0$，上限 $P_i \to 0$ 且信道 i 获得的功率趋于零。

目标 $T_i \to \infty$**：**随着 $T_i \to \infty$，上限 $P_i \to \infty$，而信道 i 需的功率会变得任意大。实际应用中，总功率约束会限制可达速率。

6 算法

本节介绍用于求解最优对偶变量的二分算法，并分析其收敛性和数值性质。

6.1 二分法过程

根据引理5.1，总分配功率 $S(\lambda) \triangleq \sum_{i=1}^N P_i^*(\lambda)$ 关于 λ 单调不增。根据引理5.2，$S(0^+) = \sum_i P_i$ 以及 $S(\infty) = 0$。在情形 B（$P_{\text{tot}} < \sum_i P_i$）中，最优 λ^* 是 $S(\lambda^*) = P_{\text{tot}}$ 的唯一根，可通过对 λ 使用二分法求得。算法 1 给出了完整流程。

6.2 收敛性分析

定理 6.1（收敛性）：在情形 B（$P_{\text{tot}} < \sum_i P_i$）下，若至少有一个信道满足 a_i，$T_i > 0$，算法 *1* 至多经过 O（$\log$（$1/\varepsilon$））次二分迭代。每次迭代都会进行 N 次 *Lambert W* 函数调用和基本运算，因此总复杂度为 O（$N \log$（$1/\varepsilon$））。

证明。倍增循环（第 6–8 行）最多经过 $O(\log(\lambda^*))$ 步即可找到一个上界 λ_{hi}。每次二分迭代都会将区间 $[\lambda_{\text{lo}}, \lambda_{\text{hi}}]$ 减半。经过 m 次迭代后，区间宽度为 $\lambda^{(0)}\text{hi}/2^m$。由于 $S(\lambda)$ 在 λ^* 附近是利普希茨连续的，误差 $|S(\lambda) - P_{\text{tot}}|$ 会成比例减小，并在 $O(\log(1/\varepsilon))$ 次迭代内达到 ε。每次迭代都会在 $O(N)$ 时间内为所有 N 个信道计算式 (11)。□

6.3 数值稳定性

当 λ 很小时，表达式 (11) 涉及比值 $W_0(w)/\alpha_i$，其中 $W_0(w) \to 0$ 和 $\alpha_i \to 0$。利用小 $W_0(w)$ 时的渐近展开 $\approx w - w^2 + \cdots$，我们得到 w。

$$P_i(\lambda) \approx \frac{2^{T_i} - 1}{a_i} - \frac{\lambda\, c^2\, 2^{2T_i}}{2\, a_i^2} + O(\lambda^2), \tag{14}$$

这证实了当 $\lambda \to 0$ 时平滑过渡到上限解。实际应用中，我们通过直接 $\lambda \approx 0$ 检查¯是否满足 $P_{\text{tot}} \geq \sum_i P_i$（算法 1 第 2 行），并返回上限解，从而完全跳过 LambertW 求值。

6.4 非活动信道剪枝

根据非活动阈值（12），任何满足 $\lambda \geq 2a_iT_i/c$ 条件的信道都会分配到零功率。在二分法过程中，一旦 λ_{lo} 超过信道 i的阈值，该信道便可从后续所有迭代的朗伯 W 函数求值中移除，从而降低每次迭代的开销。实际中，乘积较小的 a_iT_i 信道会较早被剪枝，随着二分法的推进，每次迭代的实际开销也会降低。

6.5 时变信道的热启动

在信道增益随时间变化的自适应 OFDM 系统中，时刻 t 的最优 λ^* 通常与时刻 $t-1$ 的 λ^* 非常接近。我们可以将二分法的初始值设在前一次解附近进行热启动；当信道变化缓慢时，这能显著减少所需的迭代次数。

7 数值结果

我们通过数值实验验证解析结果，并比较目标速率分配与经典注水法。所有仿真均使用 Python 3.11 实现。朗伯 W 函数求值使用 SciPy 1.12 [17], 中的 scipy.special.lambertw，二分法容差为 $\varepsilon = 10^{-10}$。数值基线采用 scipy.optimize.minimize 中的序列最小二乘规划（SLSQP）求解器，并使用解析梯度和约束容差 10^{-12}。计时结果是在 AMD Ryzen 9 5900X 处理器的单核上独立运行五次后取平均值，且不包括初始导入开销。

7.1 设置

除非另有说明，我们使用 $N = 8$ 个具有确定性增益 $a_i \in$ {20，15，10，7，5，3，2，1}的信道（模拟强弱子载波的混合），均匀目标 $T = 3$ 比特/秒/赫兹，以及总功率预算$P_{\text{tot}} = 10$。对于统计实验，我们采用平均信噪比为10 dB的瑞利衰落。

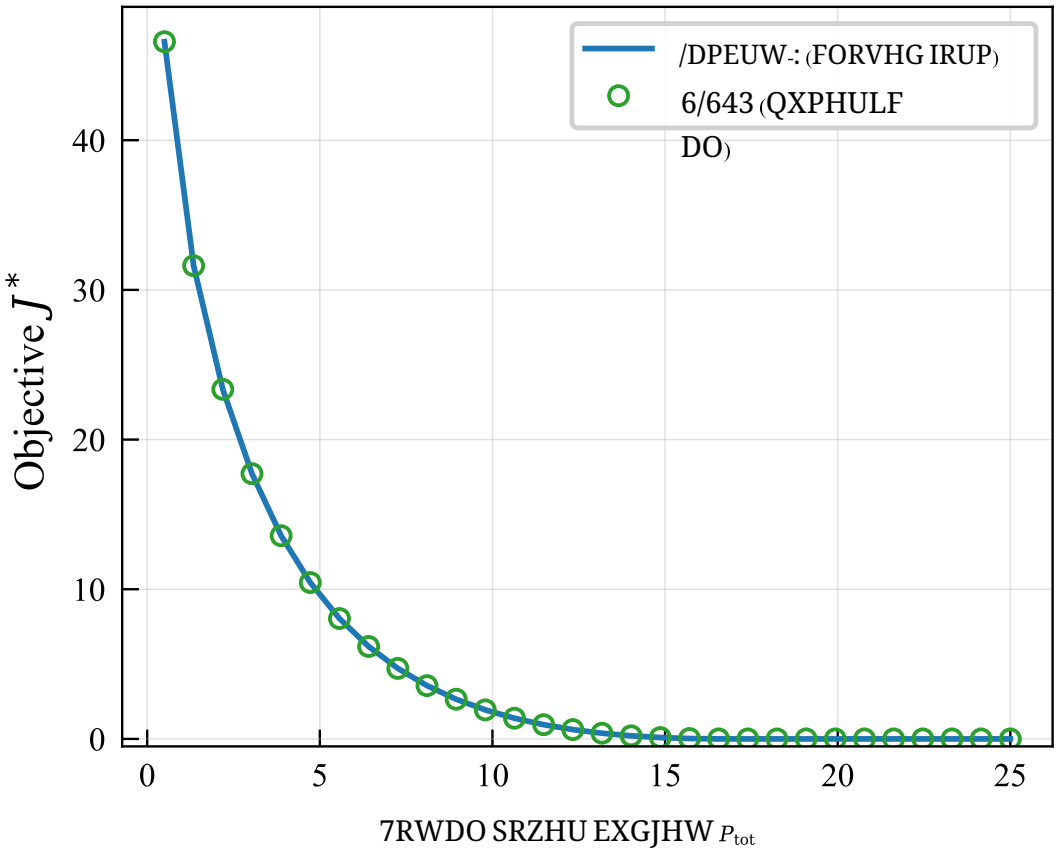

图 1： 目标函数 J^* 与总功率预算 P_{tot}的关系，对比 Lambert W闭式解与 SLSQP 数值优化。两种解在机器精度范围内一致。

7.2 与数值优化的验证

图1 比较了由Lambert W闭式解（算法1）得到的目标函数值与通用SLSQP非线性优化器的结果，扫描 P_{tot} 从0.5到25。两条曲线在整个范围内重叠至绘图精度，证实了闭式解的正确性。¯目标函数随 P_{tot} 单调下降，并在阈值 $\sum_i P_i \approx 16$处达到零。8。

7.3 分配比较

图 2 展示了目标速率和注水法两种方法的每信道功率分配。注水法优先分配功率给最强信道，并且始终用满预算。相比之下，目标速率分配会分配功率，使每个信道尽可能接近目标：相对其上限而言，较弱的信道会获得更多功率¯，且没有信道会超过其上限 P_i。

图 3说明了不超调性质（定理4.1）。在目标速率分配下，每个实现的速率都满足 $r_i \le T$（虚线目标线）。相比之下，注水法会使强信道的速率远高于目标，同时让弱信道远低于目标。

7.4 对偶变量搜索

图 4 展示了单调递减函数 $S(\lambda)$。最优 λ^* 位于与$P_{\text{tot}} = 10$的交点处，这证实了算法1中的二分法。

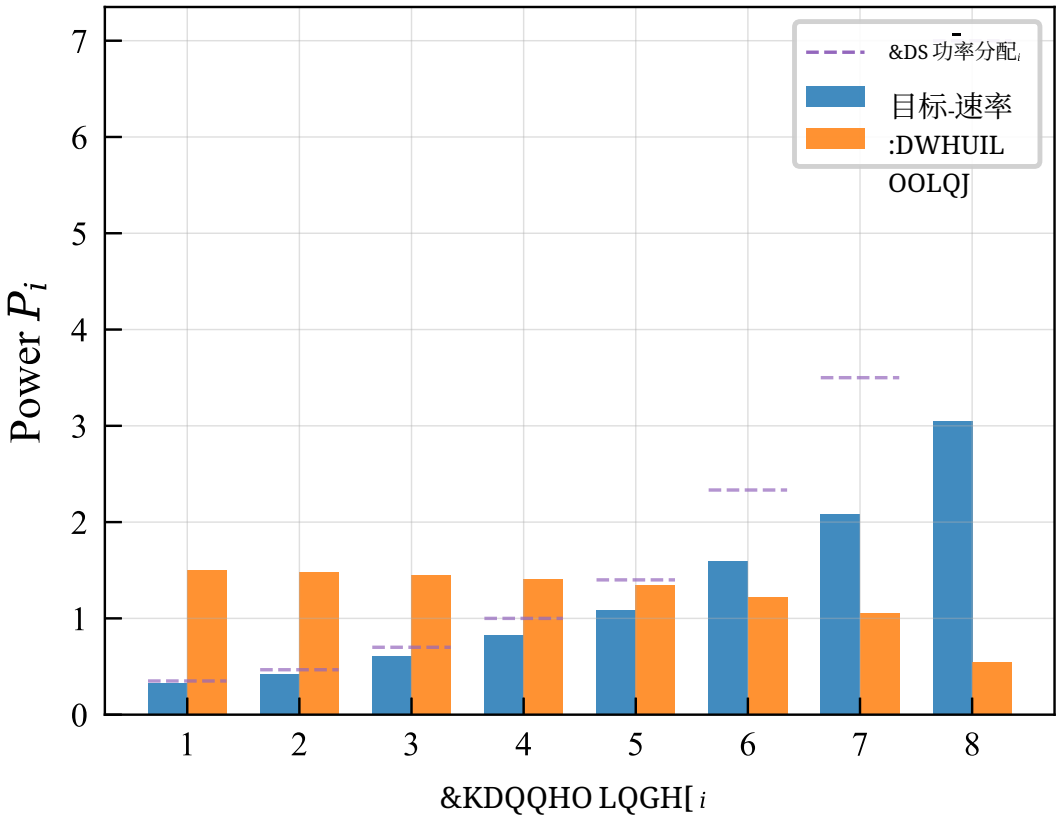

图 2： $N = 8$个信道的每信道功率分配。目标速率分配遵守每信道功率上限（虚线），并分配功率以最大限度减少速率偏差。注水法将功率集中分配到最强信道。

7.5 目标函数景观与相变

图 5 展示了最优目标函数 J^* 随功率预算的变化。在$P_{\text{tot}} = \sum_i P_i \approx 16$。8处出现明显的相变：低于此阈值时，随着可用功率增加，目标函数急剧下降；高于此阈值时，$J^* = 0$，额外功率将不再使用。这体现了定理4.4中的机制刻画。

7.6 异质目标

图 6 展示了异质目标下的功率分配 $T_i \in \{5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1\}$ 在两个功率预算下的分配情况，体现了定理 4.4中的两种机制。对于这些目标和增益，每信道功率上限之和为$\sum_i P_i \approx 7。35$。

左侧列显示 $P_{\text{tot}} = 5$（情形 B：预算紧张）。由于 $5 < 7。35$，功率约束处于激活状态，全部预算均被用尽。目标较高的信道获得更多功率，但目标较高的弱信道速率缺额最大，这是最小二乘目标的自然结果。这种模式的产生是因为弱信道每增加单位速率都需要指数级更多的功率；预算紧张时，目标函数会优先减少边际改进最大的偏差。

右栏显示了 $P_{\text{tot}} = 15$ （情形 A：预算有剩余）。由于 $15 > 7.35$，分配器为每个$P_i^* = P_i$，从而为每个信道实现 $r_i = T_i$，其中 $J^* = 0$。使用的总功率仅为 15 中的 7.35，剩余 7.65 未被使用，这直接体现了剩余功率性质，凸显了目标速率分配与注水法之间的区别。

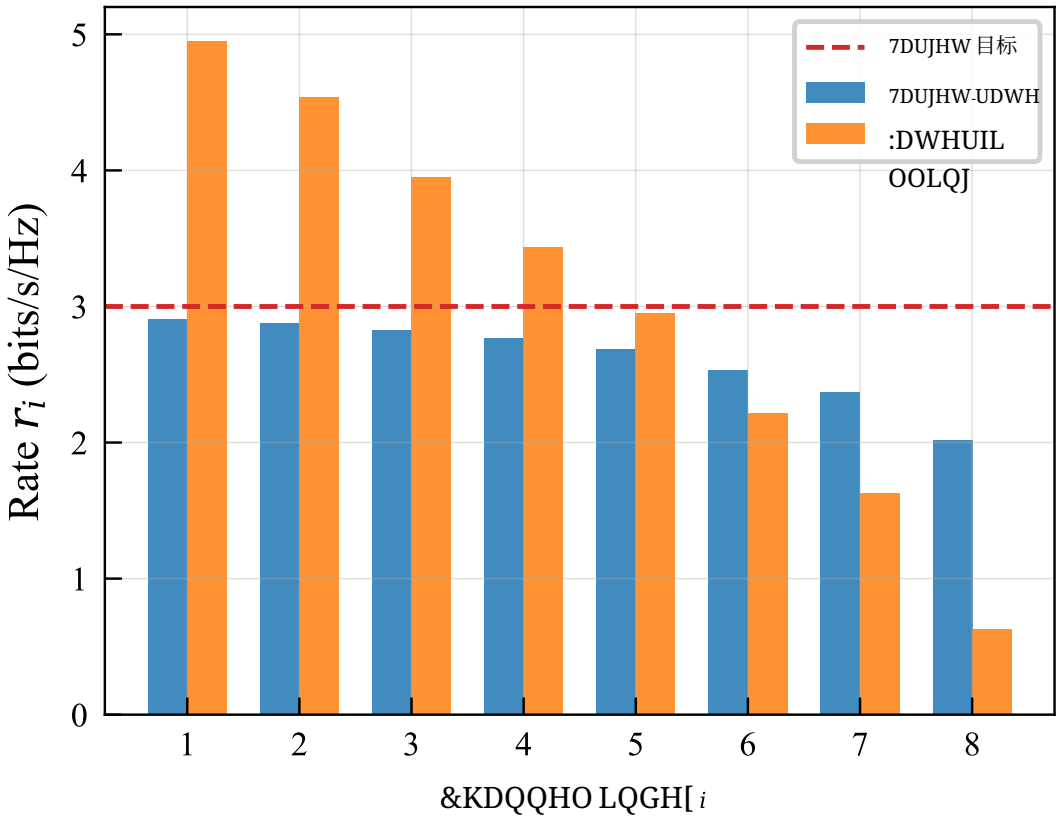

图3： 每个信道达到的速率。目标速率分配不会超过目标 $T = 3$ （无超调）。注水法在强信道上会超调，在弱信道上则达不到目标。

7.7 衰落信道上的统计性能

图 7 展示了四种分配策略在 1,000 次独立瑞利衰落实现中各信道速率偏差的经验累积分布函数 $|r_i - T|$：目标速率分配、注水法、均匀分配和比例公平。目标速率分配始终实现更小的偏差：其经验累积分布函数在零附近陡峭上升，表明大多数信道都接近目标。从定量结果来看，目标速率分配实现了 0.16 比特/秒/赫兹的中位偏差和 1.11 的第 90 百分位数；相比之下，注水法的中位数和第 90 百分位数分别为 1.18 和 2.73，均匀分配分别为 1.00 和 2.27，比例公平分别为 0.80 和 1.89。尽管比例公平优于注水法和均匀分配，但其偏差仍明显大于目标速率方法，因为它优化的是速率比，而非绝对目标跟踪。

7.8 计算可扩展性

图8 和表3 比较了Lambert W二分算法与通用SLSQP求解器在 N 最高至1,024时的计算时间。闭式方法随 N几乎呈线性增长，与$O(N \log(1/\varepsilon))$（定理6.1）的复杂度一致。在 $N = 1{,}024$时，Lambert W算法比SLSQP大约快1,890×倍（0.011秒对21.2秒），使其适用于具有大量子载波的实时OFDM 系统。表3 还报告了各次运行的标准差，证实计时变异性较低。

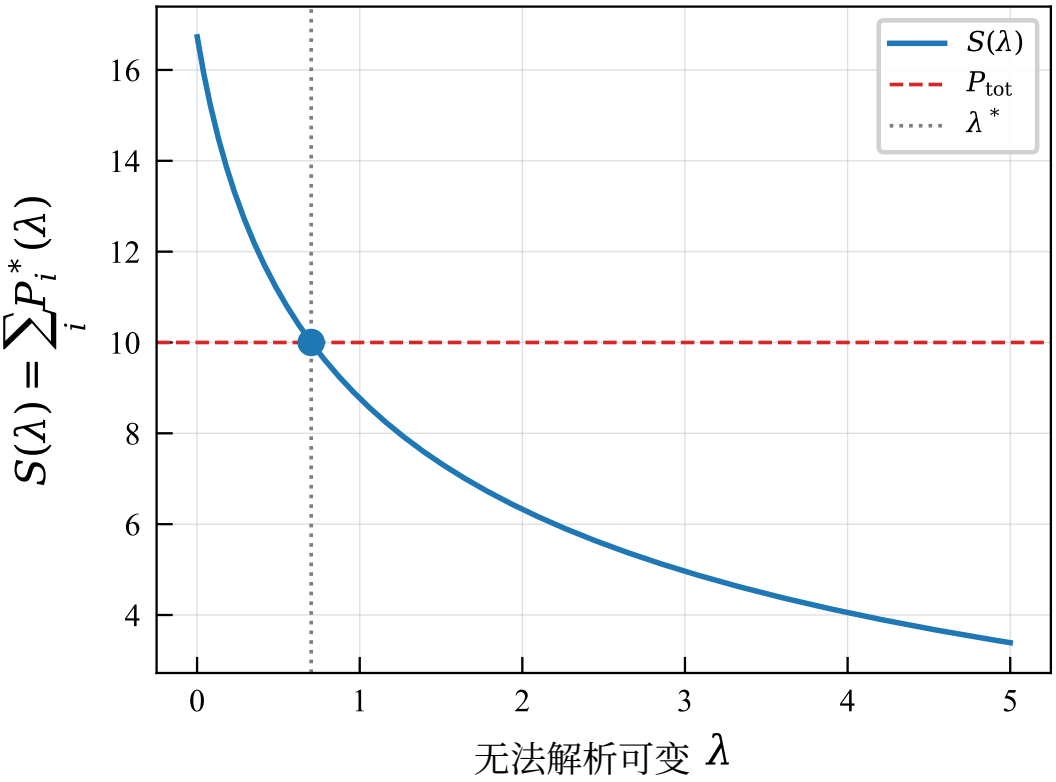

图 4： 总功率 $S(\lambda) = \sum_i P_i^*(\lambda)$ 随对偶变量 λ 的变化关系。最优 λ^* 满足 $S(\lambda^*) = P_{\text{tot}}$。单调性保证通过二分法唯一收敛。

表 2： 四种分配策略的功率使用量和目标速率目标函数 J。当 $P_{\text{tot}} \geq \sum_i P_i = 16$。8 时，目标速率分配会留下未使用的功率 $^-$。

P_{tot}	目标速率		注水法		均匀分配		比例公平	
	Used	J	Used	J	Used	J	Used	J
5	5.00	9.593	5.00	18.747	5.00	12.790	5.00	10.646
10	10.00	1.789	10.00	15.383	10.00	10.600	10.00	6.532
15	15.00	0.079	15.00	17.605	15.00	13.946	15.00	8.984
20	16.75	0.000	20.00	21.751	20.00	18.807	20.00	13.362
25	16.75	0.000	25.00	26.582	25.00	24.125	25.00	18.396

7.9 工作信噪比敏感性

$^-$图9 给出平均目标函数 J 随平均信道信噪比的变化，涵盖全部四种分配策略，且每个信噪比点对500次瑞利衰落实现取平均（$N = 8, T = 3, P_{\text{tot}} = 10$）。目标速率分配在整个信噪比范围内保持最低偏差，并在高信噪比时随更多信道各自变得可行而趋近于零。相比之下，注水法偏差随信噪比增大，因为较强信道超出目标的幅度越来越大；均匀分配和比例公平分配呈现类似增长，但水平略低。这证实目标速率目标函数在广泛的工作条件下从根本上更契合目标跟踪应用。

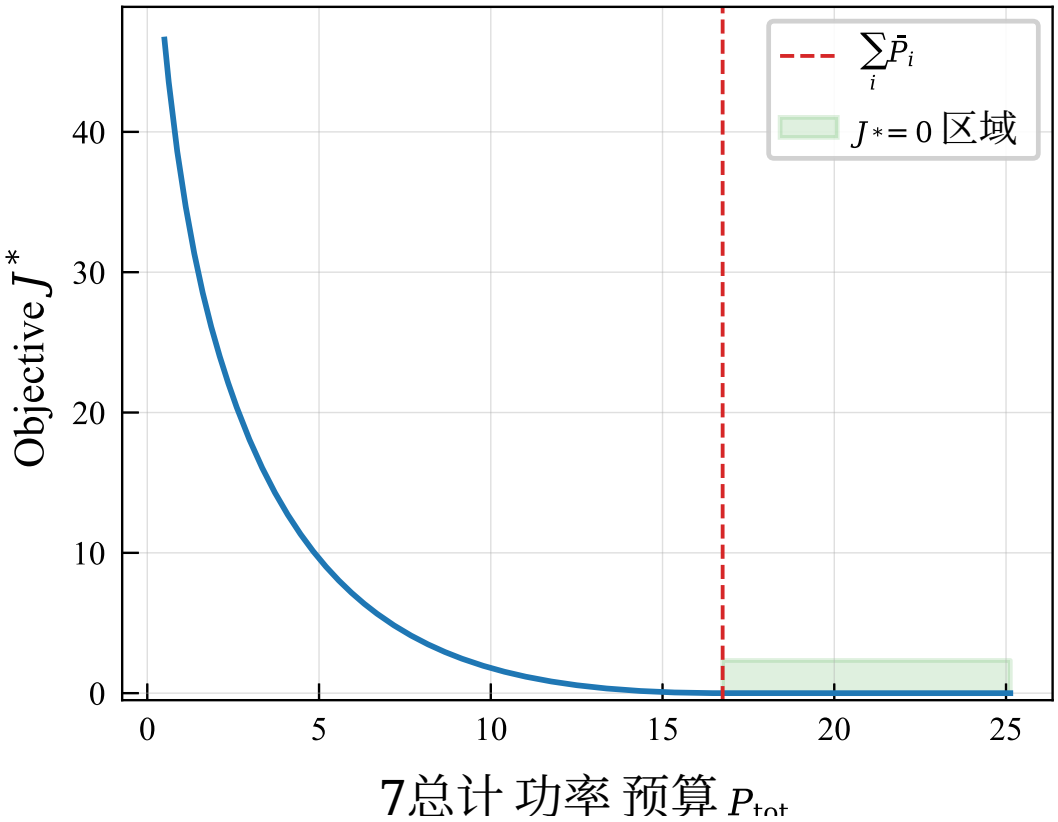

图5： 最优目标与功率预算的关系。目标函数在 $\sum_i P_i \approx 16.8$ 处达到零（虚线），超过该值后，功率将闲置。

表3： Lambert-W 二分法与 SLSQP 的计算时间（秒）和加速比。5 次运行的均值 ± 标准差。

N	兰伯特 W 函数	SLSQP 加速比	
4	0.0007 ± 0.0003	0.0015 ± 0.0002	2×
8	0.0005 ± 0.0000	0.0039 ± 0.0002	8×
16	0.0006 ± 0.0000	0.0065 ± 0.0002	11×
32	0.0007 ± 0.0000	0.0478 ± 0.0063	66×
64	0.0011 ± 0.0000	0.0723 ± 0.0118	64×
128	0.0018 ± 0.0001	0.2221 ± 0.0039	121×
256	0.0031 ± 0.0001	1.4235 ± 0.6380	466×
512	0.0059 ± 0.0003	4.0471 ± 1.0514	681×
1024	0.0112 ± 0.0001	21.1669 ± 1.1776	1896×

7.10 功率使用比较

表 2 量化了四种分配策略在不同预算下的功率使用量和目标速率目标函数 J。在每个预算水平下，目标速率分配的目标函数值都严格低于其他三种基线。比例公平优于注水法和均匀分配，但其偏差仍显著高于目标速率方法。在 $P_{\text{tot}} = 20$ 及以上时，目标速率分配在满足所有目标后会留下未使用的功率（$J^* = 0$），而所有其他策略仍会用完全部预算，同时速率偏差不断增大。

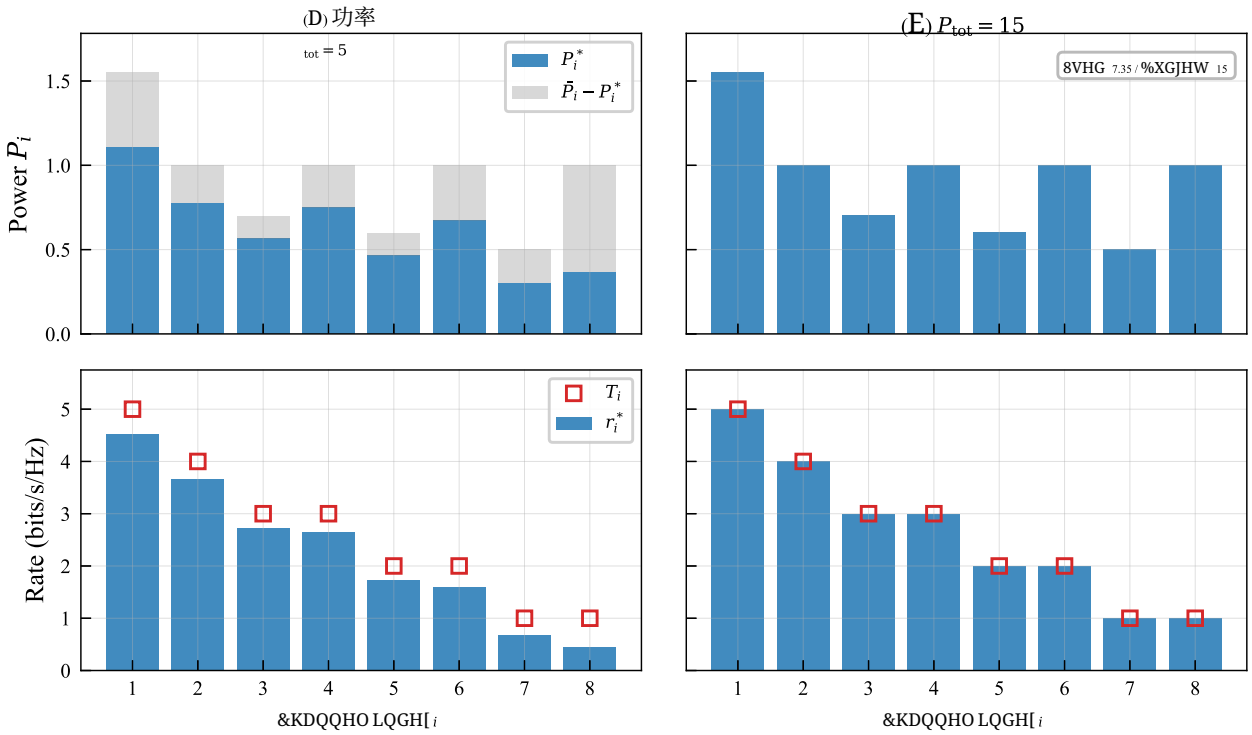

图 6： 异质目标 $T_i \in \{5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1\}$。左侧（$P_{\text{tot}} = 5$，情形 B）：预算紧张，导致弱信道的高目标出现短缺。右侧（$P_{\text{tot}} = 15$，情形 A）：所有目标均已达到，15 个功率单位中有 7.65 个未使用。上排：功率分配（蓝色）和与上限的差值（灰色）。下排：达到的速率（蓝色柱）与目标（红色方块）。

需要指出的是，当设计目标是最大化总吞吐量，而不是跟踪目标时，注水法仍然是最优策略。目标速率分配并非注水法、均匀分配或比例公平的替代方案，而是适用于不同目标的另一种选择。在上述实验中，正如预期，注水法在每个预算水平下的速率总和都高于其他所有方法，因为它直接针对吞吐量进行优化。

8 讨论

现在我们将讨论与相关公式的联系、该方法的潜在扩展及其局限性。

8.1 与逆向注水的联系

经典注水解 $P_i = (\nu - 1/a_i)_+$ 按照信道质量成比例地分配功率。我们的目标速率分配体现了一种“逆向”思路：它分配功率以均衡速率缺额，而非最大化吞吐量。其数学结构也与之相反：注水法采用简单的线性加阈值公式，而我们的解需要通过非线性的朗伯 W 函数求值，这反映了功率与二次速率偏差之间更复杂的关系。

8.2 多用户扩展

虽然我们重点讨论的是单用户场景，但该公式自然可以扩展到多用户 OFDMA。在这种场景下，每个用户 u 对所分配的子载波都有目标$T_{u,\ i}$ 而分配器还必须决定

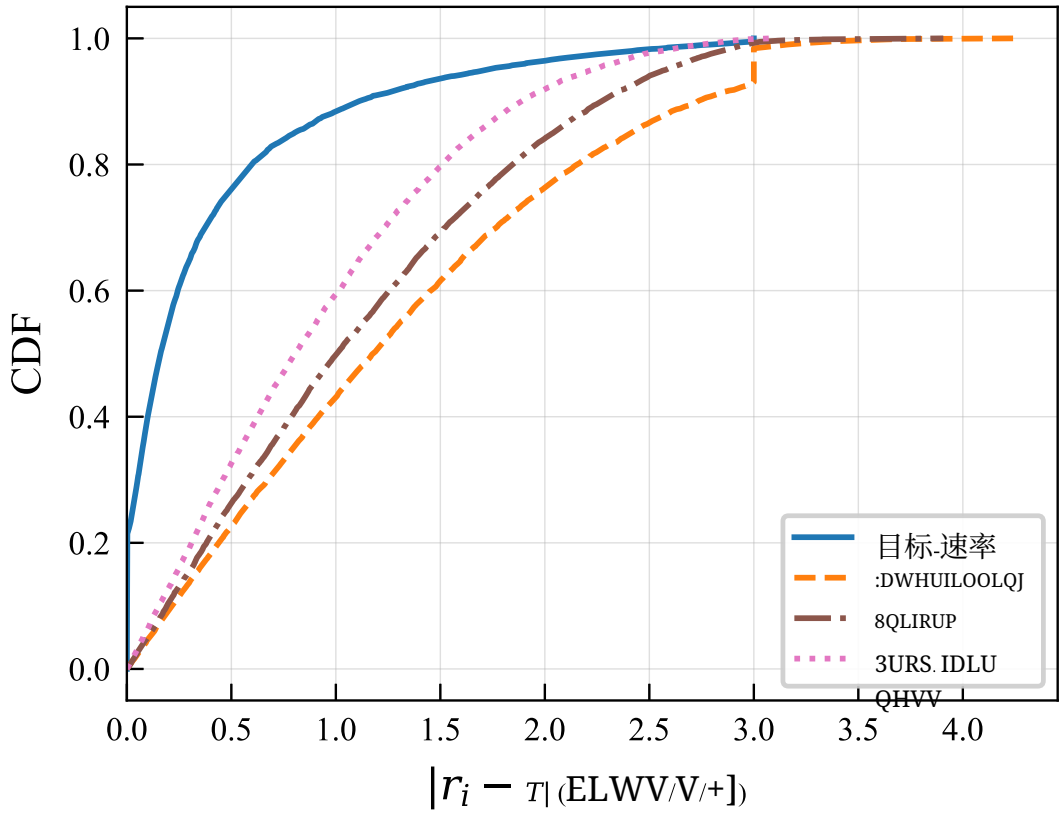

图7： 在1,000次瑞利衰落实现（$N = 8$、 $T = 3$、 $P_{\text{tot}} = 10$）上 $|r_i - T|$ 的经验累积分布函数，对应四种分配策略。目标速率分配将偏差集中在零附近。

子载波到用户的映射。每用户子问题保留式（2）的结构，并可采用相同的 Lambert W闭式解。联合子载波分配与功率分配需要进行组合优化（例如匹配或贪心分配），并将目标速率功率分配作为内部例程。

8.3 与 OFDM 调度器集成

在实际的 OFDM 系统中，调度器会根据业务需求、缓冲区状态和 QoS 类别分配目标速率。目标速率分配提供了一个自然的接口：调度器指定每个子载波的目标速率，分配器则返回最符合这些目标的功率。平滑的二次惩罚项为更高层的优化循环提供有意义的梯度信息，使这一表述能够兼容可微调度流程。

8.4 局限性

我们的分析假设完美信道状态信息、每个子信道的平坦衰落以及高斯信号传输。在实践中，不完美 CSI 会在 a_i 系数中引入估计误差，这可通过鲁棒优化的变体加以处理。香农速率公式作为上界；以有限块长运行的实际系统会表现出随块长缩短而增大的速率损失 [3], ，并且需要调整速率函数（例如借助正态近似）以刻画这一效应。就计算成本而言，标准实现借助具有三次收敛的哈雷方法在常数时间内计算 W_0 [11], ，从而使每信道开销即使对嵌入式系统也可忽略不计。我们并未讨论如何选择

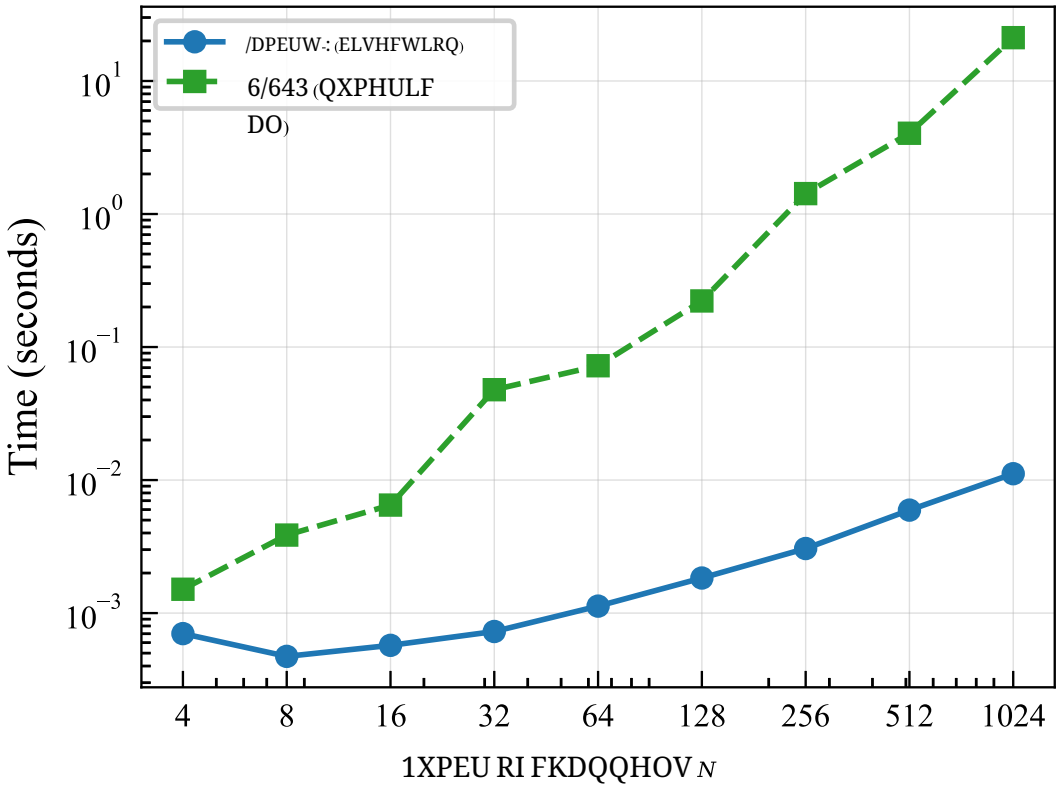

图8： 信道数量与计算时间的对数—对数关系图。Lambert W 二分法的计算规模几乎呈线性增长；与 SLSQP 相比，在 $N = 1,024$ 个信道时加速比最高可达 1,890×。

目标 T_i 本身，这取决于应用需求与更高层协议。

9 结论

我们针对并行高斯信道构建并求解了目标速率最小二乘功率分配问题。最优分配具有不超调性质，不会使任何信道的功率超过其目标；当预算足以满足所有目标时，还可能留有未使用的功率，这与经典注水的行为有本质区别。我们通过 KKT条件和 Lambert W 函数推导出逐信道闭式解，并证明可通过二分法在 $O(N \log(1/\varepsilon))$ 时间内找到最优对偶变量。数值实验证实，闭式解与数值优化结果在机器精度范围内一致；在 $N = 1,024$ 个子载波时，与通用求解器相比，加速比最高可达 1,890× 。

未来研究有几个值得探索的方向。首先，将该公式扩展到多用户 OFDMA，并联合进行子载波分配和目标速率功率分配，可扩大其实际应用范围。其次，通过随机形式或最坏情况形式提高对不完美 CSI 的鲁棒性，可增强其工程实用价值。第三，将目标速率分配器与自适应 MCS 选择和链路自适应相结合，可弥合香农速率分析与实际编码系统之间的差距。第四，探索其与率失真理论的联系——在率失真理论中，速率偏差目标函数可解释为一种失真度量——或许能带来更多解析见解。第五，二次目标函数具有可微特性，因此很适合作为端到端学习流程的构建模块，在此类流程中，可通过基于梯度的方法联合优化目标选择与功率分配。最后，该闭式解

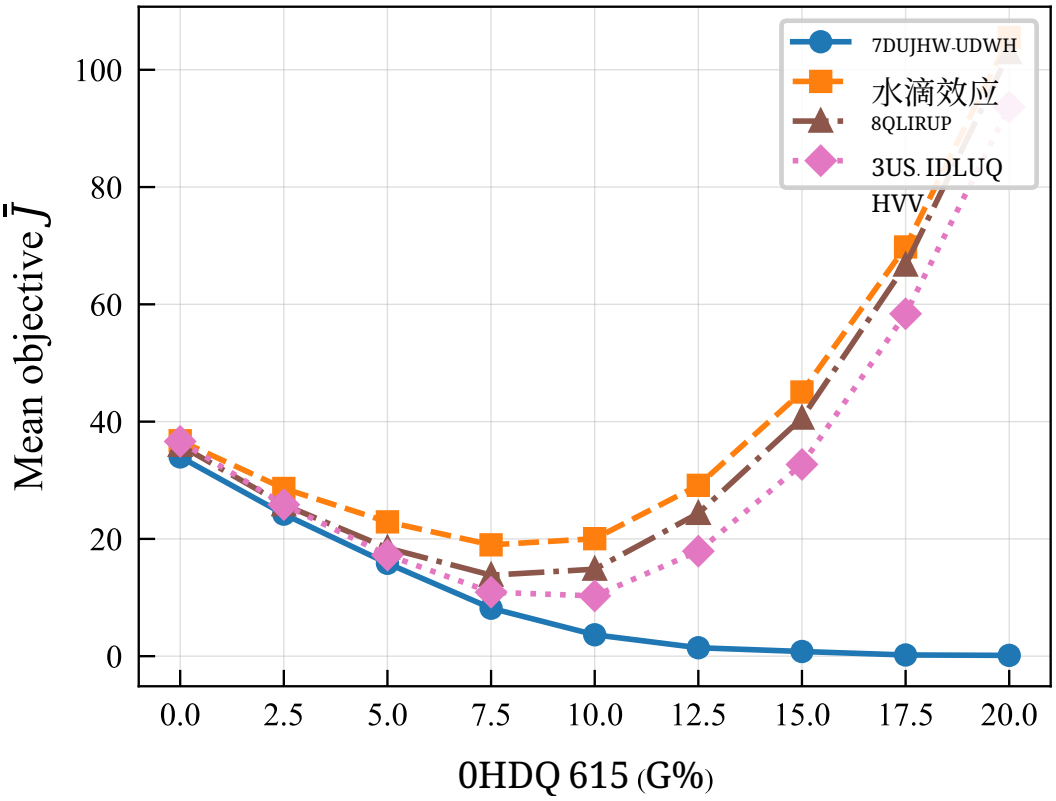

图 9： 平均目标函数 J 与平均信噪比的关系，每个点基于 500 次瑞利实现（$N = 8$，$T = 3$，$P_{\mathrm{tot}} = 10$）。目标速率分配在整个信噪比范围内保持更低的偏差。

非常适合新兴的 6G系统与 AI原生资源分配场景，在这些场景中，快速解析求解器可作为深度学习架构中的可微层。

加权变体

考虑加权目标函数 $J_w(\boldsymbol{P}) = \sum_{i=1}^{N} w_i (r_i - T_i)^2$，其中包含 $w_i > 0$。KKT分析过程完全相同，驻点条件变为

$$2\, w_i (r_i - T_i) \frac{a_i}{(1 + a_i P_i)\, c} + \lambda - \mu_i = 0. \tag{15}$$

按照相同的推导，活动集解为

$$P_i(\lambda) = \frac{2\, w_i}{\lambda\, c^2} W_0\!\left(\frac{\lambda\, c^2}{2\, w_i\, a_i}\, 2^{T_i} \right) - \frac{1}{a_i}, \tag{16}$$

二分算法同样适用，无需任何修改。权重 w_i 允许设计者优先考虑某些信道的目标跟踪，而非其他信道。

致谢

作者感谢在准备本手稿期间使用 Claude（Anthropic）作为 AI编程和写作助手。

参考文献

[1] D. Tse 和 P. Viswanath，《无线通信基础》。剑桥大学出版社，2005 年。[2] A. J. Goldsmith 和 P. P. Varaiya，“具有信道侧信息的衰落信道容量”，《*IEEE*信息论汇刊》，第 43 卷，第 6 期，第 1986–1992 页，1997 年。[3] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论要素》，第 2 版。威利出版社，2006 年。[4] C. Y. Wong、R. S. Cheng、K. B. Letaief 和 R. D. Murch，“具有自适应子载波、比特和功率分配的多用户 OFDM”，《*IEEE*通信领域精选期刊》，第 17 卷，第 10 期，第 1747–1758 页，1999 年。[5] J. Huang 和 R. Berry，“OFDMA无线系统中的调度与资源分配”，载于《无线通信中的跨层资源分配：理论与方法》。施普林格，2009 年。[6] P. S. Chow、J. M. Cioffi 和 J. A. C. Bingham，“用于频谱成形信道上数据传输的实用离散多音收发器加载算法”，《*IEEE*通信汇刊》，第 43 卷，第 2/3/4 期，第 773–775 页，1995 年。[7] S. Sadr、A. Anpalagan 和 K. Raahemifar，“多用户OFDM通信系统下行链路的无线资源分配算法”，《*IEEE*通信调查与教程》，第 11 卷，第 3 期，第 92–106 页，2009 年。[8] F. P. Kelly、A. K. Maulloo 和 D. K. H. Tan，“通信网络的速率控制：影子价格、比例公平与稳定性”，《运筹学会期刊》，第 49 卷，第 3 期，第 237–252 页，1998 年。[9] J. Mo 和 J. Walrand，“公平的端到端基于窗口的拥塞控制”，《*IEEE/ACM*网络汇刊》，第 8 卷，第 5 期，第 556–567 页，2000 年。[10] Z. Shen、J. G. Andrews 和 B. L. Evans，“具有比例速率约束的多用户 OFDM 系统中的自适应资源分配”，《*IEEE*无线通信汇刊》，第 4 卷，第 6 期，第 2726–2737 页，2005 年。[11] R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth，“关于 Lambert W 函数”，《计算数学进展》，第 5 卷，第 1 期，第 329–359 页，1996 年。[12] F. Brah、A. Zaidi、J. Louveaux 和 L. Vandendorpe，“关于协作网络中约束资源分配的 Lambert-W 函数”，《*EURASIP*无线通信与网络期刊》，第 2011 卷，第 1 期，第 19 页，2011 年。[13] G. Bacci、E. V. Belmega、P. Mertikopoulos 和 L. Sanguinetti，“小小区网络中的能量感知竞争式链路自适应”，载于《无线网络资源分配国际研讨会论文集（*RAWNET*），*WiOpt*》，2014 年。[14] F. Meshkati、H. V. Poor、S. C. Schwartz 和 N. B. Mandayam，“无线数据网络中一种节能的功率控制与接收机设计方法”，《*IEEE*通信汇刊》，第 53 卷，第 11 期，第 1885–1894 页，2005 年。[15] H. Kim 和 G. de Veciana，“利用无线系统中的动态剩余容量来节省移动终端的能量”，《*IEEE/ACM*网络汇刊》，第 18 卷，第 3 期，第 802–815 页，2010 年。

[16] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，凸优化。剑桥大学出版社，2004。 [在线]。可访问：
https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf[17]“SciPy 文档：
`scipy.special.lambertw`”，
https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.special.lambertw.html，2026。