arXiv:2603.06900v1 [math.LO] 6 Mar 2026

强几何域的优美对的量词消去

PABLO CUBIDES KOVACSICS、FELIPE ESTRADA、JUAN P´EREZ 和 DAVID RINC´ON

Abstract. 设 T 是一个具有量词消去的完备强几何域理论。我们证明， T 的优美对理论在 Delon 的定义扩张中具有量词消去；该扩张由表示线性无关性的谓词以及相应坐标函数的函数符号构成。除了重新得到 Delon 关于代数闭域的对以及代数闭赋值域的稠密对的原有结果外，我们还将实闭域和 p-进闭域的稠密对理论的量词消去作为特殊情形纳入其中。

完备理论的模型对的研究是模型论中的一个经典课题，其历史可追溯至 A. Robinson [8] 关于代数闭域和实闭域之对的结果。在本文中，我们研究强几何域的对，即这样一类域的扩张：对于所有初等扩张，模型论代数闭包都与域论代数闭包相一致（M. Junker 和 J. Koenigsmann 在 [6]中也称之为非常纤薄的）。W. Johnson 和 J. Ye 在[4], 中证明，任意此类域的理论都是几何理论，即它消去量词 $\exists^\infty$ ，且模型论代数闭包具有交换性质。强几何域的例子包括代数闭域、实闭域、完美 PAC 域以及特征 0 的亨塞尔赋值域。

我们感兴趣的强几何域之对的理论，是它们的优美对理论。这一概念由 A. Berenstein 和 E. Vassiliev 于 [1]提出，涵盖了各种经过深入研究的对理论。其定义将在第 2 节中回顾。例子包括一些经典理论，例如代数闭域之对的理论、实闭域（以及 p-进闭域）的稠密对理论，以及代数闭赋值域的稠密对理论。

在 [2], F. Delon 证明，添加线性无关谓词以及与之相关的坐标函数的函数符号后，代数闭域的对和代数闭赋值域的稠密对都具有量词消去。我们将这种定义扩张称为*Delon* 扩张 （其形式定义将在第 2 节给出）。事实证明，Delon 研究的对的理论恰好就是优美对理论。我们的主定理将 Delon 的结果推广如下：若 T 是一个具有量词消去的强几何域理论，则相应的、关于 T 的模型之优美对的理论

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C60, 12L12.*Key words and phrases.* 几何域、非常纤细域、优美对。第一作者获得了由安第斯大学资助的 FAPA 研究基金（INV-2023-158-3157）的支持。 *New methodsin non-archimedean geometry and its applications*第三作者获得了蒙斯大学 Complexys 研究所的支持。

在 Delon 扩张中具有量词消去。由此可见，Delon 的量词消去定理的核心，恰恰在于底层域理论的（强）几何性质。作为其他特例，我们还得到稠密实闭域（分别为 p-进闭域）的理论，以及特征为 0 的亨泽尔赋值域的优美对的量词消去，例如 $\mathbb{R}((t))$ 和 $\mathbb{C}((t))$；将它们视为添加常数后的 Macintyre 语言中的结构即可（见后文推论 2.1）。

本文的结构如下。第 1 节介绍背景，回顾所涉及的主要定义，并汇集几个稍后将使用的代数引理。最后，在第 2 节中证明我们的主定理，并推导出它的一些推论。

1. Setting and preliminaries

1.1. 强几何域的优美对。 为方便起见，我们将在域语言 $\mathrm{L}_{\mathrm{fields}} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ 中工作（而不是通常的环语言）。对于 $\mathrm{L} \supseteq \mathrm{L}_{\mathrm{fields}}$，令 T 表示强几何域的 L 理论。回顾一下，这意味着在 T的任意模型中，模型论代数闭包与域论代数闭包相一致。根据 [4, 定理2，5], 这意味着 T 是几何的。[1]

几何结构的优美对（即其理论是几何的）由 A. Berenstein 和 E. Vassiliev 在 [1] 中引入。本节回顾它们的定义及其主要性质。

设 T 是一个完备几何 L 理论， M 是 T 的一个模型。对于 A， B， $C \subseteq M$ ，只要 C 在 A 上 acl-独立，它在 $A \cup B$ 上仍然 acl-A独立，我们就记作 $C \downarrow^{\mathrm{acl}} B$ 。给定一个类型 $q \in S(B)$，如果对于每个 $c \vDash q$ 都有 $c \downarrow^{\mathrm{acl}} B$ ，我们称 q 在 A上自由$_A$。

我们令 L_P 表示由一个一元谓词 P 扩展语言 L 得到的语言。所谓 L 结构对，是指满足 $P_M \leqslant_{\mathcal{L}} M$ 的一个 L_P- 结构 $\mathbb{M} = (M, P_M)$。对于 $A \leqslant_{\mathcal{L}} M$，令 $P_A = P_M \cap A$，并将 (A, P_A) 记作 $\mathbb{A}$。令 T' 表示满足 $M \vDash T$ 且 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_M) = P_M$ 的对 (M, P_M) 的 L_P-理论。

定义 1.1。 令 κ 为一个大于 $|T|$的基数。若 L 结构对 (M, P_M) 满足以下条件，则称其为 κ-优美模型对，属于 T:

(1) $(M, P_M) \vDash T'$; (2)（共伴性质）若 $A \subseteq M$ 满足 $|A| < \kappa$ ，且 $q \in S_1(A)$ 在 P_A上自由，则存在 $a \in P_M$ 使得 $a \vDash q$; (3)（扩张性质）若 $A \subseteq M$ 满足 $|A| < \kappa$ ，且 $q \in S_1(A)$，则存在 $a \in M$使得 $a \vDash q$ ，并且 $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/A \cup P_M)$ 在 A 上自由。

如果某个基数 $\kappa > |T|$ 使 L 结构对 (M, P_M) 是 κ-优美对，那么它就是优美对。

[1]注意，有些域的扩张并非强几何的，但其底层理论却是几何理论，例如 $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$。令人惊讶的是， [5, 例 4.3] 表明，有些纯域并非强几何的，但其底层理论却是几何理论。

前述定义与 [1, 定义 2.3], 等价，这一点可由 [1, 引理 2.4] 之后的讨论得出。以下概述了我们将需要的主要结果：

定理 1.2 ([1, 引理 2.5、推论 2.9 和定理2。10])**.** 对于任意基数$\kappa > |T|$, T 的模型的 κ-优美对存在，并且它们是初等对。它们的公共理论 T_P是完备的。此外，若(M, P_M) 是基数 $\kappa > |T|$下T_P的一个 κ-饱和模型，则(M, P_M) 是一个 κ-优美对。

下文中，我们将假定 T 是域的一个完备强几何 L-理论。我们将研究相应的美妙对理论。

1.2. **Delon 扩张**。 我们将 L_P 扩张为语言 L_D，即*Delon* 扩张，其定义为

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_P \cup \{\ell_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\} \cup \{f_{n,i} : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

其中 ℓ_n 是元数为 n 的谓词符号，并且 $f_{n,i}$ 是元数为 $n+1$的函数符号。设 T为域的 L 理论，并设 T_2为任意满足 $M \vDash T$与 $P_M \leqslant_{\mathcal{L}} M$的对 $\mathbb{M} = (M, P_M)$的 L_P 理论。我们令 $T_2(D)$ 为 L_D 理论 T_2，连同在任意模型 $(M, P_M) \vDash T_2(D)$ 中刻画以下事实的公理，即

$$\ell_n(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n \text{ are linearly independent over } P_M$$

$$f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} z_i & \text{if } \ell_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = \sum_{i=1}^n z_i x_i \wedge \bigwedge_{i=1}^n P(z_i) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.3. **辅助结果**。

定义 1.3. 设 $k \subseteq K, L$ 均为包含在某个更大域中的域。

(1) 域 K 是线性不交于 L 在 k上的，记作 $K \downarrow^{\mathrm{ld}} L$，如果当-$k$ K 的子集 A 是 k-线性无关的，则它也是 L-线性无关的。(2) 域 K 是自由于 L 在 k上的，记作 $K \downarrow^{\mathrm{alg}} L$，如果 K 的子集kA 是 k-代数无关的，则它也是 L-代数无关的。(3) 扩张 $k \subseteq K$ 是正则的，当且仅当该扩张是可分的且$k^{\mathrm{alg}} \cap K = k$ （特别地，每一个域的初等扩张都是正则的）。

我们回顾一些关于线性不交的事实，后文将会用到（见 [7]）：

事实 1.4. 设 $k \subseteq K$、L 和 F 都是包含在某个更大域中的域。

(1) 关系 $\downarrow^{\mathrm{ld}}$ 是对称的。k(2) （传递性） $K \downarrow^{\mathrm{ld}} L$ 当且仅当 $K \downarrow^{\mathrm{ld}} F$ 且 $KF \downarrow^{\mathrm{ld}} L$，其中 $k \subseteq F \subseteq L$。$k$ k F(3) $K \downarrow^{\mathrm{ld}} L$ 蕴含 $K \downarrow^{\mathrm{alg}} L$。$k$ k(4) 域扩张 $K \subseteq L$ 是可分的，当且仅当 $K \downarrow^{\mathrm{ld}} L^p$。$K^p$(5) 若 $K \downarrow^{\mathrm{ld}} L$ 且 $k \subseteq K$ 是正则的，则 $L \subseteq LK$ 是正则的。k

下面的事实概括了 [2] 中的若干结果。

事实 1.5 (Delon)**.** 设 $\mathbb{M} = (M, P_M)$ 与 $\mathbb{M}' = (M', P_{M'})$ 为 $\mathcal{L}$-结构的对（即 $P_M \leqslant_{\mathcal{L}} M$）。

(1) 设 $A \leqslant_{\mathcal{L}} M$。则

$$\mathbb{A} \leqslant_{\mathcal{L}_D} \mathbb{M} \Leftrightarrow A \underset{P_A}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_M$$

(2) 设 $A \subseteq M$使得 P_A是 P_M的一个 $\mathcal{L}$-子结构，并设 $\sigma: A \to M'$是一个部分 $\mathcal{L}$-同构。设 $A' = \sigma(A)$。那么， σ 是一个部分 $\mathcal{L}_D$-同构，当且仅当

$$\sigma(P_A) = P_{A'} \qquad A \underset{P_A}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_M \qquad A' \underset{P_{A'}}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_{M'}.$$

2. Relative quantifier elimination

在本节中， T 表示一个带量词消去的完备强几何 L-域理论。与上文一样，我们令 T_P 表示 T的模型的美妙对理论。令 $T_D = T_P(D)$如第 1.2 节中所定义。

主定理。 理论 T_D 具有量词消去。

证明。 我们使用 Shoenfield准则来证明量词消去。设 $\mathbb{M} = (M, P_M)$ 和 $\mathbb{M}' = (M', P_{M'})$ 是 T_D的两个模型，其中 $|M| = |T| = \kappa$，且 $\mathbb{M}'$是 κ^+-饱和的。特别地，由定理 1.2， $\mathbb{M}'$ 是T的一个 κ^+-优美对模型。设 $\mathbb{A} = (A, P_A) \leqslant_{\mathcal{L}_D} \mathbb{M}$和 $\mathbb{A}' = (A', P_{A'}) \leqslant_{\mathcal{L}_D} \mathbb{M}'$是 L_D-子结构，且$\sigma: A \to A'$ 是一个 L_D-同构。我们需要将 σ 扩展为一个从$\mathbb{M}$到 $\mathbb{M}'$的 L_D-嵌入。我们将按照以下步骤扩展 σ ：

步骤 *1*： 设 $X = \{e_\alpha \in P_M : \alpha < \kappa\}$ 是在P_A上的极大 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-独立集。令每个 $\alpha < \kappa$ 对应 $A_\alpha = A \cup \{e_\beta : \beta < \alpha\}$，通过归纳构造一个嵌套的部分 L-同构序列 $\sigma_\alpha: A_\alpha \to M'$，使其映射 $e_\beta \to e'_\beta$，其中每个 $\beta < \alpha$ 都满足 $e'_\beta \in P_{M'}$。 令 $\sigma_0 = \sigma$。假设 σ_α 已定义，并令 A'_α 为 σ_α的像。考虑类型

$$q(z) = \{\varphi(z, \sigma_\alpha(a)) : M \vDash \varphi(e_\alpha, a), \varphi \text{ an } \mathcal{L}\text{-formula}, a \text{ a tuple in } A_\alpha\}.$$

注意到 $q \in S_{\mathcal{L}}(A'_\alpha)$。事实上，极大性显然成立，而一致性源于 σ_α 是一个部分L-初等嵌入（这由 T的量词消去推出）。我们证明 q 在 $P_{A'_\alpha}$上自由。反设并非如此，设 $\varphi(z, \sigma_\alpha(a))$ 是一个公式，使得 $M' \vDash \exists^{\leqslant n} z \varphi(z, \sigma_\alpha(a))$，其中 a 是A_α中的一个元组。那么，由于 σ_α 是部分L-初等的，我们有 $M \vDash \exists^{\leqslant n} z \varphi(z, a)$。由于 $M \vDash \varphi(e_\alpha, a)$，根据强几何假设，我们得到 e_α 在 A_α上代数。由于 $\mathbb{A} \leqslant_{\mathcal{L}_D} \mathbb{M}$，由事实 1.4 和 1.5 可得以下推论

$$A \underset{P_A}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_M \Rightarrow A\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha}) \underset{\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha})}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_M \Rightarrow A\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha}) \underset{\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha})}{\downarrow^{\mathrm{alg}}} P_M.$$

然而，最后一部分与 e_α 在 A_α 上代数矛盾，因为 $e_\alpha \notin \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha})$ 且 $A_\alpha \subseteq A\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(P_{A_\alpha})$。因此，根据优美对的共伴性质，我们定义$e'_\alpha \in P_{M'}$ 为某个（任意一个）实现 q 的元素。根据 q 的定义， $\sigma_{\alpha+1}$ 是一个保持 P 的部分 L- 同构。对于 α 为极限序数的情形，定义 σ_α 为所有满足 $\beta < \alpha$的 σ_β 的并。由于部分同构的并仍是部分同构，故证毕。

步骤 *2*： 设 $\sigma: A \cup X \to A' \cup X'$ 为在步骤 1 中得到的映射，其中 $X' = \{e'_\alpha : \alpha < \kappa\}$。我们将 σ 扩展为一个部分 L-同构 $\sigma': A \cup P_M \to A' \cup \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(X')$。注意， $P_M = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(X \cup P_A)$，因此我们只需将该映射扩展到.....中的元素

$B = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(X \cup P_A) \setminus (X \cup P_A)$。对于每个元素 $b \in B$，令 $\psi_b(z)$ 为一个 $\mathrm{L}(X \cup P_A)$-公式，使得 $\psi_b(b)$ 成立，且 $|\psi_b(P_M)|$最小。对于 $b \in B$，集合 $\psi_b(P_M)$ 是唯一的；又因为 σ 是一个部分 L-初等映射，它与 $\psi_b^\sigma(P_{M'})$ 存在双射（其中 ψ_b^σ 是将 σ 作用于 ψ_b的参数后得到的公式）。我们将 σ 扩展为任意一个双射 σ'，使得对于每个 $b \in B$，它都将 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-轨道 $\psi_b(P_M)$ 映射到 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-轨道 $\psi_b^\sigma(P_{M'})$。映射 σ' 显然保留谓词，因此我们只需证明它是一个部分 L-同构。这是一个标准论证。不过，由于稍后还会用到它，我们在此为方便读者而论证一次。反证，设 $\varphi(x, y, z)$ 是一个 L-公式，使得

$$M \vDash \varphi(b, a, e) \qquad \text{and} \qquad M' \vDash \neg\varphi(b', \sigma(a), \sigma(e))$$

其中，$b = (b_1、\ldots\ldots、b_n) \in B^n$，$a$是 $A \setminus (X \cup P_A)$ 中的一个元组，e是 $X \cup P_A$ 中的一个元组，而 b'是 b在 σ'下的像。可能需要扩大元组 e，令 $\theta(b、a、e)$ 为公式

$$\varphi(b, a, e) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_{b_i}(b_i),$$

该公式在 M 中成立。由于 σ是 L-初等的，我们有 $M \vDash \exists z\theta(z、a、e)$ 蕴含 $M' \vDash \exists z\theta(z、\sigma(a)\ \sigma(e))$。因此

$$M' \vDash \neg\varphi(b', \sigma(a), \sigma(e)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_{b_i}(b_i') \wedge \exists z\theta(z, \sigma(a), \sigma(e)),$$

这与$|\psi_{b_1}(P_{M'})|$的极小性矛盾。因此，σ' 是一个部分 L-同构。

步骤 *3*：令 $\sigma: A \cup P_M \to A' \cup C$为步骤 2 中的映射，其中 C是 P_M 在 σ下的像。根据 C 的定义以及线性不交的传递性，我们有

$$A \cup P_M \underset{P_M}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_M \qquad A' \cup C \underset{C}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} P_{M'}.$$

因此，根据事实 1.5，σ 是一个部分 L_D-同构。我们将 σ 扩展为唯一的部分 L_D-同构 $\sigma': \mathrm{dcl}_{\mathcal{L}}(A \cup P_M) \to \mathrm{dcl}_{\mathcal{L}}(A' \cup C)$（或者，也可以取 $\mathrm{dcl}^{\mathcal{L}_D}$）。

步骤 *4*：根据步骤 3，我们处于这样的情形：$\sigma: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是 L_D-子结构与 $P_A = P_M$之间的 L_D-同构。设 $Y = \{b_\alpha : \alpha < \lambda \leqslant \kappa\}$ 是 M 中相对于 A的 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-独立子集。与步骤 2 类似，我们通过构造一个部分 L-同构的嵌套序列 $\sigma_\alpha: A_\alpha \to A'_\alpha$，将 σ 扩展为保持该谓词的部分 L-同构，其中 $A_\alpha = A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$，并令 $\sigma_0 = \sigma$。假设 σ_α 已定义。考虑类型

$$q(z) = \{\varphi(z, \sigma_\alpha(a)) : M \vDash \varphi(b_\alpha, a), \varphi \text{ an } \mathcal{L}\text{-formula}, a \text{ a tuple in } A_\alpha\}.$$

如步骤 1 中所述，$q \in S_{\mathcal{L}}(A'_\alpha)$。因此，根据优美对的扩张性质，存在 $b'_\alpha \in M'$实现 q，使得 $\mathrm{tp}(b'_\alpha/A'_\alpha \cup P_{M'})$在 A'_α上是自由的。注意，由于 $b'_\alpha \in M'$ 实现 q，我们有 $b'_\alpha \notin \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A'_\alpha)$（与步骤 1 中的论证相同）。因此，根据自由性，$b'_\alpha \notin \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A'_\alpha \cup P_{M'})$。通过将 b_α映射到 b'_α 来延拓 σ_α，得到一个保持 P的部分 L-同构。对于 α 极限序数，我们只需取并。为避免记号混乱，令 $\sigma: A \cup Y \to A' \cup Y'$表示我们刚刚构造的映射，其中 Y' 是 Y的像。注意，$A' \cup Y'$与$P_{M'}$在线性上关于 $P_{A'}$不交。事实上，假设 $D := \{a_1, \ldots, a_m, b'_1, \ldots, b'_n\}$在线性上关于 $P_{M'}$相关，其中 $a_1, \ldots, a_m \in A'$以及 $b'_1, \ldots, b'_n \in Y'$。那么必有 $n = 0$，否则我们将与 Y' 在$_{\mathcal{L}}$上acl-独立相矛盾（按定义如此，因为

构造）。由于不存在b_i'，集合 D 包含于 A' 中，并且在线性上关于$P_{M'}$相关，因此根据事实 1.5，它关于$P_{A'}$ 也线性相关。

步骤 5：令 $\sigma: A \cup Y \to A' \cup Y'$ 为步骤 4 中的映射。我们将 σ 扩展为一个部分 L-同构 σ'，从 $M = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A \cup Y)$ 到 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y')$。同样，我们按照步骤 2 的做法，将 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-轨道双射地映射到 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$-轨道。下面证明这必然保持谓词，并且 $(\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y')$ $P_{\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y')})$ 是一个 L_D-子结构。对于前者，由步骤 4 可知，$A' \cup Y'$ 与 $P_{M'}$ 在 $P_{A'}$ 上 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$- 独立。由于 $P_{A'}$ 是 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}$- 闭的，因此 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y') \cap P_{M'} = P_{A'}$；否则存在 $e \in \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y') \cap P_{M'} \setminus P_{A'}$，故根据事实 1.5，元素 e 必须与 $A' \cup Y'$ 独立。因此，任何从 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A \cup Y)$ 到 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y')$ 且扩展 σ 的部分 L-同构都会保持谓词。

剩下要证明 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y') \downarrow^{\mathrm{ld}} P_{M'}$。由 T 中的量词消去，$P_{A'} P_{A'} \preceq_{\mathcal{L}} P_{M'}$，因此事实 1.4 适用，且 $P_{A'} \subset P_{M'}$ 是正则的。根据步骤 4，我们有 $A'(Y') \downarrow^{\mathrm{ld}} P_{M'}$，这意味着扩张 $A'(Y') \subseteq A'(Y') P_{M'}$ 也正则。利用事实 1.4，扩张 $A'(Y') \subseteq A'(Y') P_{M'}$ 的正则性，以及扩张 $A'(Y') \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A'(Y'))$ 的代数性（这里我们用到 T 是强几何的），可得

$$\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A'(Y')) \underset{A'(Y')}{\downarrow^{\mathrm{ld}}} A'(Y') P_{M'}.$$

应用传递性，我们得到 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(A' \cup Y') \downarrow^{\mathrm{ld}} P_{M'} . P_{A'}$

由事实 1.5 可得结论。 □

下面的推论给出了我们主要结果的一些例子。第 (1) 点和第 (3) 点推广了 Delon 在 [2] 中的结果。

推论 2.1. 设 T 为以下某个 $\mathcal{L}$-理论（$\mathcal{L}$ 取决于 T）：

(1) 环/域语言中的 ACF_p；(2) 有序环/域语言中的 RCF；(3) 任意一种自然的单排序赋值域语言中的 ACVF 的任意完备化；(4) 在环语言的某个定义扩张中具有量词消去的特征 *0* 亨塞尔域理论；(5) p-进闭赋值域或 *Laurent* 级数域的理论，例如 $\mathbb{R}((t))$ 和 $\mathbb{C}((t))$（在含有足够多个常数的 *Macintyre* 语言中）；(6) 在环语言的某个定义扩张中具有量词消去的完美 *PAC* 域理论。

那么，T 的优美对的$\mathcal{L}_D$-理论 T_D 具有量词消去。

证明。 注意到这类域是强几何的，并且在给定语言中具有量词消去后，该结论可由定理2直接推出。特征 0 的亨塞尔域是强几何的（在环语言中），这由 [6, 定理 5.5]得出。请注意，根据相对量词消去，任何等特征0的亨塞尔赋值域在任何赋值域的自然语言中都是强几何的。 □

最后，我们提出以下问题：

问题2.2. 我们的主定理能否推广到 [3]中所定义的Mordell-Lang对这一情形?

References

[1] Berenstein, Alexander与Evgueni Vassiliev： *On lovely pairs of geometric structures*。《纯粹与应用逻辑年刊》，161(7):866–878，2010年。[2] Delon,Fran‚coise：
Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos。《Confluentes Mathematicae》，4(2):1250003, 11，2012年。[3] Gorman、A. Block、P. Hieronymi与E. Kaplan：

Pairs of theories satisfying a mordell–lang 。
condition 252 131

《数学基础》，:–160，2020年。[4] Johnson, Will与Jinhe Ye：
A note on geometric theories of fields。《模型论》，2(1):121– 132，2023年。[5] Johnson, Will与Jinhe Ye： *Curve-excluding fields*。《欧洲数学会杂志》，在线优先发表，2025年。[6] Junker, Markus与Jochen Koenigsmann： *Schlanke Körper (slim fields)*。《符号逻辑杂志》，75(2):481–500，2010年。[7] Lang, Serge： *Introduction to Algebraic Geometry*。Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1972年。[8] Robinson, Abraham： *Solution of a problem of Tarski*。《数学基础》，47(2):179– 204, 26，1959年。
Pablo Cubides Kovacsics, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes,Carrera 1 # 18A - 12, 111711, Bogotá, Colombia*Email address*: p.cubideskovacsics@uniandes.edu.coFelipe Estrada, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Carrera1 # 18A - 12, 111711, Bogotá, Colombia*Email address*: f.estrada@uniandes.edu.coJuan Pérez, Departement de mathématiques, UMONS, Place du parc 20, Mons, Bel-gium*Email address*: 260033@umons.ac.beDavid Rincón, The University of Manchester, School of Mathematics, Oxford Road, Manchester M13 9PL, UK*Email address*: david.rincon@postgrad.manchester.ac.uk