arXiv:2603.06940v1 [math.RT] 6 Mar 2026

素特征下有限 W-代数的扎森豪斯簇

舒斌和曾洋

Abstract. 设 $Z(\mathcal{W})$ 是有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的中心，该代数与 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 及幂零元 $e \in \mathfrak{g}$ 相关，其中 $\mathrm{Lie}(G)$ 是素特征为 p 的代数闭域 $\mathbf{k}$ 上连通约化代数群 G 的李代数，并满足标准假设 (H1)-(H3)（见 [8, §6.3]）。本文首先证明，我们此前关于 $Z(\mathcal{W})$ 的结构和几何性质的结果（见 [20] ），对于 $p \gg 0$，在当前对 p 较弱的限制下仍然成立。随后，我们研究 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的扎森豪斯簇 $\mathscr{X}$，其定义为 $Z(\mathcal{W})$ 的极大谱 $\mathrm{Specm}(Z(\mathcal{W}))$。基于 $Z(\mathcal{W})$ 的结构性质，我们通过良好横截切片 $\mathcal{S}$ 描述 $\mathscr{X}$，并证明 $\mathscr{X}$ 与 $\mathcal{S}$ 双有理等价，因此它是一个有理仿射概形。在 $e = 0$ 的特殊情形下，我们重新得到 [26] 的一项主要结果，即关于素特征下约化李代数的扎森豪斯簇有理性的结果。

Contents

1. 引言与预备知识 1 2. 有限 W-代数及其中心 6 3. 良好横截切片 8 4. 通过良好横截切片描述扎森豪斯簇 12 5. 扎森豪斯簇的有理性 16 参考文献 20

1. Introduction and Preliminaries

1.1. 关于复数域 $\mathbb{C}$ 上与约化李代数及其正则幂零元相关的有限 W-代数的研究可追溯到 Kostant 的工作（见 [11]）。Kostant 的构造由 Lynch 推广到了任意偶数阶幂零元。Premet 在 [16] 中对有限 W-代数作了全面发展。回顾一下，有限 W-代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \hat{e})$ 是一种与有限维复半单或约化李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 及幂零元 $\hat{e} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$相关的特定结合代数。详情请参阅 [16], 或其他一些综述论文（例如 [1, 12, 29]）。

作为域 $\mathbb{C}$ 上有限 W-代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \hat{e})$ 的对应项，Premet 定义了特征为 $p \gg 0$ 的域 $\mathbf{k}$ 上的有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$（见 [17]）。

2010 数学主题分类。主要分类号 17B35，次要分类号 17B45 和 17B50。关键词与短语。有限 W-代数，有理簇。本研究部分受国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12071136、12271345、12461005），并受上海市科学技术委员会资助（项目编号：22DZ2229014）。

1.2. 在 Premet 的表述中，k 上的有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},\ e)$ 是通过“模 p 约化”方法从 $\mathbb{C}$- 代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\ \hat{}e)$ 得到的。因此，域 k 的特征必须足够大（更多详情见 [17] ）。在[6], 中，Goodwin 和 Topley 将 Premet 的工作推广到满足如下条件的情形： $p=$ char(k) 满足相应约化代数群 G 的 Jantzen 标准假设 $\mathfrak{g}$（参见 [8, §6]）。

按照 Premet 对有限 W-代数的表述，我们在 [20] 中发展了正特征 $p\gg 0$ 下有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},\ e)$ 的中心理论及其相关的 Azumaya 性质。我们的方法大致是将半单代数群 G的李代数$\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的中心经典理论加以推广；该理论最初由 Veldkamp 建立（参见[27], [10], [14] 和 [3]）。此外，我们还将 Brown-Goodearl 在 [2] 中关于满足 Auslander 正则和 Macaulay 条件的代数之 Azumaya 性质的论证应用于模有限 W-代数的情形。

1.3. 本文的一个目的，是放宽上述条件，以适用于 [20]中的主要结果。回顾一下，在标准假设 (H1)-(H3)（§1.3.1）下，有限W-代数还有另一种表述 (1.4)，由 Goodwin 和 Topley [6], 提出。按照此表述，该代数定义为 Gelfand-Graev-Premet 模 Q_χ (1.2) 在幺幂群 $\mathcal{M}$ 作用下的不变量；该幺幂群由 Premet 在 k 上引入的容许子代数 $\mathfrak{m}$ (1.1) 导出。只要 Premet 提出的前一种表述有定义，这两种表述便等价（参见 [6, 引理 4.4 和定理 7.3]）。然而，Goodwin-Topley 的定义可直接在 k 上成立，无需经由 $\mathbb{C}$-代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\ \hat{}e)$“模 p约化”。利用 Goodwin-Topley 的构造，我们将重新考察 [20], 中的主要结果，并放宽其中的限制 $p\gg 0$ 。

1.3.1. 回顾一些基本内容。设 G 是代数闭域 k（其特征为正特征 p）上的连通约化代数群，且 $\mathfrak{g}$ =Lie(G)。我们对 G 和 p 引入以下标准假设:

(H1) G 的导出群 $\mathcal{D}G$ 是单连通的；(H2) 素数 p 对 $\mathfrak{g}$ 是好素数；(H3) 存在一个 G-不变的非退化双线性型，定义在 $\mathfrak{g}$ 上。

关于 (H1)–(H3) 的说明，请读者参阅 [8,§6.3–6.4]。

设 $g\in G$ 和 $x\in\mathfrak{g}$。记 $g.x$ 为 x 在伴随作用下经 g 的像， G_x 为 x 在 G 中的中心化子， $\mathfrak{g}_x$ 为 x 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子。还定义 $G_{[x]}:=\{g\in G\mid g.x\in \mathbf{k}x\}$ ，并称其为 x 的正规化子，其所在空间为 G。考虑 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用时，我们也使用类似的记号。

对于给定的幂零元 $e\in\mathfrak{g}$，令 T 为 G 中包含 $G_{[e]}$的极大环面 $T^\circ_{[e]}$ 的一个极大环面，并令 Φ 为相对于T 的 G 的根系。用 $X_*(T)$ 表示 T 的余特征群。我们用 G° 表示 G 的单位分支，并定义 $T^e:=(T_e\cap\mathcal{D}G)^\circ$， $T^{[e]}:=(T_{[e]}\cap\mathcal{D}G)^\circ$。根据 [9, 引理 5.3] 及我们的选择，存在一个与 e 相关联的余特征 $\lambda:\mathbf{k}^\times\to G$ ，使得 $\lambda\in X_*(T^{[e]})$，也就是说， $\lambda(t).e=t^2e$ ，且 $\lambda(\mathbf{k}^\times)$ 包含于某个 Levi 子群的导出子群中，而 e 在该 Levi 子群中是 distinguished（见 [9, 定义 5.3]）。

在 [15], Pommerening 证明，在假设 (H2) 和 $p>2$ （注意，对所有素数，GL_n 都满足 (H1)-(H3)）成立的条件下，对于任意给定的幂零元 $e\in\mathfrak{g}$,

存在一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $(e,\ h,\ f)$ 属于 $\mathfrak{g}$，[1]，且与之相关的余特征 λ 定义了一个$\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}(i)$，满足 $\mathfrak{g}(i):=\{x\in\mathfrak{g}\mid \lambda(t).x=t^ix \text{ 对所有 } t\in \mathbb{k}^\times\}$ 均成立。这种分次称为 *Dynkin* 分次。

由于 $\mathfrak{g}$ 是代数群的李代数，它自然地成为一个受限李代数，我们将 $x\mapsto x^{[p]}$ 记作 p 次幂映射。在假设 (H3) 下，存在 $\mathfrak{g}$ 上的 G-等变非退化双线性形式 $(\cdot,\cdot)$，使得 $(e,f)=1$，并定义 $\chi\in\mathfrak{g}^*$，令对所有 $x\in\mathfrak{g}$，$\chi(x)=(e,x)$。此外，我们可以通过 $(\cdot,\cdot)$ 定义一个从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 的同构 κ。设 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}(-1)$ 的一个拉格朗日子空间，$\mathfrak{l}'$ 是关于 $(e,[\cdot,\cdot])$ 的 $\mathfrak{l}$ 的湮灭子，使得$\mathfrak{g}(-1)=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{l}'$。我们进一步假设各向同性子空间 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{l}'$ 在伴随作用下是 T-稳定的，并且 $\chi(\mathfrak{l}^{[p]})=0$；若 $p\neq 2$，则第二个条件自动成立。然后我们定义一个容许幂零子代数

$$\mathfrak{m}:=\mathfrak{l}'\oplus\bigoplus_{i\leqslant -2}\mathfrak{g}(i) \tag{1.1}$$

属于 $\mathfrak{g}$。注意，$\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$的受限子代数，并且在 T的伴随作用下保持不变。存在一个子集 $\Phi(\mathfrak{m})\subset\Phi$，满足 $\mathfrak{m}=\bigoplus_{\nu\in\Phi(\mathfrak{m})}\mathfrak{g}_\nu$，且 $\mathfrak{g}_\nu$是 $\mathfrak{g}$的对应根空间。令 $\mathfrak{p}:=\bigoplus_{i\geqslant 0}\mathfrak{g}(i)$ 且 $\tilde{\mathfrak{p}}:=\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{l}$。令

$$Q_\chi:=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{m})}\mathbb{k}_\chi. \tag{1.2}$$

设 I_χ 表示由所有满足 $x\in\mathfrak{m}$的 $x-\chi(x)$生成的 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$的左理想。则进一步有 $Q_\chi\cong U(\mathfrak{g})/I_\chi$，视为 $\mathfrak{g}$-模，这是通过 $\mathfrak{g}$-模映射得到的，该映射将 $1+I_\chi$ 映至 1_χ，其中 1_χ 是 Q_χ 作为 $U(\mathfrak{g})$-模的生成元。

1.3.2. 与根 $\nu\in\Phi(\mathfrak{m})$相关联的单参数子群 $u_\nu:\mathbb{k}\to G$ 生成一个在 $\mathbb{F}_p$上定义的 G 的连通幺幂子群 $\mathcal{M}$，它在 T 的共轭下保持不变，并且满足 $\mathfrak{m}=\mathrm{Lie}(\mathcal{M})$。由 [6, 引理 4.1]可知，$I_\chi$ 在 $\mathcal{M}$的伴随作用下保持不变。于是，$\mathcal{M}$ 在Q_χ上的伴随作用由 $g.(u+I_\chi)=(g.u)+I_\chi$ 给出，其中 $g\in\mathcal{M}$ 且 $u\in U(\mathfrak{g})$，该作用在 §2.1 所定义的 Kazhdan 分次下，诱导出在分次模 $\mathrm{gr}(Q_\chi)$ 上的伴随作用。

我们用 $\Phi^e\subset X^*(T^e)$ 表示限制根系：非零限制的集合 $\alpha|_{T^e}$，其中 $\alpha\in\Phi$。对于 $\alpha\in X^*(T^e)$，我们记作 $\mathfrak{g}_\alpha:=\{x\in\mathfrak{g}\mid t.x=\alpha(t)x,\ \text{表示所有 } t\in T^e\}$ 对应于 α 的 T^e-权空间。结合 Dynkin 分次，我们得到如下分解

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_0(j)\oplus\bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi^e\\ j\in\mathbb{Z}}}\mathfrak{g}_\alpha(j), \tag{1.3}$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha(j):=\mathfrak{g}_\alpha\cap\mathfrak{g}(j)$.

空间 $[\mathfrak{g},e]$ 在 $T^{[e]}$的作用下保持稳定，因此可按 (1.3) 的方式分解。我们可以在 $\mathfrak{g}$中选取 $[\mathfrak{g},e]$ 的一个 $T^{[e]}$-稳定补空间 $\mathfrak{v}$。由于相对于 $(\cdot,\ \cdot)$，$\mathfrak{g}_e$ 与 $[\mathfrak{g},e]$ 正交，因此映射 $\mathfrak{g}_e\to\mathfrak{v}^*$ 定义为

---

[1] Pommerening 的结果大幅放宽了参考文献 [4, §5.5] 中对 p 的限制。在 [24]，Stewart 和 Thomas 进一步证明，在假设 $p>2$ 成立时，$\mathfrak{sl}_2$-三元组的共轭类集合与 $\mathfrak{g}$ 中幂零轨道的集合之间存在双射，当且仅当奇素数 $p>\mathrm{h}$，其中 h 是 G 的 Coxeter 数。在 [24, 定理 1.7], 中，对于幂零元 e，当 $p\geqslant 3$ 时，可以证明 $\mathfrak{sl}_2$-三元组的存在性，但有一些例外情形仅涉及 G_2。

$x \mapsto (x, \cdot)$ 是一个同构；换言之，形式 $(\cdot, \cdot)$ 限制为一个非退化配对

$$\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{v} \to \Bbbk,$$

也就是说，$\mathfrak{v}$ 通过 $(\cdot,\cdot)$ 与 $\mathfrak{g}_e$ 对偶。

将与数对 $(\mathfrak{g}, e)$ 相关联的有限 W-代数定义为Q_χ 在 $\mathcal{M}$作用下的不变量，即

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e) := Q_\chi^{\mathcal{M}}. \tag{1.4}$$

这是一个 k-代数（例如参见 [6, 引理 4.2]）。k 上的有限 W-代数 $\mathcal{W}$（$\mathfrak{g}, e$）可以看作所谓的良好横截切片 $e + \mathfrak{v}$ 的坐标代数的滤过形变，该切片对应于 e 的幂零轨道（参见 [6, 定理 5.2]）；这一概念由 Spaltenstein 在 [22]中引入。

1.3.3. 用 Z（$\mathfrak{g}$）表示 U（$\mathfrak{g}$）的中心。令 φ 为$\mathfrak{g}$在 Q_χ上的自然表示，它诱导出一个 k-代数同态，从 Z（$\mathfrak{g}$）到所谓的扩张有限 W-代数

$$U(\mathfrak{g}, e) := (\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} Q_\chi)^{\mathrm{op}}$$

使得对于任意 $x \in Z$（$\mathfrak{g}$），都有（φ（x））（1_χ）$= x.1_\chi \in Q_\chi$。令 Z_p（$\mathfrak{g}$）为 U（$\mathfrak{g}$）的 p-中心，它由满足 $x \in \mathfrak{g}$的元素 $x^p - x^{[p]}$ 生成。于是有 k-代数同构 φ（Z_p（$\mathfrak{g}$））$\cong \varphi$（Z_p（$\tilde{\mathfrak{p}}$））$\cong Z_p$（$\tilde{\mathfrak{p}}$）（参见 [17, 定理 2.1]的证明）。现在将 Z_p（$\tilde{\mathfrak{p}}$）与 φ（Z_p（$\tilde{\mathfrak{p}}$））及 φ（Z_p（$\mathfrak{g}$））等同。按照 §1.3.2 中的定义，定义其在 Ad $\mathcal{M}$ 作用下的不变子代数 Z_p（$\tilde{\mathfrak{p}}$）$^{\mathcal{M}}$；更精确的描述见 §2.3。

用 r 表示 $\mathfrak{g}$的秩。回顾一下，在假设 (H1)-(H3)下，根据 Veldkamp定理 [27, 14, 3]，我们知道 $Z(\mathfrak{g})$由 p-中心$Z_0(\mathfrak{g}) := Z_p(\mathfrak{g})$以及 Harish-Chandra中心 $Z_1(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})^G = \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid g.u = u$ 生成，其中 $\mathfrak{g} \in G\}$ 属于 $U(\mathfrak{g})$。此外，存在 $U(\mathfrak{g})$的代数无关生成元 g_1、……、g_r，使得 $Z(\mathfrak{g})$是一个自由的 $Z_p(\mathfrak{g})$-模，其秩为 p^r，基由所有满足 $0 \leqslant t_k \leqslant p-1$ 的$g_1^{t_1} \cdots g_r^{t_r}$组成，其中 k。

1.3.4. 令 $Z(\mathcal{W})$表示 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$的中心。记 $Z_0(\mathcal{W}) := Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}}$，它属于 $Z(\mathcal{W})$（见 §2.3.3），称为 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$的 p-中心。注意，$Z_1(\mathfrak{g})$在映射 φ 下的像也属于 $Z(\mathcal{W})$，记作 $Z_1(\mathcal{W})$。令 $f_i := \varphi(g_i)$，其中 $1 \leqslant i \leqslant r$，它们都属于 $Z_1(\mathcal{W})$。

1.3.5. 记 $\Lambda_r := \{(i_1, \ldots, i_r) \mid i_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$，其中 $1 \leqslant j \leqslant r$。本文将证明，[20] 中关于 $p \gg 0$ 的下述主要结果，在对 p 的条件作出较弱限制后仍然成立。

定理 1.1。在 *§1.3.1* 的假设 *(H1)-(H3)* 下，以下结论成立。

(1) k-代数 $Z(\mathcal{W})$ 由 $Z_0(\mathcal{W})$ 与 $Z_1(\mathcal{W})$ 生成。更精确地说，$Z(\mathcal{W})$ 是 $Z_0(\mathcal{W})$ 上秩为 p^r 的自由模，以 $f_1^{t_1} \cdots f_r^{t_r}$ 为基，其中 $(t_1, \ldots, t_r)$ 遍历 Λ_r。*(2)* 乘法映射 $\mu : Z_0(\mathcal{W}) \otimes_{Z_0(\mathcal{W}) \cap Z_1(\mathcal{W})} Z_1(\mathcal{W}) \to Z(\mathcal{W})$ 是 k-代数的同构。

(3)极大谱$(Z(\mathcal{W}))$ 中作为最大维数的不可约 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$-模的 $Z(\mathcal{W})$-湮灭子而出现的点的轨迹，与极大谱$(Z(\mathcal{W}))$中由光滑点构成的光滑轨迹重合。

上述定理的证明见§3.4。

1.4. **扎森豪斯簇 极大谱($Z(\mathcal{W})$)**。 按照惯例，我们总是用 Specm(R) 表示交换 k-代数 R 的极大谱（即 R 的极大理想谱）。

有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的中心子代数的极大谱，仿照模李代数的情形，称为扎森豪斯簇。

1.4.1. 扎森豪斯簇的描述。 在余下部分中，我们首先对有限W-代数的扎森豪斯簇 Specm($Z(\mathcal{W})$) 作出精确描述。

定理1.2。 存在一个概形同构

$$Specm(Z(\mathcal{W})) \xrightarrow{\cong} \kappa(\mathcal{S})^{(1)} \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{h}^*/W, \tag{1.5}$$

其中 $\mathcal{S} = e + \mathfrak{v}$ （见 *(3.1)*），上标 $(\cdot)^{(1)}$ 表示 *Frobenius*扭曲（定义见 *§2.3.2*）， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个给定的极大环面子代数， W 表示 $\mathfrak{g}$的魏尔群，而 $\mathcal{V}$ 是由 $Z_0(\mathcal{W}) \cap Z_1(\mathcal{W})$ 定义的仿射簇，事实证明它是秩为 $r =$ 维数 $\mathfrak{h}$的多项式环。

该定理的证明见 §4.2。值得一提的是， $\mathcal{S}$ 与 $\mathfrak{v}$作为仿射簇同构（§3.2.3）。

1.4.2. 极大谱 *Specm*($Z(\mathcal{W})$)的有理性。回顾一下，域 k 上的不可约仿射代数簇 X 称为有理的，如果分式域 Frac(k$[X]$)是 k上的纯超越扩张。Tange 在 [26] 证明，在假设 (H1)-(H3) 下，k 上的扎森豪斯簇 $Z(\mathfrak{g})$是一个仿射有理簇。这证实了 J. Alev 提出的猜想，并拓展了他与 Premet 合作完成的先前工作（见 [19]）。基于上述关于 $Z(\mathcal{W})$的扎森豪斯簇结构定理，我们进一步验证其有理性。也就是说，我们将证明以下结果。

定理 1.3. 仿射簇极大谱$(Z(\mathcal{W}))$ 是一个有理簇。

为验证某一仿射簇的有理性，一个自然的方法是证明该簇与某个仿射空间双有理等价。因此，我们需要构造极大谱($Z(\mathcal{W})$)的一个开稠密子集，使其与某个仿射空间的一个开子集同构。我们大致采用 [26]中的策略。关键差别在于极大谱($Z(\mathcal{W})$)的纤维积分解(1.5)，其中某些整性如

$$\mathrm{Specm}(Z(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}^{*(1)} \times_{\mathfrak{h}^{*(1)}/W} \mathfrak{h}^*/W$$

在约化李代数的情形下（发生于 $\mathfrak{g}^{*(1)}$），这一性质似乎并未保留。恢复发生于 $\kappa(\mathcal{S})$ 上的这种整性的关键在于，$\mathcal{S}$ 包含一个由正则半单元构成的非空开子集（见命题 4.1）。

定理 1.3 的最终证明见 §5.3。

1.5. 当 $e=0$, $\mathcal{W}:=\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ 恰为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 时。扎森豪斯簇 $\mathrm{Specm}(Z(\mathcal{W}))$ 与 $\mathrm{Specm}(Z(\mathfrak{g}))$ 重合。因此，定理 1.3 涵盖了 [26, 定理 1], ，后者断言了 $\mathbf{k}$ 上约化李代数的扎森豪斯簇的有理性。

2. Finite W-algebras and their centers

本节继续回顾关于 $\mathbf{k}$ 上有限 W-代数及其中心的一些基本内容。此处及下文中，$\mathbf{k}$ 均为特征为 $p>0$ 的代数闭域。

2.1. **有限 W-代数的 Kazhdan 分次**。 与 §1.3.2 中一样， $\mathcal{M}$ 表示由与根 $\nu\in\Phi(\mathfrak{m})$ 相关联的单参数子群 $u_\nu:\mathbf{k}\to G$ 生成的 G 的连通幺幂子群。由 [6, 引理 4.1] 可知， I_χ 在 $\mathcal{M}$的伴随作用下保持不变。通过Q_χ 与 $U(\mathfrak{g})/I_\chi$之间的恒等对应， $\mathcal{M}$ 在 Q_χ 上的伴随作用由 $g.(u+I_\chi)=(g.u)+I_\chi$给出，其中 $g\in\mathcal{M}$ 且 $u\in U(\mathfrak{g})$。回顾一下，与对 $(\mathfrak{g},e)$ 相关联的有限 W-代数定义为 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)=Q_\chi^{\mathcal{M}}$。因此我们有

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)=\{u+I_\chi\in Q_\chi\mid g.u+I_\chi=u+I_\chi \text{ for all } g\in\mathcal{M}\}.$$

另一方面， $\mathcal{M}$ 在 Q_χ 上的伴随作用会在$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}Q_\chi)^{\mathrm{op}}$（ Q_χ的自同态代数的相反代数）上诱导出一个作用，其定义为$(g.f)(u+I_\chi)=g.(f(g^{-1}.u+I_\chi))$，其中 $g\in\mathcal{M}$, $f\in\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}Q_\chi$, $u\in U(\mathfrak{g})$；其不变子代数记为$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}^{\mathcal{M}}Q_\chi)^{\mathrm{op}}$。

与在 $\mathbb{C}$上的情形同理，存在一个同构

$$U(\mathfrak{g},e)=(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}Q_\chi)^{\mathrm{op}}\cong Q_\chi^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{m}}$$

它将任意 $u\in U(\mathfrak{g},e)$中的 $u+I_\chi$映至 $u.1_\chi$。从现在起，我们将$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}Q_\chi)^{\mathrm{op}}$与 $Q_\chi^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{m}}$等同。根据定义， $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$可以自然地视为扩张有限 W-代数 $U(\mathfrak{g},e)$（定义在$\mathbf{k}$上）的一个子代数。记 $\mathfrak{g}$的维数为 n。相对于§1.3.1中提到的Dynkin 分次，设 $Y_1,\dots,Y_n$是 $\mathfrak{g}$的一个齐次基，其中对 $i=1,\dots,n$有 $Y_i\in\mathfrak{g}(\deg Y_i)$。 Q_χ 上的Kazhdan 过滤以及 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$上的Kazhdan 过滤也可以定义，它们源自 $U(\mathfrak{g})$ 的滤过 $\{U_j(\mathfrak{g})\mid j\in\mathbb{Z}\}$；其中 $U_j(\mathfrak{g})$由满足 $\sum_{t=1}^{k}(\deg Y_{i_t}+2)\leqslant j$的PBW 基 $Y_{i_1}\cdots Y_{i_k}$（$1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n$）张成。与Kazhdan 过滤相关联的分次称为 Kazhdan 分次。$\mathcal{M}$ 在 Q_χ 上的伴随作用下降为其分次对应对象$\mathrm{gr}(Q_\chi)$上的伴随作用。将有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$的分次记为$\mathrm{gr}(\mathcal{W}(\mathfrak{g},e))$，它是$\mathrm{gr}(Q_\chi)$的一个子空间。

2.2. **有限 W-代数的环论性质**。 为了讨论有限 W-代数及其子代数的相关主题，我们首先需要以下观察。

引理2.1。 在假设 *(H1)-(H3)* 下，以下陈述成立。

(1) 分次 $gr(\mathcal{W}(\mathfrak{g},e))$ 是唯一分解整环；(2) 有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ 是诺特环；

(3) $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 是素环，其中不含任何零因子。

证明。 在标准假设 (H1)-(H3) 下，由 [6, 定理 7.3 和 (7.4)] 可知，存在一个 k-代数同构 $\bar{\psi}: \mathrm{gr}(\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g}_e)$，它推广了 [20, (1.6)] 中特征 $p \gg 0$ 的情形。因此， $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的分次代数与一个多项式代数同构。由于这些性质对伴随分次代数成立，因此标准的滤过论证仍然适用。此处略去更多细节。□

2.3. 有限 W-代数的 p-中心。

2.3.1. 设 φ 是 $\mathfrak{g}$ 在 Q_χ 上的自然表示，它诱导出一个 k-代数同态，从 $Z(\mathfrak{g})$ 到 $(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} Q_\chi)^{\mathrm{op}}$，使得

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & Z(\mathfrak{g}) & \to & (\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} Q_\chi)^{\mathrm{op}} \\ & x & \mapsto & l_x \end{array}$$

其中，对任意 $x \in Z(\mathfrak{g})$， $l_x(1_\chi) = x.1_\chi \in Q_\chi$。映射 φ 将在后续论证中发挥关键作用。

回忆一下， Q_χ 在 Kazhdan 分次下的伴随分次代数为 $\mathrm{gr}(Q_\chi) = \mathrm{gr}(S(\mathfrak{g}))/\mathrm{gr}(I_\chi)$，并且由 PBW定理可知 $S(\mathfrak{g}) = S(\tilde{\mathfrak{p}}) \oplus \mathrm{gr}(I_\chi)$。由于 $\mathrm{pr}: S(\mathfrak{g}) \to S(\tilde{\mathfrak{p}})$ 是沿该直和分解的投影，这限制为一个同构 $\mathrm{gr}(Q_\chi) \cong S(\tilde{\mathfrak{p}})$。

§2.1 中定义的 $\mathcal{M}$ 在 Q_χ 上的伴随作用下降为 $\mathrm{gr}(Q_\chi)$ 上的伴随作用，并由此给出 $\mathcal{M}$ 在 $S(\tilde{\mathfrak{p}})$ 上的扭曲作用，其定义为：对 $g \in \mathcal{M}$ 与 $f \in S(\tilde{\mathfrak{p}})$，$\mathrm{tw}(g).f := \mathrm{pr}(g.f)$，其中 $g.f$ 表示 g 在$S(\mathfrak{g})$ 中对 f 的通常伴随作用。我们用 $S(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}}$ 表示关于该作用的不变量。

2.3.2. *Frobenius*扭曲。 对于k上的概形 X，我们用 $X^{(1)}$ 表示 X的Frobenius扭曲，即由Frobenius态射扭曲后的同一概形，也就是说，结构层被取 p次幂（详见 [7, §I.9.1] ）。这一记号将在全文中使用。

回顾存在一个同态 $\mathfrak{f}: S(\mathfrak{g}^{(1)}) \to Z_p(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$，它通过将 $x \mapsto$映到$x^p - x^{[p]}$（对所有 $x \in \mathfrak{g}$）来定义。这个 $\mathfrak{f}$ 是一个 G-等变同构，它诱导了从极大谱$(Z_p(\mathfrak{g}))$到$(\mathfrak{g}^{(1)})^*$的 G-等变同构。此外，$\mathfrak{f}|_{S(\mathfrak{h}^{(1)})}$ 成为一个从 $S(\mathfrak{h}^{(1)})$到 $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$的同态。因此，$\mathfrak{f}|_{S(\mathfrak{h}^{(1)})}$ 给出了诱导态射

$$\mathfrak{F}: \mathfrak{h}^* \to (\mathfrak{h}^{(1)})^*,$$

其中，记号 $(\mathfrak{h}^{(1)})^*$ (分别为 $(\mathfrak{g}^{(1)})^*$) 通常简记为 $\mathfrak{h}^{(1)*}$ (分别为$\mathfrak{g}^{(1)*}$)。对于所有的 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 和 $h \in \mathfrak{h}$，有 $\mathfrak{F}(\lambda)(h) = \lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]})$。

注意， $\mathfrak{g}^{(1)*}$ 同构于 $\mathfrak{g}^{*(1)} := (\mathfrak{g}^*)^{(1)}$。下文中，根据上下文需要，极大谱$(Z_p(\mathfrak{g}))$ 将被视为 $\mathfrak{g}^{(1)*}$ 或 $\mathfrak{g}^{*(1)}$。

2.3.3. 关于 $Z_0(\mathcal{W})$ 的一些材料。我们将 $I_p := \varsigma(\mathfrak{m}^{(1)})Z_p(\mathfrak{g})$ 记作 $\varsigma(\mathfrak{m}^{(1)}) := \{x^p - x^{[p]} - \chi(x)^p \mid x \in \mathfrak{m}\}$。由于群 $\mathcal{M}$ 保持左理想 I_χ，且 ς 是 G-等变的，因此 $\mathcal{M}$ 作用于 $U(\mathfrak{g}, e) \cong Q_\chi^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{m}}$ 和 $Z_p(\mathfrak{g})/I_p$。令 $U(\mathfrak{g}, e)^{\mathcal{M}}$ 和 $(Z_p(\mathfrak{g})/I_p)^{\mathcal{M}}$ 分别表示在 $\mathrm{Ad}\,\mathcal{M}$ 的作用下， $U(\mathfrak{g}, e)$ 和 $Z_p(\mathfrak{g})/I_p$ 的不动点子空间。

另一方面，根据定义， $Z_p(\tilde{\mathfrak{p}}) \cong \varphi(Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})) = \varphi(Z_p(\mathfrak{g})) \cong Z_p(\mathfrak{g})/I_p$ ，因此我们有 $Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}} \cong (Z_p(\mathfrak{g})/I_p)^{\mathcal{M}}$ ，它们是 k-代数。因此， $Z_0(\mathcal{W}) = Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}}$ 确实属于有限 W-代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的中心。

此外，正如引理 4. 中所述（另见备注 2.），我们可以将 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 与 $U(\mathfrak{g}, e)^{\mathcal{M}}$ 等同起来，即有

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e) = U(\mathfrak{g}, e)^{\mathcal{M}} \text{ and}$$
$$\varphi(Z_p(\tilde{\mathfrak{p}}))^{\mathcal{M}} \cong Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}} = Z_p(\tilde{\mathfrak{p}}) \cap \mathcal{W}(\mathfrak{g}, e). \tag{2.1}$$

在对 p 的限制有所放宽的情况下，命题 2. 中的结果仍然成立，如下所示。

命题 2.2. 在假设 *(H1)-(H3)* 下，有

(1) 环 $Z_0(\mathcal{W})$ 是诺特环；(2) 环 $Z(\mathcal{W})$是整闭的；(3) 环扩张 $Z(\mathcal{W})/Z_0(\mathcal{W})$ 是整的，且 $Z(\mathcal{W})$ 是有限生成的 $Z_0(\mathcal{W})$-模。特别地， $Z(\mathcal{W})$ 是 k 上有限生成的交换代数；(4) $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 是 *PI* 环。

2.4. 设 $\mathfrak{a} := \{x \in \tilde{\mathfrak{p}} \mid (x, \mathfrak{v}) = 0\}$。以下引理说明 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 与 $U(\mathfrak{g}, e)$ 的 p-中心之间的关系：

引理 2.3. *(*[6,(8.3)]*)* 存在 $\Bbbk$-代数之间的同构

$$Z_p(\widetilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}} \otimes_{\Bbbk} Z_p(\mathfrak{a}) \cong Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})$$

在乘法映射下。

在 [6, 定理 8.4], 中，Goodwin 与 Topley 引入了有限 W-代数与其扩展对应物之间的如下过渡性质（见 [17, 定理 2.1] 以及 [18, 注记 2.1] ，即 Premet 关于特征 $p \gg 0$ 的情形）。

定理 2.4. *(*[6, 17, 18]*)* 在假设 *(H1)-(H3)* 下，我们有

(1) 代数 $U(\mathfrak{g}, e)$ 由其子代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 与 $Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})$ 生成；*(2)* $U(\mathfrak{g}, e) \cong \mathcal{W}(\mathfrak{g}, e) \otimes_{\Bbbk} Z_p(\mathfrak{a})$ 作为 k-代数；*(3)* $U(\mathfrak{g}, e)$ 是 $Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})$ 上秩为 $p^{\dim \mathfrak{g}_e}$ 的自由模；*(4)* $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 是 $Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}}$ 上秩为 $p^{\dim \mathfrak{g}_e}$ 的自由模。

3. Good transverse slices

沿用如前的记号与假设。特别地，除非另有说明，我们对 G假定假设 (H1)-(H3)。于是这些假设对任意列维子群自然成立。

3.1. **良好横截切片**。 现在我们需要进一步讨论与良好横截切片相关的内容，承接§1.3.2中的引言（详见 [22], 或 [6], [9, §7], [16]）。

我们可以将 $S(\mathfrak{g})$ 认作仿射簇 $\mathfrak{g}^*$ 上正则函数的代数 $\mathbb{k}[\mathfrak{g}^*]$ 。令 $\mathfrak{m}^\perp$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上所有在 $\mathfrak{m}$ 上消失的线性函数的集合，即 $\mathfrak{m}^\perp := \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f(\mathfrak{m}) = 0\}$。那么，$\mathrm{gr}(I_\chi)$ 是 $\mathbb{k}[\mathfrak{g}^*]$ 中所有在 $\mathfrak{g}^*$ 的闭子簇 $\chi + \mathfrak{m}^\perp$ 上消失的函数构成的理想。由此，我们得到 $\mathrm{gr}(Q_\chi) \cong \mathbb{k}[\chi + \mathfrak{m}^\perp]$，进而有 $S(\tilde{\mathfrak{p}}) \cong \mathbb{k}[\chi + \mathfrak{m}^\perp]$。

3.1.1. 既然我们将 $S(\tilde{\mathfrak{p}})$ 认作 $\Bbbk[\chi+\mathfrak{m}^{\perp}]$，类似地，我们也将 $\mathcal{M}$-代数$Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})$ 视为Frobenius扭曲 $(\chi+\mathfrak{m}^{\perp})^{(1)} \subseteq (\mathfrak{g}^*)^{(1)}$ of$\chi+\mathfrak{m}^{\perp}$ 的坐标代数；其中，$\mathcal{M}$ 在 $(\chi+\mathfrak{m}^{\perp})^{(1)}$ 上的自然作用是 $\mathcal{M}$ 在 $\chi+\mathfrak{m}^{\perp}$ 上的余伴随作用的 Frobenius扭曲。

3.1.2. 进一步描述 $\mathcal{Z}_0(\mathcal{W})$，通过良好横截切片。定义Killing同构 κ，从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}^*$，其方式是将 $x \in \mathfrak{g}$ 送到$(x, \cdot)$。由于$\Bbbk[\chi+\mathfrak{m}^{\perp}]^{\mathcal{M}} \cong \Bbbk[\chi+\kappa(\mathfrak{v})]$由 [6,引理5.1]或 [17, 引理3.2]，记

$$Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathcal{M}} := \Bbbk[(\chi+\mathfrak{m}^{\perp})^{(1)}]^{\mathcal{M}} = \Bbbk[(\chi+\kappa(\mathfrak{v}))^{(1)}],$$

在Killing同构下，它是 $\kappa(\mathcal{S})$的Frobenius扭曲上的函数代数，对于

$$\mathcal{S} := e+\mathfrak{v}. \tag{3.1}$$

注意，$\mathcal{S}$ 与 $\mathfrak{v}$ 作为仿射簇是同构的。我们可以把 $\mathcal{S}$ 视为良好横截切片，而不是 $\mathfrak{v}$，用以描述 $\mathcal{Z}_0(\mathcal{W})$。

因此，存在仿射概形的同构 ϕ，介于极大谱$(Z_0(\mathcal{W}))$与由 $\mathfrak{g}^{(1)*}$ 产生的簇 $\mathcal{S}$ 之间（此 ϕ 与§2.3.2中的含义相同）。更确切地说，

$$\mathrm{Specm}(Z_0(\mathcal{W})) = \tilde{\mathfrak{p}}^{(1)*}/\mathcal{M} = \kappa(\mathcal{S})^{(1)}.$$

3.2. **与良好横截切片相关的不变量和商映射。**

3.2.1. 首先回顾一些关于 G-不变量、$S(\mathfrak{g}^*)$ 以及 $\mathfrak{g}$ 中正则元的基础材料（例如参见 [9, §7.13] 或 [28, 第4]章）。

回忆一下，如果元素 $X \in \mathfrak{g}$ 的伴随轨道 $\mathrm{Ad}(G).X$ 在所有伴随轨道中具有最大维数，则称其为正则元；该最大维数等于 $2N$，其中 $N = \#\Phi^+$ 表示 G 的正根数。等价地，$\mathfrak{g}_X$ 的维数在所有中心化子中是最小的，等于 r。记 $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中正则元素的集合。

记

$$P_X(t) = \det(t.1 - \mathrm{ad}X)$$

为 $\mathrm{ad}X$ 关于变量 t 的特征多项式。则有

$$P_X(t) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} F_j(X) t^j,$$

其中 $n =$ 维数$\mathfrak{g}$ 且 $F_n \equiv 1$，所有 F_j 都是定义在 $\mathfrak{g}$上的多项式函数。所有 F_j 都是 $\mathrm{Ad}(G)$-不变量。此外，$S(\mathfrak{g}^*)^G$ 由这些 F_j生成。注意，$\det(\mathrm{ad}X) = 0$，于是 $F_0 \equiv 0$。满足 $F_t \neq 0$ 的最小整数 $t > 0$ 等于 r，即 $\mathfrak{g}$的秩。当且仅当 $F_r(X) \neq 0$时，元素 $X \in \mathfrak{g}$是正则半单元。正则半单元构成 $\mathfrak{g}$的一个开子集，记作 $\mathfrak{g}_{\mathrm{rss}}$。

3.2.2. 回顾一下， $r=$ 秩 $\mathfrak{g}$，并且我们已经假设假设 (H1)-(H3)。根据切瓦利限制定理（例如参见 [9, §7.12]），对于任意给定的嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ （属于$\mathfrak{g}$ ）以及 $\mathfrak{g}$的抽象魏尔群 W，存在一个作为 k-代数的同构 Res : $S(\mathfrak{g}^*)^G \cong S(\mathfrak{h}^*)^W$ 。映射 Res 实际上是自然映射 $\Upsilon: S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ 的限制，该映射将 $f \in S(\mathfrak{g}^*)$ 发送到 $f|_{S(\mathfrak{h})}$。因此，存在一个簇之间的同构 res:

$$\mathfrak{g}/\!/G \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}/W. \tag{3.2}$$

于是我们有态射 $\zeta: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W$。令 $\varpi_{\mathcal{S}} := \zeta|_{\mathcal{S}}$。注意， $U(\mathfrak{g})^G \cong U(\mathfrak{h})^W$，它们同构于一个多项式环（例如参见 [3, 引理 3.3] 或 [8, §9.6]）。存在一组代数无关生成元 $\{g_1, \ldots, g_r\}$，属于 $U(\mathfrak{g})^G (\cong U(\mathfrak{h})^W)$。令 $\mathrm{gr}_S(g_i) = \tilde{g}_i$为与 $U(\mathfrak{g})$ 的标准分次相关联的 g_i 的像。我们还可以选取这样的 g_i，使得 $i = 1, \ldots, r$ 满足：元素 $\kappa(\tilde{g}_1) \ldots, \kappa(\tilde{g}_r)$ 构成 $S(\mathfrak{g}^*)^G$ 的自由生成集。

注意，在上述假设下，我们有伴随商映射:

$$\nu : \mathfrak{g} \to \mathbb{A}^r$$

该映射将 $x \in \mathfrak{g}$ 映至 $(\kappa(\tilde{g}_1)(x) \ldots, \kappa(\tilde{g}_r)(x))$。考虑 ν 与典范同构 $\eta: \mathbb{A}^r \to \mathfrak{h}/W$ 的复合。于是我们有 $\varpi_{\mathcal{S}} = \eta \circ \nu|_{\mathcal{S}}$。根据[21, §7.3-7.4]以及 [16, 定理 5.4 和注 5.4], ，我们得到以下结果。

引理 3.1. 在 *§1.3.1* 中的假设 *(H3)* 下，我们考虑 ζ 到 $\mathcal{S}$ 的限制，即

$$\varpi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathfrak{h}/W.$$

态射 $\varpi_{\mathcal{S}}$ 是忠实平坦的。

因此， $\varpi_{\mathcal{S}}$ 是满射，且 $\varpi_{\mathcal{S}}$ 的所有纤维具有相同的维数 $\mathrm{d}-r$，其中 $\mathrm{d} = \dim \mathfrak{g}_e$ （见 [16], [21] 或 [20, 命题 4.11(i)]）。

令 $\mathcal{S}_{\mathrm{reg}} := \mathcal{S} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$。则在假设 (H1)-(H3) 下， [20, 命题 4.13] 可以用同样的方法证明。

命题 3.2. （[20, 命题 4.13]）在假设 *(H1)-(H3)* 下， $\mathcal{S}_{reg}$ 在 $\mathcal{S}$ 中的补集的余维至少为2。

3.2.3. 令 t 为该平移

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{t}: & \mathfrak{v} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{S} \\ & x & \mapsto & e+x, \end{array}$$

这是仿射簇之间的一个同构。于是得到一个态射

$$\psi := \varpi_{\mathcal{S}} \circ \mathrm{t} : \mathfrak{v} \to \mathbb{A}^r, \qquad x \mapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_r(x)).$$

态射 ψ 仍然是忠实平坦的，且对任意 $\xi \in \mathbb{A}^r$，都有 $\psi^{-1}(\xi) \cong \varpi_{\mathcal{S}}^{-1}(\xi)$，其纤维 $\psi^{-1}(\xi)$ 是正规的。我们选取 $\mathfrak{g}_e$ 的一个基 $\{x_1, \ldots, x_{\mathrm{d}}\}$。由于 $\mathfrak{v}$ 通过 $(\cdot, \cdot)$ 与 $\mathfrak{g}_e$ 对偶（见 §1.3.2），我们用 $x_1^*, \ldots\ldots, x_{\mathrm{d}}^*$表示通过 $x_i^*(y) = (x_i, y)$ 定义在 k 上的线性函数，其中 $y \in \mathfrak{v}$。

以下引理可由 [3, 推论 3.4] 及其证明得到。

引理 3.3. 在假设 *(H1)-(H3)* 下，雅可比矩阵

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j^*}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$$

在 $\mathfrak{v}$ 中的秩为 r 。

证明。设 $x \in \mathfrak{v}$ 满足 $e + x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$。那么，在假设 (H1)-(H3) 下，$(d\psi)_x$ 是满射（见 [9,§7.14]）。引理得证。□

3.3. **有限 W-代数的中心**。沿用前几节中的记号。特别地，在假设 (H1)-(H3) 下，有按 (1.4) 形式给出的有限 W-代数以及良好横截切片 $\mathcal{S} = e + \mathfrak{v}$（为方便论证，已将 $\mathfrak{v}$ 替换掉）。下文将进一步讨论 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ 的中心，以便在后续各节中对扎森豪斯簇进行必要的几何描述。

3.3.1. 我们先回到 p-中心 $Z_0(\mathcal{W}) = Z_p(\tilde{\mathfrak{p}})^{\mathbb{M}}$。回忆一下，根据 (2.1)，$Z_0(\mathcal{W}) = \mathcal{W}(\mathfrak{g}, e) \cap \varphi(Z_p(\mathfrak{g})) \cong \varphi(Z_p(\tilde{\mathfrak{p}}))^{\mathbb{M}}$。根据 §3.1.2 中的讨论，我们进一步有

$$\mathrm{Specm}(Z_0(\mathcal{W})) = \kappa(\mathcal{S})^{(1)}. \tag{3.3}$$

与此同时，可通过 $\mathfrak{v}$ 描述 $\mathcal{S}$（见 §3.2.3）。因此我们有一个代数同构

$$Z_0(\mathcal{W}) \cong \Bbbk[\kappa(\mathfrak{v})^{(1)}].$$

3.3.2. 回顾一下，$Z_1(\mathcal{W}) = \varphi(U(\mathfrak{g})^G)$。在当前条件 (H1)-(H3) 下，采用与 [20], 中相同的论证，对于如 [20, 引理 3.2] 中所述的有限W-代数，我们仍有以下性质。

引理 3.4. 存在一个 $\Bbbk$-代数之间的同构

$$\varphi|_{U(\mathfrak{g})^G} : U(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\sim} Z_1(\mathcal{W}),$$

其中 $\varphi|_{U(\mathfrak{g})^G}$ 表示 *§2.3* 中的映射 φ 在子代数$U(\mathfrak{g})^G$ 上的限制，该子代数包含于 $Z(\mathfrak{g})$。

为简化记号，在下文中我们仍用 φ 表示引理 3.4 中的映射$\varphi|_{U(\mathfrak{g})^G}$。由 Harish-Chandra 定理，我们有 $S(\mathfrak{h})^W \cong U(\mathfrak{g})^G$。因此，由 φ可得到一个簇同构

$$\mathrm{Specm}(Z_1(\mathcal{W})) \cong \mathfrak{h}^*/W. \tag{3.4}$$

˜3.4. **定理 1.1的证明**。记 $\mathcal{Z}$ 为由 $Z_0(\mathcal{W})$ 与 $Z_1(\mathcal{W})$ 生成的 $Z(\mathcal{W})$ 的子代数。我们现在说明，[20,定理 0.1] 的证明中的论证在带有假设 (H1)-(H3) 的当前情形下仍然成立。

3.4.1. 第*(1)*部分的证明。 我们仍令 $n = \dim \mathfrak{g}$，且 $r =$秩 $\mathfrak{g}$。由引理2.1(3), 我们可以考虑 $Z(\mathcal{W})$ 的分式域。令 $\mathbb{F}_0 :=$ Frac($Z_0(\mathcal{W})$)，且$\mathbb{F}$:=Frac($Z(\mathcal{W})$)。则 $\mathbb{F}_0$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个子域。记 $\mathcal{Q}$ 为$\mathcal{Z}$的分式域。用与 [20, §5.2], 中（步骤 1）相同的论证，我们可以证明下述结果。

引理 3.5. 分式域 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathbb{F}$ 相同。

回顾一下，在 §2.1 中我们已在 $U(\mathfrak{g})$ 及其子-˜商上引入了 Kazhdan滤过，也引入了它们对应的分次代数。分别用 gr($\mathcal{Z}$) 和 gr($Z(\mathcal{W})$)
˜ ˜表示 $\mathcal{Z}$ 和 $Z(\mathcal{W})$ 的分次代数。注意到 $\mathcal{Z} \subseteq Z$ ($\mathcal{W}$) 且 k 被˜包含在 $\mathcal{Z}$ 中，通过对次数作归纳论证，我们最终可以推出该结论

$$\tilde{\mathcal{Z}} = Z(\mathcal{W})$$

这等价于以下结论:

$$\mathrm{gr}(\tilde{\mathcal{Z}}) = \mathrm{gr}(Z(\mathcal{W})). \tag{3.5}$$

˜由引理 3.5 可轻易推出，它们的分次代数 gr($Z(\mathcal{W})$) 和 gr($\mathcal{Z}$) 也具有相同的分式域。由命题 2.2(3) 可知，gr($Z(\mathcal{W})$)˜在 gr($Z_0(\mathcal{W})$) 上是整的，因此，更确切地说, gr($Z(\mathcal{W})$) 在 gr($\mathcal{Z}$) 上是整的。因此，˜要证明 (3.5)，只需证明 gr($\mathcal{Z}$) 是整闭的。

由命题 3.2，按照 [20, §5.2]˜ 中（步骤 3）的相同论证，我们可以证明 Specm(gr($\mathcal{Z}$)) 在一个余维为 2 的子簇之外是光滑的。另一方面，由引理 3.3, 按照 [20, 引理 5.1] 中的相同论证，我们可以证明以下结果。

˜**引理 3.6**。 在假设 *(H1)-(H3)* 下，*Specm*(*gr*($\mathcal{Z}$))是一个（严格）完全交。

根据塞尔定理 [23, 章 4], ，如果一个完全交簇在一个余维为 2 的子簇之外光滑，那么它就是正规的。因此，由上述˜ ˜分析可知, Specm(gr($\mathcal{Z}$)) 是正规的，即 gr($\mathcal{Z}$) 是整闭的。这正是˜证明等式 $\mathcal{Z} = Z(\mathcal{W})$ 所需要的。至于第二个陈述，它可由 [20, 引理 3.6] 中的论证推出，该论证适用于当前情形。（1）的证明至此完成。

3.4.2. （*2*）和（*3*）的证明。 （2）的证明基于 §3.4.1 中的论证，以及经典结果： $Z_1(\mathfrak{g})$ 是 $Z_0(\mathfrak{g})$ 上的完全交 $\cap Z_1(\mathfrak{g})$（例如，参见 [3, 定理 3.5(3)]）。同样地，按照 [20, §5.3], 中的方法，我们可以证明 $Z_1(\mathcal{W})$ 是 $Z_0(\mathcal{W})$ 上的完全交 $\cap Z_1(\mathcal{W})$。此外，乘法映射 μ： $Z_0(\mathcal{W}) \otimes_{Z_0(\mathcal{W}) \cap Z_1(\mathcal{W})} Z_1(\mathcal{W}) \to Z(\mathcal{W})$ 是一个 k-代数同构。至此，（2）的证明完成。

至于（3），根据命题 3.2，可以按照 [20, §4.8] 中相同的论证来完成证明。

4. Description of the Zassenhaus varieties via good transverse slices

沿用上一节中的假设和记号。特别地，我们假设满足假设 (H1)-(H3)。

4.1. 良好横截切片中的正则半单元。 现在我们继续讨论满足假设 (H1)-(H3) 的良好横截切片。

与 §3.2.1 中的论证类似，我们首先介绍另一个关于正则半单元的精确判据。事实上，$\vartheta \in \mathfrak{g}^*$ 是正则半单的，当且仅当在 G-余伴随作用下，存在一个 $g \in G$，使得 $g.\vartheta \in \kappa(\mathfrak{h})$ 满足：对于所有满足 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ 为 α的余根的 $\alpha \in \Phi^+$，都有 $g.\vartheta(h_\alpha) \neq 0$。根据魏尔群 W的定义，元素 $H := \prod_{\alpha\in\Phi}(h_\alpha^p - h_\alpha) \in S(\mathfrak{h})$ 是 W-不变的，其中 $h_{-\alpha} = -h_\alpha$ 对 $\alpha \in \Phi^+$成立。我们在$\mathfrak{g}^*$上引入如下判别多项式：

$$\mathfrak{H} := \mathsf{Res}^{-1}(H) = \mathsf{Res}^{-1}(\prod_{\alpha\in\Phi}(h_\alpha^p - h_\alpha)) \in \Bbbk[\mathfrak{g}]^G, \tag{4.1}$$

其中 Res 的含义与 §3.2.2 中相同。

回顾一下，$\mathfrak{g}_{\mathrm{rss}}$ 表示 $\mathfrak{g}$的正则半单元集合。它是 $\mathfrak{g}$ 的一个开稠密子集（见 [4] 或 [9]）。令 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ 表示$\mathfrak{g}$的半单元集合。设 $\mathcal{S}_{\mathrm{rss}} := \mathcal{S} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{rss}}$ 且 $\mathcal{S}_{\mathrm{ss}} := \mathcal{S} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$。

命题 4.1. *$\mathcal{S}_{rss}$ 是 $\mathcal{S}$的一个非空开稠密子集。*

证明. 考虑如下簇态射的交换图

$$\begin{array}{ccccc} G\times\mathcal{S} & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\zeta} & \mathfrak{h}/W \\ & \searrow^{p_2} & & \nearrow_{\varpi_{\mathcal{S}}} & \\ & & \mathcal{S} & & \end{array} \tag{4.2}$$

其中 γ 通过对 $g \in G$ 与 $s \in \mathcal{S}$ 将(g, s)映到$\mathrm{Ad}(g)s$ 来定义，这仅部分解释了 $\mathcal{S}$作为幂零轨道$\mathrm{Ad}(G)e$的良好横截切片的含义； p_2 表示到第二分量的投影；该映射

$$\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\!\!/G \xrightarrow{\mathsf{res}} \mathfrak{h}/W$$

is t伴随商映射，如§3.2.2中所定义；以及 $\varpi_{\mathcal{S}}$ 在那里被定义 .

根据与 [21, 引理5.2]及其证明和注记中相同的论证（或参见 [16, 定理5.4]），我们有态射 $\varpi_{\mathcal{S}}$ 是平坦的，其纤维是正规的，并且 $x \in \mathcal{S}$ 是纤维 $\varpi_{\mathcal{S}}^{-1}\zeta(x)$的正则点当且仅当 x是 $\mathfrak{g}$的正则元。如同§3.2.2中的论证， $\varpi_{\mathcal{S}}$ 是满射。因此，根据正则半单元的定义以及切瓦利限制定理中限制映射的定义（见§3.2），对于正则半单元 $x \in \mathfrak{g}$，我们有$\varpi_{\mathcal{S}}^{-1}\zeta(x)$由正则半单元组成。因此 $\mathcal{S}_{\mathrm{rss}}$ 非空。注意正则半单元构成 $\mathfrak{g}$的一个开稠密子集。因此 $\mathcal{S}_{\mathrm{rss}}$自然是不可约簇 $\mathcal{S}$的一个开稠密子集。□

注4.2. 注意 κ 导出一个从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}^*$的 G-等变同构。我们有如下图表作为(4.2)的对应项,

$$\begin{array}{ccccc} G\times\kappa(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\gamma^*} & \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\zeta^*} & \mathfrak{h}^*/W \\ & \searrow^{p_2^*} & & \nearrow_{\varpi_{\mathcal{S}}^*} & \\ & & \kappa(\mathcal{S}) & & \end{array}$$

其中， γ^*， ζ^*， p_2^*， $\varpi_{\mathcal{S}}^*$ 分别是 γ， ζ， p_2， $\varpi_{\mathcal{S}}$的对应项。例如， γ^* 表示将$(g,\ \vartheta)$映射到 $\mathrm{Ad}^*(g)\vartheta$ 的映射，其中 $g\in G$ 且 $\vartheta\in\kappa(\mathcal{S})$， Ad^* 表示 G在 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用。

4.2. **扎森豪斯簇的描述**。定理1.1(2)的精确论证实际上蕴含以下引理。其完整证明可按 [20, §5.3]中的做法给出。

引理4.3。交集 $Z_0(\mathcal{W})\cap Z_1(\mathcal{W})$ 是秩为r的多项式代数，而 $Z_1(\mathcal{W})$ 是一个自由的 $Z_0(\mathcal{W})\cap Z_1(\mathcal{W})$-模，其基为 $\{f_1^{t_1}\cdots f_r^{t_r}\mid 0\leqslant t_i\leqslant p-1, 1\leqslant i\leqslant r\}$。

将由 $Z_0(\mathcal{W})\cap Z_1(\mathcal{W})$ 定义的仿射簇记为 $\mathcal{V}$。根据引理4.3以及 (3.3) 和 (3.4)，我们有以下簇之间的投影态射 π_1 和π_2

$$\begin{array}{ccccc} \kappa(\mathcal{S})^{(1)} & & \mathfrak{g}^*/\!/G & \xrightarrow{\mathrm{res}^*} & \mathfrak{h}^*/W \\ & \searrow^{\pi_1} & & \swarrow_{\pi_2} & \\ & & \mathcal{V} & & \end{array} \tag{4.3}$$

其中，res^* 表示与 (3.2) 中的 res 对应的项。

仍将 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},\ e)$ 的扎森豪斯簇记为 $\mathscr{Z}$。作为定理 1.1 以及上述引理的直接推论，我们有

定理 4.4。存在一个概形的典范同构，由图表给出 *(4.3):*

$$\mathscr{Z}\xrightarrow{\cong}\kappa(\mathcal{S})^{(1)}\times_{\mathcal{V}}\mathfrak{h}^*/W\ \xleftarrow{\cong}\kappa(\mathcal{S})^{(1)}\times_{\mathcal{V}}\mathfrak{g}^*/\!/G. \tag{4.4}$$

这就得到了定理1.2。

注4.5。回忆一下 $\mathfrak{F}:\ \mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^{*(1)}$ 是通过 $\mathfrak{F}(\lambda)(h)=\lambda(h)^p-\lambda(h^{[p]})$ 为$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 和 $h\in\mathfrak{h}$定义的。由定理4.4可知， $\mathscr{Z}$可以识别为仿射空间的一个闭子簇

$$\kappa(\mathcal{S})^{(1)}\times\mathfrak{h}^*/W$$

其元素 $(\vartheta,\ \zeta^*(\lambda))$ 满足约束条件：其中 $\zeta^*:\ \mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^*/W$ 与注4.2中的相同，Jordan-Chevalley分解 $\vartheta=\vartheta_s+\vartheta_n$ 中的半单部分 ϑ_s 与某个元素 $\vartheta_s'\in\mathfrak{h}^*$ 共轭（共轭元属于 G），并且该元素满足

$$\vartheta_s'(h)=\mathfrak{F}(\lambda)(h)=\lambda(h)^p-\lambda(h^{[p]}) \tag{4.5}$$

对于 $h\in\mathfrak{h}$。在此，有必要回顾以下事实。

(1) 若半单部分 ϑ_s 与另一元素 $\vartheta_s'' \in \mathfrak{h}^*$共轭，即存在 $g', g'' \in G$ 使得 $\vartheta_s' = \mathrm{Ad}^*(g')\vartheta_s$ 且 $\vartheta_s'' = \mathrm{Ad}^*(g'')\vartheta_s$，则我们断言对某个 $w \in W$有 $\vartheta_s'' = w(\vartheta_s')$。为此，我们只需证明

$$\mathrm{Ad}^*(G)(\vartheta_s') \cap \mathfrak{h}^* = \{w(\vartheta_s') \mid w \in W\}, \tag{4.6}$$

其中，$\mathrm{Ad}^*(G)$表示 G 在 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用。这可用与 [9, §7.12]中相同的思路证明。为方便读者，我们给出详细论证。回忆一下，记号 G_λ 表示 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 在 G中的稳定子。这意味着 $G_\lambda = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}^*(g)\lambda = \lambda\}$。式 (4.6) 中的包含关系“$\supset$”显然成立。为证明反向包含关系，任取一个给定的 $g^{-1} \in G$ ，使得 $\mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\vartheta_s') \in \mathfrak{h}^*$。注意到 T 包含于 $G_{\vartheta_s'}$ ，且$G_{\mathrm{Ad}^*(g)(\vartheta_s')} = g^{-1}(G_{\vartheta_s'})g$，因此它是这两个群中的极大环面。所以 T 和 gTg^{-1} 是 $G_{\vartheta_s'}$ 中的极大环面，且存在$g_1 \in G_{\vartheta_s'}$使得 $g_1 T g_1^{-1} = gTg^{-1}$；由此可知 $g^{-1}g_1$正规化 T。注意，满足 $w \in W$ 的$w(\vartheta_s')$恰好就是 $\mathrm{Ad}^*(n)(\vartheta_s')$，其中 n 属于 T 的正规化子。因此，$\mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\vartheta_s') = \mathrm{Ad}^*(g^{-1}g_1)(\vartheta_s')$等于某个满足 $w \in W$的 $w(\vartheta_s')$。这便得到式 (4.6)。因此，对于 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)} \times \mathfrak{h}^*/W$，约束条件 (4.5) 是定义良好的。

(2) 回想一下，存在一个多项式 $f(x) \in \mathbf{k}[x]$ ，使得 $\vartheta_s = f(\vartheta)$（例如参见 [5, §1.6.3]）。因此， $\vartheta_s' = \mathrm{Ad}^*(g')\vartheta_s$ （其中 $g' \in G$ ）是 ϑ 上的正则函数（例如参见 [5, §1.4.2]）。

4.3. 我们将介绍一个关于 $\kappa(\mathcal{S})$ 的半单元的关键引理，它将在 §5 中使用。固定 $\mathfrak{g}$ 中的一个谢瓦莱基 $\mathbf{B}$，它由根向量 X_α（其中 α 取遍 Φ）以及环面基 h_i（其 $i = 1, \ldots, r$ 属于 $\mathfrak{h}$）组成，并满足：对于 Φ^+ 的单根系 $\Delta = \{\alpha_j \mid j = 1, \ldots,$，有 $h_j = h_{\alpha_j}$，且 $\mathrm{rank}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])\}$。那么，$\mathbf{B}$张成 $\mathbb{F}_p$ 上的一个受限李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}_p}$，而 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}_p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-形式。

引理 *4.6.* 沿用上述记号。设 $\vartheta \in \kappa(\mathcal{S})$是一个半单元，它在 $\mathrm{Ad}^*(g^{-1})$ 对 $g \in G$ 的作用下与 $\vartheta' \in \mathfrak{h}^*$ 共轭。则 $\mathrm{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\vartheta')) \in \kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{ss}$。反之，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ，若 $\mathrm{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\lambda)) \in \kappa(\mathcal{S})^{(1)}$，则 $\mathrm{Ad}^*(g)\lambda \in \kappa(\mathcal{S})_{ss}$。上述结论在正则半单情形下也都成立。

证明。 从图表上看，我们将证明下图是交换图（**diag**）：

$$\begin{array}{ccc} \vartheta \in \kappa(\mathcal{S})_{ss} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*(g^{-1})} & \vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^* \\ {\scriptstyle \mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}} \\ \mathrm{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\vartheta')) \in \kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{ss} & \xleftarrow[\mathrm{Ad}^*(g)]{} & \mathfrak{F}(\vartheta') \in \mathfrak{h}^{*(1)} \end{array},$$

其中，左侧竖直箭头上的 $\mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})}$ 表示 AS 在 $\kappa(\mathcal{S})$上的限制，后者表示一个从 $\mathfrak{g}^*$ 到 $\mathfrak{g}^{*(1)}$ 的映射，使得对于任意 $\vartheta \in \mathfrak{g}^*$，$\mathsf{AS}(\vartheta)(x) = \vartheta(x)^p - \vartheta(x^{[p]})$ 对所有 $x \in \mathfrak{g}$ 均成立。

首先注意，由定义， $\vartheta \in \kappa(\mathcal{S})_{ss}$ 等价于说对$e + v \in \mathcal{S}_{ss}$有 $\vartheta = (e + v, \cdot)$。此外， $\vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\vartheta) \in \mathfrak{h}^*$ 蕴含 $\vartheta' = (\mathrm{Ad}(g^{-1})(e + v) \cdot) \in \mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{g}^*$。等价地，$\mathrm{Ad}(g^{-1})(e + v) \in \mathfrak{h}$。由定义， $\mathfrak{F}(\vartheta')$经由 $\mathfrak{F}(\vartheta')(x) = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\vartheta)(x)^p - \mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\vartheta)(x^{[p]})$对任意 $x \in \mathfrak{g}$定义。这意味着 $\mathfrak{F}(\vartheta')(x) = (\mathrm{Ad}(g^{-1})(e + v)\ x)^p - (\mathrm{Ad}(g^{-1})(e + v)\ x^{[p]})$。注意 $g \in G$ 是

与 p-映射 $[p]$交换，并保持形式$(\cdot,\cdot)$不变，这也给出 $U(\mathfrak{g})$的一个自同构。我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})}(\vartheta)(x) &= (e+v,x)^p-(e+v,x^{[p]})\\ &= (\mathrm{Ad}(g^{-1})(e+v),\mathrm{Ad}(g^{-1})(x))^p-(\mathrm{Ad}(g^{-1})(e+v),(\mathrm{Ad}(g^{-1})(x))^{[p]})\\ &= \mathrm{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\vartheta'))(x).\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})}(\vartheta)=\mathsf{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\vartheta'))$. 这证明图表（**图表**）是可交换的，并且 $\mathsf{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\vartheta'))=\mathfrak{F}(\vartheta')\circ\mathsf{Ad}(g^{-1})$ 属于 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$。

反过来，假设 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 满足 $\theta:=\mathsf{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\lambda))\in\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$ 且$g\in G$。设 $\vartheta:=\mathsf{Ad}^*(g)(\lambda)$。我们将证明 $\vartheta\in\kappa(\mathcal{S})$。由于 $(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上非退化，我们可以写成 $\vartheta=(w,\cdot)$。我们要证明 $w\in\mathcal{S}$。

回想一下，$\kappa(\mathcal{S})=\{(e+v,\cdot):\mathfrak{g}\to\mathbf{k}\ x\mapsto(e+v,x)\ \ \forall x\in\mathfrak{g}\mid v\in\mathfrak{v}\}$。可以通过带有 Frobenius扭曲的 $\kappa(\mathcal{S})$ 来描述 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$，如下所示。根据 Frobenius扭曲的定义（例如参见 [7, §I.9.1]），在上述设置中，$\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$ 由所有函数 $((e+v,\cdot)):\mathfrak{g}\to\mathbf{k}\ x\mapsto((e+v,x))$ 构成，其中 $v\in\mathfrak{v}$ 满足：对于 B，$((e+v,x_0))=(e+v,x_0)$；且对于任意 $a,b\in\mathbf{k}$ 和 $x_0,x_0'\in\mathrm{B}$，$((e+v,ax_0+bx_0'))=a^{p^{-1}}(e+v,x_0)+b^{p^{-1}}(e+v,x_0')$。因此，对于 $\theta\in\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$，我们有 $e+v\in\mathcal{S}$，其中 $v\in\mathfrak{v}$ 满足 $\theta=((e+v,\cdot))$。于是

$$\theta(x)=((e+v,x))\text{ for }x\in\mathfrak{g}.\tag{4.7}$$

另一方面，类似于（**图表**）中的论证，我们可以得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ad}^*(g)(\lambda)=\vartheta\in\mathfrak{g}_{ss}^* & \xleftarrow{\mathrm{Ad}^*(g)} & \lambda\in\mathfrak{h}^*\\ \mathsf{AS}\downarrow & & \mathfrak{F}\downarrow\\ \mathrm{Ad}^*(g)(\mathfrak{F}(\lambda))\in\mathfrak{g}_{ss}^{*(1)} & \xleftarrow[\mathrm{Ad}^*(g)]{} & \mathfrak{F}(\lambda)\in\mathfrak{h}^{*(1)}\end{array}.$$

因此，我们有 $\mathsf{AS}(\vartheta)=\theta$。

请记住 $\theta\in\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$，并注意到 $\mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})}:\kappa(\mathcal{S})\to\kappa(\mathcal{S})^{(1)}$ 和 $\mathsf{AS}|_{\kappa(\mathcal{S})_{ss}}:\kappa(\mathcal{S})_{ss}\to\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{ss}$ 都是满射。与（4.7）比较，并再次利用 $(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的非退化性，我们得到 $w\in\mathcal{S}$。因此，ϑ 属于 $\kappa(\mathcal{S})$，这正是所需的结论。

至于最后一个断言，它可由类似的论证得出。 □

5. Rationality of the Zassenhaus varieties

回想一下，若仿射簇/概形 X 的分式域 $\mathbf{k}[X]$ 是纯超越的，则称其为有理的。引理 4.6 使我们能够沿用 Tange 在 [26] 中采用的思路继续论证。前几节中的所有假设和记号均保持不变。

5.1. 簇 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$。 令

$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}}:=\{\vartheta=\vartheta_s\in\kappa(\mathcal{S})\mid\mathfrak{H}(\vartheta_s')\neq0\},$$

其中 $\mathfrak{H}$ 在 (4.1) 中定义， ϑ_s 和 ϑ'_s 的含义与注4.5中的相同。以下性质是由正则半单元的定义以及命题 4.1 的对应项得出的。

引理5.1。 以下结论成立：

(1) $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ 与 $\kappa(\mathcal{S})_{rss}$一致。*(2)* 簇 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ 是 $\kappa(\mathcal{S})$中的非空开稠密子集。

在下文中，我们令

$$\mathsf{N} = \mathrm{Nor}_G(T),$$

T 在 G中的正规化子。考虑

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} := \{(\chi, g) \in \kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{rss}} \times G \mid \mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\chi) \in \mathfrak{h}^*\}.$$

N 对 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ 有一个作用，定义为：对于（χ, g） $\in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ 以及 $n \in \mathsf{N}$,

$$n \star (\chi, g) = (\chi, gn^{-1}) \text{ for } n \in \mathsf{N}. \tag{5.1}$$

此作用是良定义的。事实上，由于 $n \in$N 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用相当于某个 $w \in W$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用，因此我们有

$$\mathrm{Ad}^*(gn^{-1})^{-1}(\chi) = \mathrm{Ad}^*(ng^{-1})(\chi) = \mathrm{Ad}^*(n)(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})\chi) \in \mathfrak{h}^*. \tag{5.2}$$

集合 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ 实际上是 $\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{rss}} \times G$ 的一个闭子集。根据 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ 的构造，下面的引理显然成立。

引理5.2. $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ 与 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$/N 之间存在一个同构。

证明。 该引理由注4.5(1)得出。 □

5.2. </style} $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 和 $\mathscr{Z}^\flat$ 簇。

5.2.1. 注意， $\mathfrak{h}$ 是一个环面子代数。存在一个由环面元素组成的基，即这些元素都满足 $h^{[p]} = h$（例如参见 [25, 第 2] 章定理3.6）。因此，我们可以在 $\mathfrak{h}$ 中选取一个环面 k-基 $\{h_1, \ldots, h_r\}$，其 $\mathbb{F}_p$-线性张成空间记为 $\mathfrak{h}_{\mathbb{F}_p}$（我们可以像 §4.3 中那样令它们相同）。那么 $\mathfrak{h}_{\mathbb{F}_p}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-形式。

根据注4.5(1)，我们定义一个簇

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{S}} := \{(\vartheta^p, \lambda, g) \in \kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}} \times \mathfrak{h}^* \times G \\ \mid (\vartheta')^p(h) = \lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]}) \text{ for all } h \in \mathfrak{h} \\ \text{with } \vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^*\}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

那么， $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 是 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}} \times \mathfrak{h}^* \times G$的一个闭子簇，下面将对此作更详细的描述。态射 $\mathfrak{F}$ 从 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}^{(1)*}$ ，将 λ 映到 $\mathfrak{F}(\lambda)$，其在 $h \in \mathfrak{h}$处的取值为$\lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]})$。那么，对所有 $\lambda \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{F}_p})^*$，都有 $\mathfrak{F}(\lambda) = 0$。因此， $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 正是簇 $\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{rss}} \times \mathfrak{h}^* \times G$中方程$(\vartheta')^p = \mathfrak{F}(\lambda)$的解空间。更确切地说，记泛函 $h_i \mapsto \vartheta'(h_i)$为 ϑ_i ，泛函 $h_i \mapsto \lambda(h_i)$为 λ_i 。于是，$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 可视为 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}} \times \mathfrak{h}^* \times G$ 的一个闭子集，由以下方程定义

$$\begin{aligned}&\vartheta_i^p = \lambda_i^p - \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, r, \\ &\vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^*.\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2.2. 注意， $n \in \mathsf{N}$在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用相当于某个 $w \in W$在 $\mathfrak{h}^*$上的作用。因此，我们可以按照以下引理来定义N在 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 上的作用。

引理 5.3. *N* 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 上有一个作用，其定义为：对于 $(\vartheta^p, \lambda, g) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 和 $n \in \mathsf{N}$，

$$n \maltese (\vartheta^p, \lambda, g) = (\vartheta^p, Ad^*(n)(\lambda), gn^{-1}). \tag{5.5}$$

证明. 只需证明，对于 $(\vartheta^p, \lambda, g) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，有

$$(\vartheta')^p(h) = \lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]}) \text{ for all } h \in \mathfrak{h} \text{ with } \vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^*,$$

then

$$\vartheta'' = \mathrm{Ad}^*((gn^{-1})^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^*, \tag{5.6}$$

此外，对于所有 $h \in \mathfrak{h}$，以下结论成立

$$(\vartheta'')^p(h) = ((\mathrm{Ad}^*(n)(\lambda))h)^p - (\mathrm{Ad}^*(n)\lambda)(h^{[p]}) \text{ for all } h \in \mathfrak{h}. \tag{5.7}$$

(5.6) 的验证与 (5.2) 中的验证相同。特别地， $n \in \mathsf{N}$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用相当于某个 $w \in W$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用。因此我们有

$$\vartheta'' = w(\vartheta') \in \mathfrak{h}^*. \tag{5.8}$$

对于 (5.7)，我们首先注意到，$\mathrm{Ad}^*(n)$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用会诱导出对称代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}^*)$ 的一个自同构，并且该作用保持 p-映射 $[p]$。于是由 (5.8)，可得

$$\begin{aligned}(\vartheta'')^p(h) &= (\mathrm{Ad}^*(n)(\vartheta'))^p(h) \\ &= \vartheta'(\mathrm{Ad}(n^{-1})h)^p \\ &= ((\mathrm{Ad}^*(n)\lambda)h)^p - (\mathrm{Ad}^*(n)\lambda)(h^{[p]})\end{aligned} \tag{5.9}$$

对所有 $h \in \mathfrak{h}$ 均成立。证明至此完成。 □

推论 5.4. 存在一个从 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}/\mathsf{N}$ 到簇$\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{rss} \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{h}/W$的簇同构。

证明。 注意，N 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用相当于魏尔群W 在 $\mathfrak{h}^*$上的作用。反过来，对于任意 $w \in W = \mathsf{N}/T$， w 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用可以提升为 $\dot{w} \in \mathsf{N}$ 的作用（下文为统一上下文中的记号，我们仍将 $\dot{w}$ 记为 n）。

考虑如下簇

$$\begin{aligned}\mathcal{F} :=\{(\vartheta^p, \zeta^*(\lambda)) \in \kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}} \times \mathfrak{h}^*/W \mid (\vartheta')^p(h) = \lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]}) \ \forall h \in \mathfrak{h} \\ \text{with } \vartheta' = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^* \text{ for some } g \in G\},\end{aligned}$$

值得提醒的是，对于任意 $w \in W$ 及其对应的$n \in \mathsf{N}$， $\vartheta'' := \mathrm{Ad}^*((gn^{-1})^{-1})\vartheta = \mathrm{Ad}^*(n)\vartheta' \in \mathfrak{h}^*$，我们有

$$\begin{aligned}\vartheta''^p(h) =& w(\lambda)(h)^p - w(\lambda)(h^{[p]}) \text{ for all } h \in \mathfrak{h}, \\ &\text{with } \vartheta'' = \mathrm{Ad}^*((gn^{-1})^{-1})\vartheta.\end{aligned} \tag{5.10}$$

这表明，对于任意 $w \in W$，方程 (5.10) 都是良定义的，并定义了点 $(\vartheta^p, \zeta^*(w(\lambda)))$（与点 $(\vartheta^p, \zeta^*(\lambda))$ 相同）。此外，(5.10) 中的方程表明， $\mathcal{F}$ 是一个 N-簇，其 N-作用为恒等效应。现在

(5.3) 的定义中出现的方程和 (5.10) 中的方程自然诱导出一个从 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 到 $\mathcal{F}$ 的 N-等变态射，将点 $(\vartheta^p,\ \lambda,\ g) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 映到点 $(\vartheta^p,\ \zeta^*(\lambda)) \in \mathcal{F}$。该态射最终诱导出 N-商态射 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}/\mathsf{N}$ 到 $\mathcal{F}$，这是一个簇同构。

根据定义， $\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}} \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{h}^*/W$ 可以与 $\mathcal{F}$ 同构。因此推论得证。□

5.2.3. 现在我们建立此前介绍的不同簇之间的联系。

P命题 5.5。 存在一个N-等变的N-簇同构 es

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{\mathcal{S}}.$$

证明。 对于（$\vartheta^p,\ \lambda,\ g$） $\in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$，根据定义，我们有 $\vartheta' := \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\vartheta \in \mathfrak{h}^*$ 对于 $g \in G$，并且还

$$(\vartheta')^p(h) = \lambda(h)^p - \lambda(h^{[p]}) \text{ for all } h \in \mathfrak{h}. \tag{5.11}$$

根据引理 4.6，$\mathrm{Ad}^*(g)\lambda \in \kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{rss}}$。定义一个映射 ψ_1 ，从 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 到 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ ，将（$\vartheta^p,\ \lambda,\ g$）映射为（$\mathrm{Ad}^*(g)\lambda,\ g$）。直接检验可知，它是 N-等变的。

对于 ψ_1 的逆，我们定义映射 $\psi_2 : \mathcal{U}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ，将任意元素 $(\chi,\ g) \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$（其中 $\lambda := \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\chi \in \mathfrak{h}^*$）映射为 $(\mathrm{Ad}^*(g)\mathfrak{F}(\lambda)\ \lambda,\ g) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$。同样，我们注意到，对于 $n \in \mathsf{N}$，$\mathrm{Ad}^*(n)$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用给出对称代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}^*)$ 的一个自同构，而且该作用保持 p-映射 $[p]$。我们仍有 ψ_2 是 N-等变的。

ψ_1 和 ψ_2 显然都是簇态射。此外，通过直接计算很容易确认， ψ_1 与 ψ_2 的复合是恒等映射。因此，作为 N- 簇， $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 都是 N- 等变同构的。这就完成了证明。□

5.2.4. 从现在起，我们将 $\mathscr{Z}$ 与 $\kappa(\mathcal{S})^{(1)} \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{h}^*/W$ 等同。考虑 (4.4) 中 $\mathscr{Z}$ 的分解在第一分量上的投影：

$$\mathrm{pr}_1 : \mathscr{Z} \to \kappa(\mathcal{S})^{(1)}.$$

簇的同态 pr_1 具有完全原像

$$\mathscr{Z}^\flat := \mathrm{pr}_1^{-1}(\kappa(\mathcal{S})^{(1)}_{\mathrm{rss}}).$$

那么我们有如下结果。

命题 5.6。 以下结论成立：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}/\mathsf{N} = \mathscr{Z}^\flat.$$

证明。 这是推论 5.4 的直接结果。 □

5.3. **主要结果**。 现在我们可以介绍本节的主要结果。

定理 5.7. 簇 $\mathscr{Z}^\flat$ 与 $\kappa(\mathcal{S})_{rss}$同构。因此， $\mathscr{Z}$ 是有理的。

证明.综合引理 5.1 和 5.2 以及命题 5.5 和 5.6，即得定理的第一部分。至于第二部分，由 $\mathscr{Z}^\flat$ 的定义和命题 4.1 可知， $\mathscr{Z}^\flat$ 是不可约簇 $\mathscr{Z}$的一个非空开稠密子集。因此， $\mathscr{Z}$ 与仿射空间$\kappa(\mathcal{S})$双有理等价。证明完毕。□

由此得到定理 1.3。

致谢。 作者谨向匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢其提出的宝贵意见和建议，使作者得以对稿件早期版本进行修正和完善。

References

[1] T. Arakawa，《W-代数及其表示论导论》，载于《李理论展望》，Springer INdAM 系列，第19卷，2017年，179-250页。[2] K. A. Brown 和 K. R. Goodearl，《Noether PI 霍普夫代数的同调学方面及最大维数不可约模》，《代数杂志》198 (1997)，240-265页。[3] K. A. Brown 和 I. Gordon，《中心的分歧：正特征下的李代数与量子包络代数》，《数学杂志》238 (2001)，733-779页。[4] R. W. Carter，《李型有限群：共轭类与复特征标》，John Wiley & Sons，1985年。[5] R. Goodman 和 N. R. Wallach，《对称性、表示与不变量》，研究生数学丛书255，施普林格出版社，Dordrecht，2009年。[6] S. M. Goodwin 和 L. W. Topley，《模有限 W W-代数》，《国际数学研究通知》18 (2019)，5811-5853页。[7] J. C. Jantzen，《代数群的表示》，第2版，数学调查与专著107，美国数学学会，普罗维登斯，2003年。[8] J. C. Jantzen，《素特征下李代数的表示》，载于《表示理论与代数几何》，蒙特´利尔会议录（北约高级研究所系列 C 524）（1997），185-235页。[9]J. C. Jantzen，《表示论中的幂零轨道》，数学进展，第228卷，Birkh¨auser，2004年。[10] V. Kac 和 B. Weisfeiler，《半单代数群的余伴随作用及特征 p下包络代数的中心》，《荷兰皇家科学院数学学报》38 (1976)，136-151页。[11] B. Kostant，《关于 Whittaker 向量与表示论》，《数学发明》48 (1978)，101-184页。[12] I. Losev，《有限 W-代数》，载于《国际数学家大会论文集》第III卷，印度斯坦图书出版社，新德里，2010年，1281-1307页。[13] T. E. Lynch，《广义 Whittaker 向量与表示论》，博士论文，麻省理工学院，1979年。[14] I. Mirkovi´c 和 D. Rumynin，《约化包络代数的中心》，《数学杂志》231 (1999)，123-132页。.[15] K. Pommerening，《约化群的幺幂类 II》，《代数杂志》65 (1980)，373-398页。[16] A. Premet，《特殊横截切片及其包络代数》，《数学进展》170 (2002)，1-55页。[17] A. Premet，《有限 W W-代数的交换商》，《数学进展》225 (2010)，269-306页。[18] A. Premet，《Slodowy 切片的包络代数与 Goldie 秩》，《变换群》16 (2011)，857-888页。[19] A. Premet，R. Tange，《一般线性李代数的扎森豪斯簇》，《代数杂志》294 (2005)，177-195页。[20] B. Shu 和 Y. Zeng，《正特征下有限 W W-代数的中心与 Azumaya 轨迹》，《剑桥哲学会数学会刊》173 (2022)，35-66页。

[21] P. Slodowy，简单奇点与简单代数群，《数学讲义》815，施普林格出版社，柏林/海德堡/纽约，1980年。[22] N. Spaltenstein，良特征下幂零轨道存在良横截切片，《东京大学理学部》31 (1984)，283-286页。[23] J.-P. Serre，局部代数—重数，《数学讲义》第11卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1975年。[24] D. I. Stewart 和 A. R. Thomas，雅各布森–莫罗佐夫定理与李子代数的完全可约性，《伦敦数学学会会刊》（第3辑）116 (2018)，第1期，68–100页。[25] H. Strade 和 R. Farnsteiner，模李代数及其表示，《纯粹与应用数学专著和教科书》第116卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约、巴塞尔，1988年。[26] R. Tange，正特征下约化李代数的扎森豪斯簇，《数学进展》第224卷（2010），340-354页。[27] F. D. Veldkamp，特征 p下李代数泛包络代数的中心，《高等师范学校科学年刊》第5辑（1972），217-240页。[28] V. S. Varadarajan，李群、李代数及其表示，研究生数学丛书102，施普林格出版社，纽约，1984年。[29] W. Wang，幂零轨道与有限 W-代数，《菲尔兹研究所通讯》59 (2011)，71-105页。

School of Mathematical Sciences, Ministry of Education Key Laboratory of Mathematics and Engineering Applications & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, No. 500 Dongchuan Rd., Shanghai 200241, China电子邮箱地址: bshu@math.ecnu.edu.cn

School of Mathematics, Nanjing Audit University, No. 86 West Yushan Rd., Nanjing, Jiangsu Province 211815, China电子邮箱地址: zengyang@nau.edu.cn